Οι Αριθμοί Catalan στην Άλγεβρα, τη Γεωμετρία και τη Συνδυαστική

Χρήστος Αθανασιάδης

Πανεπιστήμιο Αθηνών

3 Νοεμβρίου, 2017

Σχέδιο

1. Οι αριθμοί Catalan και το πρόβλημα του Euler

2. Οι αριθμοί Catalan στη συνδυαστική

3. Οι αριθμοί Catalan στην άλγεβρα και τη γεωμετρία

Οι αριθμοί Catalan

Ο n-οστός αριθμός Catalan ορίζεται ως

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},$$

όπου

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

και $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ για $n \in \mathbb{N}$, με $0! = 1$.

Έτσι, έχουμε την ακολουθία $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$, κ.ο.κ.

Στην ιστορία των αριθμών Catalan παίζουν ρόλο οι

- Sharabiin Myangat (1730)
- Leonhard Euler (1751)
- Eugène Charles Catalan (1838)
- John Riordan (1948)
- Martin Gardner (1976)

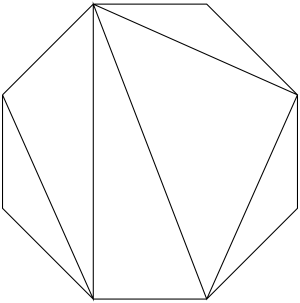
Λεπτομέρειες βρίσκονται στο βιβλίο του Richard P. Stanley

- Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015.

Το πρόβλημα του Euler

Τριγωνισμός ενός κυρτού n-γώνου λέγεται μια υποδιαίρεσή του με $n - 3$ διαγωνίους, οι οποίες ανά δύο δε διασταυρώνονται.

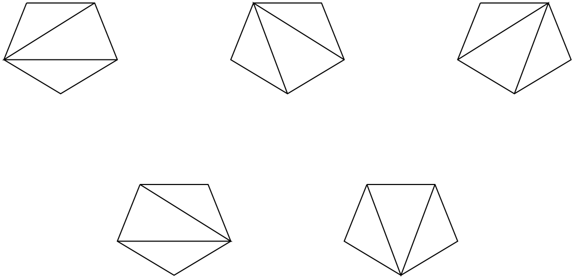
Παράδειγμα.



Σχήμα: Ένας τριγωνισμός του οκταγώνου

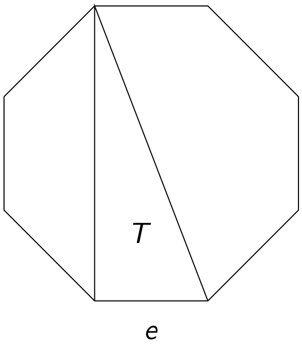
Ερώτημα (Euler, 1751): Πόσους τριγωνισμούς έχει ένα κυρτό n-γωνο;

Θεώρημα (Lamé, 1838): Το πλήθος των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ κορυφές είναι ίσο με τον αριθμό C_n.



Σχήμα: Οι πέντε τριγωνισμοί του πενταγώνου

Απόδειξη: Έστω κυρτό πολύγωνο Π με $n + 2$ κορυφές και έστω a_n το πλήθος των τριγωνισμών του Π. Έστω ακμή e του Π. Θεωρώντας το μοναδικό τρίγωνο T ενός τριγωνισμού του Π με ακμή e, όπως στο σχήμα, προκύπτει ο αναγωγικός τύπος:



Ο αναγωγικός τύπος

$$a_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}, \qquad\qquad n \geq 1,$$

όπου $a_0 := 1$.

Η μέθοδος των γεννητριών συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε το a_n, θεωρούμε την τυπική δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αναγωγικό τύπο με x^{n-1} και αθροίζοντας για $n \geq 0$ παίρνουμε

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i} \right) x^{n-1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = x \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} \right) x^n.$$

Όμως,

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n \;=\; F(x) - 1$$

και

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}\right) x^n \;=\; \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \;=\; (F(x))^2,$$

αφού γενικότερα

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + \cdots)\\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.\end{aligned}$$

Καταλήξαμε στην ισότητα $F(x) - 1 = x(F(x))^2$, δηλαδή

$$x(F(x))^2 - F(x) + 1 \; = \; 0.$$

Η μοναδική λύση είναι η

$$F(x) \; = \; \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Ερώτημα: Γιατι όχι

$$F(x) \; = \; \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \; ;$$

Απάντηση: Ο τύπος του Taylor

$$(1+y)^{\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} y^n = \sum_{n\geq 0} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,\frac{y^n}{n!}.$$

ορίζει την $\sqrt{1-4x}$ ως τυπική δυναμοσειρά. Για $y=-4x$, $\alpha=1/2$, $\sqrt{1-4x} = 1-2x-2x^2+4x^3-\cdots$ και συνεπώς η

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1+x-2x^2+\cdots$$

ορίζεται ως τυπική δυναμοσειρά, ενώ η

$$\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{x}-1-x+2x^2-\cdots$$

δεν ορίζεται.

Συνοψίζοντας:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_n x^n &= \frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right) = \frac{1}{2x}\left(1-\sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right) \\
&= -\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n+1}(-4x)^{n+1} = \cdots \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n
\end{aligned}
$$

και συνεπώς

$$
a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n, \qquad n \geq 0.
$$

Συμπέρασμα

Πόρισμα: Η ακολουθία $(C_n)_{n\geq 0}$ των αριθμών Catalan καθορίζεται πλήρως από

- τον αναγωγικό τύπο

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \qquad n \geq 1,$$

  και τη $C_0 = 1$,
- τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{n\geq 1} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Young ταμπλώ

Πρόβλημα: Τοποθετούμε τους ακεραίους $1, 2, \ldots, 2n$ στα τετράγωνα ενός $n \times 2$ ορθογωνίου (έναν σε κάθε τετράγωνο), έτσι ώστε σε κάθε γραμμή του ορθογωνίου οι ακέραιοι να αυξάνουν προς τα δεξιά. Το πλήθος αυτών των διατάξεων (ταμπλώ) είναι ίσο με

$$\binom{2n}{n}.$$

Παραδείγματα:

1	4	5	6
2	3	7	8

,

1	3	4	7
2	5	6	8

Πόσα τέτοια ταμπλώ έχουν την επιπλέον ιδιότητα ότι οι ακέραιοι αυξάνουν προς τα κάτω σε κάθε στήλη;

Παράδειγμα: Για $n = 2$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

υπάρχουν $C_2 = 2$ τέτοια ταμπλώ και για $n = 3$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

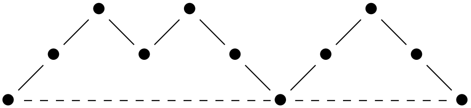
υπάρχουν $C_3 = 5$. Θα δείξουμε ότι η απάντηση είναι C_n για κάθε n.

Μονοπάτια Dyck

Μονοπάτι Dyck μήκους $2n$ λέγεται κάθε μονοπάτι στο $\mathbb{Z}^2$ με τις εξής ιδιότητες:

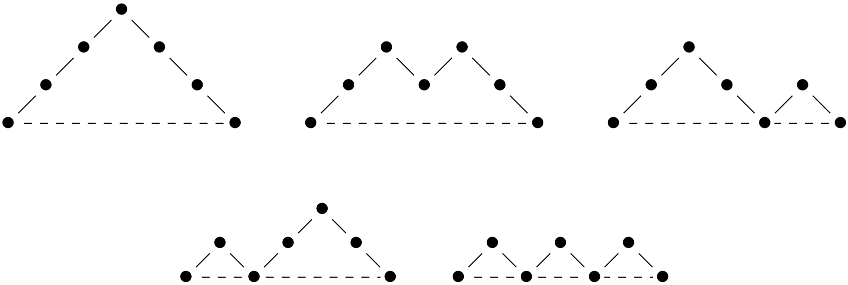
- έχει αρχή το σημείο $(0, 0)$ και πέρας το $(2n, 0)$,
- έχει $2n$ βήματα, το καθένα της μορφής $(1, 1)$ ή $(1, -1)$, και
- βρίσκεται εξολοκλήρου στο ημιεπίπεδο $y \geq 0$ του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα:



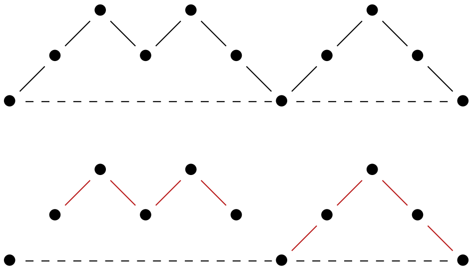
Σχήμα: Ένα μονοπάτι Dyck μήκους 10

Παράδειγμα: Υπάρχουν



$C_3 = 5$ μονοπάτια Dyck μήκους 6.

Παρατηρούμε ότι κάθε μονοπάτι Dyck μήκους $2n$ διασπάται σε δύο μονοπάτια Dyck συνολικού μήκους $2n-2$, όπως στο σχήμα:



Αυτό δείχνει ότι

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}, \qquad n \geq 1,$$

για το πλήθος a_n των μονοπατιών Dyck μήκους $2n$ και συνεπώς $a_n = C_n$ για κάθε n.

Επιστροφή στα ταμπλώ

Ένα ταμπλώ ορθογωνίου σχήματος $n \times 2$ λέγεται Young ταμπλώ αν τα στοιχεία σε κάθε γραμμή του αυξάνουν προς τα δεξιά και τα στοιχεία σε κάθε στήλη αυξάνουν προς τα κάτω.

Υπενθυμίζουμε την εξής βασική αρχή:

Πρόταση: Αν $\varphi : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, τότε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A είναι ίσο με εκείνο του B.

Έστω A_n το σύνολο των Young ταμπλώ ορθογωνίου σχήματος και B_n το σύνολο των μονοπατιών Dyck μήκους $2n$. Ορίζουμε τη

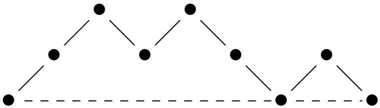
$$\varphi : A_n \to B_n$$

ως εξής:

Για $T \in A_n$ συμβολίζουμε με $\varphi(T)$ το μονοπάτι στο $\mathbb{Z}^2$ μήκους $2n$ με αρχή το σημείο $(0,0)$ και i-οστό βήμα ίσο με $(1,1)$ ή $(1,-1)$, αν το i βρίσκεται στην πρώτη ή τη δεύτερη γραμμή του T, αντίστοιχα.

Παράδειγμα:

$$\varphi\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 8 \\ \hline \end{array}\right) =$$



Πρόταση: Η $\varphi : A_n \to B_n$ είναι καλά ορισμένη, αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Κατά συνέπεια,

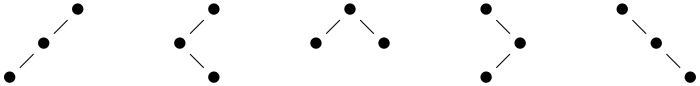
$$\# A_n \;=\; \# B_n \;=\; \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Πόρισμα: Επιλέγοντας τυχαία και ομοιόμορφα ένα ταμπλώ T ορθογωνίου σχήματος $n \times 2$ τα στοιχεία σε κάθε γραμμή του οποίου αυξάνουν προς τα δεξιά, η πιθανότητα να αυξάνουν τα στοιχεία και σε κάθε στήλη του T προς τα κάτω είναι ίση με $1/(n+1)$.

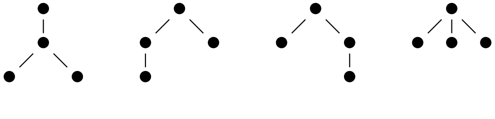
Άλλες συνδυαστικές ερμηνείες

Άλλες οικογένειες συνδυαστικών αντικειμένων που απαριθμούνται από τον n-στό αριθμό Catalan περιλαμβάνουν:

- Τα δυαδικά δένδρα με n κορυφές.



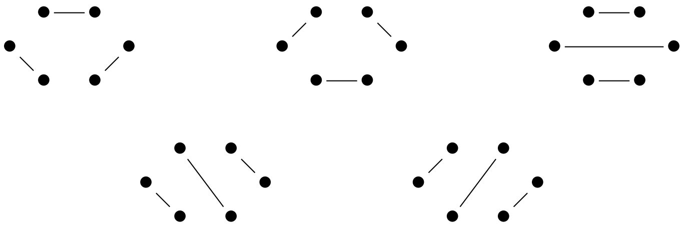
- Τα επίπεδα δένδρα με $n+1$ κορυφές.



- Τις αύξουσες ακολουθίες $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ με $a_i \leq i$ για κάθε i.

$$(1,1,1) \qquad (1,1,2) \qquad (1,1,3) \qquad (1,2,2) \qquad (1,2,3)$$

- Τα μη διασταυρούμενα τέλεια ταιριάσματα του συνόλου των κορυφών ενός $2n$-γώνου.



- Τις μη διασταυρούμενες διαμερίσεις του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$.

• Τις ακολουθίες ακεραίων $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq 2n$ με $a_i \geq 2i$ για κάθε i.

$$(2,4,6) \qquad (2,5,6) \qquad (3,4,6) \qquad (3,5,6) \qquad (4,5,6)$$

• Τις αναδιατάξεις του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ που αποφεύγουν το μοτίβο 123.

$$(1,3,2) \qquad (2,1,3) \qquad (3,1,2) \qquad (2,3,1) \qquad (3,2,1)$$

• Τις αναδιατάξεις του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ που αποφεύγουν το μοτίβο 132.

$$(1,2,3) \qquad (2,1,3) \qquad (3,1,2) \qquad (2,3,1) \qquad (3,2,1)$$

...

Στο βιβλίο του Richard P. Stanley

- Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015

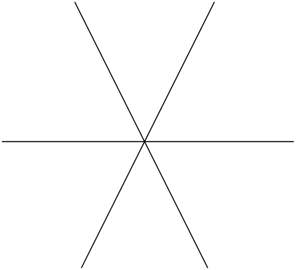
περιγράφονται 214 συνδυαστικές ερμηνείες του αριθμού C_n !

Υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε τα $n(n-1)/2$ υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

- $x_i - x_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$

Παράδειγμα: Για $n = 3$ έχουμε τα υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^3$ με εξισώσεις $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ και $x_2 = x_3$.



Ερώτημα: Σε πόσες περιοχές χωρίζουν τα υπερεπίπεδα αυτά τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$;

Απάντηση: Κάθε τέτοια περιοχή είναι της μορφής

$$R_w \ = \ \{ x \in \mathbb{R}^n : \ x_{w_1} > x_{w_2} > \cdots > x_{w_n} \}$$

για κάποια αναδιάταξη $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$. Οι περιοχές είναι ακριβώς τόσες, όσες και οι αναδιατάξεις, δηλαδή $n!$.

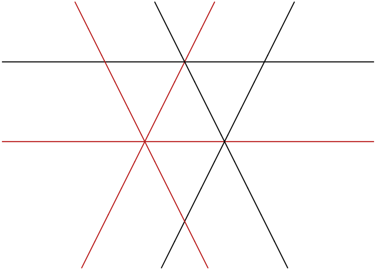
Παράδειγμα: Για $n = 3$ έχουμε τις περιοχές

$$\begin{array}{ccc} x_1 > x_2 > x_3, & x_1 > x_3 > x_2, & x_2 > x_1 > x_3, \\ x_3 > x_1 > x_2, & x_2 > x_3 > x_1, & x_3 > x_2 > x_1. \end{array}$$

Θεωρούμε τώρα τα $n(n-1)$ υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

- $x_i - x_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$
- $x_i - x_j = 1, \quad 1 \leq i < j \leq n.$

Παράδειγμα: Για $n = 3$ έχουμε



Παρατήρηση: Τα έξι υπερεπίπεδα χωρίζουν τον $\mathbb{R}^3$ σε 16 περιοχές και το τμήμα του $x_1 > x_2 > x_3$ σε $C_3 = 5$ περιοχές.

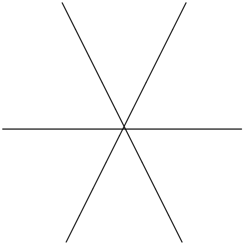
Πρόταση: Για κάθε $n \geq 2$, τα υπερεπίπεδα αυτά χωρίζουν τον $\mathbb{R}^n$ σε $(n+1)^{n-1}$ περιοχές και το τμήμα του

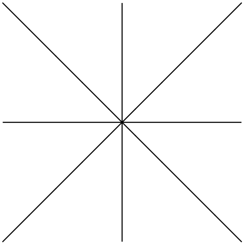
$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$$

σε C_n περιοχές.

Παρατήρηση: Οι ορθογώνιες ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα $x_i - x_j = 0$ του $\mathbb{R}^n$ παράγουν μια ομάδα ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα S_n.

Παράδειγμα: Οι ορθογώνιες ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα (ευθείες)





του $\mathbb{R}^2$ παράγουν μια ομάδα ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα S_3 και τη διεδρική ομάδα τάξης 8, αντίστοιχα.

Ομάδες ανακλάσεων

Μια πεπερασμένη ομάδα που παράγεται από ορθογώνιες ανακλάσεις σε έναν Ευκλείδειο χώρο λέγεται πεπερασμένη (πραγματική) ομάδα ανακλάσεων. Οι ομάδες αυτές υπόκεινται στην ταξινόμηση των Cartan–Killing. Με παρόμοιο τρόπο ταξινομούνται:

- οι πεπερασμένες ομάδες Coxeter,
- τα κανονικά πολύτοπα,
- τα συστήματα ριζών,
- οι ημιαπλές άλγεβρες Lie,
- οι πεπερασμένες υποομάδες της SU_2,
- τα quivers πεπερασμένου τύπου,
- οι άλγεβρες σμηνών πεπερασμένου τύπου,
- ...

Έστω

- W μια ανάγωγη πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων,
- ℓ η τάξη της,
- $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ οι εκθέτες της,
- h ο αριθμός Coxeter,
- m ένας τυχαίος θετικός ακέραιος.

Ο αριθμός

$$C(W,m) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{e_i + mh + 1}{e_i + 1}$$

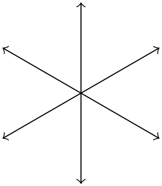
λέγεται m-γενικευμένος αριθμός Catalan για τη W. Ο αριθμός αυτός εξειδικεύεται στον C_n για $W = S_n$ και $m = 1$.

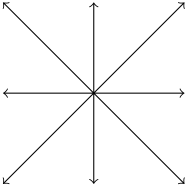
Παράδειγμα: Για τη συμμετρική ομάδα $W = S_n$,

$$C(S_n, m) \;=\; \frac{1}{mn+1}\binom{(m+1)n}{n}.$$

Υποθέτοντας ότι η W είναι κρυσταλλογραφική, έστω

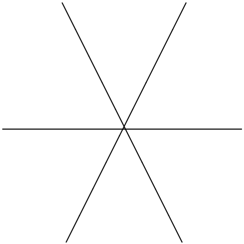
- Φ ένα σύστημα ριζών στον $V = \mathbb{R}^\ell$ για τη W,
- Φ^+ ένα θετικό υποσύστημα.

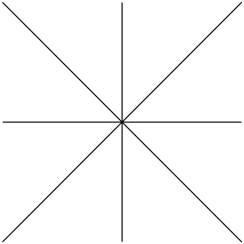




Τα υπερεπίπεδα ανάκλασης της W είναι τα

$$(\alpha, x) \;=\; 0, \qquad\qquad \alpha \in \Phi^+.$$





Έστω

$$R_\Phi \;=\; \{\, x \in V : \; (\alpha, x) > 0 \;\text{ για }\; \alpha \in \Phi^+ \,\}$$

η θεμελιώδης περιοχή της W.

Θεώρημα (A, 2004): Το πλήθος των περιοχών στις οποίες διαχωρίζεται η θεμελιώδης περιοχή R_Φ της W από τα υπερεπίπεδα

$$(\alpha, x) \;=\; 1, 2, \ldots, m, \qquad \alpha \in \Phi^+$$

είναι ίσο με $C(W, m)$.

Άλγεβρα των συναναλλοιώτων

Η ομάδα W δρα φυσιολογικά στο χώρο $(\mathbb{C}^\ell)^*$ των γραμμικών συναρτήσεων πάνω στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^\ell$ και επομένως και στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_\ell]$.

Η άλγεβρα των συναναλλοιώτων ορίζεται ως το πηλίκο

$$R_W = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_\ell]}{I_W},$$

όπου

$$I_W = \{ f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_\ell] : \; w \cdot f = f, \; f(0) = 0 \}$$

είναι το ιδεώδες των W-αναλλοίωτων πολυωνύμων μηδενικού σταθερού όρου, πάνω στο οποίο η W δρα επίσης.

Παράδειγμα: Η δράση της συμμετρικής ομάδας S_n επί του δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ είναι η

$$w \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; f(x_{w(1)}, x_{w(2)}, \ldots, x_{w(n)}), \qquad w \in S_n$$

και

$$I_W \;=\; \langle\, f_1, f_2, \ldots, f_n \,\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ f_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ &\;\;\cdots \\ f_n &= x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

είναι τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα στα $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Θεώρημα (Chevalley, 1955): Ως W-αναπαράσταση, η R_W είναι ισόμορφη με την κανονική αναπαράσταση της W για κάθε πεπερασμένη, πραγματική ομάδα ανακλάσεων W. Ειδικότερα,

$$\dim_{\mathbb{C}}(R_W) = |W|.$$

Παράδειγμα: Για τη συμμετρική ομάδα S_n, η διάσταση της άλγεβρας των συναναλλοιώτων είναι ίση με $n!$.

Διαγώνια δράση

Θεωρούμε τώρα τη διαγώνια δράση

$$w \cdot f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \;=\; f(x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)}, y_{w(1)}, \ldots, y_{w(n)})$$

της S_n επί του δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ και το πηλίκο

$$\mathcal{R}_n \;=\; \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]}{\mathcal{I}_n},$$

όπου $\mathcal{I}_n$ είναι το ιδεώδες των W-αναλλοίωτων πολυωνύμων μηδενικού σταθερού όρου.

Θεώρημα (Haiman, 2001): Για τη διάσταση της $\mathcal{R}_n$ ισχύει

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}_n) = (n+1)^{n-1}.$$

Επιπλέον, η πολλαπλότητα της αναπαράστασης του προσήμου στην S_n-αναπαράσταση $\mathcal{R}_n$ είναι ιση με τον n-οστό αριθμό Catalan C_n.