

Ο ΛΑΒΥΡΙΝΘΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ, Η ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ¹

Η τάση υιοθέτησης εμπειριοκρατικών και ιστορικοκοινωνικών μοντέλων εξήγησης της εμφάνισης των μαθηματικών είναι ευρέως διαδεδομένη. Η ιστορική αφήγηση, που εκάστοτε υιοθετείται, δεν στερείται λογικοφάνειας και η, πλειστάκις, επιμελής υιοθεσία, επεξεργασία και περιγραφή ενός ιστορικά εκδιπλούμενου και αιτιακά συγκροτούμενου αντιστοιχίου αφηγήματος διαθέτει εχέγγυα αυστηρότητας και πειθούς. Παρά ταύτα, έχει σημασία το γεγονός ότι κάθε αφήγημα, ως ανθρώπινο δημιούργημα, έχει πεπερασμένο χαρακτήρα, ενώ συγχρόνως το συγκεκριμένο αφήγημα συνοδεύεται από τον ισχυρισμό ότι απεικονίζει ένα πολυπαραγοντικό (με πιθανά στοιχεία απειρίας ή και πολυπλοκότητας πέραν των γνωστικών ορίων απεικόνισής των, από το έλλογο ον) ιστορικό φαινόμενο, με επάρκεια και σχετική ακρίβεια. Τα ιστορικά συμβάντα, όμως, φεύγουν και χάνονται, διολισθαίνουν εν χρόνω, και από την ίδια τους την φύση είναι ανεπανάληπτα. Έτσι, ο ιστορικός, χωρίς την δυνατότητα χρήσης ή, καλύτερα, χωρίς την δυνατότητα διαπίστωσης της ύπαρξης, ενός ιστορικού εργαστηρίου, που θα εξασφάλιζε την επαναληψιμότητα και την, ίσως, δι' αυτής ανακάλυψη ιστορικών καθολικοτήτων, είναι υποχρεωμένος να αφηγείται και να ερμηνεύει χρησιμοποιώντας τεκμήρια, που, παρ' ότι σχετίζονται με την ιστορική πραγματικότητα, έχουν περατοκρατικό και ολιγοπαραγοντικό χαρακτήρα.

Από την άλλη μεριά, παρά τις όποιες γνωσιολογικές αδυναμίες, που εμφανίζει η υιοθέτηση εμπειριοκρατικών και ιστορικοκοινωνικών μοντέλων εξήγησης της εμφάνισης των μαθηματικών (οι οποίες είναι αδυναμίες εν μέρει σχετιζόμενες με την ίδια την φύση του ιστορικού αφηγήματος) αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι η φιλοσοφική άποψη, που υιοθετείται και που χαρακτηρίζεται από την αποδοχή της ιστορικής σχετικοποίησης της εμφάνισης των μαθηματικών και της, σχεδόν, ταύτισης του μαθηματικού συμβάντος με το μαθηματικό γεγονός.

Το μαθηματικό συμβάν έχει επικουρικό και περιστασιακό χαρακτήρα και είναι γέννημα της ιστορικότητας. Έχει νόημα να μελετηθεί και, ίσως, να ανιχνευθεί η, πιθανώς, αιτιακή αλυσίδα πρότερων ιστορικών συμβάντων, που οδήγησαν σε αυτό. Κάτι τέτοιο αποτελεί καθήκον του ιστορικού των μαθηματικών, υπό την έννοια ότι με την ανάδειξη της ιστορικής αλυσίδας, που οδήγησε στο συγκεκριμένο μαθηματικό συμβάν, είναι πιθανή η αποκάλυψη της λογικής της ανακάλυψης του μαθηματικού γεγονότος, που, δια του συγκεκριμένου μαθηματικού συμβάντος, έρχεται στο φως. Το μαθηματικό γεγονός αποτελεί ανιστορικό κόμβο στο πλέγμα του μαθηματικού σύμπαντος, που αποκαλύπτεται εν χρόνω και χώρω μέσω ιστορικά προσδιορισμένων μαθηματικών συμβάντων.

Ο ισχυρισμός που υποκρύπτεται σ' αυτήν την περιληπτική περιγραφή της σχέσης μαθηματικού συμβάντος και μαθηματικού γεγονότος, είναι ότι το μαθηματικό γεγονός δεν αποτελεί προϊόν ιστορικής συγκυρίας ενώ το μαθηματικό συμβάν που, πιθανώς, το αποκαλύπτει είναι κατ' εξοχήν ιστορικό προϊόν. Ο ισχυρισμός αυτός στηρίζεται σε μία προκειμένη παραδοχή ότι, δηλαδή, πέραν του ενός, διαφορετικά, ιστορικά συμβάντα θα μπορούσαν να είναι αποκαλυπτικά του ιδίου μαθηματικού γεγονότος και, επομένως, περισσότερες της μίας ιστορικές αιτιακές αλυσίδες θα

¹ Το παρόν κείμενο περιέχεται στον τόμο Δ. Α. Αναπολιτάνος, *Λαβύρινθοι, γνωσιολογικά ρήγματα, φιλοσοφικά σπαράγματα και παραμυθίες*. 29 κείμενα φιλοσοφίας, Εκδοτική Αθηνών, 2016.

μπορούσαν να οδηγούν στην διαπίστωση και ανακάλυψη του ίδιου μαθηματικού γεγονότος.

Τα μαθηματικά γεγονότα αποκαλύπτονται δια των ιστορικών μαθηματικών συμβάντων και όλα μαζί, είτε γνωστά είτε αθέατα, συγκροτούν το ανιστορικό σώμα της μαθηματικής πραγματικότητας. Η μαθηματική αυτή πραγματικότητα, όπως ήδη ελέχθη, καθίσταται προσβάσιμη από το έλλογο *ον εν χρόνω και χώρω*. Ο ισχυρισμός μας είναι ότι αυτή η προσβασιμότητα ερμηνεύεται, πλειστάκις, ως δημιουργία και όχι, όπως θα έπρεπε, ως ανακάλυψη ήδη προϋπαρχουσών αληθειακών μαθηματικών συγκροτήσεων. Αυτές οι συγκροτήσεις διαθέτουν ένα χαρακτηριστικό ασυμμετρίας προς ό,τι θεωρεί το έλλογο *ον*, ως αντίστοιχη εμπειρική πραγματικότητα. Εμφανίζονται γρίφοι, που σχετίζονται, πρωτίστως, με την σύνθεση οντοτήτων από άλλες οντότητες αμέσως μικρότερης διάστασης και η μάχη για μη κοινωνικοιστορικά άλλα γνωσιολογικά προσδιορίσιμη κατανόηση αρχίζει.

Ο, κατά τον Λάϊμπνιτς (Leibniz), λαβύρινθος του συνεχούς (*labyrinthus continui*) αποτελεί τον κορυφαίο γρίφο της μαθηματικής οντολογίας καθώς αυτή συγκρούεται με την κατανόηση και περιγραφή της εμπειρικής πραγματικότητας, που μας περιβάλλει, είτε ως εξωγενές είτε ως ενδογενές πλαίσιο των εμπειρικών μας δεδομένων. Τα χρησιμοποιούμενα μαθηματικά της πραγματικής ευθείας για την κατανόηση της εμπειρικής αυτής πραγματικότητας, απαιτούν την συγκρότηση διαστατών αντικειμένων από αδιάστατες οντότητες. Πιο συγκεκριμένα, απαιτούν την συγκρότηση ευθύγραμμων τμημάτων από αδιάστατα σημεία. Κάτι τέτοιο δεν αποτελεί πρόβλημα για τον χώρο των μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία διαβιούν σε ένα σύμπαν ανεξάρτητο από την εμπειρική πραγματικότητα. Στον χώρο αυτό η πραγματική ευθεία είναι ένα σύνολο αντικειμένων εφοδιασμένων με συγκεκριμένες ιδιότητες και σχέσεις. Το πρόβλημα ανακύπτει όταν επιχειρείται η εξεικόνισή της και, ακόμη χειρότερα, όταν αυτή μεταφέρεται στον χώρο του εμπειρικά προσδιορισμένου. Τι είδους οντότητα είναι τότε το εμπειρικό σημείο, όταν θα πρέπει να διατηρήσει τον αδιάστατο χαρακτήρα του σε ένα εμπειρικό πλαίσιο, που από την ίδια του την φύση επιτρέπει την ύπαρξη αποκλειστικώς και μόνον διαστατών αντικειμένων;

Το πρόβλημα είναι, βεβαίως, γενικότερο. Επεκτείνεται προς την κατεύθυνση της συγκρότησης εμπειρικών αντικειμένων από οντότητες μικρότερης διάστασης. Πώς συγκροτείται μία επίπεδη εμπειρική επιφάνεια ή μία, εν γένει, επιφάνεια, ως δισδιάστατο αντικείμενο, από εμπειρικές ευθείες γραμμές ή από εν γένει γραμμές, οι οποίες συμβαίνει να είναι μονοδιάστατα αντικείμενα; Πώς συγκροτείται ένα τρισδιάστατο εμπειρικό αντικείμενο από δισδιάστατα εμπειρικά αντικείμενα, από δισδιάστατες, δηλαδή, εμπειρικές επιφάνειες; Και ακόμη χειρότερα. Τι σημαίνουν στο πλαίσιο της εμπειρικής πραγματικότητας και όχι στο πλαίσιο της συνεχιστικής μαθηματικής εξεικόνισής της, τα σημεία, οι ευθείες, οι γραμμές και τα τμήματά τους, οι επιφάνειες και τα τμήματά τους, όταν ένα εμπειρικό πλαίσιο, από την ίδια του την φύση και στην χωρική του εκδοχή, επιτρέπει την ύπαρξη αποκλειστικώς και μόνον τρισδιάστατων αντικειμένων; Και κάτι ακόμη. Πώς οριοθετείται ένα εμπειρικό τρισδιάστατο αντικείμενο, όταν η μαθηματική εξεικόνισή του απαιτεί την ύπαρξη επιφανειών οι οποίες έχουν προβληματικό εμπειρικό status; Τι νόημα έχουν οι διενεργούμενες σε εμπειρικό επίπεδο επαφές εμπειρικών αντικειμένων, όταν οι επαφές αυτές αποτελούν ή διενεργούνται μέσω δισδιάστατων αντικειμένων δηλαδή «εμπειρικών» επιφανειών; Τι ακριβώς σημαίνει σε επίπεδο εμπειρικής πραγματικότητας η φράση «αγγίζω με τα δάκτυλά μου τον απέναντι τοίχο του

δωματίου μου»; Η εμπειρικός «ανύπαρκτη» επιφάνεια των δακτύλων μου ταυτίζεται με την επίσης εμπειρικός «ανύπαρκτη» επιφάνεια του τοίχου;

Η αδυναμία κατανόησης του απλού αυτού συμβάντος, που ανήκει στην γενική κατηγορία των επαφών εμπειρικών αντικειμένων, οφείλεται στο γεγονός ότι η μόνη πιθανή οδός κατανόησης προέρχεται από τον χώρο της μαθηματικής και, μάλιστα, συνεχιστικής εξεικόνισης αυτής της πραγματικότητας, που, κακώς, θεωρούμε ότι ανήκει στον χώρο του εμπειρικά προσδιορίσιμου. Στην μαθηματική μας εξεικόνιση δεν υπάρχει πρόβλημα προσδιορισμού των επαφών των μαθηματικών εξεικονίσεων εμπειρικών αντικειμένων μέσω της ταύτισης των αντίστοιχων επιφανειών, που έρχονται σε επαφή. Εκεί που υπάρχει το πρόβλημα είναι όταν προσπαθούμε να κατανοήσουμε την επαφή, μεταφέροντάς την, σε επίπεδο εμπειρικού συμβάντος, σ' αυτό που νομίζουμε ή θεωρούμε ότι είναι η εμπειρική πραγματικότητα, από την οποία έχουμε εξοβελίσει οντότητες μονοδιάστατες, όπως τα «εμπειρικά» σημεία η δισδιάστατες όπως οι «εμπειρικές» επιφάνειες.

Απολύτως αντίστοιχο πρόβλημα με αυτό των χωρικών επαφών είναι το πρόβλημα των χρονικών επαφών. Πώς διαχωρίζεται ένα αμέσως προηγούμενο χρονικό διάστημα από ένα αμέσως επόμενο του; Στο συνεχιστικό μαθηματικό μοντέλο, που χρησιμοποιείται για την κατανόηση τέτοιων ψευδοεμπειρικά προσδιορίσιμων χρονικών επαφών, οι επαφές αυτές είναι σημειακές, στιγμιαίες, δεν έχουν, δηλαδή, διάρκεια. Πώς θα μπορούσαν, άλλωστε, να διαρκούν όταν η διάρκειά τους θα σήμαινε την ύπαρξη ενδιάμεσου χρονικού διαστήματος μεταξύ ενός αμέσως προηγούμενου και ενός αμέσως επομένου του τέτοιου διαστήματος; Αν έτσι έχουν τα πράγματα, οι χρονικές επαφές πρέπει να μην έχουν διάρκεια, να είναι δηλαδή, σημειακές, στιγμιαίες. Μα τότε η εμπειρική πραγματικότητα πρέπει να περιέχει οντότητες, που θα μπορούσαμε να τις ονομάσουμε σημειακά εκάστοτε «τώρα». Δηλαδή να δεχθούμε ότι υπάρχουν αδιάστατες εμπειρικές χρονικότητες στο εμπειρικό σώμα της αλλαγής, όπου θεωρούμε ότι η εμπειρική υπαρκτικότητα είναι απολύτως συνδεδεμένη με την κατευθυνόμενη μονοδιάστατη διάρκεια. Η αποδοχή αυτή αποτελεί τον πυρήνα της σύγχυσης, που δημιουργείται όταν, επί παραδείγματι, στο γνωστό παράδοξο κίνησης του Ζήνωνος περιγράφουμε την κίνηση ενός σημειακού αντικειμένου, που διαγράφει μία τροχιά ως ένα σύνολο στάσεων επειδή ακριβώς θεωρούμε ότι το μαθηματικό γραμμικό μονοδιάστατο αντικείμενο της τροχιάς αποτελείται από αδιάστατα στατικά σημεία. Αυτή ακριβώς η ασυμμετρία μεταξύ εμπειρικής χρονικότητας και μαθηματικής εξεικόνισής της είναι μία από τις πλέον προφανείς συνέπειες του οντολογικού προβλήματος του συνεχούς, που είναι λαβυρινθώδες, επιστημονικά οριακό, μη επιλύσιμο και επομένως, ως πρόβλημα, καθαρώς φιλοσοφικό.

Είναι, σχεδόν, προφανές ότι το πρόβλημα του οντολογικού status των χρονικών επαφών είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα της εμπειρικής χρονικής έναρξης και του εμπειρικού χρονικού τέλους ενός εμπειρικού χρονικού διαστήματος. Είναι το ίδιο πρόβλημα της υπαρκτικής αποδοχής σημειακών ή στιγμιαίων χρονικών οντοτήτων στο εμπειρικό σώμα της χρονικότητας, όπου η υπαρκτικότητα είναι απολύτως συνδεδεμένη με τη χρονική διάρκεια. Το επιστημολογικά τραγικό και φιλοσοφικά υπέροχο είναι ότι, έτσι, το εμπειρικό χρονικό ανάλογο του μαθηματικού ευθυγράμμου τμήματος, όπου η αρχή και το τέλος του τελευταίου είναι μαθηματικές σημειακές οντότητες, είναι γνωσιακά ασύμμετρο προς την μαθηματική του συνεχιστική εξεικόνιση και, ως εκ τούτου, γνωσιακά διαφεύγον. Με άλλα λόγια, το πρόβλημα είναι το ακόλουθο. Όταν αρχίζει να κτυπάει το κουδούνι του σπιτιού μου ή

όταν σταματάει να κτυπάει, τι εμπειρικό υπαρκτικό status έχει η έναρξη ή ο τερματισμός του κουδουνίσματος;

Η συζήτησή μας για το πρόβλημα της ακριβούς μέτρησης θα λάβει χώρα, στην συνέχεια, στο πλαίσιο , που καθορίζεται από τα παραπάνω οριακά για τη γνώση (και γι' αυτό καθαρώς φιλοσοφικά) ερωτήματα. Το πρόβλημα της ακριβούς μέτρησης τίθεται με ιδιαίτερη ένταση στο πεδίο της εμπειρικής πραγματικότητας. Άλλωστε, αυτό είναι και το πεδίο στο οποίο κινούνται και ενδημούν οι εμπειρικές επιστήμες, ούσες γνωσιακό εργαλείο τιθάσευσης του εμπειρικού κόσμου. Το πρόβλημα ανακύπτει από τη στιγμή που η ακριβής μέτρηση τίθεται ως το απόλυτο ιδεώδες της επιστημονικής αποτύπωσης του κόσμου. Τούτων δοθέντων, το ερώτημα, που τίθεται, είναι σαφές. Στο πλαίσιο των εμπειρικών επιστημών είναι δυνατή η ακριβής μέτρηση;

Για να καταστεί η κουβέντα μας κατά το δυνατόν απλούστερη και να αναδειχθεί με σαφήνεια το πρόβλημα που επιχειρούμε να αντιμετωπίσουμε θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην μέτρηση εμπειρικού μήκους. Πριν, όμως, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η διαδεδομένη μεταξύ των επιστημόνων, που ασχολούνται με τις μετρήσεις, άποψη σχετικά με το ιδεώδες της ακριβούς μέτρησης είναι, πως ακριβής μέτρηση δεν μπορεί να υπάρξει εξ αιτίας δυσχερειών, που σχετίζονται με τις εγγενείς αδυναμίες, που εμφανίζουν οι αισθήσεις μας και οι προεκτάσεις τους, δηλαδή τα όργανα μέτρησης, που χρησιμοποιούμε και που συνεχώς βελτιώνουμε. Οι βελτιώσεις συνίστανται στην σμίκρυνση των ορίων λάθους ή προσέγγισης, που κάθε φορά επιχειρούμε. Έτσι κάθε μέτρηση, που διενεργείται, συνοδεύεται πάντα από ένα αποτέλεσμα, το οποίο διατυπώνεται με υπόδειξη ενός θετικού ή αρνητικού περιθωρίου λάθους ή προσέγγισης. Ο επιστήμονας που επιχειρεί την μέτρηση είναι πιθανόν να πιστεύει ότι στην παρούσα φάση οι αισθήσεις μας και οι προεκτάσεις τους (δηλαδή τα επιστημονικά όργανα μέτρησης, που προς το παρόν χρησιμοποιούμε) είναι υπεύθυνες για την αδυναμία ακριβούς μέτρησης του συγκεκριμένου εμπειρικού μήκους και πως κάποια ιδανικά όργανα μέτρησης, που κάποια στιγμή είναι, πιθανόν, να κατασκευασθούν, θα μας επιτρέψουν να επιτύχουμε την πολυπόθητη ακριβή μέτρηση. Η συγκεκριμένη πιθανόν υποβόσκουσα και ενδιάθετη πίστη ή ακόμη και ο αντίστοιχος επιστημονίζων ισχυρισμός που, επίσης, κατά πάσα πιθανότητα, συνοδεύει το πολυπόθητο όραμα της ακριβούς μέτρησης, μπορεί να στηρίζεται στην συνειδητή ή ασυνείδητη αντίστοιχη πίστη στην τελική διόρθωση των εγγενών αδυναμιών της εμπειρικής παρατήρησης. Όμως στο πλαίσιο μιας τέτοιας πίστης ή ενός τέτοιου επιστημονίζοντας οράματος, δεν λαμβάνεται υπ' όψιν η θεμελιώδης αδυναμία ακριβούς εμπειρικής μέτρησης, που είναι αποτέλεσμα της υπάρχουσας ασυμμετρίας μεταξύ της εμπειρικής πραγματικότητας και των μαθηματικών μας της πραγματικής ευθείας. Για τους μη επαίοντες επισημαίνεται στο σημείο αυτό, ότι η χρήση του επιθέτου «πραγματικής» μπροστά από το ουσιαστικό «ευθείας» έχει τεχνικό χαρακτήρα και δεν υπονοείται ούτε σημαίνεται κάποιου είδους μυστική ή φανερή πραγματικότητα παρά μόνον η πραγματικότητα της ευθείας, ως μαθηματικού αντικειμένου.

Ποιο είναι λοιπόν, το πρόβλημα της ουσιώδους αδυναμίας επίτευξης ακριβούς μέτρησης; Ο ισχυρισμός είναι ότι *καμμία* βελτίωση οργάνων μέτρησης δεν μπορεί να οδηγήσει σε ακριβή μέτρηση. Η ουσιώδης αδυναμία οφείλεται, όπως ήδη ελέχθη, στην γνωσιολογική ασυμμετρία μεταξύ των συνεχιστικών μας μαθηματικών, δηλαδή των μαθηματικών της πραγματικής ευθείας και της εμπειρικής μας πραγματικότητας. Η γνωσιολογική μας επαφή με την εμπειρική αυτή πραγματικότητα, όχι στην πρωτογενή αλλά στη δευτερογενή, εκλεπτυσμένη εκδοχή της, λαμβάνει χώρα με την

διαμεσολάβηση των μαθηματικών μας και την, ως εκ τούτου, μαθηματική εξεικόνισή της. Αυτό έχει ως συνέπεια την ανάγκη καθορισμού εμπειρικού αντιστοίχου της έννοιας του μαθηματικού σημείου και του εντοπισμού της εμπειρικής αρχής και του εμπειρικού τέλους ενός, επί παραδείγματι, εμπειρικού μήκους, όπως αυτό γίνεται αντιληπτό στην περίπτωση μέτρησης του μήκους μιας λεπτής εμπειρικής ράβδου. Ποια είναι η αρχή και ποιο το τέλος του μήκους της συγκεκριμένης εμπειρικής ράβδου; Εμπειρικά σημεία, όπως ήδη ελέχθη, δεν υπάρχουν. Τα εμπειρικά αντικείμενα σε μια, κατά τα άλλα, στατική εμπειρική πραγματικότητα είναι τρισδιάστατα και επομένως μονοδιάστατα εμπειρικά αντικείμενα δεν υπάρχουν. Καταλαβαίνουμε την συγκεκριμένη εμπειρική ράβδο, ως έχουσα μήκος, μέσω της μαθηματικής της εξεικόνισης, όπου δεν έχουμε πρόβλημα γιατί η αρχή και το τέλος του μήκους της γίνονται αντιληπτά ως μαθηματικές οντότητες, παρ' ότι, πιθανώς, ακόμη και στον νου σοβαρών επιστημόνων, εξοικειωμένων με την έννοια της μέτρησης, ή σύγχυση μεταξύ μαθηματικών και αντίστοιχων εμπειρικών οντοτήτων είναι παρούσα.

Τι ακριβώς απαιτείται και αναμένεται να λάβει χώρα κατά την ποθητή και συγχρόνως ανέφικτη ακριβή μέτρηση ενός εμπειρικού μήκους; Το πρότυπο προέρχεται από τον χώρο της μαθηματικής εξεικόνισης της αντίστοιχης πράξης ακριβούς μέτρησης. Ο αξεπέραστος ευκλείδιος τρόπος μέτρησης μαθηματικών ευθύγραμμων τμημάτων στηρίζεται στον ορισμό της ισότητας τέτοιων τμημάτων. Δύο ευθύγραμμα τμήματα θεωρούνται ίσα όταν δι' επιθέσεως του ενός επί του άλλου αυτά ταυτίζονται. Η συγκεκριμένη ταύτιση λαμβάνει χώρα μέσω προηγούμενης ταύτισης των άκρων τους τα οποία είναι σημειακά. Εξ αιτίας της οντολογικής παραδοχής ότι τα άκρα μαθηματικών ευθυγράμμων τμημάτων είναι αδιάστατα, η μαθηματική ταύτισή τους δεν εμφανίζει κανένα πρόβλημα. Έτσι η μέτρηση ενός μαθηματικού ευθυγράμμου τμήματος γίνεται με επίθεση και ταύτιση με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου το μήκος είναι γνωστό. Το μαθηματικό πρότυπο της ακριβούς μέτρησης δεν μπορεί να εφαρμοσθεί στην περίπτωση της εμπειρικής μέτρησης. Πώς θα μετρήσουμε ένα εμπειρικό μήκος, το μήκος επί παραδείγματι μιας λεπτής εμπειρικής ράβδου, όταν δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την εμπειρική αρχή και το εμπειρικό τέλος της με εμπειρικό τρόπο, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν, όπως ήδη ελέχθη, εμπειρικά αδιάστατα σημεία; Ακόμη και αν υποθέσουμε ότι η αρχή και το τέλος μιας λεπτής εμπειρικής ράβδου δεν είναι αδιάστατες οντότητες αλλά έχουν και αυτές μήκος θα πέσουμε σε μια επ' άπειρον αναδρομή, γιατί θα πρέπει να προσδιορίσουμε εκ νέου την αρχή και το τέλος της προηγούμενης διαστατής αρχής και του προηγούμενου διαστατού τέλους και ούτω καθ' εξής. Η εμπειρική μέτρηση, ακολουθώντας το μαθηματικό πρότυπο και ανεξαρτήτως των χρησιμοποιούμενων μεθόδων και των αντίστοιχων οργάνων μέτρησης, στηρίζεται εννοιολογικά στην ευκλείδεια μέθοδο της επίθεσης. Πώς, λοιπόν, θα πετύχουμε την επιθυμητή ακριβή μέτρηση όταν κάτι τέτοιο θα σήμαινε την ταύτιση των εμπειρικών σημείων της αρχής και του τέλους αντίστοιχων εμπειρικών μηκών από την στιγμή που γνωρίζουμε ότι τέτοιες εμπειρικές οντότητες, ως αδιάστατες, δεν υπάρχουν;

Υπάρχει μια φαινομενική διέξοδος και μια φαινομενική λύση του προβλήματος της εμπειρικής ακριβούς μέτρησης. Ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να μετρήσουμε ένα εμπειρικό μήκος με συνεχώς βελτιούμενη ακρίβεια έτσι ώστε το περιθώριο σφάλματος να τείνει στο μηδέν. Κάτι τέτοιο φαίνεται, κατ' αρχάς, δυνατόν να λάβει χώρα. Μια αρχική συνηγορία υπέρ αυτής της εκδοχής έχει να κάνει με το γεγονός ότι ενώ δεν μπορούμε να μιλήσουμε για ταύτιση εμπειρικών μηκών, μπορούμε να μιλήσουμε για εμπειρική διαπίστωση ανισοτήτων μεταξύ εμπειρικών μηκών. Είναι

γεγονός ότι είναι δυνατόν να διαπιστωθεί εμπειρικά ότι ένα εμπειρικό μήκος είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο ενός άλλου. Όταν συγκρίνουμε δύο λεπτές εμπειρικές ράβδους μπορούμε να διαπιστώσουμε εμπειρικά ότι της πρώτης το μήκος είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο του μήκους της δεύτερης. Οι αισθήσεις και οι προεκτάσεις τους, τα όργανα μέτρησής μας, δηλαδή, μας επιτρέπουν να διαπιστώσουμε πότε ένα εμπειρικό μήκος «χωράει» μέσα σε ένα άλλο και αντιστρόφως. Αυτό που δεν μας επιτρέπουν οι αισθήσεις και οι προεκτάσεις τους να διαπιστώσουμε απ' ευθείας είναι η ταύτιση εμπειρικών μηκών λόγω αδυναμίας ταύτισης εμπειρικά ανύπαρκτων εμπειρικών σημείων.

Αυτή η αρχική συνηγορία υπέρ της εμπειρικής ακριβούς μέτρησης με διαδικασίες οριακότητας δεν είναι αρκετή για την αποδοχή της. Οι διαδικασίες οριακότητας αποτελούν δάνειο από την περιοχή των μαθηματικών, όπου το αποτέλεσμα της ύπαρξης ορίου τέτοιων απείρων, ως προς το πλήθος τους, διαδοχικώς βελτιούμενων μετρήσεων, ώστε το περιθώριο σφάλματος να τείνει στο μηδέν, θα οδηγούσε στην αποδοχή του μαθηματικού αυτού ορίου, ως του μαθηματικά αποδεκτού μήκους του μετρούμενου εμπειρικού μήκους της προς μέτρηση λεπτής εμπειρικής ράβδου. Αυτό όμως δεν είναι αρκετό, ούτε εμπειρικά αποδεκτό για δύο κυρίως λόγους. Ο πρώτος έχει να κάνει με το γεγονός ότι μια τέτοια λύση, που θα την βάφτιζε κανείς εμπειρική χωρίς να είναι, θα προϋπέθετε την επ' άπειρον βελτίωση με συγκεκριμένο τρόπο (δηλαδή με το περιθώριο σφάλματος να τείνει στο μηδέν) των μετρήσεων και επομένως, των προεκτάσεων των αισθήσεών μας, δηλαδή των οργάνων μέτρησης, και, ο δεύτερος, με την δυνατότητα ύπαρξης απείρων, ως προς το πλήθος τους μετρήσεων, που θα διενεργούνταν από πεπερασμένα, ως προς το πλήθος τους, έλλογα όντα κάθε ένα των οποίων είναι επίσης πραξιακά πεπερασμένο, δηλαδή κάθε ένα των οποίων σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα μπορεί να διενεργήσει μόνον πεπερασμένες, ως προς το πλήθος τους, πράξεις. Το συνολικό πλήθος των εκάστοτε ανθρωπίνων πράξεων, ακόμη και αν εξαντλούσαμε τον προηγηθέντα ιστορικό χρόνο, ως η πληθικότητα πεπερασμένου αριθμού πράξεων από πεπερασμένους, ως προς το πλήθος τους, πράττοντες ή πράξαντες είναι πεπερασμένη και, ως εκ τούτου, σε κανένα πεπερασμένο τμήμα του ιστορικού χρόνου δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί η επ' άπειρον βελτίωση των μετρήσεών μας με οριστικό μηδενισμό του περιθωρίου σφάλματος. Σε πραγματικό χρόνο, δηλαδή σε χρόνο ελέγξιμο από το έλλογο ον, δεν θα ήταν δυνατόν να διαπιστωθεί μια πιθανώς άπειρη διαδικασία συνεχώς βελτιούμενων μετρήσεων, που θα οδηγούσε σε μία ακριβή μέτρηση με μηδενικό περιθώριο σφάλματος. Ακόμη και η εκδοχή να εξετάσουμε τρόπους ομοιόμορφης ή ακόμη και αλγοριθμικά προβλέψιμης επ' άπειρον βελτίωσης των μετρήσεών μας, που θα μας οδηγούσε, ίσως, στην επαγωγική (χωρίς δηλαδή εξάντληση της απειρίας των απαιτούμενων μετρήσεων) απόφαση τελικού εμπειρικού μήκους για το λεπτό εμπειρικό αντικείμενο, δεν θα μπορούσε να είναι αποδεκτή γιατί θα προσέκρουε σε μια επαγωγική διαδικασία τρωτή στις αντιρρήσεις του Χιούμ (Hume), στηριγμένη, κατά τα άλλα, σε μια αναγκαστικά πεπερασμένη δειγματοληψία από την οποία θα ξεκινούσε η ερμηνευτικά υιοθετούμενη ομοιομορφία ή αλγοριθμική προβλεψιμότητα. Και τούτο διότι καμμία πεπερασμένη δειγματοληψία δεν εξασφαλίζει το επ' άπειρον ομοιότροπο ή αλγοριθμικά προβλέψιμο (λόγω πιθανολογούμενης περιοδικά επαναλαμβανόμενης ομοιότροπης μεταβολής) μιάς εμπειρικής διαδικασίας, όπως αυτή της βελτίωσης των μετρήσεών μας.

Όσα ελέχθησαν μέχρις εδώ ίσως να δίδουν την εντύπωση ότι η αδυναμία ακριβούς μέτρησης συνεπάγεται την πιθανή ανυποληψία των μετρήσεων, ως στοιχείου επιβεβαιωτικού ή διαψευδιστικού γενικεύσεων, ολικών θεωρήσεων ή και

επιστημονικών θεωριών. Κάτι τέτοιο δεν είναι ορθό. Οι μετρήσεις, ως βασικό εργαλείο στην διαπίστωση και κατοχύρωση της αναδρασιακής σχέσης θεωρίας και πράξης παίζουν θεμελιώδη ρόλο στο γνωσιακό παιχνίδι. Τα συνεχιστικά μαθηματικά μας με την σημειακή οντολογία τους, όταν εφαρμόζονται για να εκφράσουν την εμπειρική πραγματικότητα δεν αποτελούν οντολογικά ισόμορφη πραγματικότητα της εμπειρικής. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο και ούτε σημαίνει πως τα συνεχιστικά μαθηματικά μας δεν είναι το κατάλληλο εργαλείο για την ακριβή έκφραση της πραγματικότητας αυτής. Αρκεί που τα συνεχιστικά μαθηματικά, τα μαθηματικά δηλαδή της πραγματικής ευθείας, είναι, ως εκ της φύσεώς των, ένα γλωσσικό υπόβαθρο για την εξεικόνιση της εμπειρικής πραγματικότητας, που σέβεται τις προσεγγίσεις. Σέβεται τις προσεγγίσεις με την έννοια ότι σε κάθε μέτρηση (υποκειμένη στους περιορισμούς που ήδη αναφέραμε) ενσωματώνεται όλος ο συνεχιστικός μηχανισμός της οριακότητας, όπως αυτός χρησιμοποιείται για τους ορισμούς ρυθμών μεταβολής και περιεκτικότητας, παραγώγων δηλαδή και ολοκληρωμάτων. Κάθε μέτρηση είναι, μεν, μη-ακριβής αλλά συγχρόνως καταλλήλως προσεγγιστική, με την έννοια, ότι είναι πιθανόν το περιθώριο σφάλματος της μέτρησης να βρίσκεται συνεχώς και αδιαλείπτως μεταξύ απολύτως αποδεκτών και ελεγχόμενων ορίων.

Μία, πιθανή, σοβαρή ένσταση στην μέχρι εδώ διαπραγμάτευση θα ήταν ότι η χρησιμοποιηθείσα επιχειρηματολογία εξαρτάται απολύτως από μία προϋπόθεση υφέρπουσα και πανταχού παρούσα στο προηγούμενο κείμενο. Η προϋπόθεση αυτή έχει να κάνει με την αποδοχή μίας συνεχιστικά δομημένης εμπειρικής πραγματικότητας για την οποία γίνεται προσπάθεια να εξεικονισθεί μέσω των συνεχιστικών μαθηματικών μας. Έτσι το κεντρικό πρόβλημα, που ανακύπτει, είναι δομικό και αναφέρεται στην εμπειρική νοηματοδότηση της μαθηματικής έννοιας του σημείου. Τι θα συνέβαινε, λοιπόν, στον χώρο των νοημάτων, αν αμφισβητούσαμε αυτήν την υφέρπουσα προϋπόθεση; Τι θα συνέβαινε στον χώρο των νοημάτων, αν υποθέταμε ότι η εμπειρική πραγματικότητα έχει διακριτή υφή; Ποιες θα ήταν οι συνέπειες μίας υπόθεσης ότι η εμπειρική χωροχρονικότητα έχει διακριτό χαρακτήρα, ότι αποτελείται δηλαδή από ψηφίδες μη περαιτέρω διαιρέσιμες; Υπάρχουν δύο εκδοχές διακριτότητας, που μπορούμε να εξετάσουμε. Σύμφωνα με την πρώτη, οι χωροχρονικές μας ψηφίδες διαθέτουν ένα ελάχιστο μέγεθος και σύμφωνα με την δεύτερη δεν υπάρχει ελάχιστο όριο στο μέγεθός τους. Δηλαδή, στην δεύτερη περίπτωση, δεδομένης μίας μη περαιτέρω διαιρέσιμης στοιχειώδους ψηφίδας, υπάρχει μη περαιτέρω διαιρέσιμη άλλη ψηφίδα μικρότερου μεγέθους. Πρέπει να τονισθεί ότι ακόμη και στην περίπτωση αποδοχής της διακριτότητας είμαστε δέσμιοι μίας αντίληψης μεγέθους για τις ψηφίδες μας που προέρχεται από τα σπλάχνα των συνεχιστικών μαθηματικών μας. Ποιος δεν αντιλαμβάνεται το μέγεθος ως μετρούμενο και, επομένως, ποιος δεν κατανοεί το μέγεθος με συνεχιστικό τρόπο; Στο ρητορικό αυτό ερώτημα, μία απάντηση θα ήταν ότι στην πρώτη περίπτωση των ψηφίδων ελαχίστου μεγέθους το αντίστοιχο μέγεθος θα είχε ως συμβατική τιμή του τον αριθμό ένα και στην δεύτερη μετά τον καθορισμό του μεγέθους μίας συγκεκριμένης ψηφίδας ως μονάδας μέτρησης οι υπόλοιπες θα είχαν ως μεγέθη του, τιμές που θα προέκυπταν, ως προϊόν σύγκρισής τους με το μέγεθος της βασικής. Μια τέτοια απάντηση θα είχε, βεβαίως, ως προϋπόθεσή της την πλήρη εγκατάλειψη της προσπάθειας κατανόησης της διακριτότητας μέσα από εικόνες συνεχιστικού χαρακτήρα.

Ας δούμε, όμως, λεπτομερέστερα τις δύο προτεινόμενες εκδοχές. Η υιοθεσία της πρώτης έχει σοβαρές γνωσιολογικές συνέπειες, μερικές των οποίων είναι οι

παρακάτω. Πρώτον, περιοχές αγαπημένες των συνεχιστικών μαθηματικών καθίστανται ανενεργές και εμπειρικά σχεδόν άχρηστες. Επί παραδείγματι, σοβαρά θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως το πυθαγόρειο θεώρημα, δεν έχουν πλέον εμπειρικό νόημα στην γενικότητά τους εκτός από συγκεκριμένες, σχεδόν τετριμμένες, εκδοχές τους, διακριτού χαρακτήρα. Τι διακριτό νόημα έχει η υποτεινούσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές αποτελούμενες από ακέραιο αριθμό στοιχειωδών ψηφίδων, ώστε η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των ακεραίων, που εκφράζουν τον αριθμό των στοιχειωδών ψηφίδων κάθε κάθετης πλευράς να μην είναι ακέραιος αριθμός; Ποιο είναι το μέγεθος της υποτεινούσας, ως ακέραιου αριθμού, εμπειρικού ορθογωνίου τριγώνου κάθετων πλευρών μήκους δύο και τρία, αντιστοιχώς; Δεύτερον, περιοχές ακόμη και των μαθηματικών της ρητής ευθείας καθίστανται ανενεργές. Ας σκεφθούμε ποιο είναι το μέσον εμπειρικού ευθυγράμμου τμήματος, που αποτελείται από εννέα ψηφίδες; Κυριολεκτικώς δεν υπάρχει, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν εμπειρικά μήκη σχηματιζόμενα από τέσσερεις και μισή ψηφίδες. Τα εμπειρικά μήκη οφείλουν να αποτελούνται από συγκεκριμένα πλήθη ελαχίστων ψηφίδων και επομένως οι μόνες επιτρεπόμενες τιμές για τα αντίστοιχα μεγέθη τους πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί. Τρίτον, χρονικό διάστημα ή χωρικό διάστημα μεγέθους ίσου με τον αριθμό ένα τι νόημα έχει; Χρονικό διάστημα με μήκος ένα έχει αρχή και τέλος; Αν έχει, πώς βιώνεται και πώς μετράται όταν η αποδοχή αρχής και τέλους μας εμπλέκει εκ νέου στην περιπέτεια έκφρασης αυτής της χρονικής διάρκειας συνεχιστικά, δεδομένου ότι μη σύμπτωση αρχής και τέλους συνεπάγεται την ύπαρξη ενδιάμεσης παρεμβαλλόμενης χρονικής διάρκειας; Αν δεν έχει, τι συμβαίνει κατά την διάρκειά του; Αν δεν συμβαίνει τίποτε, τότε αυτό ταυτίζεται, ως προς την στατικότητα με την έννοια του χρονικού σημείου και έτσι η μεταβολή αποτελεί άλμα από ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα στο επόμενο του, δηλαδή στο επόμενο, υπό μίαν έννοια, χρονικό σημείο, με την μεταβολή ή το άλμα να διενεργείται αχρόνως ή, μάλλον, εν κενώ χρόνου και η μεταβολή να λαμβάνει τον χαρακτήρα θαύματος. Αν, πάλι, συμβαίνει κάτι, αυτό που συμβαίνει λαμβάνει χώρα εντός μιας διάρκειας, πράγμα που μας εμπλέκει ξανά στα γρανάζια και τους γρίφους του λαβυρίνθου του συνεχούς.

Η δεύτερη προς εξέταση εκδοχή είναι αυτή της ύπαρξης χωροχρονικών ψηφίδων μεταβλητού μεγέθους, ούτως ώστε, δεδομένης μιας οποιασδήποτε ψηφίδας συγκεκριμένου μεγέθους να υπάρχει πάντοτε ψηφίδα μικρότερου μεγέθους. Η εκδοχή αυτή, παρ' ότι εμφανίζεται επίσης ως γνωσιολογικά ευάλωτη, εμφανίζει πολύ περισσότερα πλεονεκτήματα από την πρώτη. Έτσι, το πρώτο παράδειγμα που δόθηκε για την κατάδειξη των μειονεκτημάτων της πρώτης εκδοχής δεν έχει εφαρμοσιμότητα στην δεύτερη εκδοχή και αυτό διότι στην δεύτερη εκδοχή η δυνατότητα οριακότητας και συγκλίσεων επιτρέπει και την εμπειρική εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος. Από την άλλη μεριά, το δεύτερο και το τρίτο παράδειγμα είναι εξίσου αιχμηρά και για την δεύτερη εκδοχή. Παρά ταύτα, η δεύτερη εκδοχή είναι γνωσιολογικά κοντινότερη προς την συνεχιστικότητα διότι θα μπορούσε εύκολα να αντιληφθεί κανείς ότι η υιοθέτησή της θα επέτρεπε την διάσωση της οριακότητας χωρίς να σημαίνει την εμπειρική υποκατάσταση της πραγματικής ευθείας από μια τοπολογία ευθυγράμμων τμημάτων χωρίς ελάχιστο μήκος. Μια τέτοια τοπολογία για να είναι ισοδύναμη με την σημειακή τοπολογία της πραγματικής ευθείας θα έπρεπε να επιτρέπει την ανάλυση κάθε υπαρκτού ευθυγράμμου τμήματος ή, καλύτερα, κάθε εμπειρικού αναλόγου του, σε άλλα, χωρίς ελάχιστο μήκος, μικρότερα του. Αυτό όμως δεν επιτρέπεται διότι είναι μεν δυνατή η ύπαρξη εμπειρικών ευθύγραμμων τμημάτων οποιουδήποτε μεγέθους, αλλά δεν είναι δυνατή η περαιτέρω αναλυσιμότητα

συγκεκριμένου εμπειρικού ευθυγράμμου τμήματος σε άλλα μικρότερα, δεδομένης της μη-διαιρεσιμότητάς του. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μετάβαση από χωροχρονικές ψηφίδες, που δεν είναι αναγκαστικώς μονοδιάστατες, σε ευθύγραμμα τμήματα στο τελευταίο τμήμα της διαπραγμάτευσής μας δεν επηρεάζει την γενικότερη επιχειρηματολογία, δεδομένου ότι χρησιμοποιήθηκε η, χωρίς γνωσιολογικούς κινδύνους, προβολή σε μία διάσταση μεγεθών μεγαλύτερης διάστασης για λόγους μεθοδολογικούς και τελικής αναφοράς στα συνεχιστικά μαθηματικά της πραγματικής ευθείας.

Πέραν της θεμελιώδους ασυμμετρίας της εμπειρικής πραγματικότητας, όπως την αντιλαμβανόμαστε ως τέτοια, και των συνεχιστικών μαθηματικών μας, η οποία εστιάζεται, όπως ήδη ελέχθη, στην έννοια του μαθηματικού σημείου και του αντιστοίχου του εμπειρικού σημείου, υπάρχουν προβλήματα που θα εμπόδιζαν την πραγμάτωση της ακριβούς μέτρησης ακόμη και αν η ασυμμετρία αυτή δεν υπήρχε. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι τα συνεχιστικά μαθηματικά μας αποτελούν ισόμορφη απεικόνιση της εμπειρικής πραγματικότητας, όπως μας εμφανίζεται, και ας προφασιστούμε ότι δεν έχουμε κανένα πρόβλημα κατανόησης ενός εμπειρικά υπάρχοντος αδιάστατου εμπειρικού σημείου. Θα ήταν κάτω απ' αυτήν την βασική προϋπόθεση δυνατή η ακριβής μέτρηση; Για την ευκολία διατύπωσης των επιχειρημάτων μας, ας υποθέσουμε ξανά ότι εξετάζουμε την περίπτωση της μέτρησης του μήκους μιάς λεπτής εμπειρικής ράβδου. Η μέτρηση εμπειρικού μήκους στηριζόμενη στην διαδικασία της επίθεσης και της διαπίστωσης της ταυτότητας των μηκών της συγκρινόμενης με τη χρησιμοποιούμενη, ως μέτρο σύγκρισης, αντίστοιχη ράβδο, με ταύτιση των άκρων τους, δεν θα παρουσίαζε με βάση την παραπάνω υπόθεση κανένα πρόβλημα. Παρά ταύτα, μια σειρά προβλημάτων θα ανέκυπταν, που οφείλονται στην ύπαρξη αρρήτων αριθμών και μάλιστα στην ύπαρξη της ισχυρά μεγαλύτερης τάξης των, αυτής των υπερβατικών αριθμών.

Ας παραθέσουμε μία σειρά από ορισμούς και τεχνικές λεπτομέρειες, οι οποίες θα διευκολύνουν την συζήτησή μας. Το σώμα των πραγματικών αριθμών αποτελείται από δύο βασικές και μεγάλες ομάδες αριθμών, ξένες μεταξύ τους, οι οποίες συνενωνόμενες συναπαρτίζουν το σώμα των πραγματικών αριθμών. Η πρώτη ομάδα είναι αυτή των ρητών αριθμών οι οποίοι είναι αυτοί, που παριστάνονται ως πηλίκα ακεραίων αριθμών με τον παρονομαστή διάφορον του μηδενός. Η δεύτερη ομάδα είναι αυτή των αρρήτων αριθμών οι οποίοι δεν παριστάνονται ως πηλίκα ακεραίων αριθμών, με τον παρονομαστή διάφορον του μηδενός. Η δεύτερη ομάδα, η οποία είναι και η πολυπληθέστερη, έχει πληθικότητα ίση με την πληθικότητα του συνεχούς, δηλαδή ίση με την πληθικότητα της ίδιας της πραγματικής ευθείας. Η ομάδα αυτή, όπως λέγεται, είναι υπεραριθμήσιμη, δεν μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία ούτε με τους φυσικούς αριθμούς ούτε με οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολό του. Σημαντική υποομάδα της ομάδας των αρρήτων αριθμών αποτελεί η υποομάδα των αρρήτων αλγεβρικών αριθμών, οι οποίοι ορίζονται ως οι μη μιγαδικές ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου αριθμού είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού δύο. Οι ρητοί αριθμοί μαζί με τους αρρήτους αλγεβρικούς αριθμούς αποτελούν την ομάδα των αλγεβρικών αριθμών. Η ομάδα αυτή έχει πληθικότητα ίση με την πληθικότητα των φυσικών αριθμών, δηλαδή μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών και έτσι είναι, όπως λέγεται, αριθμήσιμη. Αυτό που απομένει αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών αφαιρεθεί η ομάδα των αλγεβρικών αριθμών είναι η ειδική υποομάδα αρρήτων αριθμών την οποία αποτελούν οι άρρητοι μη αλγεβρικοί αριθμοί, οι οποίοι ονομάζονται υπερβατικοί. Παράδειγμα

ενός τέτοιου αριθμού είναι ο αριθμός π , που αποτελεί το πηλίκο του μήκους της περιφέρειας κύκλου προς την διάμετρόν του. Το σύνολο των υπερβατικών αριθμών είναι το πολυπληθέστερο όλων, είναι ένα σύνολο υπεραριθμήσιμο, δηλαδή δεν μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία ούτε με τους φυσικούς αριθμούς ούτε με κανένα πεπερασμένο υποσύνολό του και είναι αυτό που πληθαριθμικά κυριαρχεί, καθιστώντας και το σύνολο των πραγματικών αριθμών ένα σύνολο υπεραριθμήσιμο διότι η ένωση αριθμησίμων και υπεραριθμησίμου συνόλου οδηγεί σε νέο σύνολο της αυτής πληθικότητας με το υπεραριθμήσιμο υποσύνολό του.

Ας επιστρέψουμε, λοιπόν, στην συζήτησή μας. Το αποτέλεσμα μίας μέτρησης, με τις προϋποθέσεις συμφωνίας εμπειρικής πραγματικότητας και μαθηματικής της εξεικόνισης, που ήδη ετέθησαν, αν οδηγεί σε κάποιο ρητό αριθμό δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα. Αν όμως η σχέση μετρουμένου και μέτρου σύγκρισης δεν είναι ρητή, δημιουργείται αυτομάτως πρόβλημα το οποίο απαιτείται να λυθεί. Ελεγχόμενη διαδικασία μέτρησης είναι μόνον αυτή που οδηγεί σε ρητό αποτέλεσμα, παραστάσιμο δηλαδή με πεπερασμένο ή τουλάχιστον περιοδικά ελέγξιμο τρόπο.

Αν η σχέση μετρουμένου και μέτρου σύγκρισης εκφράζεται με άρρητο αλγεβρικό αριθμό, η μέτρηση είναι δύσκολη, αλλά υπάρχει διέξοδος μέσω του πολυωνύμου, του οποίου ρίζα είναι ο συγκεκριμένος άρρητος και του αλγορίθμου διενέργειας της μέτρησης, που αυτό εκπροσωπεί. Επί παραδείγματι, αν ο συγκεκριμένος άρρητος αλγεβρικός αριθμός είναι η τετραγωνική ρίζα του δύο, μεταφέρεται η μέτρηση από τη συγκεκριμένη θετική πραγματική ημιευθεία στην οποία διενεργείται η μέτρηση σε μία θετική πραγματική ημιευθεία αποτελούμενη από τα τετράγωνα των στοιχείων της πρώτης. Η πράξη αυτή δεν οδηγεί στην καταστροφή μέρους της δομής της αρχικής θετικής πραγματικής ημιευθείας, γιατί η παραγόμενη αποτελεί ισόμορφη κόπια της αρχικής. Από την άλλη μεριά, οδηγεί στην μετατροπή μίας μέτρησης με άρρητο αλγεβρικό αποτέλεσμα σε μέτρηση με ρητό. Στην προκειμένη περίπτωση οδηγεί σε μέτρηση που το αποτέλεσμά της είναι ο αριθμός δύο.

Αν η σχέση μετρουμένου και μέτρου σύγκρισης οδηγεί σε αποτέλεσμα σύγκρισης, που δεν μπορεί να εκφραστεί παρά μόνον με άρρητο υπερβατικό αριθμό, τα πράγματα γίνονται ακόμα δυσκολότερα. Ας δούμε πώς και γιατί. Υπάρχουν άρρητοι υπερβατικοί αριθμοί, οι οποίοι προκύπτουν από συγκεκριμένες περιγράψιμες διαδικασίες και επομένως, κατά πάσα πιθανότητα, και από συγκεκριμένους προκύπτοντες αλγορίθμους. Ως παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τον αριθμό π , ο οποίος αποτελεί τον λόγο του μήκους περιφέρειας κύκλου προς την διάμετρό του. Αν μία μέτρηση οδηγεί στον αριθμό π , ο μόνος τρόπος για να διαπιστωθεί κάτι τέτοιο είναι η επιτυχής κατασκευή μίας περιφέρειας κύκλου με εμπειρικό μήκος ίσο με το προς μέτρηση εμπειρικό μήκος και, στην συνέχεια, η προσεκτική σύγκριση του εμπειρικού μήκους μίας διαμέτρου της παραχθείσας περιφέρειας με το εμπειρικό μήκος του αρχικού μέτρου σύγκρισης. Μια τέτοια επιτυχής διαδικασία θα οδηγήσει σε ταύτιση του εμπειρικού μήκους της επιλεχθείσας διαμέτρου και του εμπειρικού μήκους του αρχικού μέτρου σύγκρισης.

Η διαδικασία, που περιγράψαμε μόλις παραπάνω, προσιδιάζει στον αριθμό π και καθορίζεται από τον τρόπο ορισμού του. Είναι, δυνατόν, και για άλλους υπερβατικούς αριθμούς να ισχύει κάτι τέτοιο. Είναι, δηλαδή, δυνατόν ο ορισμός ενός συγκεκριμένου υπερβατικού αριθμού να οδηγεί σε αλγόριθμο έμμεσης μέτρησης ενός εμπειρικού μεγέθους, με αποτέλεσμα της μέτρησης τον συγκεκριμένο υπερβατικό αριθμό. Το απογοητευτικό όμως, στην προκειμένη περίπτωση, είναι ότι όλοι οι δυνατοί πεπερασμένοι ορισμοί και οι αντίστοιχοι αλγόριθμοί τους είναι το πολύ

αριθμήσιμοι, ως προς το πλήθος τους. Αυτό ισχύει γιατί το χρησιμοποιούμενο αλφάβητο είναι πεπερασμένο και κάθε πεπερασμένος ορισμός περιέχει πεπερασμένες θέσεις χρησιμοποιούμενων γραμμάτων. Ο μέγιστος, λοιπόν, αριθμός πεπερασμένων διατάξεων, γραμμάτων προερχομένων από πεπερασμένο αλφάβητο είναι ίσος με τον πληθάρημο των φυσικών αριθμών. Δηλαδή το πλήθος τέτοιων διατάξεων και επομένως το πλήθος των δυνατών πεπερασμένων ορισμών είναι αριθμήσιμο. Έτσι, δεδομένου ότι οι άρρητοι υπερβατικοί αριθμοί είναι υπεραριθμήσιμοι, ως προς το πλήθος τους, το μέγιστο μέρος τους δεν μπορεί ούτε καν να ορισθεί (γιατί δεν υπάρχουν αρκετοί ορισμοί, ως πεπερασμένες ακολουθίες γραμμάτων, που να τους καλύπτουν) και επομένως είναι αδύνατη οποιαδήποτε μέτρηση, η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει σε κάποιον εξ αυτών, σε κάποιον, δηλαδή, εκ των αναγκαστικώς μη οριζόμενων αρρήτων. Πώς να ορισθεί και επομένως πώς να μετρηθεί κάτι απολύτως διαφεύγον; Πώς να μετρηθεί κάτι που δεν είναι καν περιγράψιμο; Πώς να μετρηθεί ακριβώς κάτι που δεν μπορεί ούτε καν να μετρηθεί;

Η πραγματική ευθεία, αυτό το υπερεμπειρικό αριστουργηματικό μαθηματικό αντικείμενο, είναι ο πολύτιμος βοηθός μας στην ανίχνευση της εμπειρικής πραγματικότητας. Η δομή της έχει ως βασικό χαρακτηριστικό της τον σεβασμό των προσεγγίσεων. Χρησιμοποιώντας την σωστά μπορούμε να απαλλαγούμε από ιδεοληψίες σχετικές με το ανέφικτο όραμα της ακριβούς μέτρησης, συνειδητοποιώντας ότι η ασυμμετρία εμπειρικής πραγματικότητας και συνεχιστικής μαθηματικής εξεικόνισής της αποτελεί ένα ανεπούλωτο γνωσιολογικό ρήγμα, που οφείλουμε να το δεχθούμε ως έχει, χωρίς παράπονα και οιμωγές.