Θεωρία και ασκήσεις για διαγωνισμούς μαθηματικών

Α. Φελλούρης

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό θεωρούμε γνωστές τις βασικές έννοιες του μονωνύμου, του πολυωνύμου και των πράξεών τους. Θα ασχοληθούμε με την ανάλυση πολυωνύμων σε γινόμενο παραγόντων, με ταυτότητες και με ρητά αλγεβρικά κλάσματα.

Οι συντελεστές των μονωνύμων και των πολυωνύμων θεωρούμε ότι παίρνουν τιμές από το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Α1. Ανάλυση πολυωνύμων σε γινόμενο παραγόντων

Ανάλυση πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων ή απλούστερα **παραγοντοποίηση** είναι η γραφή ενός δεδομένου πολυωνύμου ως γινόμενο πολυωνυμικών παραγόντων. Οι πολυωνυμικοί παράγοντες που εμφανίζονται πρέπει να είναι του **ελάχιστου δυνατού βαθμού.**

Η ανάλυση πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων πολλές φορές δεν είναι δυνατή. Δεν υπάρχει γενικός κανόνας για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων. Όμως, για ειδικές μορφές πολυωνύμων δίνουμε μεθόδους παραγοντοποίησης.

(α) Πολυωνυμικές παραστάσεις που οι όροι τους έχουν κοινό παράγοντα

Παραδείγματα.

1. $2\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha\beta\cdot(2\alpha - 3\beta)$.

2. $5\alpha^\nu - 10\alpha^{\nu+1}\beta + 20\alpha^{\nu+2}\beta^2 = 5\alpha^\nu\cdot(1 - 2\alpha\beta + 4\alpha^2\beta^2)$.

3. $3x(y-1)^2 - 6x^2(y-1)^2 + 3x(y-1) = 3x(y-1)\cdot[y-1-2x(y-1)+1]$

$$= 3x(y-1)(y-1-2xy+2x+1) = 3x(y-1)(y-2xy+2x).$$

(β) Χωρισμός σε ομάδες

Στην περίπτωση αυτή η πολυωνυμική παράσταση χωρίζεται σε ομάδες, σε καθεμία από τις οποίες υπάρχει κοινός παράγοντας. Η παραγοντοποίηση είναι δυνατή, όταν μετά την παραγοντοποίηση τους οι ομάδες αυτές εμφανίζουν κοινό παράγοντα.

Παραδείγματα

1. $ax + ay + bx + by = (ax+ay) + (bx+by) = a\cdot(x+y) + b\cdot(x+y)$

$$= (x+y)\cdot(a+b).$$

2. $a^2x^2 + b^2x^2 - 2xa^2 - 2xb^2 = x^2(a^2+b^2) - 2x(a^2+b^2)$

$$= (a^2+b^2)\cdot(x^2-2x) = x(x-2)(a^2+b^2).$$

(γ) Διαφορά τετραγώνων

Αν A, B είναι πολυωνυμικές παραστάσεις, τότε:

$$\boldsymbol{A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)}$$

Παραδείγματα

1. $x^6 - y^4 = (x^3)^2 - (y^2)^2 = (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$.

2. $16x^4 - 81y^4 = (4x^2)^2 - (9y^2)^2 = (4x^2 - 9y^2)\cdot(4x^2 + 9y^2)$

$= [(2x)^2 - (3y)^2]\cdot(4x^2 + 9y^2)$

$= (2x - 3y)\cdot(2x + 3y)\cdot(4x^2 + 9y^2)$.

(δ) Πολυωνυμικές παραστάσεις της μορφής **:** $A^2 \pm 2AB + B^2$

Αν A, B είναι πολυωνυμικές παραστάσεις, τότε:

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2$$
$$= A\cdot(A+B) + B\cdot(A+B) = (A+B)^2,$$

δηλαδή έχουμε

$$\boldsymbol{A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2}$$

Ομοίως έχουμε

$$\boldsymbol{A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2}$$

Παραδείγματα

1. $9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = (3x + 5y)^2$.

2. $x^{2\nu} \pm 2x^\nu y^\nu + y^{2\nu} = (x^\nu)^2 \pm 2\cdot x^\nu \cdot y^\nu + (y^\nu)^2 = (x^\nu \pm y^\nu)^2$.

3. $(4x^2 - 5y)^2 - (3y - 6x^2)^2 = (4x^2 - 5y + 3y - 6x^2)\cdot[4x^2 - 5y - (3y - 6x^2)]$

$= (-2x^2 - 2y)\cdot(4x^2 - 5y - 3y + 6x^2)$

$= -2(x^2 + y)\cdot(10x^2 - 8y)$

$= -4(x^2 + y)\cdot(5x^2 - 4y)$.

(ε) Τριώνυμα

Τριώνυμα είναι πολυωνυμικές παραστάσεις της μορφής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

με $\alpha \neq 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ **.**

Ο αριθμός $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** του τριωνύμου $f(x)$ και ισχύουν τα εξής:

- Αν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο $f(x)$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων της μορφής $f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου οι αριθμοί x_1, x_2 δίνονται από τους τύπους

$$\boxed{x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha},\quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ .}$$

Πράγματι, αν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, έχουμε:

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{a}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{a}\right]$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=$$

$$=\alpha(x-x_1)(x-x_2)\,,$$

αν θέσουμε

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha},\quad x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν **Δ = 0**, τότε: $f(x)=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

  Πράγματι, αν $\Delta=0$ έχουμε:

$$f(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{a}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]=a\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν **Δ < 0**, τότε το τριώνυμο $f(x)$ δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Πράγματι, αν $\Delta<0$, τότε έχουμε

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{-\Delta}{4\alpha^2}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right],$$

δηλαδή το τριώνυμο $f(x)$ είναι γινόμενο του συντελεστή α επί μία παράσταση που είναι άθροισμα τετραγώνων.

Παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $f(x)=x^2-4x+3$.

Αφού είναι: $\alpha=1,\ \beta=-4,\ \gamma=3$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=4>0$, οπότε

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4+\sqrt{4}}{2}=3,\quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4-\sqrt{4}}{2}=1.$$

Έχουμε $f(x)=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$.

2. Ομοίως για το τριώνυμο $f(x)=25x^2-20x+1$, έχουμε

$\alpha=25,\beta=-20,\gamma=1,\Delta=(-20)^2-4\cdot1\cdot25=300>0$ και

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{20 \pm \sqrt{300}}{2 \cdot 25} = \frac{20 \pm 10\sqrt{3}}{50} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{5}$$

Άρα είναι

$$f(x) = 25x^2 - 20x + 1 = 25\left(x - \frac{2+\sqrt{3}}{5}\right)\left(x - \frac{2-\sqrt{3}}{5}\right).$$

3. Ομοίως για το τριώνυμο $f(x) = x^2 + x + 1$, είναι $\alpha = 1,\ \ \beta = 1,\ \ \gamma = 1,$ και $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$, οπότε το τριώνυμο $f(x) = x^2 + x + 1$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

4. Ομοίως για το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 8x + 16$, είναι $\alpha = 1,\ \ \beta = -8,\ \ \gamma = 16,$ και $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0$, οπότε :

$$f(x) = x^2 - 8x + 16 = 1 \cdot \left(x + \frac{-8}{2 \cdot 1}\right)^2 = (x-4)^2.$$

(στ) Ανάλυση ενός όρου σε άθροισμα ή διαφορά άλλων όρων

Πολλές φορές, για την ανάλυση μιας πολυωνυμικής παράστασης σε γινόμενο παραγόντων, είναι αναγκαίο να αναλύσουμε έναν ή περισσότερους όρους σε άθροισμα ή διαφορά άλλων όρων. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα να εφαρμόσουμε μία από τις προηγούμενες μεθόδους παραγοντοποίησης, π.χ. με τον χωρισμό σε ομάδες.

Παραδείγματα

1. Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση

$$A = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma.$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma) + (\alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma) + (\beta^2\gamma + \beta\gamma^2) + (\gamma^2\alpha + \alpha\beta\gamma) \\ &= \alpha^2(\beta+\gamma) + \alpha\beta(\beta+\gamma) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \alpha\gamma(\beta+\gamma) \\ &= (\beta+\gamma)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) \\ &= (\beta+\gamma)\left[(\alpha^2 + \alpha\beta) + (\beta\gamma + \alpha\gamma)\right] \\ &= (\beta+\gamma)\left[(\alpha(\alpha+\beta) + \gamma(\alpha+\beta)\right] \\ &= (\beta+\gamma)\ (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma) = (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha). \end{aligned}$$

2. Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση

$$f(x) = x^3 - 7x + 6.$$

Λύση

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2-1) - 6(x-1) \\ &= x(x+1)(x-1) - 6(x-1) = (x-1)[x(x+1) - 6] = (x-1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x-1)(x-2)(x+3). \end{aligned}$$

3. Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Λύση

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 = x^2(x+1) - 4(x^2 - 1)$$

$$= (x+1)\cdot[x^2 - 4(x-1)] = (x+1)\cdot(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2.$$

(ζ) Αξιοσημείωτα πηλίκα της μορφής: $\alpha^\nu \pm \beta^\nu$ **,** $\nu \in$ **N*.**

Σύμφωνα με την ταυτότητα της τέλειας διαίρεσης κάθε παράσταση της μορφής $\alpha^\nu - \beta^\nu$**,** $\nu \in \mathbb{N}^*$ διαιρούμενη με $\alpha - \beta$ δίνει υπόλοιπο 0 και πηλίκο

$$\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \alpha^2\beta^{\nu-3} + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}.$$

Έτσι έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})}.$$

Ειδικά για $\nu = 2\mu$, $\mu \in$ N***,** έχουμε

$$\alpha^\nu - \beta^\nu = \alpha^{2\mu} - \beta^{2\mu} = (\alpha^\mu)^2 - (\beta^\mu)^2 = (\alpha^\mu - \beta^\mu)\cdot(\alpha^\mu + \beta^\mu).$$

Για παράδειγμα, έχουμε

1. $\alpha^3 - \beta^3 = (a - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

2. $\alpha^5 - \beta^5 = (a - \beta)(\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3\beta^4)$

3. $\alpha^4 - \beta^4 = (a^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$

.

Για $\nu = 2\mu + 1$, $\mu \in \mathbb{N}$, η παράσταση $\alpha^\nu + \beta^\nu$ διαιρούμενη με $\alpha + \beta$ δίνει υπόλοιπο 0 και ισχύει η ισότητα:

$$\boldsymbol{\alpha^{2\mu+1} + \beta^{2\mu+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^{2\mu} - \alpha^{2\mu-1}\beta + \alpha^{2\mu-2}\beta^2 - \ldots - \alpha\beta^{2\mu-1} + \beta^{2\mu})}.$$

Για παράδειγμα, έχουμε

1. $\alpha^3 + \beta^3 = (a + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

2. $\alpha^5 + \beta^5 = (a + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4)$

3. $\alpha^7 + \beta^7 = (a^2 + \beta^2)(\alpha^6 - \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 - \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 - \alpha\beta^5 + \beta^6)$

Ειδικές περιπτώσεις

Για $\nu = 2\mu + 1$, $\mu \in \mathbb{N}^*$, η παράσταση $\alpha^\nu + \beta^\nu$ διαιρούμενη με $\alpha + \beta$ δίνει υπόλοιπο $2\beta^\nu$, οπότε η παραπάνω μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η παράσταση $\alpha^\nu + \beta^\nu$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

Στην ειδική περίπτωση που το ν είναι άρτιο πολλαπλάσιο περιττού αριθμού, έστω $\nu = 2\kappa\cdot\mu$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$ περιττός , τότε

$$\alpha^\nu + \beta^\nu = \alpha^{2\kappa\mu} + \beta^{2\kappa\mu} = (\alpha^{2\kappa})^\mu + (\beta^{2\kappa})^\mu$$

$$= (\alpha^{2\kappa} + \beta^{2\kappa})[(\alpha^{2\kappa})^{\mu-1} - (\alpha^{2\kappa})^{\mu-2}\beta^{2\kappa} + \cdots + (\beta^{2\kappa})^{\mu-1}].$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

1. $\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2)^3+(\beta^2)^3=(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha^2)^2-\alpha^2\beta^2+(\beta^2)^2]$
$=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4-\alpha^2\beta^2+\beta^4)$.

2. $\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^2)^5+(\beta^2)^5$
$=(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^8-\alpha^6\beta^2+\alpha^4\beta^4-\alpha^2\beta^6+\beta^8)$.

3. $\alpha^{12}+\beta^{12}=(\alpha^4)^3+(\beta^4)^3=(\alpha^4+\beta^4)\cdot(\alpha^8-\alpha^4\beta^4+\beta^8)$.

Στην ειδική περίπτωση που είναι $\nu=2^\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$, $\kappa>1$ έχουμε:

$$\alpha^\nu+\beta^\nu=\alpha^{2^\kappa}+\beta^{2^\kappa}=\left(\alpha^{2^{\kappa-1}}\right)^2+\left(\beta^{2^{\kappa-1}}\right)^2$$
$$=\left(\alpha^{2^{\kappa-1}}\right)^2+\left(\beta^{2^{\kappa-1}}\right)^2+2\alpha^{2^{\kappa-1}}\beta^{2^{\kappa-1}}-2\alpha^{2^{\kappa-1}}\beta^{2^{\kappa-1}}$$
$$=\left(\alpha^{2^{\kappa-1}}+\beta^{2^{\kappa-1}}\right)^2-\left(\sqrt{2}\alpha^{2^{\kappa-2}}\beta^{2^{\kappa-2}}\right)$$
$$=\left(\alpha^{2^{\kappa-1}}+\beta^{2^{\kappa-1}}+\sqrt{2}\alpha^{2^{\kappa-2}}\beta^{2^{\kappa-2}}\right)\left(\alpha^{2^{\kappa-1}}+\beta^{2^{\kappa-1}}-\sqrt{2}\alpha^{2^{\kappa-2}}\beta^{2^{\kappa-2}}\right).$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

1. $\alpha^4+\beta^4=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)-(\sqrt{2}\alpha^2\beta^2)^2$
$=(\alpha^2+\beta^2+\sqrt{2}\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\sqrt{2}\alpha\beta)$

2. $\alpha^8+\beta^8=\alpha^8+\beta^8+2\alpha^4\beta^4-2\alpha^4\beta^4=(\alpha^4+\beta^4)^2-(\sqrt{2}\alpha^2\beta^2)^2$
$=(\alpha^4+\beta^4+\sqrt{2}\alpha^2\beta^2)(\alpha^4+\beta^4-\sqrt{2}\alpha^2\beta^2)$

(η) Συνδυασμός άλλων μεθόδων

Αναφέρουμε τις παρακάτω χαρακτηριστικές περιπτώσεις :

$$\boxed{\mathbf{A^2+2AB+B^2-\Gamma^2=(A+B)^2-\Gamma^2=(A+B+\Gamma)(A+B-\Gamma)}}$$

$$\boxed{\mathbf{A^2-2AB+B^2-\Gamma^2=(A-B)^2-\Gamma^2=(A-B+\Gamma)(A-B-\Gamma)}}$$

Για παράδειγμα έχουμε:

1. $16\alpha^2+24\alpha\beta+9\beta^2-4\gamma^2=(4\alpha+3\beta)^2-(2\gamma)^2=(4\alpha+3\beta+2\gamma)(4\alpha+3\beta-2\gamma)$.

2. $25\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2=(5\alpha)^2-(\beta-\gamma)^2=\left[(5\alpha+(\beta-\gamma)\right]\cdot\left[(5\alpha-(\beta-\gamma)\right]$
$=(5\alpha+\beta-\gamma)(5\alpha-\beta+\gamma)$.

3. $\alpha^4+4\beta^4=(\alpha^2)^2+(2\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\beta^2$
$=(\alpha^2+2\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2$
$=(\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta)$.

4. $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2+\beta^4$
$=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-\alpha^2\beta^2$
$=(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha\beta)^2$
$=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$.

(θ) Χρήση ταυτοτήτων

Η περίπτωση αυτή θα μελετηθεί στην επόμενη ενότητα των ταυτοτήτων.

(ι) Πολυώνυμα βαθμού $\nu > 2$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\quad \alpha_\kappa \neq 0$.

Σύμφωνα με τη θεωρία διαιρετότητας πολυωνύμων, αν για τον αριθμό $\rho \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(\rho) = 0$, τότε το πολυώνυμο $x - \rho$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$. Το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης αυτής, μπορεί να βρεθεί με το σχήμα Horner. Έτσι έχουμε

$$f(x) = (x - \rho)\ \pi(x).$$

Ειδικότερα, για να είναι ο ακέραιος αριθμός ρ ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές πρέπει ο αριθμός ρ να είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. Επομένως οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου α_0.

Επιπλέον, για να είναι ο ρητός αριθμός $\rho = \dfrac{\kappa}{\lambda}$ ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές πρέπει ο αριθμητής κ να είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 και ο παρανομαστής λ να είναι διαιρέτης του μεγιστοβάθμιου όρου α_ν.

.

Παράδειγμα

Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Λύση

Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι οι: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, οπότε με το σχήμα Horner λαμβάνουμε

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & 11 & -6 & 1 \\ & 1 & -5 & 6 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Έτσι έχουμε

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3),$$

αφού για το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$, $\Delta = 1 > 0$ και

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2,\ x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Α2. Ταυτότητες

Ταυτότητα είναι η ισότητα μεταξύ δύο αλγεβρικών παραστάσεων που αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται.

Στην ενότητα αυτή θα απαριθμήσουμε τις βασικές ταυτότητες που χρησιμοποιούμε για τη διευκόλυνση του αλγεβρικού λογισμού. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους επαλήθευσης ταυτοτήτων

.

(α) Τετράγωνο αθροίσματος (διαφοράς) δύο όρων

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

(β) Γινόμενο αθροίσματος δύο όρων επί τη διαφορά τους

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

(γ) Κύβος αθροίσματος (διαφοράς) δύο όρων

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

(δ) Άθροισμα (διαφορά) κύβων

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

(ε) Τετράγωνο αθροίσματος ν όρων, $\nu \geq 3$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta$$

Γενικότερα, έχουμε

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)^2 = (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)\\
&= \alpha_1\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu) + \alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu) + \dots + \alpha_\nu\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)\\
&= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_\nu^2 + 2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_1\alpha_\nu) + 2(\alpha_2\alpha_3+\dots+\alpha_2\alpha_\nu) + \dots + 2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu\\
&= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_\nu^2 + 2(\alpha_1\alpha_2+\dots+\alpha_2\alpha_3+\dots+\alpha_2\alpha_\nu+\dots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu).
\end{aligned}$$

ή συνοπτικά:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)^2 = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq\nu}\alpha_i\alpha_j,$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το σύμβολο $\sum$ του αθροίσματος γράφοντας

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2$$

$$\sum_{1 \le i < j \le \nu} \alpha_i \alpha_j = \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_\nu + \ldots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu .$$

Έτσι έχουμε τον κανόνα:

Το τετράγωνο του αθροίσματος *ν* όρων, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των όρων του, αυξημένο κατά το διπλάσιο του αλγεβρικού αθροίσματος των γινομένων των όρων του λαμβανομένων ανά δύο με όλους τους δυνατούς τρόπους.

(στ) Κύβος αθροίσματος τριών όρων

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma)\\ &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)\\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma\alpha^2+6\alpha\beta\gamma\\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2+2\alpha\beta\gamma)\\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha),\end{aligned}$$

σύμφωνα με το Παράδειγμα 1 της (στ) περίπτωσης της παραγοντοποίησης πολυωνυμικών παραστάσεων. Άρα έχουμε:

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

απ' όπου προκύπτει ο κανόνας:

Ο κύβος του αθροίσματος τριών όρων ισούται με το άθροισμα των κύβων των όρων του, αυξημένο κατά το τριπλάσιο του γινομένου των αλγεβρικών αθροισμάτων των όρων του λαμβανομένων ανά δύο με όλους τους δυνατούς τρόπους.

Για παράδειγμα έχουμε:

1. $(\alpha^2+\beta^2+1)^3 = \alpha^6+\beta^6+1+3(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+1)(\beta^2+1)$.

2. $(2\alpha-\beta-3)^3 = (2\alpha)^3+(-\beta)^3+(-3)^3+3(2\alpha-\beta)(-\beta-3)(-3+2\alpha)$.

$$= 8\alpha^3-\beta^3-27+3(2\alpha-\beta)(\beta+3)(2\alpha-3).$$

(ζ) Η ταυτότητα των κύβων (Euler)

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma\\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]+3\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\\ &= (\alpha+\beta)^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma).\end{aligned}$$

$$= \left[(\alpha+\beta)+\gamma\right]\left[(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2\right]-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha+\beta)^2+\gamma^2-\alpha\gamma-\beta\gamma-3\alpha\beta\right]$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha).$$

Η δεύτερη μορφή προκύπτει μέσω της ισότητας

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right].$$

Για παράδειγμα έχουμε:

1. $\alpha^3-8\beta^3-64\gamma^3-24\alpha\beta\gamma=\alpha^3+(-2\beta)^3+(-4\gamma)^3-3\cdot\alpha\cdot(-2\beta)(-4\gamma)$
$$=(\alpha-2\beta-4\gamma)(\alpha^2+4\beta^2+16\gamma^2+2\alpha\beta-8\beta\gamma+4\gamma\alpha).$$

2. $(\alpha-\beta)^3-\alpha^3+3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)^3+(-\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\alpha-\beta)(-\alpha)(\alpha+\beta)$
$$=\left[(\alpha-\beta)+(-\alpha)+(\alpha+\beta)\right]\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(-\alpha)^2+(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)\alpha+\alpha(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\right]$$
$$=(\alpha-\beta-\alpha+\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2-\alpha\beta+\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^2+\beta^2)$$
$$=\alpha\cdot(4\alpha^2+3\beta^2).$$

(η) Οι ταυτότητες του Lagrange

$$\textbf{(i)}\quad (\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$$

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ορίζουσας ενός πίνακα 2×2, το δεύτερο μέλος της (i) γράφεται:

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2.$$

Η επαλήθευση της (i) γίνεται εύκολα με πράξεις στο πρώτο μέλος.

$$\textbf{(ii)}\quad (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+_2\alpha_3\beta_3)^2$$
$$=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2$$
$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2$$

(Επαλήθευση εύκολη με πράξεις στο πρώτο μέλος).

(iii) Γενικότερα για τις ν-άδες $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu)$, $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_\nu)$ έχουμε

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_\nu^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_\nu\beta_\nu)^2=$$
$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\cdots+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_\nu\\ \beta_1 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\cdots+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_\nu\\ \beta_2 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\cdots+\begin{vmatrix}\alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu\\ \beta_{\nu-1} & \beta_\nu\end{vmatrix}^2$$

Παραδείγματα

1. Να αποδείξετε ότι:

$$(1+\alpha^2)(1+\beta^2)-(1+\alpha\beta)^2=(\alpha-\beta)^2.$$

Απόδειξη

$$(1+\alpha^2)(1+\beta^2)-(1+\alpha\beta)^2=(1^2+\alpha^2)(1^2+\beta^2)-(1\cdot 1+\alpha\cdot\beta)^2$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ 1 & \beta\end{vmatrix}^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha-\beta)^2.$$

2. Να μετατρέψετε την παράσταση

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2+1)-(\alpha x+\beta y)^2$$

σε άθροισμα τετραγώνων.

Λύση

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2+1)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha^2+\beta^2+0^2)(x^2+y^2+1^2)-(\alpha x+\beta y+0\cdot 1)^2$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & 0\\ x & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta & 0\\ y & 1\end{vmatrix}^2=(\alpha y-\beta x)^2+\alpha^2+\beta^2.$$

(θ) Η ταυτότητα του De Moivre

$$\boldsymbol{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2}$$
$$\boldsymbol{=-(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}$$

Απόδειξη

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2$$
$$=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-4\alpha^2\beta^2$$
$$=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(2\alpha\beta)^2$$
$$=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta)$$
$$=[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2][(\alpha-\beta)^2-\gamma^2]$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$
$$=-(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).$$

.

(ι) Η ταυτότητες του Νεύτωνα

$$\boldsymbol{(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}$$
$$\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}$$
$$\boldsymbol{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma}$$
$$\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma}$$

Η επαλήθευση των παραπάνω ταυτοτήτων γίνεται εύκολα με πράξεις στο πρώτο μέλος τους.

Γενικότερα, αν θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$, έχουμε τις ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{(x \pm \alpha_1)(x \pm \alpha_2)...(x \pm \alpha_\nu) = x^\nu \pm (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu)} \\
&\qquad \boldsymbol{= x^{\nu-1} + (\alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_1\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_2\alpha_\nu + ... + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-2}} \\
&\qquad \boldsymbol{\pm(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_2\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + ... + \alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-3}} \\
&\qquad \boldsymbol{+ ... + (-1)^{\nu-1}(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{\nu-1} + ...)x + (-1)^\nu \alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu .}
\end{aligned}$$

ή συντομότερα,

$$\boldsymbol{(x + \alpha_1)(x + \alpha_2)...(x + \alpha_\nu) = x^\nu + \Sigma_1 x^{\nu-1} + \Sigma_2 x^{\nu-2} + \Sigma_3 x^{\nu-3} + ... + \Sigma_{\nu-1} x + \Sigma_\nu ,}$$

όπου για τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$, έχουμε θέσει:

$$\Sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu ,$$

$$\Sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_2\alpha_\nu + ... + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu .$$

[*Άθροισμα γινομένων των αριθμών* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$, *λαμβανομένων ανά δύο. Υπάρχουν συνολικά* $\binom{\nu}{2} := \frac{\nu!}{(\nu-2)!2!} = \frac{(\nu-1)\nu}{2}$ *όροι*].

Το σύμβολο $\nu!$ διαβάζεται «**νι παραγοντικό**» και ορίζεται ως εξής:

$$\nu! = 1 \cdot 2 \cdot .... \cdot \nu, \text{ αν } \nu = 1, 2, 3, ... \text{ και } 0! = 1.$$

$$\Sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_1\alpha_2\alpha_\nu + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + ... + \alpha_1\alpha_3\alpha_\nu + ... + \alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$$

[*Άθροισμα γινομένων των αριθμών* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$, *λαμβανομένων ανά τρεις. Υπάρχουν συνολικά* $\binom{\nu}{3} := \frac{\nu!}{3!(\nu-2)!} = \frac{(\nu-1)\nu}{2}$ *όροι*].

…………………………………………………………………………………..

$$\Sigma_{\nu-1} = \alpha_1\alpha_2...\alpha_{\nu-1} + \alpha_1\alpha_2...\alpha_{\nu-2}\alpha_\nu + ... + \alpha_2\alpha_3...\alpha_\nu$$

[*Άθροισμα γινομένων των αριθμών* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$, *λαμβανομένων ανά* $\nu-1$. *Υπάρχουν* ν *όροι*].

$$\Sigma_\nu = \alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu .$$

(ια) Το διώνυμο του Νεύτωνα

Αν στις ταυτότητες του Νεύτωνα θέσουμε: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha$, λαμβάνουμε το ανάπτυγμα του διωνύμου του Νεύτωνα:

$$\boldsymbol{(x + \alpha)^\nu = x^\nu + \Sigma_1 x^{\nu-1} + \Sigma_2 x^{\nu-2} + \Sigma_3 x^{\nu-3} + ... + \Sigma_{\nu-1} x + \Sigma_\nu ,}$$

όπου έχουμε

$$\boxed{\Sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \nu\alpha = \binom{\nu}{1}\alpha ,}$$

αφού $\binom{\nu}{1} = \frac{\nu!}{(\nu-1)!1!} = \nu$,

$$\boxed{\Sigma_2 = \binom{\nu}{2}\alpha^2}$$

αφού $\binom{\nu}{2} = \frac{\nu!}{2!(\nu-2)!} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$,

$$\boxed{\Sigma_3 = \binom{\nu}{3}\alpha^3 = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6}\alpha^3, ..., \Sigma_{\nu-1} = \binom{\nu}{\nu-1}\alpha = \nu\alpha^{\nu-1}, \Sigma_\nu = \alpha^\nu,}$$

αφού είναι: $\binom{\nu}{3} := \frac{\nu!}{3!(\nu-3)!} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6}, \binom{\nu}{\nu-1} = \binom{\nu}{1} = \nu$.

Έτσι έχουμε:

$$\boldsymbol{(x+\alpha)^\nu = x^\nu + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^2 + \binom{\nu}{3}x^{\nu-3}\alpha^3 + ... + \binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1} + \alpha^\nu}$$

Από την παραπάνω ταυτότητα λαμβάνουμε:

$$(x-\alpha)^\nu = \left[x+(-\alpha)\right]^\nu =$$

$$= x^\nu - \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^2 - \binom{\nu}{3}x^{\nu-3}\alpha^3 + ... + (-1)^{\nu-1}\binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1} + (-1)^\nu\alpha^\nu.$$

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο Σ του αθροίσματος και το σύμβολο των συνδυασμών ν ανά κ μπορούμε να γράψουμε το διώνυμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$(x+\alpha)^\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\nu-\kappa}\alpha^\kappa$$

$$(x-\alpha)^\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu}(-1)^\kappa\binom{\nu}{\kappa}x^{\nu-\kappa}\alpha^\kappa$$

Για τις μικρές τιμές του ν έχουμε τα αναπτύγματα:

$$(x\pm\alpha)^2 = x^2 \pm 2x\alpha + \alpha^2$$

$$(x\pm\alpha)^3 = x^3 \pm 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 \pm \alpha^3$$

$$(x\pm\alpha)^4 = x^4 \pm 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 \pm 4x\alpha^3 + \alpha^4$$

$$(x\pm\alpha)^5 = x^5 \pm 5x^4\alpha + 10x^3\alpha^2 \pm 10x^2\alpha^3 + 5x\alpha^4 \pm \alpha^5$$

$$(x\pm\alpha)^6 = x^6 \pm 6x^5\alpha + 15x^4\alpha^2 \pm 20x^3\alpha^3 \pm 15x^2\alpha^4 + 6x\alpha^5 \pm \alpha^6$$

Παρατηρήσεις

Ένα πολυώνυμο $f(x,\alpha)$ είναι **ομογενές βαθμού k**, αν για κάθε $t \in \mathrm{R}$ ισχύει η ισότητα $f(tx,t\alpha) = t^\kappa f(x,\alpha)$. Έτσι, εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα πολυώνυμα $(x \pm a)^\nu$ είναι ομογενή βαθμού ν.

Το πλήθος των όρων των δύο αναπτυγμάτων είναι $\nu+1$.

Οι εκθέτες του x από αριστερά προς τα δεξιά μειώνονται κατά 1, ενώ οι εκθέτες του α αυξάνονται κατά 1.

Όλοι οι όροι του αναπτύγματος $(x+a)^{\nu}$ έχουν θετικά πρόσημα, ενώ οι όροι του $(x-a)^{\nu}$ έχουν εναλλάξ θετικό-αρνητικό πρόσημο.

Επειδή ισχύει

$$\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}:=\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!},\quad 0\le\kappa\le\nu\ ,\ 0!=1,$$

οι συντελεστές των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι ίσοι.

Αν ο ν είναι άρτιος, το πλήθος των όρων των δύο αναπτυγμάτων είναι περιττό και τότε μόνον υπάρχει μεσαίος όρος.

Ο συντελεστής ενός όρου (χωρίς πρόσημο), μετά τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενο όρο ως εξής:

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma)\times(\varepsilon\kappa\theta\acute{\varepsilon}\tau\eta\varsigma\ \tau o\upsilon\ x)}{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \acute{o}\rho o\upsilon\ \sigma\tau o\ \alpha\nu\acute{\alpha}\pi\tau\upsilon\gamma\mu\alpha}.$$

Για παράδειγμα, στο ανάπτυγμα του $(x+a)^6$ ο συντελεστής του τρίτου όρου προκύπτει από το δεύτερο όρο ως εξής:

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma)\times(\varepsilon\kappa\theta\acute{\varepsilon}\tau\eta\varsigma\ \tau o\upsilon\ x)}{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \delta\varepsilon\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho o\upsilon\ \acute{o}\rho o\upsilon}=\frac{6\cdot 5}{2}=15.$$

Εκτός του παραπάνω μνημονικού κανόνα για την εύρεση των συντελεστών του αναπτύγματος $(x+a)^{\nu}$ για τις διάφορες τιμές του ν, χρησιμοποιούμε και το **τρίγωνο του Pascal** (1623 – 1662) που εμφανίζεται πρώτα στο έργο του Pascal «Περί αριθμητικού τριγώνου» το 1653. Τα ακραία στοιχεία κάθε γραμμής είναι 1, ενώ τα υπόλοιπα προκύπτουν με πρόσθεση δύο στοιχείων της προηγούμενης γραμμής, δηλαδή του στοιχείου που βρίσκεται στην ακριβώς από πάνω θέση αριστερά και του στοιχείου που βρίσκεται ακριβώς δεξιά του.

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1
\end{array}$$

Το τρίγωνο του Pascal μέχρι $\nu=7$

Για παράδειγμα, το στοιχείο 20 του πίνακα προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων 10 και 10 της προηγούμενης γραμμής.

(ιβ) Ταυτότητες κάτω από συνθήκες

Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=0\ \text{ ή }\ \boldsymbol{\alpha=\beta=\gamma\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma}}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της ταυτότητας των κύβων (Euler)

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right].$$

Α3. Αναλογίες

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων, δηλαδή η ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}, \quad \beta\delta \neq 0.$$

Οι όροι $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ μιας αναλογίας μπορεί να είναι αριθμοί ή γενικότερα αλγεβρικές παραστάσεις. Οι α,δ είναι οι **άκροι** όροι, ενώ οι β,γ είναι οι **μέσοι** όροι της αναλογίας.

Η αναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}, \quad \beta\gamma \neq 0,$$

λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέσος ανάλογος** των α και γ

Στη συνέχεια αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητες των αναλογιών, όπου όλοι οι εμφανιζόμενοι παρονομαστές πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός.

(i) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$

Τα γινόμενα των άκρων και των μέσων όρων είναι ίσα.

Απόδειξη

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}=0 \Leftrightarrow \alpha\delta-\beta\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma.$$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}.$

Με εναλλαγή των άκρων ή των μέσων όρων η αναλογία δεν μεταβάλλεται. Το ίδιο ισχύει και με αντιστροφή των λόγων.

(iii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}\pm 1=\frac{\gamma}{\delta}\pm 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}.$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}.$

Απόδειξη

$$\frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta} \Leftrightarrow \alpha(\gamma\pm\delta)=\gamma(\alpha\pm\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma\pm\alpha\delta=\gamma\alpha\pm\gamma\beta \Leftrightarrow \alpha\delta=\gamma\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

(v) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}.$

Απόδειξη

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta} \quad \text{(αντιστροφή λόγων)}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)$$
$$\Leftrightarrow \alpha\gamma-\alpha\delta+\beta\gamma-\beta\delta=\alpha\gamma+\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta$$
$$\Leftrightarrow 2\beta\gamma=2\alpha\delta \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

(vi) Αν είναι $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, τότε

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}=\frac{\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\ldots+\kappa_\nu\alpha_\nu}{\kappa_1\beta+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu},$$

($\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu\neq 0$, $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu\neq 0$, $\kappa_1\beta+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu\neq 0$).

Απόδειξη

Αν ονομάσουμε λ τους ν ίσους λόγους, δηλαδή

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\lambda.$$

Τότε θα έχουμε $\alpha_i=\lambda\beta_i$, για κάθε $i=1,2,\ldots,\nu$ και

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=\lambda\beta_1+\lambda\beta_2+\ldots+\lambda\beta_\nu=\lambda(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)$$
$$\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\ldots+\kappa_\nu\alpha_\nu=\kappa_1\lambda\beta_1+\kappa_2\lambda\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\lambda\beta_\nu$$
$$=\lambda(\kappa_1\beta_1+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu).$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}=\frac{\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\ldots+\kappa_\nu\alpha_\nu}{\kappa_1\beta+\kappa_2\beta_2+\ldots+\kappa_\nu\beta_\nu}=\lambda$$

Παρατήρηση

Η μέθοδος απόδειξης της τελευταίας ιδιότητας χρησιμοποιείται συχνά σε ασκήσεις, στις υποθέσεις των οποίων υπάρχουν μία ή περισσότερες αναλογίες.

Α4. Ρητά αλγεβρικά κλάσματα

Ρητό αλγεβρικό κλάσμα είναι μία συνάρτηση της μορφής $y=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, όπου τα Α, Β είναι πολυώνυμα μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών. Το παραπάνω ρητό αλγεβρικό κλάσμα έχει έννοια για εκείνες τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ισχύει $\mathrm{B}\neq 0$.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την απλοποίηση ρητών αλγεβρικών κλασμάτων και με τις διάφορες πράξεις μεταξύ αυτών.

Για την απλοποίηση του ρητού αλγεβρικού κλάσματος $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ παραγοντοποιούμε τους δύο όρους τους και στη συνέχεια τους διαιρούμε με το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους ΜΚΔ(Α, Β), δηλαδή με το γινόμενο των κοινών τους όρων του μέγιστου δυνατού βαθμού. Το ρητό αλγεβρικό κλάσμα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ δεν απλοποιείται, όταν οι όροι του είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους ή ισοδύναμα ο ΜΚΔ(Α, Β) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο $c\neq 0$.

Με την υπόθεση ότι όλοι οι εμφανιζόμενοι παρανομαστές στα δεδομένα κλάσματα ή στα αποτελέσματα είναι διάφοροι του μηδενός, έχουμε σχετικά με τις πράξεις μεταξύ ρητών αλγεβρικών κλασμάτων:

- $\dfrac{A}{B} \pm \dfrac{\Gamma}{B} = \dfrac{A \pm \Gamma}{B}$,
- $\dfrac{A}{B} \pm \dfrac{\Gamma}{\Delta} = \dfrac{A\Delta \pm B\Gamma}{B\Delta}$,
- $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{B\Delta}$,
- $\dfrac{A}{B} : \dfrac{\Gamma}{\Delta} = \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{\Delta}{\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{B\Gamma}$.

Η κλασματική παράσταση της μορφής $\dfrac{X}{Y}$, όπου όροι X, Y είναι τα ρητά αλγεβρικά κλάσματα $X = \dfrac{A}{B}$, $Y = \dfrac{\Gamma}{\Delta}$ λέγεται **σύνθετο κλάσμα**. Σε ένα σύνθετο κλάσμα είναι δυνατόν να ισχύει μία το πολύ από τις ισότητες Β = 1 ή Δ = 1. Τα ρητά αλγεβρικά κλάσματα με Β = 1 = Δ, δηλαδή με Χ = Α, Υ = Γ, τα λέμε **απλά**.

Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό σύμφωνα με το γνωστό κανόνα πολλαπλασιασμού άκρων και μέσων όρων.

$$\mathbf{\frac{X}{Y} = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{\Gamma}{\Delta}} = \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{A \cdot \Delta}{B \cdot \Gamma}}.$$

Παραδείγματα

1. . Να απλοποιηθεί το ρητό αλγεβρικό κλάσμα

$$K = \frac{xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)}{xy(a^2 - b^2) + ab(x^2 - y^2)}.$$

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2) &= xya^2 + xyb^2 + abx^2 + aby^2 \\ &= (xya^2 + abx^2) - (xyb^2 + aby^2) \\ &= ax(ay + bx) - by(ay + bx) \\ &= (ay + bx)(ax - by). \end{aligned}$$

Ομοίως ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται:

$$
\begin{aligned}
xy(a^2 - b^2) + ab(x^2 - y^2) &= xya^2 - xyb^2 + abx^2 - aby^2 \\
&= (xya^2 + abx^2) - (xyb^2 + aby^2) \\
&= ax(ay + bx) - by(ay + bx) \\
&= (ay + bx)(ax - by).
\end{aligned}
$$

Άρα έχουμε

$$K = \frac{(ay+bx)(ax+by)}{(ay+bx)(ax-by)} = \frac{ax+by}{ax-by},$$

εφόσον $(ay + bx)(ax - by) \neq 0$.

2. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύει $\alpha y = \beta x$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.-Θαλής 1997

Υπόδειξη

Αφού $\alpha y = \beta x$ θα είναι και $\alpha^2 y^2 = \beta^2 x^2$, στη συνέχεια πηγαίνουμε στην παράσταση και κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα, εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε $A = 1$.

.

3. Να μετατραπεί σε ρητό αλγεβρικό κλάσμα η παράσταση

$$K = \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x^3 - 3xy(x-y) - y^3} \bullet \frac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3} \right) : \frac{x+y}{(x-y)^3}.$$

Λύση

Παραγοντοποιούμε όπου είναι δυνατόν τους όρους των κλασμάτων.

$$x^3 - 3xy(x-y) - y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3,$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

$$x^3 + y^3 = (x + y(x^2 - xy + y^2).$$

Έτσι έχουμε:

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{x^2 - xy + y^2}{(x-y)^3} \bullet \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)} \bullet \frac{(x-y)^3}{x+y} \\
&= \frac{(x^2 - xy + y^2)(x-y)^4(x+y)}{(x^2 - xy + y^2)(x-y)^3(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y},
\end{aligned}
$$

εφόσον για τις μεταβλητές x, y ισχύει $x \pm y \neq 0$.

4. Να μετατραπεί σε απλό το σύνθετο κλάσμα

$$\Sigma = \frac{\left(x - \frac{x^2 + xy}{x - y}\right) \bullet \left(x - \frac{x^2 + xy}{x + y}\right)}{xy + \frac{xy^3}{x^2 - y^2}}.$$

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος γράφεται:

$$A = \frac{x^2 - xy - x^2 - xy}{x - y} \bullet \frac{x^2 + xy - 2x^2 - xy}{x + y} = \frac{-2xy}{x - y} \bullet \frac{-x^2}{x + y} = \frac{2x^3y}{(x - y)(x + y)}.$$

Ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται:

$$\Pi = \frac{xy(x^2 - y^2) + xy^3}{x^2 - y^2} = \frac{x^3y}{(x - y)(x + y)},$$

οπότε έχουμε

$$\Sigma = \frac{2x^3y}{(x - y)(x + y)} : \frac{x^3y}{(x - y)(x + y)} = \frac{2x^3y}{(x - y)(x + y)} \bullet \frac{(x - y)(x + y)}{x^3y} = 2,$$

εφόσον για τις μεταβλητές x,y και $x \pm y \neq 0$.

5. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a \neq b \neq c \neq a$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = \frac{a(b + c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{b(c + a)}{(b - a)(b - c)} + \frac{c(a + b)}{(c - a)(c - b)}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}
A &= -\left[\frac{a(b + c)}{(a - b)(c - a)} + \frac{b(c + a)}{(a - b)(b - c)} + \frac{c(a + b)}{(c - a)(b - c)}\right] \\
&= -\left(\frac{a(b + c)(b - c) + b(c + a)(c - a) + c(a + b)(a - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)}\right) \\
&= -\left(\frac{a\left(b^2 - c^2\right) + b\left(c^2 - a^2\right) + c\left(a^2 - b^2\right)}{(a - b)(b - c)(c - a)}\right) \\
&= -\frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)} = -1,
\end{aligned}$$

αφού εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned}a\left(b^2-c^2\right)+b\left(c^2-a^2\right)+c\left(a^2-b^2\right)&=a\left(b-c\right)\left(b+c\right)+bc\left(c-b\right)+a^2\left(c-b\right)\\&=\left(b-c\right)\left[a\left(b+c\right)-bc-a^2\right]\\&=\left(b-c\right)\left(ab+ac-bc-a^2\right)\\&=\left(b-c\right)\left[b\left(a-c\right)+a\left(c-a\right)\right]\\&=\left(b-c\right)\left(c-a\right)\left(a-b\right).\end{aligned}$$

6. Αν $a,b,c\in\mathbb{R}$ με $a+b+c=0$ και $a\neq b\neq c\neq a$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{a^3\left(a+b\right)\left(a+c\right)}{\left(a-c\right)\left(a-b\right)}+\frac{b^3\left(b+a\right)\left(b+c\right)}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}+\frac{c^3\left(c+a\right)\left(c+b\right)}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}.$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $a+b+c=0$, γράφουμε την παράσταση Α στη μορφή

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{a^3\left(-b\right)\left(-c\right)}{\left(a-c\right)\left(a-b\right)}+\frac{b^3(-c)(-a)}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}+\frac{c^3(-a)(-b)}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}\\&=\frac{a^3bc}{\left(a-c\right)\left(a-b\right)}+\frac{b^3ca}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}+\frac{c^3ab}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}\\&=abc\left(\frac{a^2}{\left(a-c\right)\left(a-b\right)}+\frac{b^2}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}+\frac{c^2}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}\right)\\&=abc\mathrm{B},\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=\frac{a^2}{\left(a-c\right)\left(a-b\right)}+\frac{b^2}{\left(b-a\right)\left(b-c\right)}+\frac{c^2}{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}\\&=-\frac{a^2}{\left(c-a\right)\left(a-b\right)}-\frac{b^2}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)}-\frac{c^2}{\left(c-a\right)\left(b-c\right)}\\&=-\left(\frac{a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}\right)\\&=-\left(\frac{-\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)}\right)=1,\end{aligned}$$

αφού εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)&=a^2\left(b-c\right)+b^2c-bc^2-ab^2+ac^2\\&=a^2\left(b-c\right)+bc\left(b-c\right)-a\left(b-c\right)\left(b+c\right)\\&=\left(b-c\right)\left(a^2+bc-ab-ac\right)\\&=\left(b-c\right)\left[a\left(a-b\right)-c\left(a-b\right)\right]\\&=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(a-c\right)=-\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right).\end{aligned}$$

7. Αν $a,b,c\in\mathbb{R}$ με $a\neq b\neq c\neq a$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{B}=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}.$$

Λύση

Θέτουμε $a+b+c=A$, οπότε έχουμε

$$a+b-c=A-2c, b+c-a=A-2a, c+a-b=A-2b.$$

Έτσι η παράσταση Β γίνεται:

$$\mathrm{B}=\frac{(A-2c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(A-2a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(A-2b)^2}{(c-b)(a-b)}=-\left[\frac{(A-2c)^2}{(c-a)(b-c)}+\frac{(A-2a)^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{(A-2b)^2}{(b-c)(a-b)}\right]$$

$$=-\frac{(A-2c)^2(a-b)+(A-2a)^2(b-c)+(A-2b)^2(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{A^2(a-b+b-c+c-a)-4A\left[c(a-b)+a(b-c)+b(c-a)\right]+4\left[c^2(a-b)+a^2\right](b-c)+b^2(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{-4(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=4.$$

8. Αν $a,b,c\in\mathbb{R}$ με $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{27}{2}$, $abc\neq 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Gamma=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b-5c}+\frac{1}{b+c-5a}+\frac{1}{c+a-5b}\right).$$

Λύση

Λόγω της μορφής των παρανομαστών της παράστασης Γ, θέτουμε $a+b+c=6A$, οπότε έχουμε $a+b-5c=6(A-c)$, $b+c-5a=6(A-a)$, $c+a-b=6(A-b)$. Με την υπόθεση ότι όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός, η παράσταση Γ γίνεται:

$$\Gamma=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b-5c}+\frac{1}{b+c-5a}+\frac{1}{c+a-5b}\right)=6A\left(\frac{1}{6(A-c)}+\frac{1}{6(A-a)}+\frac{1}{6(A-b)}\right)$$

$$=A\left(\frac{1}{A-c}+\frac{1}{A-a}+\frac{1}{A-b}\right)=A\cdot\frac{(A-a)(A-b)+(A-b)(A-c)+(A-c)(A-a)}{(A-a)(A-b)(A-c)}$$

$$\Leftrightarrow\Gamma=\frac{3A^3-2(a+b+c)A^2+(ab+bc+ca)A}{A^3-(a+b+c)A^2+(ab+bc+ca)A-abc}.$$

Επιπλέον, η υπόθεση $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{27}{2}$, $abc\neq 0$, γράφεται στη μορφή

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}=\frac{27}{2}, abc\neq 0\Leftrightarrow(ab+bc+ca)A=\frac{27abc}{12},$$

οπότε η παράσταση Γ γίνεται

$$\Gamma=\frac{3A^3-2\left(a+b+c\right)A^2+(ab+bc+ca)A}{A^3-\left(a+b+c\right)A^3+\left(ab+bc+ca\right)A-abc}$$

$$=\frac{3A^3-12A^3+\dfrac{27abc}{12}}{A^3-6A^3+\dfrac{27abc}{12}-abc}=\frac{-9A^3+\dfrac{27abc}{12}}{-5A^3+\dfrac{15abc}{12}}=\frac{9\left(-A^3+\dfrac{3abc}{12}\right)}{5\left(-A^3+\dfrac{3abc}{12}\right)}=\frac{9}{5}.$$

9. Οι διάφοροι μεταξύ τους και του μηδενός πραγματικοί αριθμοί x, y, z **ικανοποιούν τις σχέσεις**

$$x^3+y^3+\mu(x+y)=y^3+z^3+\mu(y+z)=z^3+x^3+\mu(z+x),\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι ή παράσταση

$$K=\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\left(\frac{z}{x-y}+\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}\right)$$

είναι ανεξάρτητη των x, y, z **και** μ.

Λύση

Θέτουμε

$$x^3+y^3+\mu(x+y)=A \qquad (1)$$

$$y^3+z^3+\mu(y+z)=A \qquad (2)$$

$$z^3+x^3+\mu(z+x)=A \qquad (3)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε

$$x^3-z^3+\mu(x-z)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-z)(x^2+xz+z^2)+\mu(x-z)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-z)(x^2+xz+z^2+\mu)=0$$

$$\overset{x-z\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+xz+z^2+\mu=0 \qquad (4)$$

Ομοίως με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (3) έχουμε

$$y^2+yz+z^2+\mu=0 \qquad (5)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε

$$x^2-y^2+z(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+z)=0$$

$$\overset{x-y\neq 0}{\Leftrightarrow} x+y+z=0. \qquad (6)$$

Μετά από πράξεις η παράσταση K γίνεται

$$K=3+\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\cdot\frac{z}{x-y}+\left(\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\cdot\frac{x}{y-z}+\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}\right)\cdot\frac{y}{z-x}.$$

Επιπλέον έχουμε

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\cdot\frac{z}{x-y}=\frac{y^2-zy+zx-x^2}{xy}\cdot\frac{z}{x-y}$$

$$=\frac{(y-x)(y+x)-z(y-x)}{xy}\cdot\frac{z}{x-y}$$

$$= \frac{(y-x)(y+x-z)}{xy} \cdot \frac{z}{x-y}$$
$$= \frac{-(y+x-z)z}{xy}$$
$$= \frac{2z^2}{xy}, \qquad \text{(αφού } x+y+z=0\text{)}$$

Ομοίως προκύπτουν

$$\left(\frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}\right) = \frac{2x^2}{yz}$$
$$\left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x}\right)\left(\frac{y}{z-x}\right) = \frac{zy^2}{zx}.$$

Έτσι η παράσταση K γίνεται

$$K = 3 + \frac{2z^2}{xy} + \frac{2x^2}{yz} + \frac{2y^2}{zx} = 3 + \frac{2\left(x^3+y^3+z^3\right)}{xyz}$$

Όμως, είναι γνωστή η συνεπαγωγή

$$x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 = 3xyz,$$

οπότε μέσω αυτής έχουμε ότι

$$K = 3 + \frac{2\left(x^3+y^3+z^3\right)}{xyz} = 3 + \frac{2\cdot 3xyz}{xyz} = 9$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y, z και μ.

Α5. Μεθοδολογία απόδειξης ανισοτήτων

Α. Μέθοδος ισοδυνάμων ανισοτήτων

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύουμε την ισοδυναμία της ανισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε με μία άλλη ανισότητα που η αλήθειά της είναι γνωστή ή μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχθεί. Η τελευταία ανισότητα μπορεί να είναι σε κάποια από τις μορφές:

- $\mathrm{A} > 0$ ή $\mathrm{A} \geq 0$, όπου Α είναι ένα τέλειο τετράγωνο μη μηδενικής παράστασης, π. χ. $\mathrm{A} = \left(1+\alpha^2\right)^2$ ή για τη δεύτερη περίπτωση $\mathrm{A} = \left(\alpha - \beta\right)^2$.
- $\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + \ldots + \mathrm{A}_\nu^2 > 0$ ή $\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + \ldots + \mathrm{A}_1^2 \geq 0$
- $\kappa_1\mathrm{A}_1^2 + \kappa_2\mathrm{A}_2^2 + \ldots + \kappa_\nu\mathrm{A}_\nu^2 > 0$ ή $\kappa_1\mathrm{A}_1^2 + \kappa_2\mathrm{A}_2^2 + \ldots + \kappa_\nu\mathrm{A}_1^2 \geq 0$, με $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\nu > 0$.

Παράδειγμα 1. Να αποδείξετε ότι: $x^2 + y^2 \geq 2xy,$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - y\right)^2 \geq 0,$$ που ισχύει.

Παράδειγμα 2

(α) Για κάθε $x > 0,$ να αποδείξετε ότι: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$

(β) Για κάθε $x < 0,$ να αποδείξετε ότι: $x + \dfrac{1}{x} \leq -2.$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση. (α) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2, x > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x, x > 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 \geq 0,$ που ισχύει.

Η ισότητα, ισχύει, αν, και μόνον αν, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

(β) $x + \dfrac{1}{x} \leq -2, x < 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq -2x, x < 0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2 \geq 0,$ που ισχύει.

Η ισότητα, ισχύει, αν, και μόνον αν, $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Παράδειγμα 3

(α) Αν $xy > 0\,(x, y$ ομόσημοι$)$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$.

(β) Αν $xy < 0\,(x, y$ ετερόσημοι$)$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \leq -2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση. (α) Αν $xy > 0\,(x, y$ ομόσημοι$)$, έχουμε

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \overset{xy>0}{\Leftrightarrow} \frac{x^2 + y^2}{xy} \cdot xy \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \left(x - y\right)^2 \geq 0,$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, $x = y \neq 0$.

(β) Αν $xy < 0\,(x, y$ ετερόσημοι$)$, έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le -2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\le -2 \overset{xy<0}{\Leftrightarrow} \frac{x^2+y^2}{xy}\cdot xy \ge -2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge -2xy \Leftrightarrow (x+y)^2\ge 0, \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, $x=-y\neq 0$.

Παράδειγμα 4 Να αποδείξετε ότι:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge (ax+by)^2, \text{ για κάθε } a,b,x,y\in\mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση. Για κάθε $a,b,x,y\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge (ax+by)^2 \Leftrightarrow a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\ge a^2x^2+2axby+b^2y^2$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2+b^2x^2-2abxy\ge 0 \Leftrightarrow (ay-bx)^2\ge 0,$$

που ισχύει. Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει ότι η ισότητα ισχύει όταν

$$ay-bx=0 \Leftrightarrow ay=bx \overset{\text{αν } xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{a}{x}=\frac{b}{y}.$$

Παράδειγμα 5. Για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση. Για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz+z^2+x^2-2zx\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0, \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0 \Leftrightarrow x=y=z.$$

Πράγματι, αν ήταν $x\neq y$, τότε θα είχαμε $(x-y)^2>0$, οπότε θα είχαμε

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0, \text{ άτοπο.}$$

Το ίδιο προκύπτει, αν υποθέσουμε ότι $x\neq z$ ή $y\neq z$.

Παράδειγμα 6. Αν a,b θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$a^3+b^3\ge ab(a+b).$$

Λύση. Έχουμε

$$a^3+b^3\ge ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\ge ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0,$$

που ισχύει, αφού $a>0,\ b>0$, οπότε $a+b>0, (a-b)^2\ge 0$.

Η ισότητα ισχύει όταν

$$\left(a-b\right)^2=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b.$$

Παράδειγμα 7. Για κάθε πραγματικό αριθμό a, να αποδείξετε ότι:

$$a+a^3-a^4-a^6<1.$$

(Αυστρία 2012)

Λύση. Με συμπλήρωση τετραγώνων και προσθαφαίρεσης του όρου a^2, έχουμε:

$$a+a^3-a^4-a^6<1 \Leftrightarrow a^6+a^4-a^3-a+1>0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^6-a^3+\frac{1}{4}\right)+\left(a^4-a^2+\frac{1}{4}\right)+\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0, \text{ που ισχύει.}$$

Β. Αναγωγή σε κλασσικές ανισότητες

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε με τις πιο βασικές κλασσικές ανισότητες, οι οποίες εμφανίζονται σε προβλήματα διαγωνισμών νέων. Τέτοιες ανισότητες είναι οι εξής:

1. Ανισότητα αριθμητικού, γεωμετρικού και αρμονικού μέσου

- Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ονομάζεται **αριθμητικός μέσος** των αριθμών α,β. Η ονομασία αυτή προκύπτει από το ότι ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι ο κατάλληλος αριθμός μεταξύ των α,β, ώστε οι τρεις αριθμοί $\alpha,\frac{\alpha+\beta}{\beta},\beta$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, δηλαδή να ικανοποιούν τη σχέση
$$\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}.$$
- Επίσης, ο αριθμός $\sqrt{\alpha\beta}$ ονομάζεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών α,β, αν $\alpha,\beta>0$, δηλαδή α,β ομόσημοι. Η ονομασία αυτή προκύπτει από το ότι ο αριθμός $\sqrt{\alpha\beta}$ είναι ο κατάλληλος αριθμός μεταξύ των α,β, ώστε οι τρεις αριθμοί $\alpha,\sqrt{\alpha\beta},\beta$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου προόδου, δηλαδή να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha}=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$.
- Επίσης, για $\alpha,\beta\neq 0$ ο αριθμός $\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ονομάζεται **αρμονικός μέσος** των αριθμών α,β. Ο αριθμός αυτός είναι ο κατάλληλος μεταξύ των α,β, ώστε οι τρεις αριθμοί $\alpha,\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta},\beta$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αρμονικής προόδου, δηλαδή οι αντίστροφοί τους να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου: $\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}-\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$, που ισχύει.

Ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού – αρμονικού μέσου για δύο θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ *ισχύουν οι ανισότητες:*

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Η ισότητα και στις δύο περιπτώσεις ισχύει, αν και μόνον αν $\alpha = \beta$.

Τα προηγούμενα γενικεύονται για περισσότερους από δύο αριθμούς. Έτσι για τρεις αριθμούς έχουμε:

Ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού – αρμονικού μέσου για τρεις θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *ισχύουν οι ανισότητες:*

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

Η ισότητα και στις δύο περιπτώσεις ισχύει, αν και μόνον αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Η πιο γενική περίπτωση για ν αριθμούς έχει ως εξής:

Ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού – αρμονικού μέσου για ν θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

Για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$ *ισχύουν οι ανισότητες:*

$$\frac{\alpha_1+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu} \geq \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}}.$$

Η ισότητα και στις δύο περιπτώσεις ισχύει, αν και μόνον αν,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu.$$

Παράδειγμα 8. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να αποδείξετε ότι:

(α) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$

(β) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \geq 9\alpha\beta\gamma$

(γ) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq 9\alpha\beta\gamma$

Πότε ισχύει η ισότητα σε καθένα από τα παραπάνω ερωτήματα;

Λύση (α) Επειδή είναι $\alpha, \beta > 0$, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, έχουμε:

$$\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \quad (1) \quad \beta+\gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma}, \quad (2) \quad \gamma+\alpha \geq 2\sqrt{\gamma\alpha} \quad (3)$$

Επειδή οι τρεις παραπάνω ανισότητες έχουν θετικά τα δύο μέλη τους μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, οπότε λαμβάνουμε:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 2^3\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$$

Η ισότητα ισχύει, όταν και στις τρεις ανισότητες που πολλαπλασιάσαμε κατά μέλη ισχύει η ισότητα, δηλαδή όταν

$$\alpha = \beta, \beta = \gamma \text{ και } \gamma = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma .$$

(β) Επειδή είναι $\alpha, \beta, \gamma > 0$, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}, \quad (4) \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\beta\gamma\gamma\alpha} \qquad (5)$$

Επειδή οι δύο παραπάνω ανισότητες έχουν θετικά τα δύο μέλη τους μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, οπότε λαμβάνουμε:

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geq 9\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\sqrt[3]{\alpha\beta\beta\gamma\gamma\alpha} = 9\alpha\beta\gamma .$$

Η ισότητα ισχύει, όταν και στις δύο ανισότητες που πολλαπλασιάσαμε κατά μέλη ισχύει η ισότητα, δηλαδή όταν

$$\alpha = \beta, \beta = \gamma \text{ και } \gamma = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma .$$

(γ) Σύμφωνα με το παράδειγμα 5, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma > 0$, ισχύει ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha ,$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο ερώτημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geq 9\alpha\beta\gamma$, το οποίο αποδείξαμε στο ερώτημα (β).

2. Ανισότητα των Cauchy - Schwarz

Για δύο δυάδες πραγματικών αριθμών (α_1, α_2) και (β_1, β_2) *ισχύει:*

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) \geq \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\right)^2$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνον όταν:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \ \text{ή} \ \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \text{ αν } \beta_1\beta_2 \neq 0.$$

Η απόδειξη της ανισότητας αυτής και για το πότε ισχύει η ισότητα είναι άμεση με εφαρμογή της ταυτότητας του Lagrange:

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) - \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\right)^2 = \left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right)^2 \geq 0$$

Για δύο τριάδες πραγματικών αριθμών $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *ισχύει:*

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2\right) \geq \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3\right)^2$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνον όταν:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0, \ \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = 0 \text{ και } \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = 0 ,$$

δηλαδή, αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $\alpha_i = \lambda\beta_i$, *για κάθε* $i = 1, 2, 3$, *ή ισοδύναμα*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \text{ αν } \beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0.$$

Η απόδειξη της ανισότητας αυτής και για το πότε ισχύει η ισότητα είναι άμεση με εφαρμογή της ταυτότητας του Lagrange:

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2\right) - \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3\right)^2 =$$

$$\left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right)^2 + \left(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1\right)^2 + \left(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3\right)^2 \geq 0$$

Γενικότερα, για δύο ν-άδες πραγματικών αριθμών

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu) \text{ και } (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu)$$

ισχύει:

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_\nu^2\right) \geq \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + ... + \alpha_\nu\beta_\nu\right)^2 .$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνον όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\alpha_i = \lambda\beta_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$, ή ισοδύναμα

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}, \text{ αν } \beta_1\beta_2\cdots\beta_\nu \neq 0.$$

Άμεση συνέπεια της ανισότητας των Cauchy – Schwarz, είναι οι επόμενες ανισότητες, οι οποίες χρησιμοποιούνται ως παραλλαγές της ανισότητας Cauchy – Schwarz.:

Αν $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ και $x, y, z > 0$, τότε ισχύουν:

(1) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a+b)^2}{x+y}.$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}.$

(2) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}.$

Απόδειξη .(1)

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \overset{x,y>0}{\Longleftrightarrow} (x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) \geq (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right]\left(\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2\right) \geq (a+b)^2,$$

που ισχύει από την ανισότητα Cauchy – Schwarz. Η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν,

$$\frac{a/\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{b/\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

(2) Λόγω της (1) η ανισότητα (2) προκύπτει άμεσα, ως εξής:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Λόγω της (1), η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \text{ και } \frac{a+b}{x+y} = \frac{c}{z} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Γενικότερα, αν $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ με $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$, τότε ισχύει:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}.$

Παράδειγμα 9. Αν a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2},$$ **(ανισότητα του Nesbitt).**

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy – Schwarz για τις τριάδες

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\sqrt{b+c},\sqrt{c+a},\sqrt{a+b}\right),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}},\frac{1}{\sqrt{c+a}},\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)$, οπότε λαμβάνουμε

$$(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq(1+1+1)^2=9\Leftrightarrow$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν, $b+c=c+a=a+b\Leftrightarrow a=b=c.$

Παράδειγμα 10. Αν a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c.$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας την πρώτη παραλλαγή της ανισότητας Cauchy – Schwarz για $n=6,$ έχουμε

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}$$

$$\geq\frac{\left(2(a+b+c)\right)^2}{4(a+b+c)}=a+b+c.$$

Γ. Μέθοδος διαδοχικών ενισχύσεων

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε την ανισότητα: $\mathrm{A}>\mathrm{B}$. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να αποδείξουμε ότι $\mathrm{A}>\Gamma$, για κάποια παράσταση Γ που ικανοποιεί την ανισότητα $\Gamma\geq\mathrm{B}.$ Τότε, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας της διάταξης, έχουμε τη συνεπαγωγή:

$$\mathrm{A}>\Gamma \text{ και } \Gamma\geq\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{A}>\mathrm{B}.$$

Ανάλογα εργαζόμαστε για ανισότητες της μορφής $\mathrm{A}\geq\mathrm{B}$ ή $\mathrm{A}<\mathrm{B},\ \mathrm{A}\leq\mathrm{B}.$

11. Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>1$$

.

Λύση

Αφού οι a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έχουμε ότι:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+a+b},$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+a+b}\geq 1,$$

το οποίο ισχύει, αφού $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+a+b}=1.$

Παράδειγμα 12. Αν a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση.
Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy – Schwarz λαμβάνουμε

$$\left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)\left(a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\right)\geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν, ισχύει η ισότητα στην εφαρμογή της ανισότητας Cauchy – Schwarz , αλλά και στην τελευταία ανισότητα, δηλαδή όταν

Ασκήσεις στις ανισότητες

1. Αν $a,b,c\in\mathbb{R}$ με $abc=1$, να αποδείξετε ότι:

$$a^4+b^4+c^4\geq a+b+c.$$

Λύση
Θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ανισότητα:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,\ x,y,z\in\mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία ισχύει γιατί για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Έτσι έχουμε

$$a^4+b^4+c^4=\left(a^2\right)^2+\left(b^2\right)^2+\left(c^2\right)^2\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \qquad (\text{λόγω της (1)})$$
$$=\left(ab\right)^2+\left(bc\right)^2+\left(ca\right)^2$$
$$\geq\left(ab\right)\left(bc\right)+\left(bc\right)\left(ca\right)+\left(ca\right)\left(ab\right) \qquad (\text{λόγω της (1)})$$
$$=abc\left(a+b+c\right)=a+b+c \qquad (\text{γιατί } abc=1)$$

2. (α) Αν $x,y>0,$ **να αποδείξετε ότι:** $\dfrac{x^2}{y}\geq x-\dfrac{y}{4}$**.**

(β) Για κάθε $a,b,c>0$**, να αποδείξετε ότι:** $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}\geq\dfrac{3a+2b-c}{4}$**.**

(γ) Για κάθε $a,b,c>0$**, να αποδείξετε ότι:** $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$.

Λύση

(α) Για να αληθεύει η ανισότητα $\dfrac{x^2}{y}\geq x-\dfrac{y}{4}$, για κάθε $x,y>0,$ αρκεί να αληθεύει η ανισότητα $\dfrac{4x^2-4xy+y^2}{4y}\geq 0$ ή αρκεί $4x^2-4xy+y^2\geq 0$ (αφού $y>0$) ή αρκεί $\left(2x-y\right)^2\geq 0,$ που ισχύει. Η ισότητα ισχύει για $y=2x.$

(β) Σύμφωνα με την ανισότητα του ερωτήματος (α) έχουμε

$$\frac{a^2}{a+b}\geq a-\frac{a+b}{4} \quad \text{και} \quad \frac{b^2}{b+c}\geq b-\frac{b+c}{4}$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}\geq a+b-\frac{a+b+b+c}{4}=\frac{3a+2b-c}{4}$$

(γ) Με πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων

$$\frac{a^2}{a+b}\geq a-\frac{a+b}{4}, \quad \frac{b^2}{b+c}\geq b-\frac{b+c}{4} \quad \text{και} \quad \frac{c^2}{b+a}\geq c-\frac{b+a}{4},$$

λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

3. Για κάθε $a,b,c>0$**, να αποδείξετε ότι:**

$$\left(a+b\right)\left(a+c\right)\geq 2\sqrt{abc\left(a+b+c\right)}.$$

Λύση

Επειδή και τα δύο μέλη της προς απόδειξη ανισότητας είναι θετικά, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\left(a+b\right)^2\left(a+c\right)^2\geq 4abc\left(a+b+c\right)$$

ή αρκεί $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2\left(1+\dfrac{c}{a}\right)^2\geq 4\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}\left(1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}\right)$

η οποία με την αντικατάσταση $\dfrac{b}{a}=x,\ \dfrac{c}{a}=y$ γίνεται:

$$\left(1+x\right)^2\left(1+y\right)^2 \geq 4xy\left(1+x+y\right)$$

ή $\left(1+x+y+xy\right)^2 \geq 4xy\left(1+x+y\right)$

ή $\left(1+x+y\right)^2 + x^2y^2 + 2xy\left(1+x+y\right) \geq 4xy\left(1+x+y\right)$

ή $\left(1+x+y\right)^2 + x^2y^2 - 2xy\left(1+x+y\right) \geq 0$

ή $\left(1+x+y-xy\right)^2 \geq 0$, που ισχύει.

4. Αν οι x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1+xy+xz}{\left(1+y+z\right)^2}+\frac{1+yz+yx}{\left(1+z+x\right)^2}+\frac{1+zx+zy}{\left(1+x+y\right)^2} \geq 1.$$

Λύση

Σύμφωνα με την ανισότητα **Cauchy-Schwarz**, για δύο τριάδες πραγματικών αριθμών a_1, a_2, a_3 και b_1, b_2, b_3 ισχύει:

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) \geq \left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2.$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3$.

Έτσι θεωρώντας τις τριάδες $\left(1, \sqrt{\frac{y}{x}}, \sqrt{\frac{z}{x}}\right)$ και $\left(1, \sqrt{xy}, \sqrt{xz}\right)$, έχουμε:

$$\left(1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)\left(1+xy+xz\right) \geq \left(1+\sqrt{\frac{y}{x}\cdot xy}+\sqrt{\frac{z}{x}\cdot xz}\right)^2 = \left(1+y+z\right)^2.$$

$$\Rightarrow \frac{1+xy+xz}{\left(1+y+z\right)^2} \geq \frac{1}{1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}} = \frac{x}{x+y+z}. \qquad (1)$$

Η ισότητα στην (1) ισχύει για $x=1,\ y,z>0$

Ομοίως, λαμβάνουμε

$$\frac{1+yz+yx}{\left(1+z+x\right)^2} \geq \frac{y}{x+y+z}. \qquad (2)$$

$$\frac{1+zx+zy}{\left(1+x+y\right)^2} \geq \frac{z}{x+y+z}. \qquad (3)$$

Οι ισότητες στις (2) και (3) ισχύουν για $y=1,\ x,z>0$ και $z=1,\ x,y>0$, αντίστοιχα.

Με πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων (1), (2) και (3) προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

$$\frac{1+xy+xz}{\left(1+y+z\right)^2}+\frac{1+yz+yx}{\left(1+z+x\right)^2}+\frac{1+zx+zy}{\left(1+x+y\right)^2} \geq 1.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=z=1$.

5. Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z με $x+y+z=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1+xy}{x+y}+\frac{1+yz}{y+z}+\frac{1+zx}{z+x}\geq 5.$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\left(\frac{1+xy}{x+y}-1\right)+\left(\frac{1+yz}{y+z}-1\right)+\left(\frac{1+zx}{z+x}-1\right)\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)(1-y)}{x+y}+\frac{(1-y)(1-z)}{y+z}+\frac{(1-z)(1-x)}{z+x}\geq 2$$

Λόγω της υπόθεσης . $x+y+z=1$, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{(y+z)(z+x)}{x+y}+\frac{(z+x)(x+y)}{y+z}+\frac{(x+y)(y+z)}{z+x}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow (y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2+(x+y)^2(y+z)^2\geq 2(x+y)(y+z)(z+x).$$

Αν θέσουμε $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$, τότε $a+b+c=2$ και αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geq 2abc,$$

η οποία αληθεύει, γιατί

$$\begin{aligned}(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 &\geq (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)\\ &= abc(a+b+c)=2abc.\end{aligned}$$

6. Για κάθε $a,b,c>0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a}\geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Λύση

Κατ' αρχή θυμίζουμε την ανισότητα **αριθμητικού – γεωμετρικού – αρμονικού** μέσου για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $a_1,a_2,...,a_n$:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}\geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}},$$

όπου η ισότητα ισχύει για $a_1=a_2=...=a_n$.

Εφαρμόζοντας πρώτα την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\frac{1}{(a+b)b},\frac{1}{(b+c)c},\frac{1}{(c+a)a}$, και στη συνέχεια την ανισότητα γεωμετρικού – αρμονικού μέσου, λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)b(b+c)c(c+a)a}}$$
$$=3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)c}\cdot\frac{1}{(b+c)a}\cdot\frac{1}{(c+a)b}}$$
$$\geq 3\cdot\frac{3}{(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b}$$
$$=\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

7. Για κάθε $a>0$ και $n\in\mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$a^n+\frac{1}{a^n}-2\geq n^2\left(a+\frac{1}{a}-2\right).$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$a^{2n}-2a^n+1\geq n^2a^{n-1}\left(a^2-2a+1\right)$$

ή αρκεί $\left(a^n-1\right)^2\geq n^2a^{n-1}(a-1)^2$,

η οποία προκύπτει με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\left(a^n-1\right)^2=(a-1)^2\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)^2$$
$$\geq(a-1)^2\left(n\sqrt[n]{a^{n-1}\cdot a^{n-2}\cdot...\cdot a\cdot 1}\right)^2$$
$$=(a-1)^2\left(n\sqrt[n]{a^{1+2+...(n-1)}}\right)^2$$
$$=(a-1)^2n^2\left(a^{\frac{(n-1)n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}=n^2a^{n-1}(a-1)^2.$$

8. Για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a,b,c,x,y,z, να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Λύση.

Θυμίζουμε πρώτα δύο κλασικές ανισότητες :

- **Ανισότητα Cauchy-Schwarz**: Για δύο n-άδες πραγματικών αριθμών $a_1,a_2,...,a_n$ και $b_1,b_2,...,b_n$ ισχύει:

  $$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2.$$

  Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2,...,a_n=\lambda b_n$.

- **Ανισότητα του Holder**: Για θετικές τριάδες πραγματικών αριθμών a, b, c και x, y, z, και για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς p, q με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ισχύει ότι:

$$\left(a^p+b^p+c^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(x^q+y^q+z^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq ax+by+cz.$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Για την άσκηση, γράφουμε πρώτα τη ζητούμενη ανισότητα στη μορφή

$$3\left(x+y+z\right)\left(\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^3+\left(\frac{b}{\sqrt[3]{y}}\right)^3+\left(\frac{c}{\sqrt[3]{z}}\right)^3\right) \geq \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{b}{\sqrt[3]{y}}\cdot\sqrt[3]{y}+\frac{c}{\sqrt[3]{z}}\cdot\sqrt[3]{z}\right)^3,$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{a}{\sqrt[3]{x}}=a_1, \frac{b}{\sqrt[3]{y}}=b_1, \frac{c}{\sqrt[3]{z}}=c_1, x_1=\sqrt[3]{x}, y_1=\sqrt[3]{y},\ z_1=\sqrt[3]{z}$, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$3\left(x_1^3+y_1^3+z_1^3\right)\left(a_1^3+b_1^3+c_1^3\right) \geq \left(a_1\cdot x_1+b_1\cdot y_1+c_1\cdot z_1\right)^3.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz ως εξής:

$$3\left(a_1^3+b_1^3+c_1^3\right)=\left(1^2+1^2+1^2\right)\left[\left(a_1^{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(b_1^{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(c_1^{\frac{3}{2}}\right)^2\right] \geq \left(a_1^{\frac{3}{2}}+b_1^{\frac{3}{2}}+c_1^{\frac{3}{2}}\right)^2. \quad (1)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Holder για $p=\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{3}$ και για τις θετικές τριάδες πραγματικών αριθμών $a_1,\ b_1,\ c_1$ και $x_1\ y_1, z_1$ στη μορφή

$$\left(a_1^{\frac{3}{2}}+b_1^{\frac{3}{2}}+c_1^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(x_1^3+y_1^3+z_1^3\right)^{\frac{1}{3}} \geq a_1 x_1+b_1 y_1+c_1 z_1$$

$$.\Rightarrow\left(a_1^{\frac{3}{2}}+b_1^{\frac{3}{2}}+c_1^{\frac{3}{2}}\right)^2\left(x_1^3+y_1^3+z_1^3\right) \geq \left(a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1\right)^3 \qquad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

$$3\left(x_1^3+y_1^3+z_1^3\right)\left(a_1^3+b_1^3+c_1^3\right) \geq \left(a_1\cdot x_1+b_1\cdot y_1+c_1\cdot z_1\right)^3.$$