43rd BMO 2026
43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **English**

Tuesday, May 5, 2026

Problem 1. A set S of positive real numbers is called *Aristotelian* if for any $x, y, z \in S$ satisfying $x < y < z$, we have

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Find all integers $n \geq 4$ for which there exists an Aristotelian set with exactly n elements.

Problem 2. Let n be a positive integer. A $2n \times 2n$ board is tiled with 2×1 and 1×2 dominoes. To *pivot* a domino is to select one of its two unit squares and rotate the entire domino by $90°$ clockwise, $90°$ anticlockwise, or $180°$ about the centre of that unit square. Prove that it is always possible to simultaneously pivot every domino such that, after all pivots have been performed, the dominoes still tile the board.

Problem 3. Let $ABCD$ be a parallelogram with $\angle DAB < 90°$ and $AB < AD$. Let H be the orthocentre of $\triangle BCD$ and H' be the reflection of H over line BD. Line AH intersects the lines BD, CD and BC at E, F and G respectively. Prove that the circumcircles of $\triangle HEH'$ and $\triangle CFG$ are tangent.

Problem 4. Let $n \geq 2$ be an integer. Initially, the number 1 is written n times on a blackboard. An operation consists of choosing two numbers a and b currently on the blackboard, not both zero, and replacing them with the numbers

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{and} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Determine all integers n for which it is possible, after a finite number of operations, for the number n to appear on the blackboard.

E Martë, 5 Maj, 2026

Problem 1. Një bashkësi numrash real pozitivë S quhet *Aristoteliane* në qoftë se për çdo $x, y, z \in S$ të tillë që $x < y < z$, plotësohet kushti

$$\frac{z - x}{y} \in S.$$

Gjej të gjithë numrat $n \geq 4$ për te cilët ekziston një bashkësi Aristoteliane me ekzakt n elemente.

Problem 2. Le të jetë n një numër i plotë pozitiv. Një tabelë $2n \times 2n$ mbushet plotësisht dhe pa mbivendosje me domino të përmasave 2×1 dhe 1×2. Të *vërtitësh* një domino domethënë të zgjedhësh një nga dy katrorët njësi të saj, dhe ta rrotullosh dominon ose 90° në drejtimin orar, ose 90° në drejtimin kundërorar, ose 180° rreth qendrës së katrorit njësi tê zgjedhur. Provo që është gjithmonë e mundur të vërtitësh çdo domino njëkohësisht, në mënyrë të tillë që, pasi të vërtiten të gjitha, dominot përsëri mbushin plotësisht dhe pa mbivendosje tabelën.

Problem 3. Le të jetë $ABCD$ një paralelogram me $\angle DAB < 90^\circ$ dhe $AB < AD$. Le të jetë H pikëprerja e lartësive të $\triangle BCD$ dhe pika H' pasqyrimi i H sipas drejtëzës BD. Drejtëza AH pret drejtëzat BD, CD dhe BC në pikat E, F dhe G përkatësisht. Provo që rrathët e jashtëshkruar $\triangle HEH'$ dhe $\triangle CFG$ janë tangent.

Problem 4. Le të jetë $n \geq 2$ një numër i plotë. Fillimisht shkruajmë n herë numrin 1 në dërrasën e zezë. Një veprim përfshin zgjedhjen e dy numrave a dhe b nga dërrasa, jo të dy njëkohësisht zero, dhe t'i zëvendësosh me numrat

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{dhe} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Gjej të gjithë numrat e plotë n për të cilët është e mundur që numri n të shfaqet në dërrasën e zezë pas një numri të fundëm veprimesh.

Koha: 4 orë e 30 minuta
Secila problemë vlen 10 pikë

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Bosnian**

Utorak, 5. maj 2026. god.

Zadatak 1. Skup S pozitivnih realnih brojeva nazivamo *Aristotelovski* ako za sve $x, y, z \in S$, takve da je $x < y < z$, vrijedi da

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 4$ za koje postoji Aristotelovski skup sa tačno n elemenata.

Zadatak 2. Neka je n prirodan broj. Ploča dimenzija $2n \times 2n$ je popločana (bez preklapanja) dominama dimenzija 2×1 i 1×2. *Pivotiranje* domine je odabir jednog od njena dva kvadratića i rotiranje cijele domine za $90°$ u smjeru kazaljke na satu, za $90°$ suprotno od smjera kazaljke na satu, ili za $180°$ oko središta tog kvadrata. Dokazati da je uvijek moguće istovremeno pivotirati svaku dominu tako da, nakon što se sva pivotiranja izvrše, domine i dalje popločavaju ploču.

Zadatak 3. Dat je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle DAB < 90°$ i $AB < AD$. Neka je H ortocentar trougla $\triangle BCD$ i H' tačka simetrična tački H u odnosu na pravu BD. Prava AH siječe prave BD, CD i BC u tačkama E, F i G, redom. Dokazati da se opisane kružnice trouglova $\triangle HEH'$ i $\triangle CFG$ dodiruju.

Zadatak 4. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Na početku je na tabli n puta napisan broj 1. Operacija se sastoji od odabira dva broja a i b koja se trenutno nalaze na tabli, takva da nisu oba jednaka nuli, te zamjene tih brojeva sa

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{i} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je moguće da se broj n pojavi na tabli (nakon konačnog broja operacija).

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Serbian (BiH)**

Utorak, 5. maj 2026. god.

Zadatak 1. Skup S pozitivnih realnih brojeva nazivamo *Aristotelovski* ako za sve $x, y, z \in S$, takve da je $x < y < z$, vrijedi da

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 4$ za koje postoji Aristotelovski skup sa tačno n elemenata.

Zadatak 2. Neka je n prirodan broj. Ploča dimenzija $2n \times 2n$ je popločana (bez preklapanja) dominama dimenzija 2×1 i 1×2. *Pivotiranje* domine je odabir jednog od njena dva kvadratića i rotiranje cijele domine za $90°$ u smjeru kazaljke na satu, za $90°$ suprotno od smjera kazaljke na satu, ili za $180°$ oko središta tog kvadrata. Dokazati da je uvijek moguće istovremeno pivotirati svaku dominu tako da, nakon što se sva pivotiranja izvrše, domine i dalje popločavaju ploču.

Zadatak 3. Dat je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle DAB < 90°$ i $AB < AD$. Neka je H ortocentar trougla $\triangle BCD$ i H' tačka simetrična tački H u odnosu na pravu BD. Prava AH siječe prave BD, CD i BC u tačkama E, F i G, redom. Dokazati da se opisane kružnice trouglova $\triangle HEH'$ i $\triangle CFG$ dodiruju.

Zadatak 4. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Na početku je na tabli n puta napisan broj 1. Operacija se sastoji od odabira dva broja a i b koja se trenutno nalaze na tabli, takva da nisu oba jednaka nuli, te zamjene tih brojeva sa

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{i} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je moguće da se broj n pojavi na tabli (nakon konačnog broja operacija).

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Language: **Bulgarian**

Вторник, 5 май, 2026

Задача 1. Ще казваме, че множество S, съставено от реални положителни числа, е *аристотелово*, ако за всички $x, y, z \in S$, удовлетворяващи $x < y < z$, имаме, че

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Да се намерят всички естествени числа $n \geq 4$, за които съществува аристотелово множество с точно n елемента.

Задача 2. Нека n е естествено число. Дъска $2n \times 2n$ е покрита с 2×1 и 1×2 домина. Ще казваме, че *пивотираме* домино, когато изберем една от клетките му и го завъртим около центъра ѝ или на 90° по часовниковата стрелка, или на 90° обратно на часовниковата стрелка, или на 180°. Да се докаже, че винаги е възможно едновременно да пивотираме всички домина, така че след пивотирането им отново имаме покриване на дъската.

Задача 3. Даден е успоредник $ABCD$, за който $\angle DAB < 90^\circ$ и $AB < AD$. Точка H е ортоцентърът на $\triangle BCD$, а H' е симетричната на H относно правата BD. Правата AH пресича правите BD, CD и BC съответно в точки E, F и G. Да се докаже, че описаните около $\triangle HEH'$ и $\triangle CFG$ окръжности се допират.

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Първоначално на дъската са записани n копия на числото 1. На всяка стъпка избираме две, не едновременно нулеви, числа a и b от дъската и ги заменяме с числата

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{и} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Да се намерят всички естествени n, за които е възможно числото n да се появи на дъската след краен брой стъпки.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява с 10 точки

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Γλώσσα: **Ελληνικά**

Τρίτη, 5 Μαΐου 2026

Πρόβλημα 1. Ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών S ονομάζεται *Αριστοτέλειο* αν για κάθε $x, y, z \in S$, με $x < y < z$, ισχύει ότι

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Να προσδιορίσετε όλους τους ακεραίους $n \geq 4$ για τους οποίους υπάρχει Αριστοτέλειο σύνολο με ακριβώς n στοιχεία.

Πρόβλημα 2. Έστω θετικός ακέραιος n. Ένα $2n \times 2n$ πλέγμα είναι καλυμμένο με 2×1 και 1×2 ντόμινο. Ονομάζουμε *περιστροφή* ενός ντόμινο την επιλογή ενός από τα δύο μοναδιαία τετράγωνα του ντόμινο και την στροφή του ντόμινο γύρω από το κέντρο αυτού του μοναδιαίου τετραγώνου κατά 90° σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή κατά 90° αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού ή κατά 180°. Να αποδείξετε ότι είναι πάντοτε δυνατό να γίνει από μία περιστροφή σε κάθε ντόμινο, ώστε τα ντόμινο να εξακολουθούν να καλύπτουν το πλέγμα. Σε κάθε κάλυψη τα ντόμινο πρέπει να καλύπτουν όλα τα κελιά του πλέγματος, χωρίς να αλληλοεπικαλύπτονται και χωρίς να εξέχουν από τα όρια του πλέγματος.

Πρόβλημα 3. Έστω παραλληλόγραμμο $ABCD$ με $\angle DAB < 90^\circ$ και $AB < AD$. Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου BCD και H' το συμμετρικό του H ως προς την ευθεία BD. Η ευθεία AH τέμνει τις ευθείες BD, CD και BC στα E, F και G αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων HEH' και CFG εφάπτονται.

Πρόβλημα 4. Έστω ακέραιος $n \geq 2$. Αρχικά, ο αριθμός 1 είναι γραμμένος n φορές σε έναν πίνακα. Ένα βήμα αποτελείται από την επιλογή δύο αριθμών a και b γραμμένων στον πίνακα, που δεν είναι ταυτόχρονα ίσοι με 0, και την αντικατάστασή τους από τους αριθμούς

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{και} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Να προσδιορίσετε όλους τους ακεραίους n, για τους οποίους ο αριθμός n μπορεί να εμφανιστεί στον πίνακα μετά από μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων.

Language: **Montenegrin**

Utorak, 5. maj 2026. god.

Zadatak 1. Skup S pozitivnih realnih brojeva nazivamo *aristotelovski* ako za sve $x, y, z \in S$, za koje važi $x < y < z$, važi i

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 4$ za koje postoji aristotelovski skup od n elemenata.

Zadatak 2. Neka je n prirodan broj. Tabla dimenzija $2n \times 2n$ je popločana dominama dimenzija 2×1 i 1×2. *Pivotiranje* domine je izbor jednog od njena dva kvadrata i rotiranje cijele domine za 90° u smjeru kazaljke na satu, za 90° suprotno od smjera kazaljke na satu, ili za 180° oko središta tog kvadrata. Dokazati da je uvijek moguće istovremeno pivotirati svaku dominu tako da, nakon što se sva pivotiranja izvrše, domine i dalje popločavaju tablu.

Zadatak 3. Dat je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle DAB < 90^\circ$ i $AB < AD$. Neka je H ortocentar trougla $\triangle BCD$ i H' tačka simetrična sa H u odnosu na pravu BD. Prava AH siječe prave BD, CD i BC u E, F i G, redom. Dokazati da se opisane kružnice trouglova $\triangle HEH'$ i $\triangle CFG$ dodiruju.

Zadatak 4. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Na početku je na tabli n puta napisan broj 1. Operacija se sastoji od izbora dva broja a i b koja se trenutno nalaze na tabli, a koja nijesu istovremeno jednaka nuli, i zamjene tih brojeva sa

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{i} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je moguće da se, nakon konačnog broja operacija, broj n pojavi na tabli.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 poena.

Language: **Macedonian**

Вторник, 5. мај 2026

Задача 1. За множество S од позитивни реални броеви велиме дека е *Аристотеловско* ако за секои $x, y, z \in S$, такви што $x < y < z$, важи

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Најдете ги сите природни броеви $n \geq 4$ за кои постои Аристотеловско множество со точно n елементи.

Задача 2. Нека n е позитивен цел број. Табла со димензии $2n \times 2n$ е паркетирана со домина 2×1 и 1×2. *Пивотирање* на домино се состои од избирање на едно негово единечно квадратче и ротирање на доминото за 90° во насока на движењето на стрелките на часовник, или за 90° во насока спротивна на движењето на стрелките на часовник, или за 180° во однос на центарот на избраното единечно квадратче. Докажете дека постои едновремено пивотирање на сите домина такво што, после изведувањето на сите пивотирања, се добива ново паркетирање на таблата.

Задача 3. Даден е паралелограм $ABCD$ со $\angle DAB < 90^\circ$ и $AB < AD$. Нека H е ортоцентар на $\triangle BCD$ и H' е точката симетрична на H во однос на правата BD. Правата AH ги сече правите BD, CD и BC во E, F и G, соодветно. Докажете дека опишаните кружници на $\triangle HEH'$ и $\triangle CFG$ се допираат.

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е природен број. На почетокот, на табла е запишан бројот 1 точно n пати. Операција се состои од избирање на два (незадолжително различни) броја a и b што во моментот се на таблата и не се обата еднакви на нула, и нивно заменување со броевите

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{и} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Најдете ги сите n за кои е можно, после конечен број операции, бројот n да се појави на таблата.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Romanian**

marţi, 5 mai 2026

Problema 1. O mulţime S de numere reale strict pozitive se numeşte *Aristoteliană* dacă, pentru orice $x, y, z \in S$ care satisfac $x < y < z$, avem

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Găsiţi toate numerele naturale $n \geq 4$ pentru care există o mulţime Aristoteliană cu exact n elemente.

Problema 2. Fie n un număr natural strict pozitiv. O tablă de tipul $2n \times 2n$ este pavată cu dominouri de tipul 2×1 şi 1×2. *Pivotarea* unui dominou constă în alegerea unuia dintre cele două pătrate unitate ale sale şi rotirea întregului dominou în jurul centrului acestui pătrat cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic, sau cu $90°$ în sens invers acelor de ceasornic, sau cu $180°$. Demonstraţi că întotdeauna este posibil să pivotăm simultan toate dominourile astfel încât, după ce toate dominourile au fost pivotate, dominourile pavează şi acum tabla.

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $\angle DAB < 90°$ şi $AB < AD$. Fie H ortocentrul triunghiului BCD şi fie H' simetricul punctului H faţă de dreapta BD. Dreapta AH intersectează dreptele BD, CD şi BC în punctele E, F şi respectiv G. Demonstraţi că cercurile circumscrise triunghiurilor HEH' şi CFG sunt tangente.

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. La început, este scris pe o tablă numărul 1 de n ori. O operaţie constă în alegerea a două numere, nu ambele nule, a şi b ce se află în acel moment pe tablă, şi înlocuirea lor cu numerele

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{şi} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Determinaţi toate numerele naturale n pentru care, după un număr finit de operaţii, este posibil ca numărul n să apară pe tablă.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este punctată cu maxim 10 puncte

43rd BMO 2026

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: *Serbian*

Солун - Грчка / Уторак, 5. мај 2026.

Задатак 1. Скуп S позитивних реалних бројева назива се *аристотеловски* ако за свака три елемента $x, y, z \in S$, за која важи $x < y < z$, важи и

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Одредити све природне бројеве $n \geq 4$ за које постоји аристотеловски скуп са тачно n елемената.

Задатак 2. Дат је природан број n. Табла димензија $2n \times 2n$ поплочана је доминама димензија 2×1 и 1×2. Под *пивотирањем* домине подразумевамо да се изабере једно од њена два јединична поља и да се цела домина ротира за 90° у смеру казаљке на сату, за 90° супротно од смера казаљке на сату или за 180° око средишта тог јединичног поља. Доказати да је увек могуће истовремено пивотирати сваку домину тако да, након што се сва пивотирања изврше, домине и даље поплочавају таблу.

Задатак 3. Нека је $ABCD$ паралелограм такав да је $\angle DAB < 90^\circ$ и $AB < AD$. Нека је H ортоцентар троугла BCD, а H' слика тачке H при осној симетрији у односу на праву BD. Права AH сече праве BD, CD и BC у тачкама E, F и G, редом. Доказати да се кружнице описане око троуглова HEH' и CFG додирују.

Задатак 4. Нека је $n \geq 2$ природан број. На почетку је на табли n пута написан број 1. Један потез састоји се у томе да се изаберу два броја a и b која се тренутно налазе на табли, при чему нису оба једнака нули, те да се замене бројевима

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{и} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Одредити све природне бројеве n за које је могуће да се, после коначно много потеза, број n појави на табли.

Време за израду задатака: 4 сата и 30 минута.

Сваки задатак вреди 10 поена.

43rd BMO 2026
43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Turkish**

Salı, 5 Mayıs 2026

Soru 1. Pozitif gerçel sayılardan oluşan bir S kümesinde $x < y < z$ koşulunu sağlayan her $x, y, z \in S$ için

$$\frac{z-x}{y} \in S$$

koşulu da sağlanıyorsa, S kümesine *Aristotelian* diyelim. $n \geq 4$ tam sayısının hangi değerleri için tam olarak n elemandan oluşan bir Aristotelian küme bulunur?

Soru 2. n verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. $2n \times 2n$ bir satranç tahtası 2×1 ve 1×2 dominolarla kaplanmıştır (Tahtanın kaplanması, her dominonun satranç tahtasının tam olarak iki birim karesini kaplaması ve tahtanın her birim karesinin tam olarak bir domino tarafından kaplanması olarak tanımlanıyor). Bir dominonun *döndürülmesi* şu şekilde tanımlanıyor: Dominonun iki birim karesinden biri seçiliyor ve seçilen birim karenin merkezine göre dominonun tamamı ya saat yönünde $90°$, ya saatin ters yönünde $90°$, ya da $180°$ döndürülüyor. Başlangıçta verilen kaplama nasıl olursa olsun, dominoların her biri aynı anda döndürülerek tahtanın yeniden kaplanabileceğini kanıtlayınız.

Soru 3. Bir $ABCD$ paralelkenarında $\angle DAB < 90°$ ve $|AB| < |AD|$ koşulları sağlanıyor. $\triangle BCD$ üçgeninin diklik merkezi H olmak üzere, H noktasının BD doğrusuna göre yansıması H' noktası olsun. AH doğrusunun BD, CD, BC doğruları ile kesişimleri sırasıyla E, F, G noktaları olsun. $\triangle HEH'$ ve $\triangle CFG$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin birbirine teğet olduğunu kanıtlayınız.

Soru 4. $n \geq 2$ verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. Başlangıçta tahtada n tane 1 sayısı yazılmıştır. Her işlemde tahtada yazılı olup en az biri sıfırdan farklı olan a ve b sayıları seçiliyor, seçilen sayılar siliniyor ve silinen iki sayının yerine tahtaya

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{ve} \quad \frac{4ab}{a+b}$$

sayıları yazılıyor. n tam sayısının hangi değerleri için sonlu sayıda işlem sonucunda tahtaya n sayısı yazılabilir?

Süre 4 saat 30 dakikadır
Her soru 10 puan değerindedir

اللغة: العربية(*Algeria*)

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

الثلاثاء 5 مايو 2026

مسألة 1.

لتكن S مجموعة من الأعداد الحقيقية الموجبة تماما. نقول إن S مجموعة **أرسطية** إذا كان لكل $x, y, z \in S$ بحيث $x < y < z$ لدينا:

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

أوجد جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 4$ التي من أجلها توجد مجموعة أرسطية تحتوي بالضبط على n عنصرًا.

مسألة 2.

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. لوحة $2n \times 2n$ مبلطة كاملة بقطع دومينو 1×2 أو 2×1. نسمي "حركة تدويرية" لدومينو معين عملية اختيار أحد مربعي قطعة الدومينو و تدوير الدومينو كاملا حول مركز هذا المربع بزاوية 90 درجة في اتجاه عقارب الساعة، أو بزاوية 90 درجة عكس اتجاه عقارب الساعة، أو بزاوية 180 درجة.

أثبت أنه يمكن دائما القيام ب"حركة تدويرية" لكل قطعة من قطع الدومينو في ان واحد و تبقى اللوحة مبلطة بقطع الدومينو.

مسألة 3.

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع بحيث $\angle DAB < 90^\circ$ و $AB < AD$. لتكن H نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث BCD، ولتكن H' نظيرة H بالنسبة الى المستقيم BD. يقطع المستقيم AH المستقيمات BD و CD و BC في النقاط E و F و G على الترتيب.

أثبت أن الدائرتين المحيطتين بالمثلثين HEH' و CFG متماستان.

مسألة 4.

ليكن $n \geq 2$ عددًا طبيعيا. في البداية، العدد 1 كُتب n مرة على السبورة. تتكون عملية من اختيار عددين a و b مكتوبين حاليًا على السبورة غير معدومين معا ، ثم استبدالهما بالعددين:

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{و} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

جد جميع الأعداد الطبيعية n التي يمكن، بعد عدد منتهٍ من العمليات، أن يظهر العدد n على السبورة.

43rd BMO 2026
43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Azerbaijani**

Çərşənbə Axşamı, May 5, 2026

Məsələ 1. Müsbət həqiqi ədədlərdən ibarət S çoxluğu o zaman *Aristotelləşmiş* adlanır ki, $x < y < z$ şərtini ödəyən istənilən $x, y, z \in S$ ədədləri üçün

$$\frac{z-x}{y} \in S$$

ödənir. Bütün $n \geq 4$ tam ədədlərini tapın ki, tam olaraq n dənə elementi olan Aristotelləşmiş çoxluq var olsun.

Məsələ 2. n müsbət tam ədəd olsun. $2n \times 2n$ ölçülü lövhənin bütün vahid xanaları 2×1 və 1×2 ölçülü dominolarla tam örtülüb. Dominonu *pivotlamaq* dedikdə onun 2 dənə vahid xanasından hər hansı birinin mərkəzi ətrafında dominonu bütöv formada 90° saat əqrəbi istiqamətində, 90° saat əqrəbinin əksi istiqamətində, və ya 180° fırlatmaq nəzərdə tutulur. Başlanğıcda dominolar necə düzülürsə düzülsün, bütün dominoları eyni zamanda pivotlayaraq yenidən lövhəni tamamilə örtməyin mümkün olduğunu isbat edin.

Məsələ 3. $ABCD$ paraleloqramında $\angle DAB < 90^\circ$ və $AB < AD$ ödənir. $\triangle BCD$ üçbucağının hündürlüklərinin kəsişmə nöqtəsi H olsun. H nötəsinin BD xəttinə nəzərən refleksiyası H' nöqtəsi olsun. AH xətti BD, CD və BC xətləri ilə uyğun olaraq E, F və G -də kəsişsin İsbat edin ki, $\triangle HEH'$ üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrə $\triangle CFG$ üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəyə toxunur.

Məsələ 4. $n \geq 2$ tam ədəd olsun. Başlanğıcda lövhədə n dənə 1 ədədi yazılıb. Bir gediş zamanı lövhədə yazılı olan hər hansı iki a və b (hər ikisi eyni anda 0 olmamaq şərtilə) ədədləri silinir və onların əvəzinə

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{və} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

ədədləri yazılır. n tam ədədinin hansı qiymətləri üçün sonlu sayda gedişdən sonra lövhədə n ədədi yazıla bilər?

Dil: Azərbaycanca

İmtahan müddəti: 4 saat 30 dəqiqə
Hər məsələ 10 bal dəyərindədir.

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **French**

mardi 5 mai 2026

Problème 1. Un ensemble S de réels strictement positifs est dit *Aristotélicien* si pour tous $x, y, z \in S$ tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Trouver tous les entiers $n \geq 4$ pour lesquels il existe un ensemble Aristotélicien contenant exactement n éléments.

Problème 2. Soit n un entier strictement positif. Une grille de taille $2n \times 2n$ est pavée par des dominos 2×1 et des dominos 1×2. On dit qu'on *pivote* un domino si on sélectionne l'un de ses deux carrés unité et qu'on tourne le domino entier par rapport au centre de ce carré, ou alors de $90°$ dans le sens trigonométrique, ou alors de $90°$ dans le sens anti-trigonométrique ou alors de $180°$. Prouver qu'il est toujours possible de pivoter tous les dominos simultanément, de sorte qu'une fois que tous les pivots sont effectués, tous les dominos pavent encore la grille.

Problème 3. Soit $ABCD$ un parallélogramme avec $\widehat{DAB} < 90°$ et $AB < AD$. Soit H l'orthocentre du triangle BCD, et soit H' le symétrique de H par rapport à la droite (BD). La droite (AH) intersecte les droites (BD), (CD) et (BC) aux points E, F et G respectivement. Montrer que les cercles circonscrits des triangles HEH' et CFG sont tangents.

Problème 4. Soit $n \geq 2$ un entier. Au début il y a le nombre 1 écrit n fois au tableau. Une *opération* consiste à prendre deux nombres a et b sur le tableau qui ne sont pas tous deux nuls, et à les remplacer par

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Trouver tous les entiers n pour lesquels on peut écrire l'entier n au tableau après un nombre fini d'opérations.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 10 points

43rd BMO 2026
43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language:Georgian

ამოცანა 1. დადებით ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე S-ს ეწოდება *არისტოტელეური* თუ ნებისმიერი $x, y, z \in S$ რიცხვებისთვის რომელიც აკმაყოფილებს $x < y < z$ პირობას, გვაქვს

$$\frac{z-x}{y} \in S$$

იპოვეთ ყველა მთელი რიცხვი $n \geq 4$ რომლისთვისაც არსებობს არისტოტელეური სიმრავლე ზუსტად n ცალი ელემენტით.

ამოცანა 2. მოცემული გვაქვს ნატურალური რიცხვი n. $2n \times 2n$ დაფა მთლიანად შევსებულია 2×1 და 1×2 დომინოებით. დომინოს *მობრუნება* ნიშნავს ამ დომინოს 2 ერთეულოვანი კვადრატიდან ერთერთის არჩევას და ამ ერთეულოვანი კვადრატის ცენტრის მიმართ მთლიანი დომინოს მობრუნებას - ან $90°$-ით საათის ისრის მიმართულებით ან $90°$-ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ან $180°$-ით. აჩვენეთ რომ ყოველთვის შეგვიძლია ყველა დომინო ერთად მოვაბრუნოთ ისე რომ ამ მობრუნებების შემდეგ დომინოები კვლავ მთლიანად ფარავდნენ დაფას.

ამოცანა 3. $ABCD$ არის პარალელოგრამი, $\angle DAB < 90°$ და $AB < AD$. H არის $\triangle BCD$ სამკუთხედის ორთოცენტრი და H' არის H-ის ანარეკლი BD-ზე. წრფე AH კვეთს BD-ს, CD-ს, BC-ს შესაბამისად E, F, G წერტილებში. დაამტკიცეთ რომ $\triangle HEH'$ და $\triangle CFG$ სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები ერთმანეთს ეხებიან.

ამოცანა 4. $n \geq 2$ არის მთელი რიცხვი. თავდაპირველად, რიცხვი 1 დაფაზე წერია n-ჯერ. ოპერაცია ნიშნავს ორი დაფაზე დაწერილი, a და b რიცხვის არჩევას, ორივე ნული არ არის, და მათ ჩანაცვლებას ორი ახალი რიცხვით $\frac{(a-b)^2}{a+b}$ და $\frac{4ab}{a+b}$. იპოვეთ ყველა მთელი რიცხვი n რომლისთვისაც შესაძლებელია, სასრული ოპერაციების შემდეგ, რიცხვი n დაიწეროს დაფაზე.

ენა:ქართული

თითოეული ამოცანა ფასდება 10 ქულით
დრო:4სთ 30 წთ

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Italian**

Martedì, 5 maggio 2026

Problema 1. Un insieme S di numeri reali positivi si dice *aristotelico* se per ogni $x, y, z \in S$ tali che $x < y < z$, si ha che

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Determinare tutti gli interi $n \geq 4$ per i quali esiste un insieme aristotelico contenente esattamente n elementi.

Problema 2. Sia n un intero positivo. Una griglia $2n \times 2n$ è tassellata con tessere del domino 2×1 e 1×2. Un *pivot* di una tessera consiste nello scegliere uno dei suoi due quadratini unitari e nel ruotare l'intera tessera di 90° in senso orario, di 90° in senso antiorario o di 180°, attorno al centro di quel quadratino. Dimostrare che è sempre possibile effettuare simultaneamente un pivot di ogni tessera in modo tale che, dopo che tutte le rotazioni sono state eseguite, le tessere del domino tassellino ancora la griglia.

Problema 3. Sia $ABCD$ un parallelogramma con $\angle DAB < 90^\circ$ e $AB < AD$. Sia H l'ortocentro del triangolo BCD e H' il simmetrico di H rispetto alla retta BD. La retta AH interseca le rette BD, CD e BC rispettivamente nei punti E, F e G. Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli HEH' e CFG sono tangenti.

Problema 4. Sia $n \geq 2$ un intero. Inizialmente, il numero 1 è scritto n volte su una lavagna. Una mossa consiste nello scegliere due numeri a e b attualmente sulla lavagna, non entrambi nulli, e sostituirli con i numeri

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{e} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Determinare tutti gli interi n per i quali è possibile far comparire il numero n sulla lavagna con un numero finito di mosse.

Durata: 4 ore e 30 minuti.
Ogni problema vale 10 punti.

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Russian**

Вторник, 5 мая 2026 г.

Задача 1. Множество S, состоящее из действительных положительных чисел, называется *аристотелевским*, если для любых $x, y, z \in S$, удовлетворяющих условию $x < y < z$, выполняется условие

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

Найдите все целые числа $n \geq 4$, для которых существует *аристотелевское* множество, содержащее ровно n элементов.

Задача 2. Пусть n — положительное целое число. Доска размером $2n \times 2n$ покрыта доминошками размером 2×1 и 1×2. *Повернуть* доминошку означает выбрать один из двух её единичных квадратов и повернуть всю доминошку либо на 90° по часовой стрелке, либо на 90° против часовой стрелки, либо на 180° вокруг центра выбранного квадрата. Докажите, что всегда можно одновременно *повернуть* каждую доминошку так, чтобы после выполнения всех *поворотов* доминошки по-прежнему образовывали покрытие доски.

Задача 3. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, в котором $\angle DAB < 90^\circ$ и $AB < AD$. Пусть H — ортоцентр треугольника BCD, а H' — точка, симметричная H относительно прямой BD. Прямая AH пересекает прямые BD, CD и BC в точках E, F и G соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников HEH' и CFG касаются друг друга.

Задача 4. Пусть $n \geq 2$ — целое число. Изначально на доске n раз написано число 1. Операцией назовем выбор двух чисел a и b, находящихся на доске (не оба равные нулю), и замену их числами

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{и} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

Определите все целые числа n, для которых после конечного числа операций на доске может появиться число n.

43rd BMO 2026
43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Lithuanian**

Antradienis, gegužės 5, 2026

Uždavinys 1. Teigiamų realiųjų skaičių aibę S vadinsime *Aristoteliška*, jei visiems $x, y, z \in S$ tenkinantiems $x < y < z$ galioja
$$\frac{z-x}{y} \in S.$$
Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius $n \geq 4$ kuriems egzistuoja Aristoteliška aibė turinti lygiai n elementų.

Uždavinys 2. Duotas natūralusis skaičius n. Kvadratinė $2n \times 2n$ lentelė yra padengta 2×1 ir 1×2 domino kauliukais taip, jog kiekvienas lentelės langelis yra uždengtas ir jokie du kauliukai nepersidengia. Domino kauliuko *pivotavimu* vadiname tokį veiksmą, kai pasirenkamas vienas iš jo dviejų vienetinių langelių ir kauliukas pasukamas $90°$ pagal laikrodžio rodyklę, arba $90°$ prieš laikrodžio rodyklę, arba $180°$, apie pasirinkto vienetinio langelio centrą. Įrodykite, kad įmanoma pivotuoti visus kauliukus taip, jog, atlikus pivotavimą kiekvienam kauliukui, kiekvienas lentelės langelis vėl būtų uždengtas ir jokie du kauliukai nepersidengtų.

Uždavinys 3. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės tenkina $AB < AD$ bei $\angle DAB < 90°$. Trikampio BCD aukštinių susikirtimo taškas H, o taškas H' yra taško H simetriškas atvaizdas tiesės BD atžvilgiu. Tiesė AH kerta tieses BD, CD ir BC taškuose E, F ir G, atitinkamai. Įrodykite, kad apie trikampius HEH' ir CFG apibrėžti apskritimai liečiasi.

Uždavinys 4. Duotas natūralusis skaičius $n \geq 2$. Pradžioje ant lentos užrašyta n vienetų. Vieno veiksmo metu pasirenkami du ant lentos parašyti skaičiai a ir b (bent vienas jų nenulinis) ir yra pakeičiami skaičiais
$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{ir} \quad \frac{4ab}{a+b}.$$
Nustatykite visus tokius natūraliuosius skaičius n, su kuriais būtų įmanoma atlikti baigtinį skaičių veiksmų taip, kad ant lentos vienas iš parašytų skaičių būtų n.

43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Arabic**

Tuesday, May 5, 2026

المسألة 1. يقال أن المجموعة S من الأعداد الحقيقية الموجبة **أرسطوطالية** إذا كان لكل $x, y, z \in S$ بحيث $x < y < z$، لدينا:

$$\frac{z-x}{y} \in S.$$

أوجد جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 4$ بحيث توجد مجموعة أرسطوطالية تحتوي على n عنصر بالضبط.

المسألة 2. ليكن n عددا صحيحا موجبا. تم تبليط لوحة $2n \times 2n$ بقطع دومينو 1×2 و 2×1. نعرف عملية "تدوير" قطعة دومينو، على أنه اختيار أحد مربعي القطعة، ثم ندور قطعة الدومينو بزاوية 90° مع عقارب الساعة، أو 90° عكس عقارب الساعة، أو 180° حول مركز المربع المختار. أثبت أنه من الممكن دائمًا أن نقوم بعملية التدوير لجميع قطع الدومينو في آن واحد، بحيث بعد أن نقوم بجميع عمليات التدوير، فإن قطع الدومينو الجديدة تبلّط كامل اللوحة.

المسألة 3. ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $\angle DAB < 90^\circ$، و $AB < AD$. لتكن H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث BCD، و H' هي انعكاس H حول المستقيم BD. المستقيم AH يقطع المستقيمات BD, CD, BC في E, F, G تواليًا. أثبت أن الدائرة المحيطة بالمثلث HEH' تمس الدائرة المحيطة بالمثلث CFG.

المسألة 4. ليكن $n \geq 2$ عددًا صحيحًا. في البداية، كُتب العدد 1 على السبورة n من المرات. يمكننا القيام بالعملية التالية، نختار عددين a, b موجودين على السبورة، ليس كلاهما صفر، ونستبدلهم بالعددين

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad , \quad \frac{4ab}{a+b}.$$

أوجد جميع الأعداد الصحيحة n بحيث بعد عدد نهائي من العمليات، يمكننا كتابة العدد n على السبورة.

Language: Arabic

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 10 points

43rd BMO 2026
43rd Balkan Mathematical Olympiad
May 3–8, 2026 Thessaloniki – Hellas

Language: **Uzbek**

Seshanba, 5-May, 2026-yil

1-masala. Musbat haqiqiy sonlardan tashkil topgan S to'plamini *Aristotelcha* deymiz, agarda $x < y < z$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x, y, z \in S$ sonlari uchun

$$\frac{z-x}{y} \in S$$

bo'lsa. Barcha $n \geq 4$ butun sonlarni toping, bunda aynan n ta elementdan tashkil topgan Aristotelcha to'plam mavjud bo'lsin.

2-masala. n musbat butun soni berilgan. $2n \times 2n$ o'lchamli doska 2×1 va 1×2 dominolar bilan qoplangan. Dominoni *aylantirish* deganda, uning ikkita birlik kvadratidan birini tanlab, dominoni shu kvadratning markazi atrofida 90° soat strelkasi bo'yicha yoki 90° soat strelkasiga qarshi yoki 180° ga burish tushuniladi. Isbotlang, har doim barcha dominolarni bir vaqtning o'zida shunday aylantirish mumkinki, barcha aylantirishlar bajarilgandan so'ng ham dominolar doskani to'liq qoplab turadi.

3-masala. $ABCD$ parallelogrammda $\angle DAB < 90^\circ$ va $AB < AD$. H nuqta $\triangle BCD$ ning balandliklar kesishish nuqtasi va H' nuqta esa H nuqtaning BD to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqtasi. AH to'g'ri chiziq BD, CD va BC to'g'ri chiziqlar bilan mos ravishda E, F va G nuqtalarda kesishadi. $\triangle HEH'$ va $\triangle CFG$ larning tashqi aylanalari o'zaro urinishini isbotlang.

4-masala. $n \geq 2$ butun son berilgan. Dastlab doskaga 1 soni n marta yozilgan. Har qadamda doskadagi a va b sonlari tanlanib (ikkalasi bir vaqtda nol emas), ular

$$\frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{va} \quad \frac{4ab}{a+b}$$

sonlari bilan almashtiriladi. Barcha n butun sonlarni topingki, bunda doskada n soni hosil bo'ladigan qilib chekli qadamlar qilish mumkin bo'lsin.

Ajratilgan vaqt: 4 soat va 30 daqiqa
Har bir masala 10 ball bilan baholanadi