

# Βασικές Γνώσεις Γεωμετρίας.

Βανέλης Ψύχας 1

## Αρχικές έννοιες.

**Σημείο**

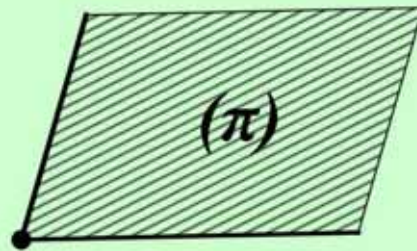
A •

*Οι έννοιες Σημείο, Ευθεία και Επίπεδο είναι  
πρωταρχικές και δεν ορίζονται.*

(ε)



**Ευθεία**



**Επίπεδο**

...αποτελούν τα “δομικά υλικά”, με τα οποία  
“κτίζεται” η Γεωμετρία.

Βανέλης Ψύχας 2

# Αξιώματα.

*Τα Αξιώματα καθορίζουν τη σχέση των αρχικών 'δομικών' εννοιών της γεωμετρίας.*

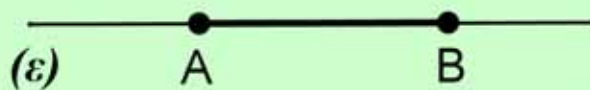
- ★ Δύο (διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία, ορίζουν μία και μόνο ευθεία, που τα περιέχει.
- ★ Υπάρχουν τρία τουλάχιστον σημεία (διαφορετικά μεταξύ τους), που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία.
- ★ Τρία (διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία, ορίζουν ένα και μόνο επίπεδο, που τα περιέχει.

.....

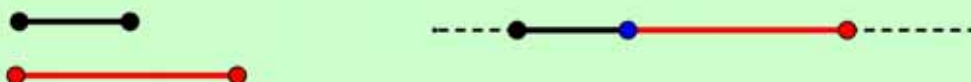
Βαννέλης Ψύχας 3

# Ευθύγραμμο Τμήμα.

*Ευθύγραμμο Τμήμα*

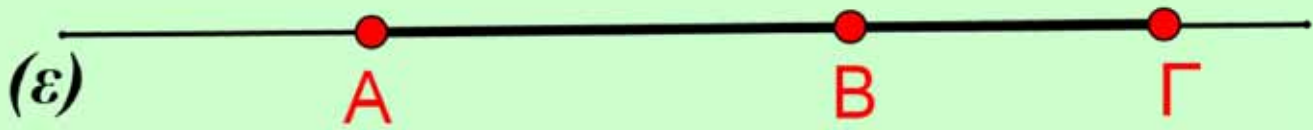


- ★ Το ευθύγραμμο τμήμα αποτελείται από δύο διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και όλα τα σημεία της που βρίσκονται ανάμεσά τους.
- ★ Για να προσθέσουμε δύο ευθύγραμμο τμήματα, τα μεταφέρουμε επάνω στην ίδια ευθεία (το ένα δίπλα στο άλλο).



Βαννέλης Ψύχας 4

## Ευθύγραμμα Τμήματα.



★ *Να εκφράσετε τα ευθύγραμμα τμήματα (που ορίζουν τα σημεία A,B,Γ), ως άθροισμα ή διαφορά δύο τμημάτων.*

Βαννέλης Ψύχας 5

## Ευθύγραμμα Τμήματα.



★ *Να εκφράσετε τα ευθύγραμμα τμήματα (που ορίζουν τα σημεία A,B,Γ), ως άθροισμα ή διαφορά δύο τμημάτων.*

☑ **Απάντηση**

$$AΓ=AB+BΓ$$

$$AB=AΓ-BΓ$$

$$BΓ=AΓ-AB$$

Βαννέλης Ψύχας 6

## Ευθύγραμμο Τμήματα.



- ★ Αν  $M$  μέσο του  $AB$  και  $O$  τυχόν σημείο (εκτός του  $AB$ ) αποδείξτε ότι:  $2 \cdot OM = OA + OB$ .

Βανέλης Ψύχας 7

## Ευθύγραμμο Τμήματα.



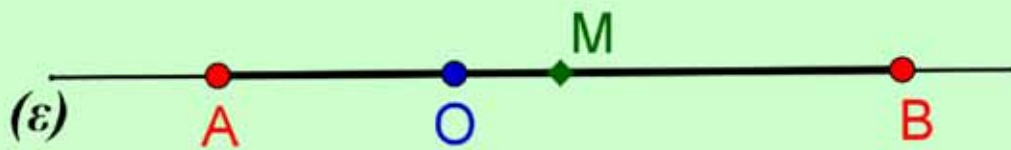
- ★ Αν  $M$  μέσο του  $AB$  και  $O$  τυχόν σημείο (εκτός του  $AB$ ) αποδείξτε ότι:  $2 \cdot OM = OA + OB$ .

▣ Απόδειξη

$$\left. \begin{array}{l} OA = OM - MA \\ OB = OM + MB \end{array} \right\} \Rightarrow OA + OB = 2 \cdot OM$$

Βανέλης Ψύχας 8

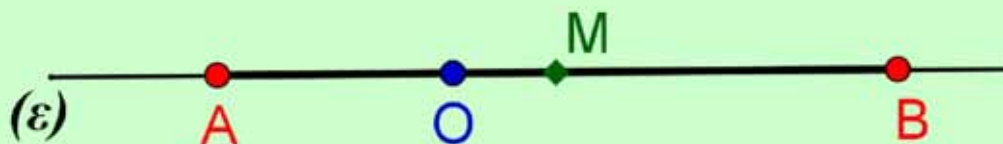
## Ευθύγραμμο Τμήματα.



- ★ Αν  $M$  μέσο του  $AB$  και  $O$  τυχόν σημείο (εντός του  $MA$ ) αποδείξτε ότι:  $2 \cdot OM = OB - OA$ .

Βαννέλης Ψόχας 9

## Ευθύγραμμο Τμήματα.



- ★ Αν  $M$  μέσο του  $AB$  και  $O$  τυχόν σημείο (εντός του  $MA$ ) αποδείξτε ότι:  $2 \cdot OM = OB - OA$ .

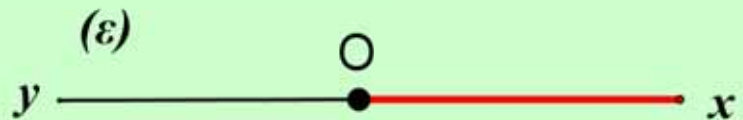
▣ Απόδειξη

$$\left. \begin{array}{l} OA = MA - OM \\ OB = OM + MB \end{array} \right\} \Rightarrow OB - OA = 2 \cdot OM$$

Βαννέλης Ψόχας 10

# Ημιευθείες.

**Ημιευθεία**



★ Το σημείο  $O$  και τα σημεία της ευθείας  $(\varepsilon)$  που ανήκουν προς το ίδιο μέρος του  $O$ , ορίζουν τις ημιευθείες  $Ox$  και  $Oy$ .

★ Οι ημιευθείες  $Ox$  και  $Oy$  λέγονται, 'αντικείμενες'.



▶ Η ημιευθεία  $Ax$  περιέχει την ημιευθεία  $Bx$ .

▶ Η ημιευθεία  $Bx$  περιέχει την ημιευθεία  $Ay$ .

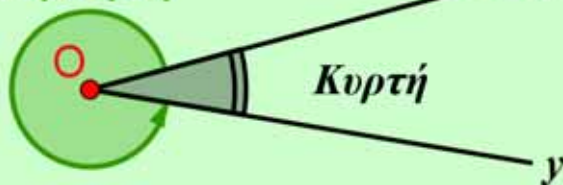
Βαννέλης Ψόχας 11

# Γωνία - Διχοτόμος.

**Γωνία (κυρτή-μη κυρτή)**

Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή, ορίζουν μία κυρτή και μία μη κυρτή γωνία.

Μη κυρτή

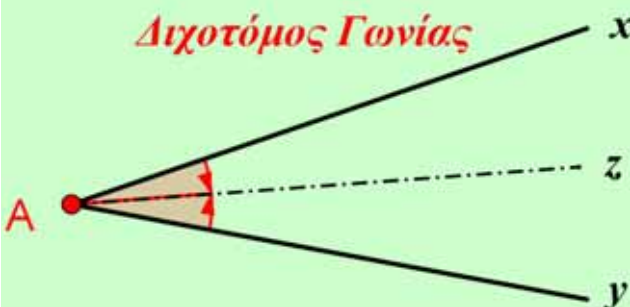


Κυρτή

$Ox, Oy$ : Πλευρές     $O$ : Κορυφή

**Διχοτόμος Γωνίας**

Διχοτόμος γωνίας είναι η ημιευθεία με αρχή τη κορυφή της, που χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες.

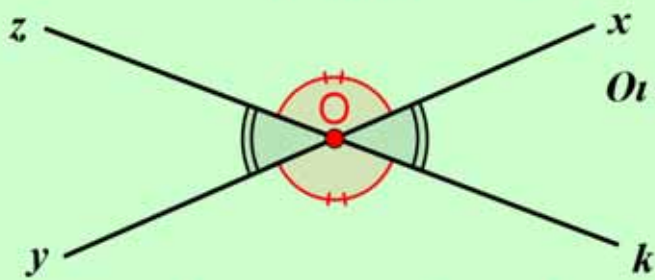


$$x\hat{A}z = z\hat{A}y$$

Βαννέλης Ψόχας 12

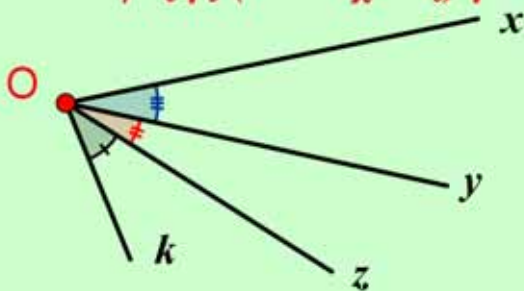
# Κατά κορυφή-Διαδοχικές Γωνίες.

## Κατά κορυφήν γωνίες.



Οι πλευρές της μίας γωνίας, είναι ημιευθείες αντικείμενες των πλευρών της άλλης.

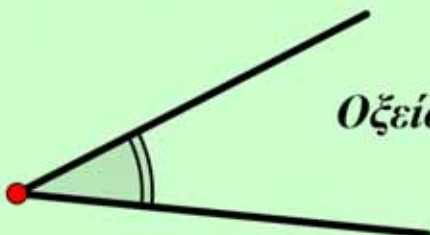
## Εφεξής (Διαδοχικές) γωνίες.



Μία κοινή πλευρά και οι μη κοινές πλευρές, εκατέρωθεν της κοινής.

# Είδη Γωνιών.

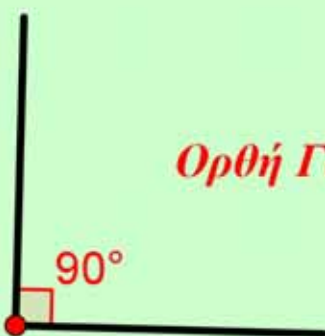
## Οξεία γωνία



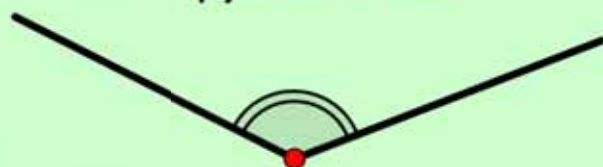
## Ευθεία Γωνία



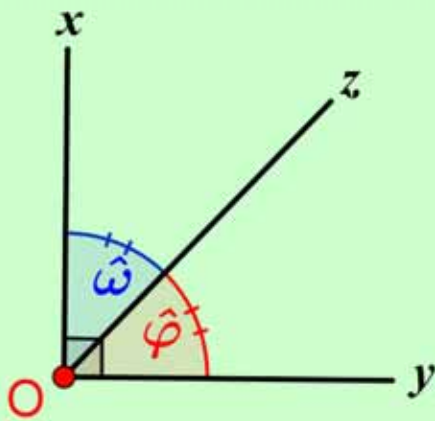
## Ορθή Γωνία



## Αμβλεία Γωνία

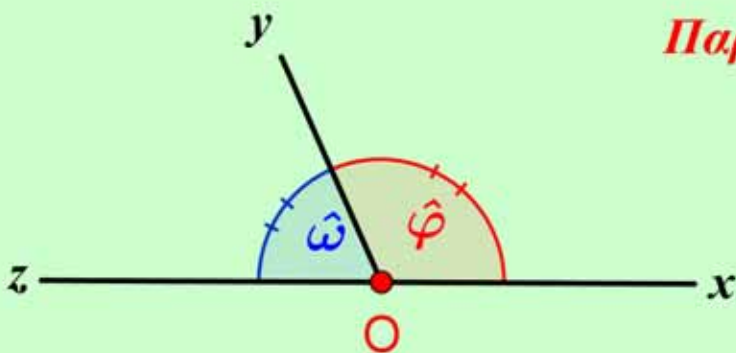


# Συμπληρωματικές-Παραπληρωματικές Γωνίες.



*Συμπληρωματικές Γωνίες*

$$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^\circ$$

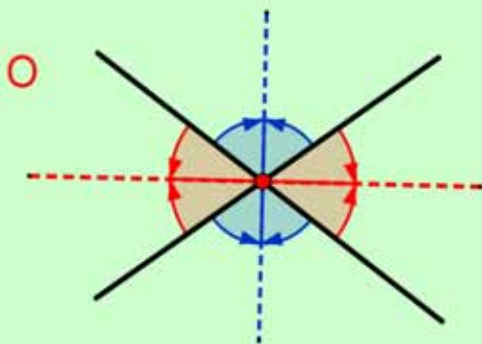


*Παραπληρωματικές Γωνίες*

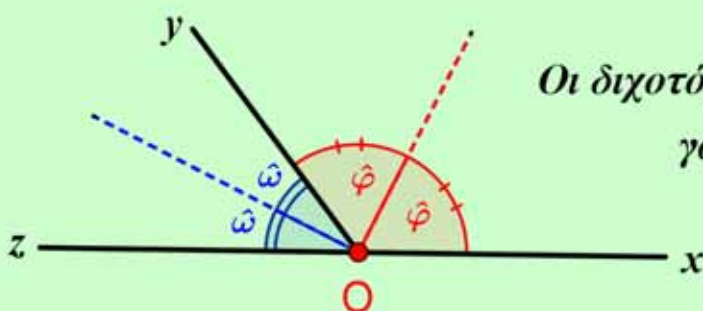
$$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^\circ$$

Βαννέλης Ψόχας 15

# Διχοτόμοι Γωνιών.



*Οι διχοτόμοι κατά κορυφή γωνιών, είναι αντικείμενες ημιευθείες.*



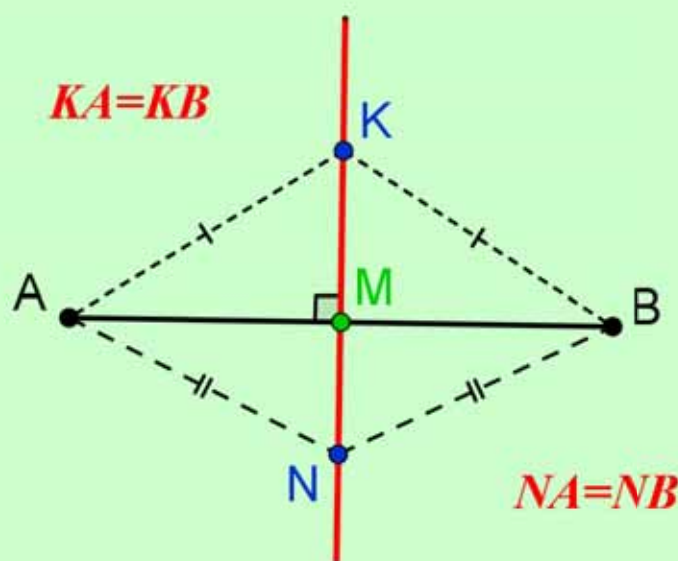
*Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, είναι κάθετες μεταξύ τους.*

Βαννέλης Ψόχας 16



## Μεσοκάθετος.

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος,  
είναι η κάθετος στο μέσο του.

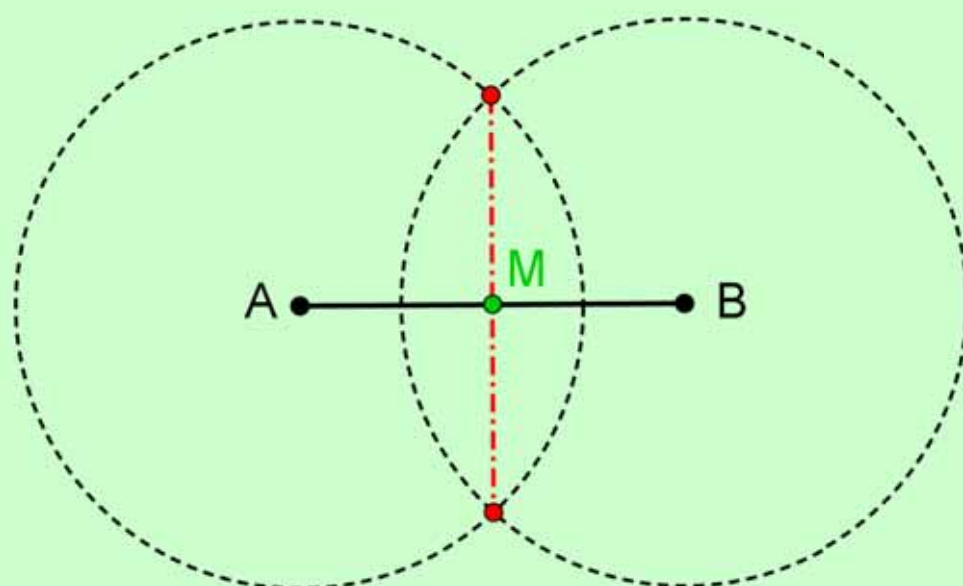


Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου,  
ισαπέχει από τα άκρα.

Βαννέλης Ψόχας 17

## Κατασκευή Μεσοκαθέτου.

Γράφουμε δύο ίσους τεμνόμενους κύκλους με κέντρα  
τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος. . .

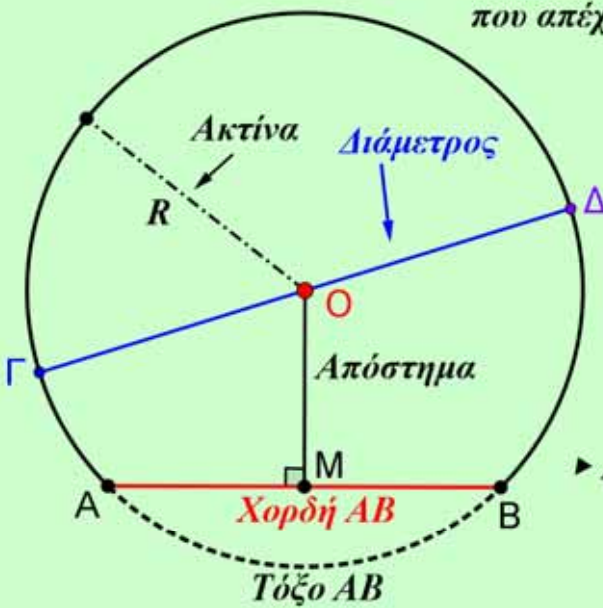


. . . η ευθεία που ορίζουν τα σημεία τομής των κύκλων,  
είναι η μεσοκάθετος.

Βαννέλης Ψόχας 18

# Κύκλος.

★ Κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ , είναι το σύνολο των σημείων που απέχουν απόσταση  $R$  από το  $O$  και ανήκουν σε επίπεδο που περιέχει το  $O$ .



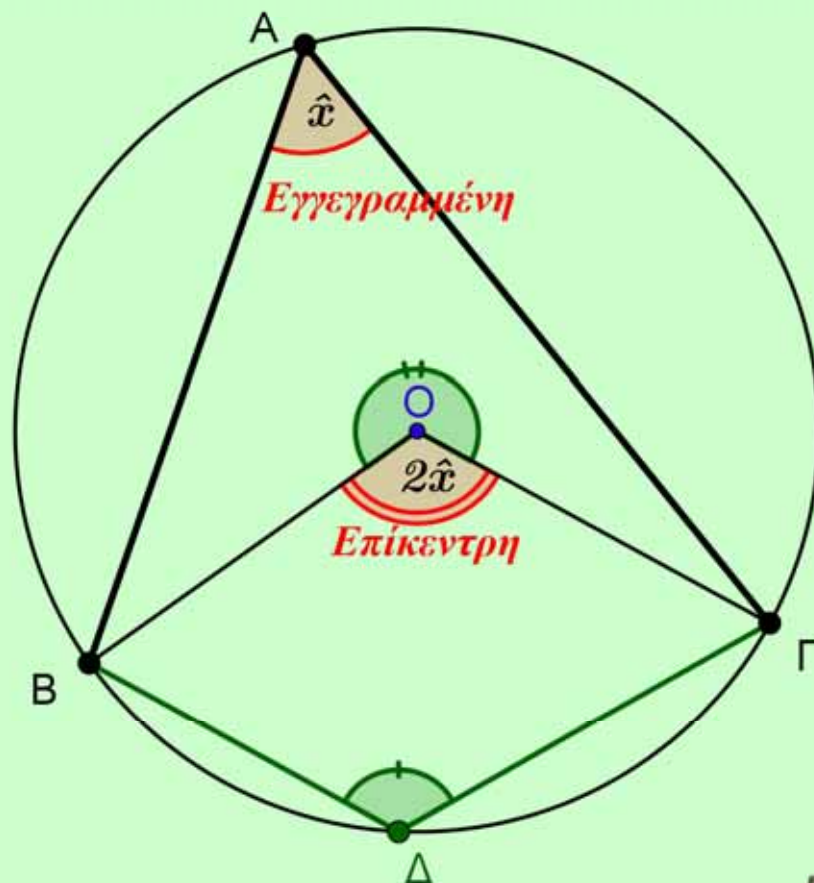
► Σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα αποστήματα και σε ίσα αποστήματα, ίσες χορδές. (στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους)

► Τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , λέγονται αντιδιαμετρικά.

► Δύο σημεία του κύκλου (που δεν είναι αντιδιαμετρικά) ορίζουν ένα μικρό και ένα μεγάλο τόξο.

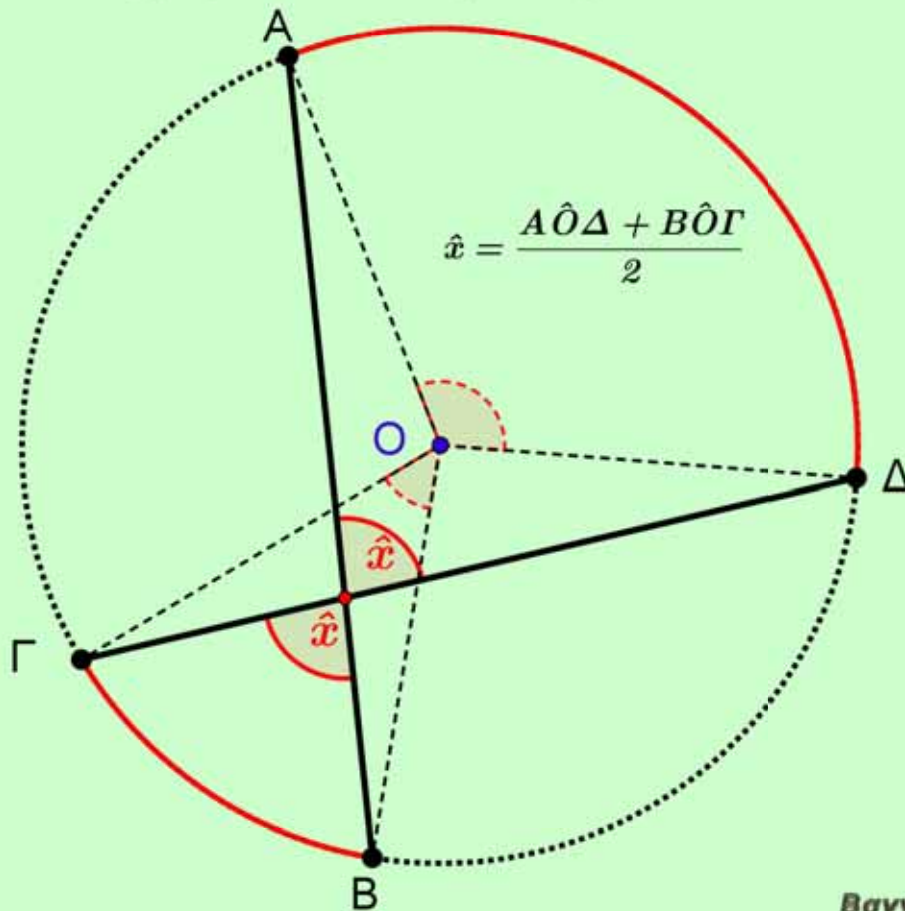
Βανγέλης Ψόχας 19

# Εγγεγραμμένες-Επίκεντρες Γωνίες.



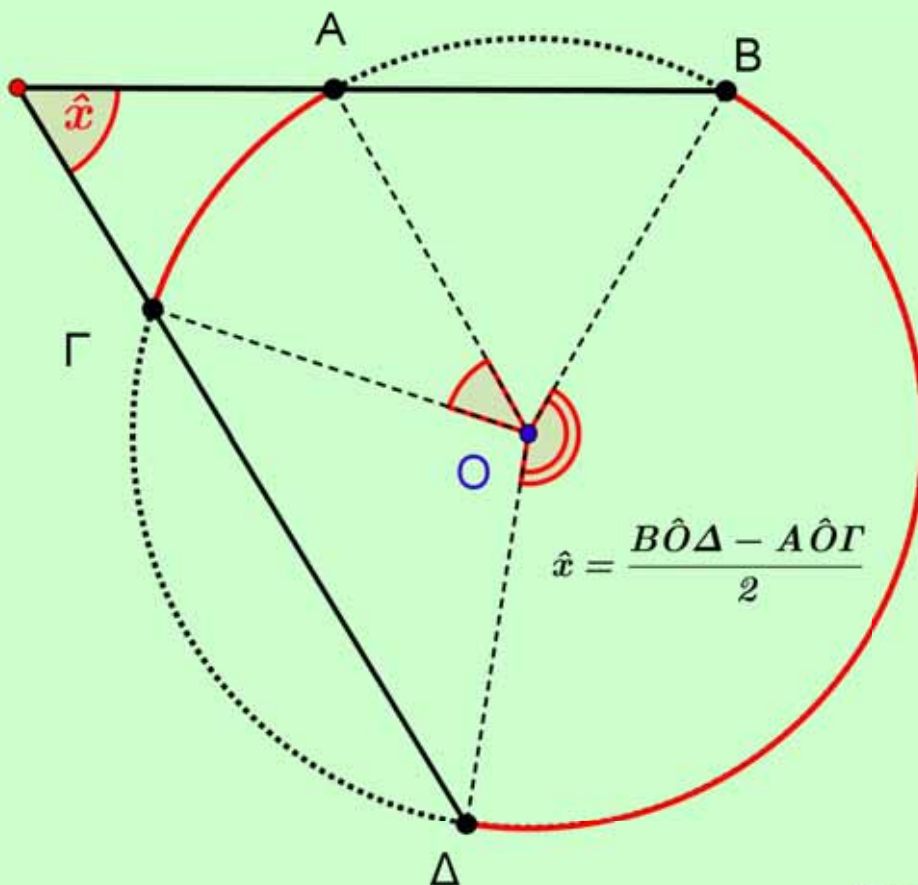
Βανγέλης Ψόχας 20

## Γωνία χορδών τεμνομένων εντός.



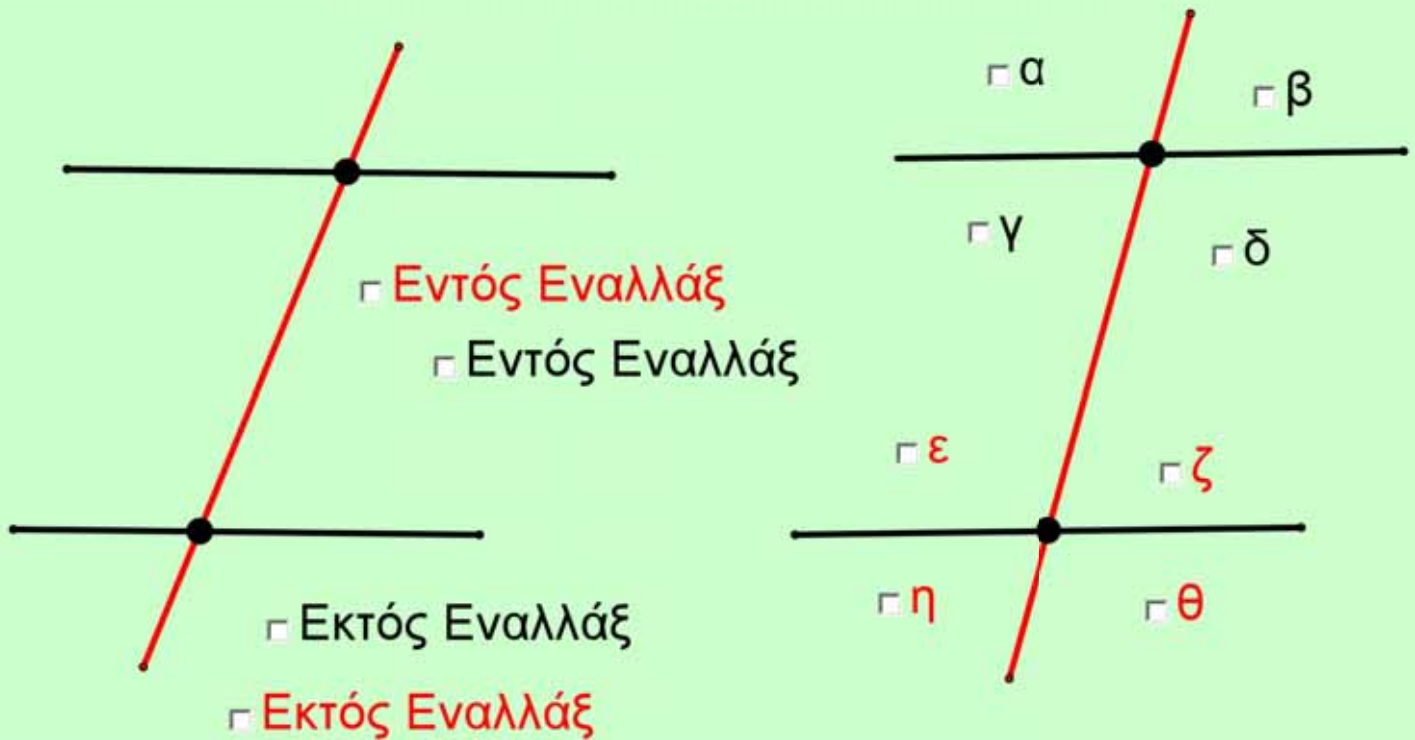
Βαννέλης Ψόχας 21

## Γωνία χορδών τεμνομένων εκτός.

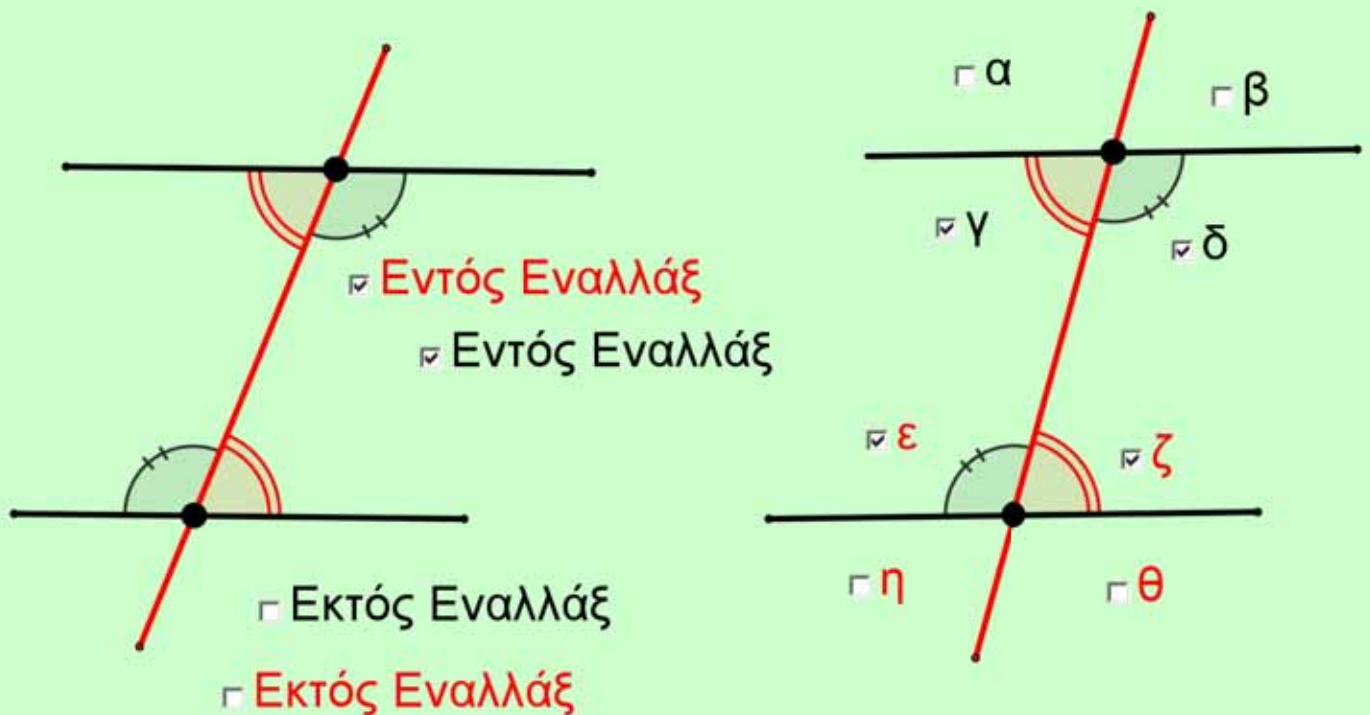


Βαννέλης Ψόχας 22

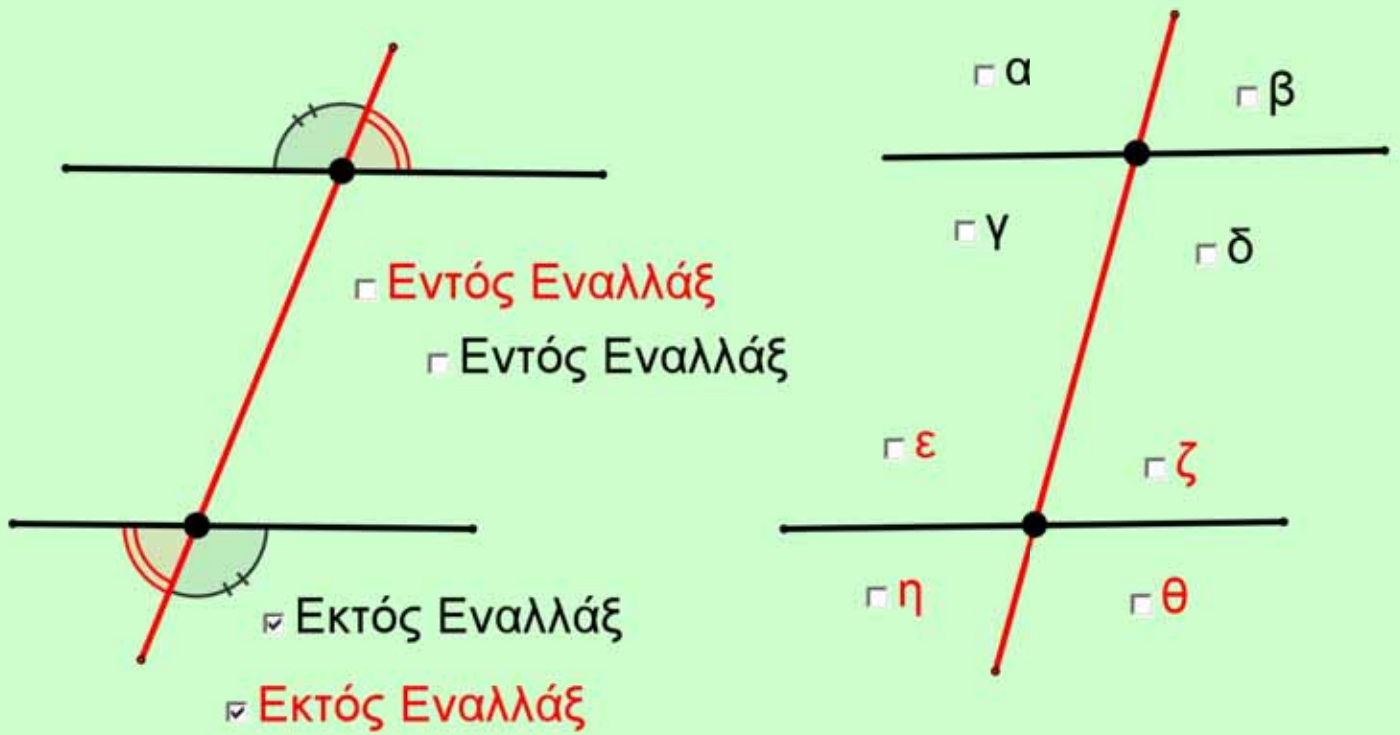
## Παράλληλες Ευθείες.



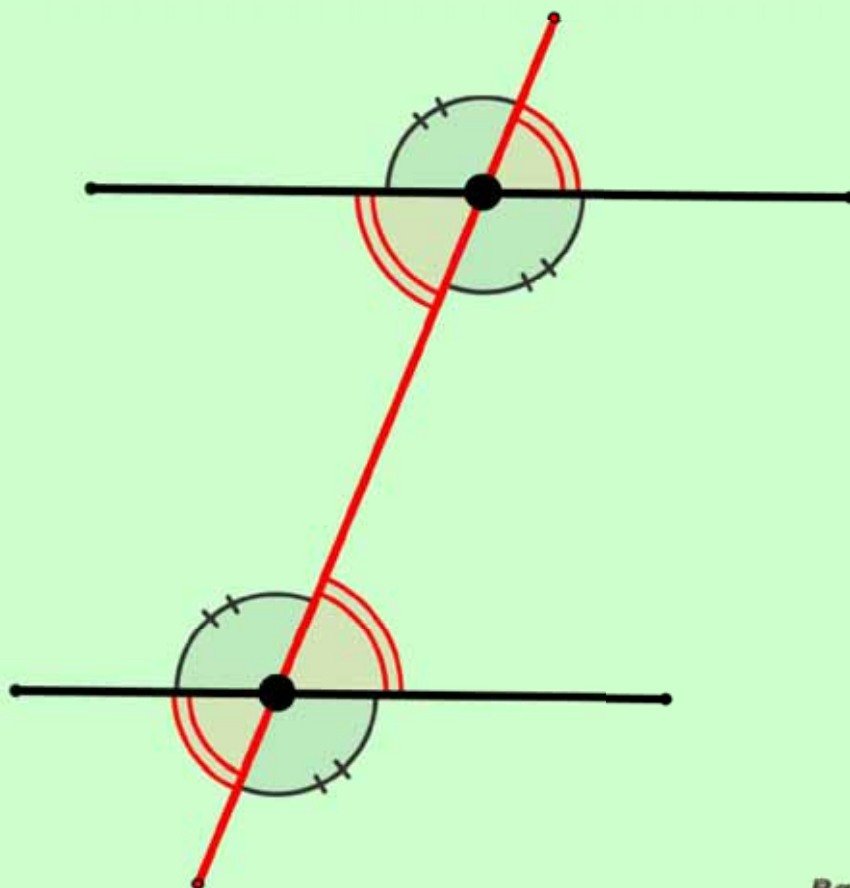
## Παράλληλες Ευθείες.



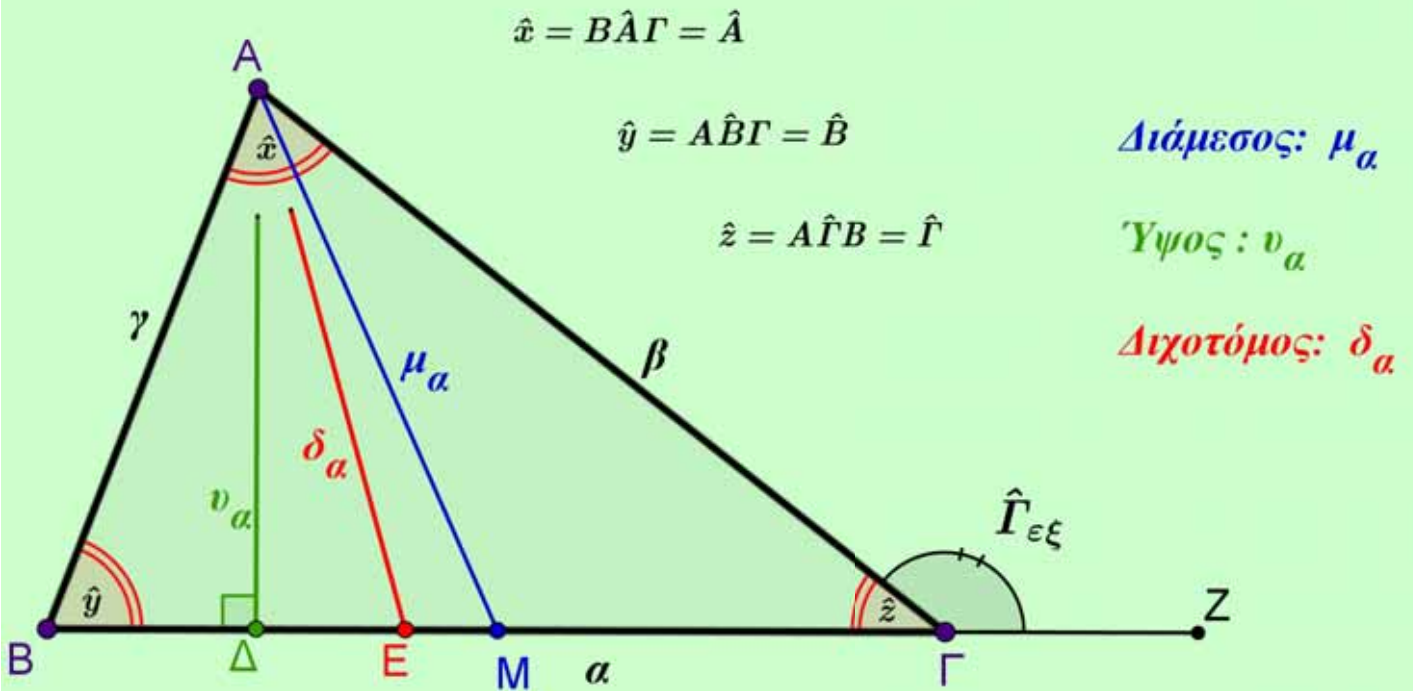
# Παράλληλες Ευθείες.



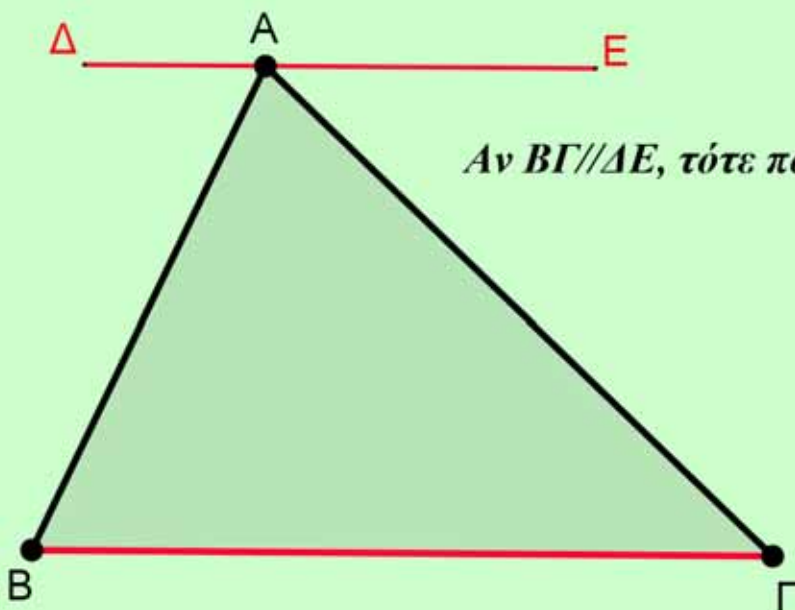
# Παράλληλες Ευθείες.



# Στοιχεία Τριγώνου.



# Άσκηση Παραλληλίας.

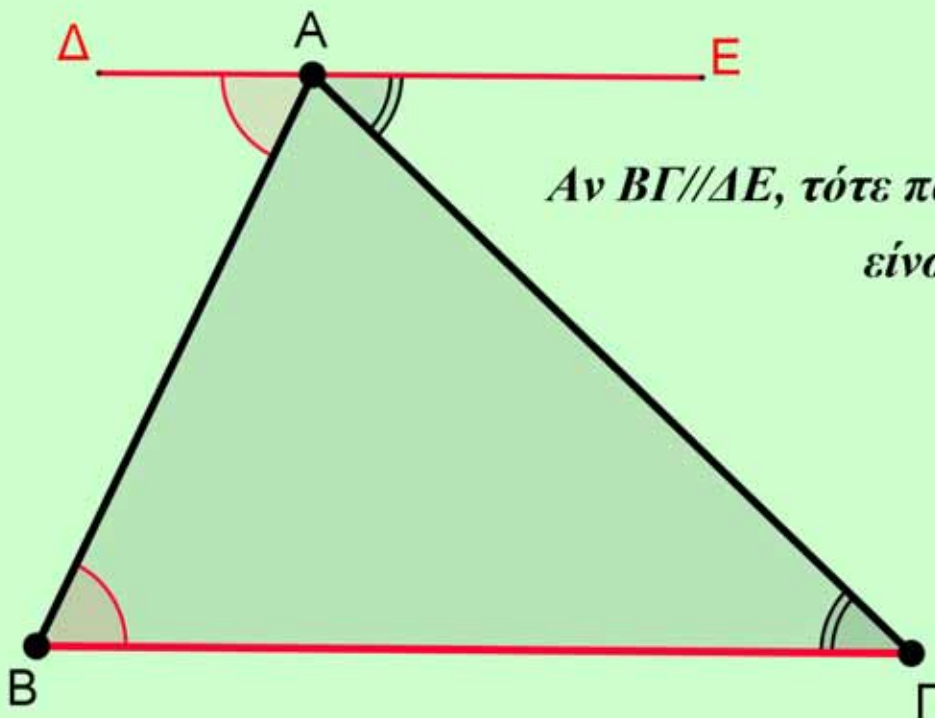


Αν  $B\Gamma \parallel \Delta E$ , τότε ποιές γωνίες στο σχήμα, είναι ίσες;

□ Ισότητα 1

□ Ισότητα 2

## Άσκηση Παραλληλίας.



Αν  $B\Gamma \parallel \Delta E$ , τότε ποιές γωνίες στο σχήμα, είναι ίσες;

☑ Ισότητα 1

$$\Gamma \hat{A} E = A \hat{B} \Gamma$$

☑ Ισότητα 2

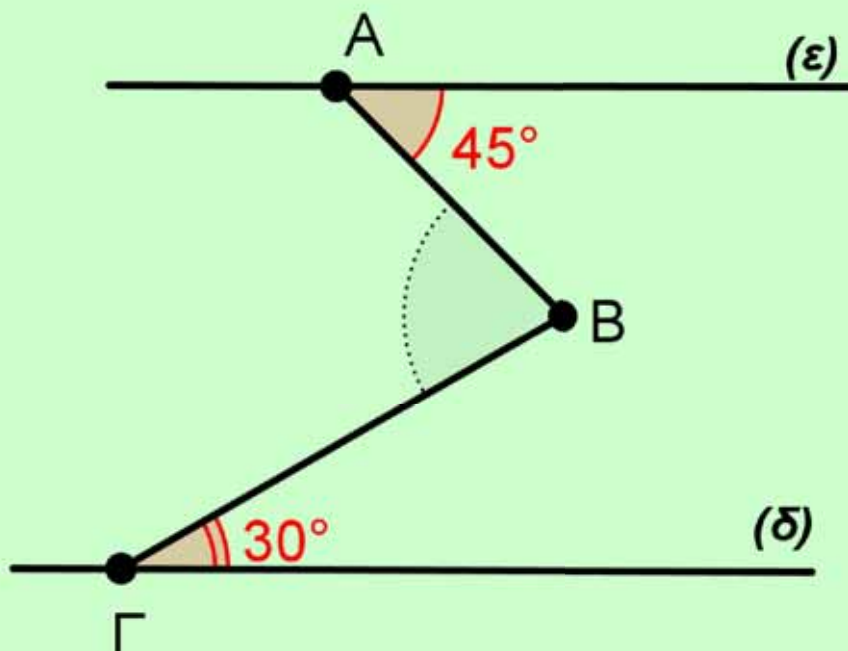
$$B \hat{A} \Delta = A \hat{B} \Gamma$$

Βαννέλης Ψόχας 29

## Άσκηση Παραλληλίας.

Οι ευθείες (ε) και (δ), είναι παράλληλες.

Βρείτε τη γωνία ΑΒΓ.

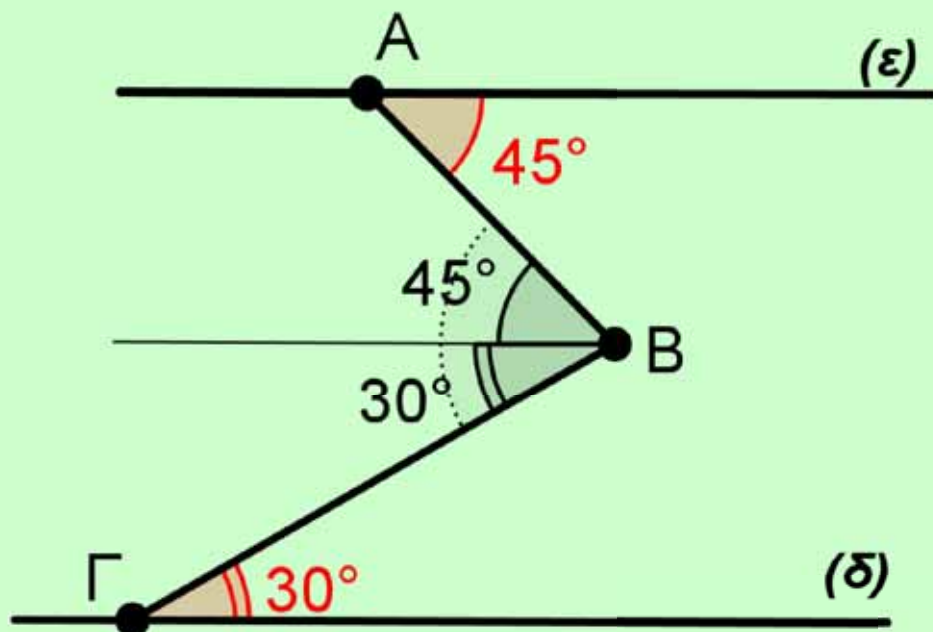


Βαννέλης Ψόχας 30

## Άσκηση Παραλληλίας.

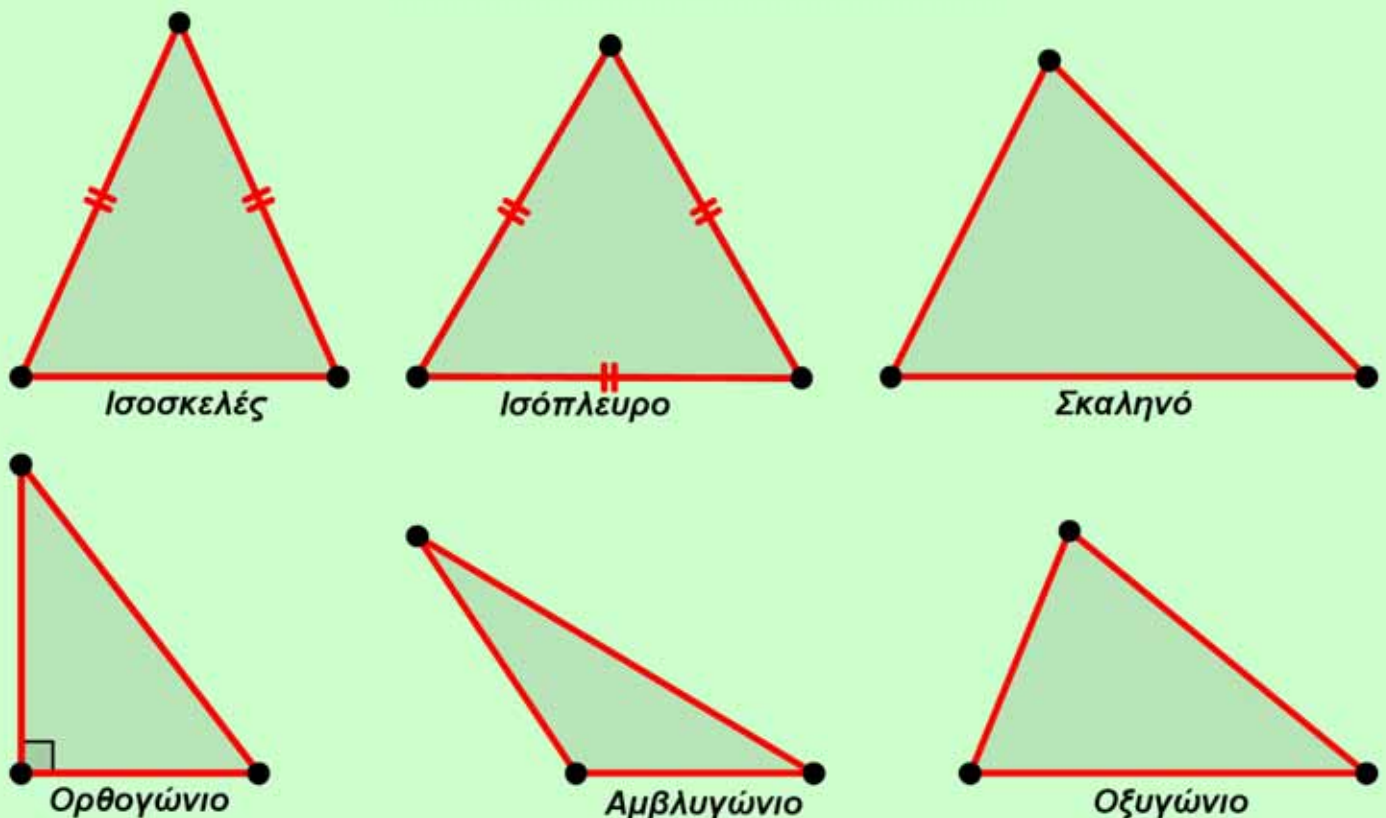
Οι ευθείες (ε) και (δ), είναι παράλληλες.

Βρείτε τη γωνία ΑΒΓ.



Βαννέλης Ψύχας 31

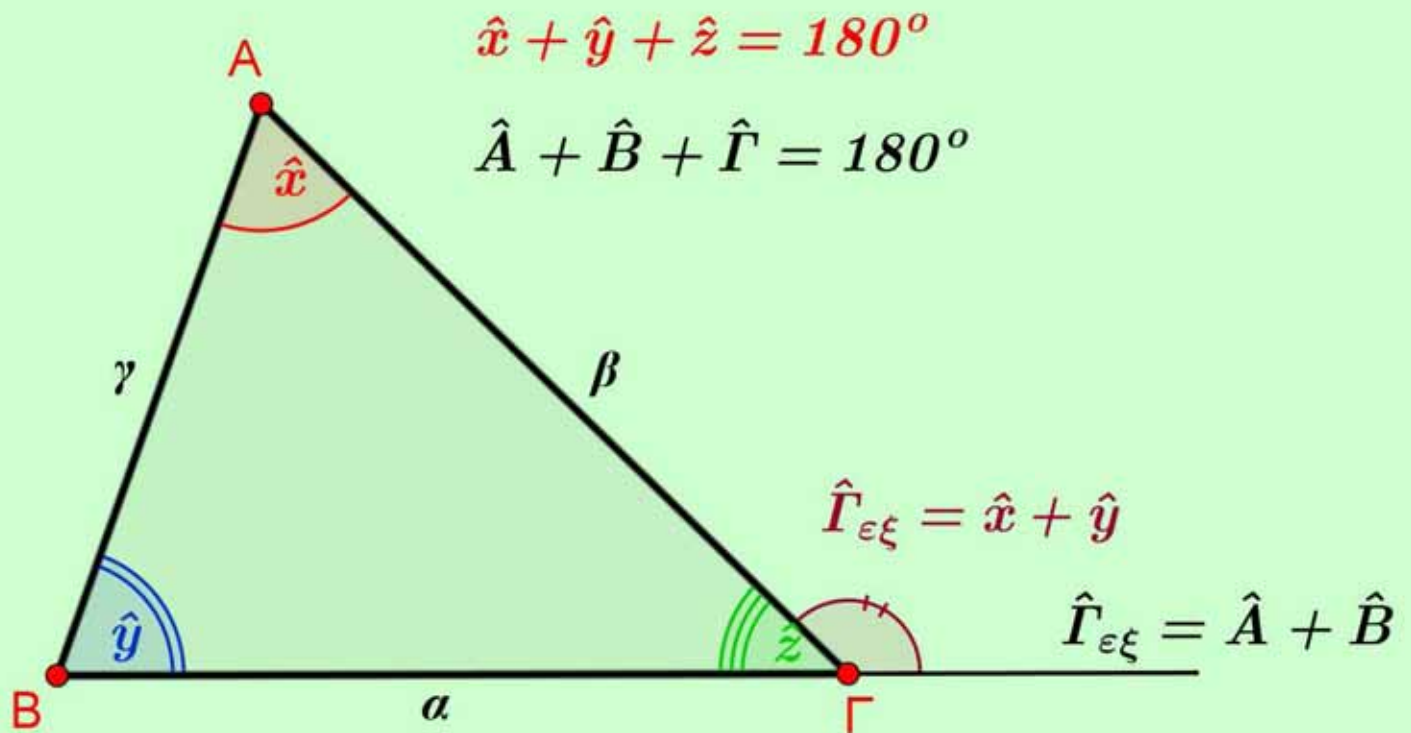
## Είδη Τριγώνων.



Βαννέλης Ψύχας 32

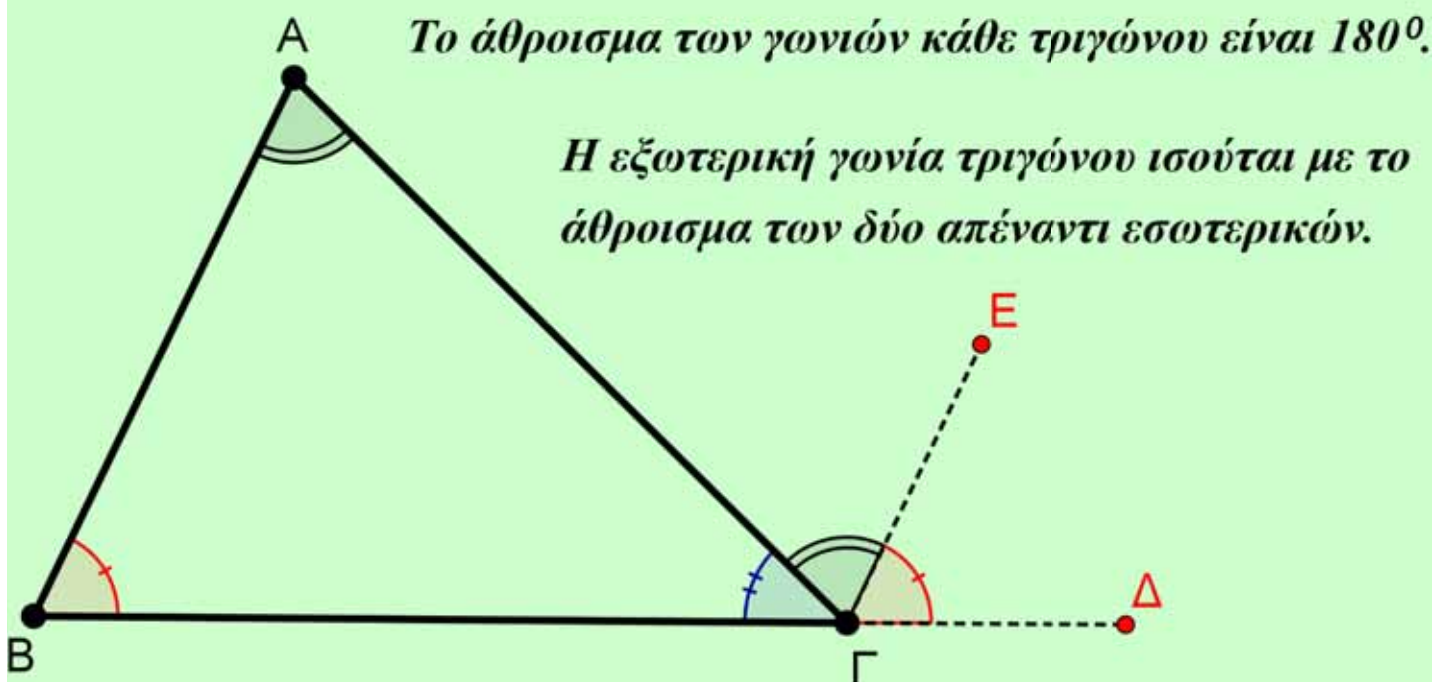


# Άθροισμα Γωνιών Τριγώνου.



Βαννέλης Ψόχας 33

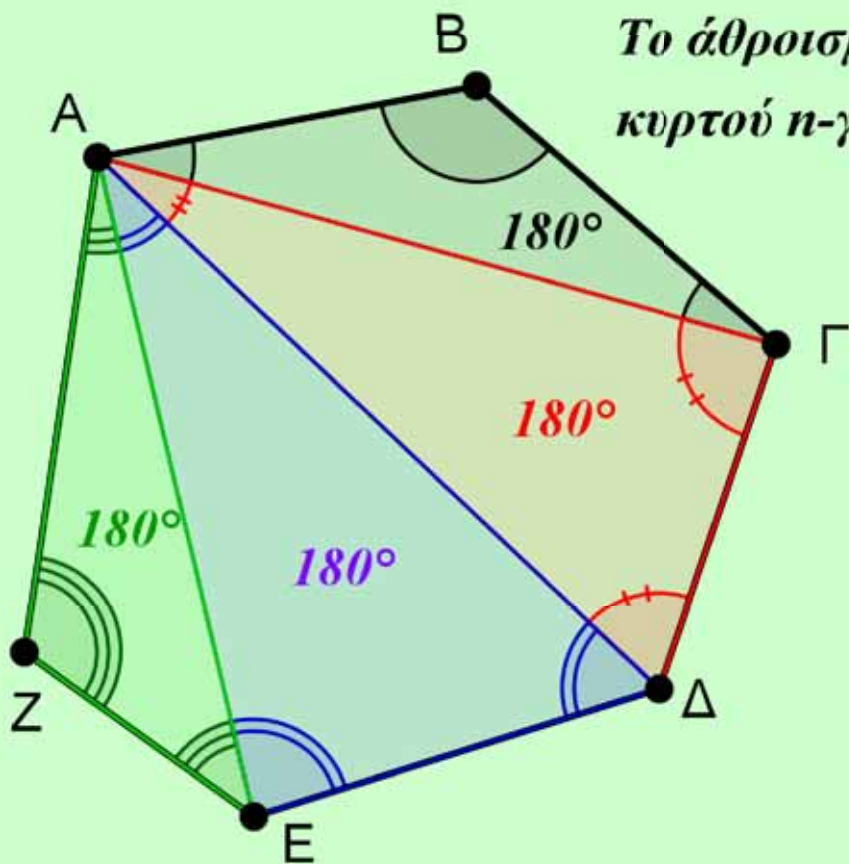
# Ημιευθείες.



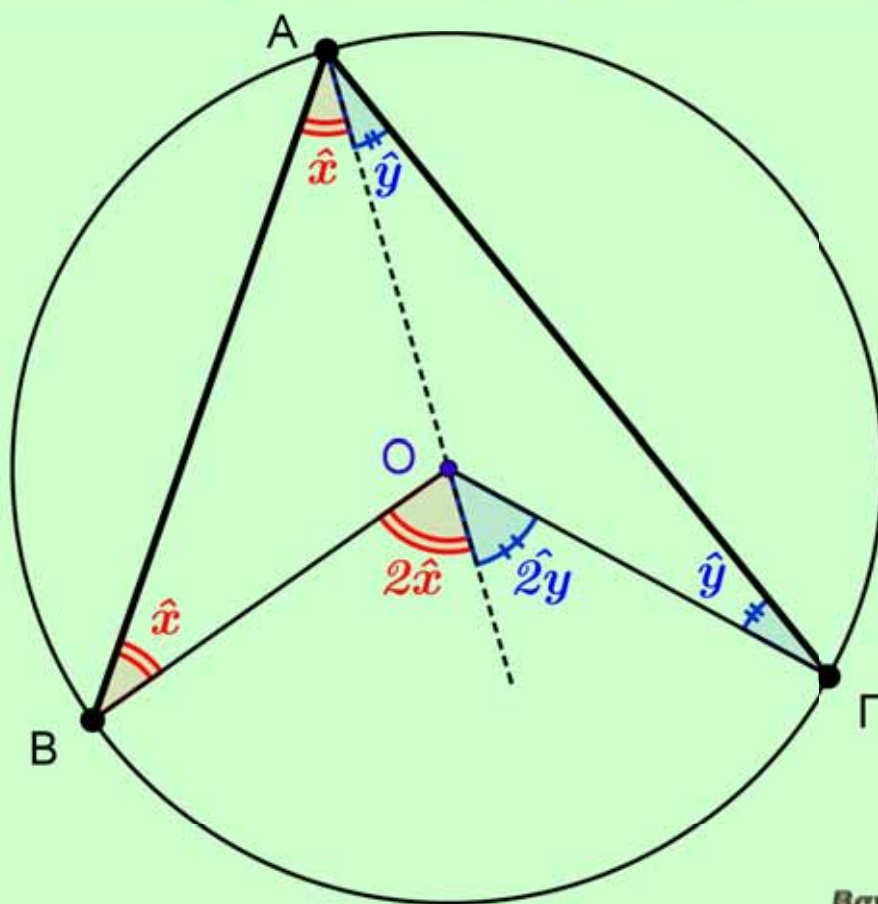
Βαννέλης Ψόχας 34

## Άθροισμα Γωνιών n-γώνου.

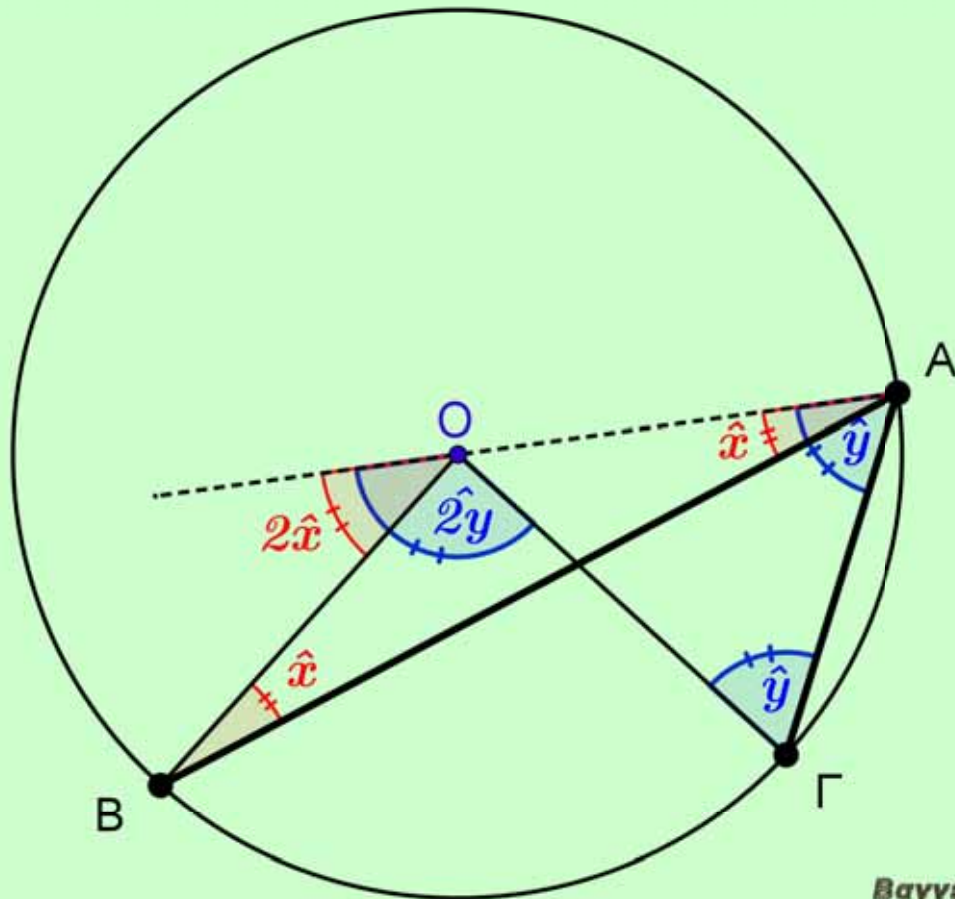
Το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού n-γώνου είναι  $(180n-360)^\circ$ .



## Επίκεντρη=2·Εγγεγραμμένη.

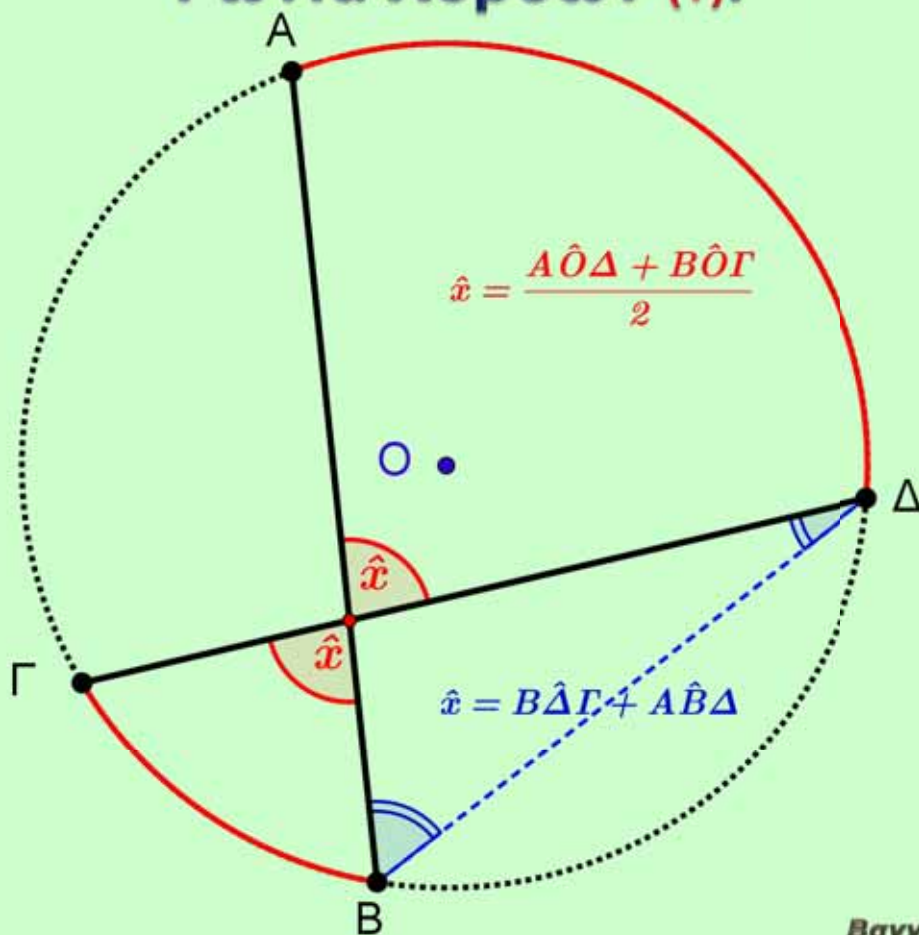


## Επίκεντρο=2·Εγγεγραμμένη.



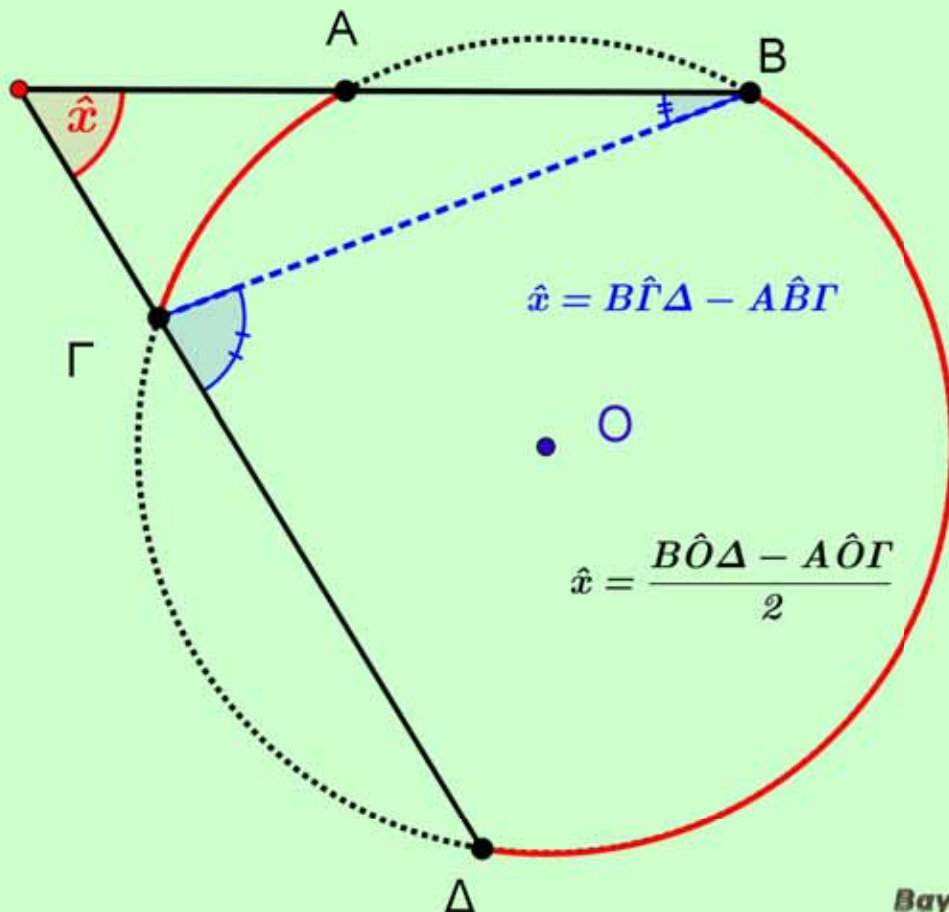
Βαγγέλης Ψόχας 37

## Γωνία Χορδών ( $\gamma$ ).



Βαγγέλης Ψόχας 38

## Γωνία Χορδών (γ).

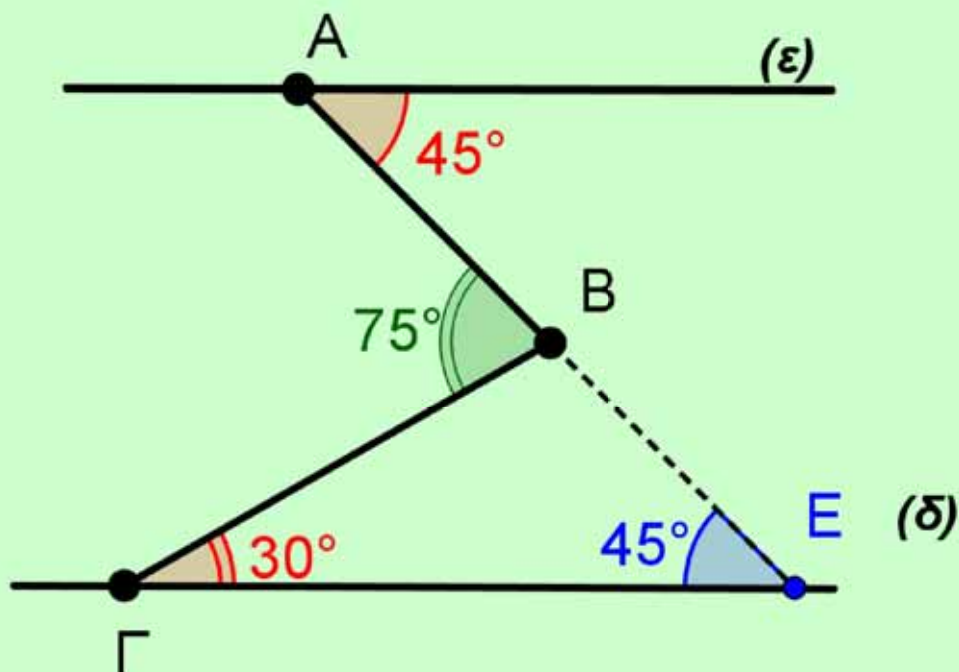


Βαννέλης Ψόχας 39

## Άσκηση Παραλληλίας.

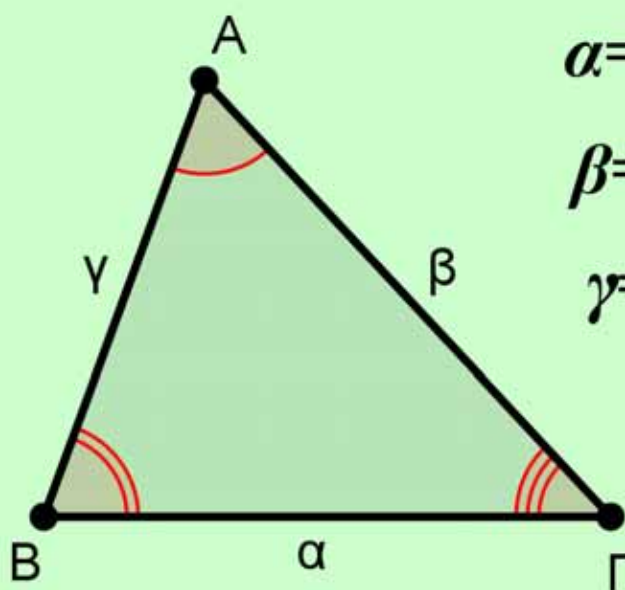
Οι ευθείες (ε) και (δ), είναι παράλληλες.

Βρείτε τη γωνία ABΓ.



Βαννέλης Ψόχας 40

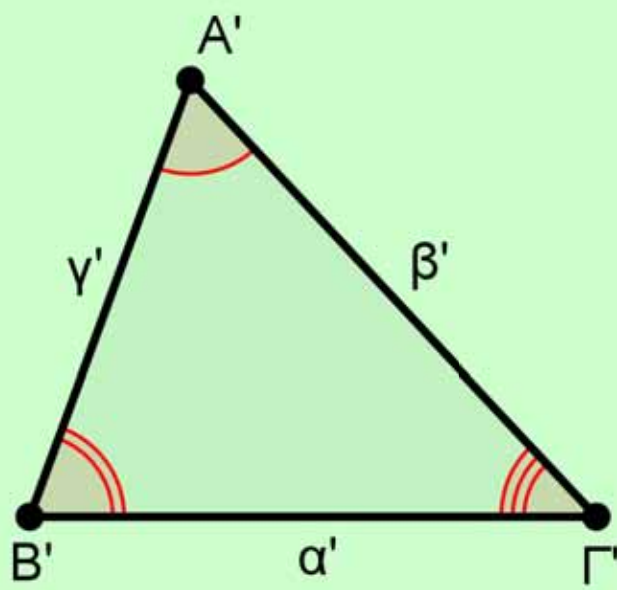
# Ισότητα Τριγώνων.



$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

$$\gamma = \gamma'$$

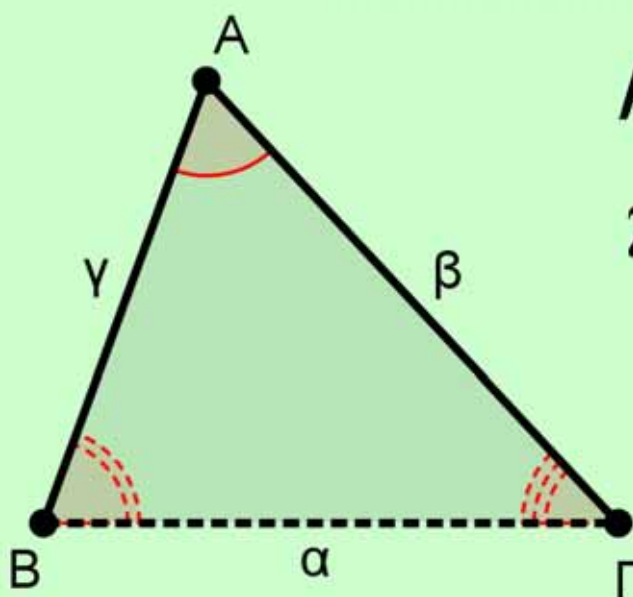


$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

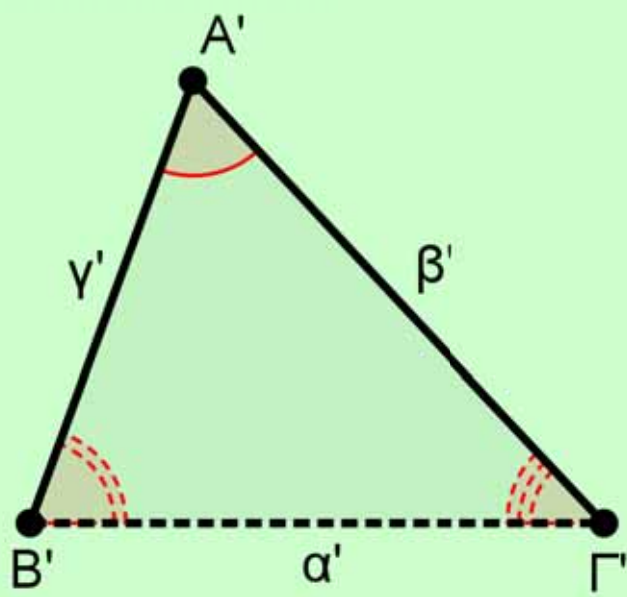
$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

# 1<sup>ο</sup> Κριτήριο Ισότητας.



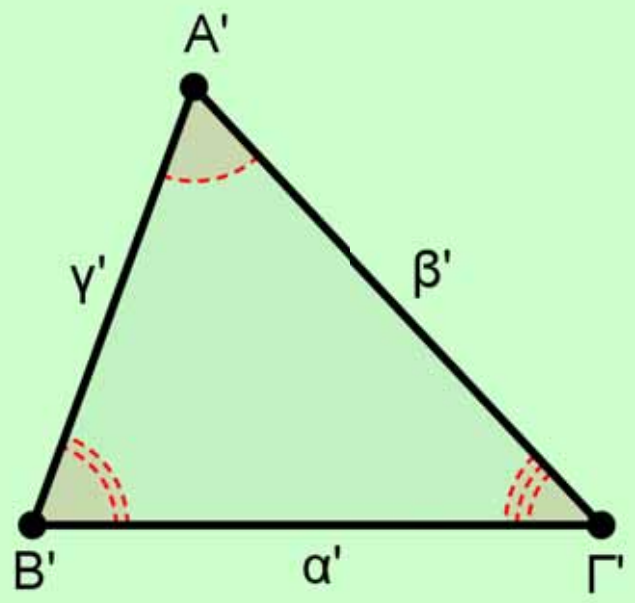
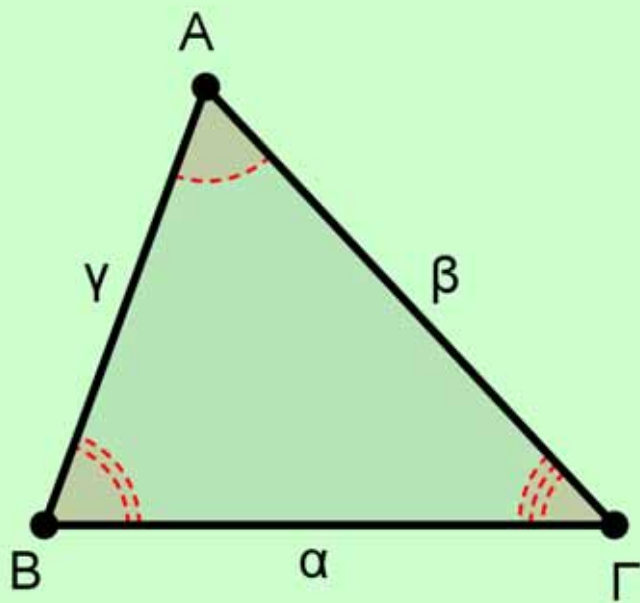
$$\beta = \beta'$$

$$\gamma = \gamma'$$



$$\hat{A} = \hat{A}'$$

## 2° Κριτήριο Ισότητας.

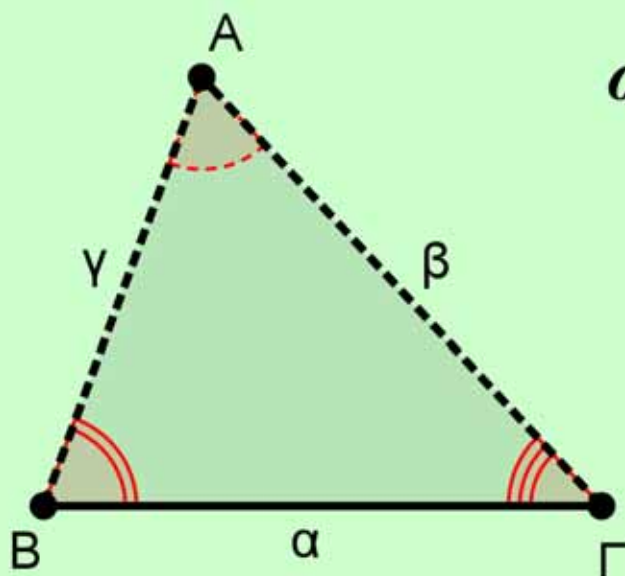


$$\alpha = \alpha'$$

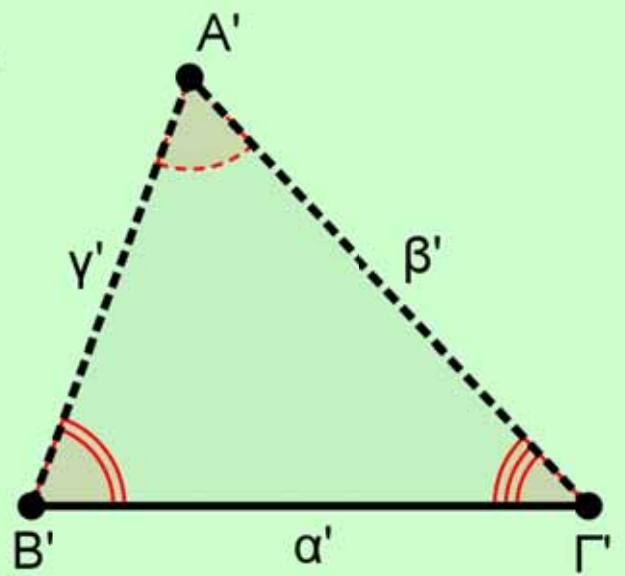
$$\beta = \beta'$$

$$\gamma = \gamma'$$

## 3° Κριτήριο Ισότητας.



$$\alpha = \alpha'$$

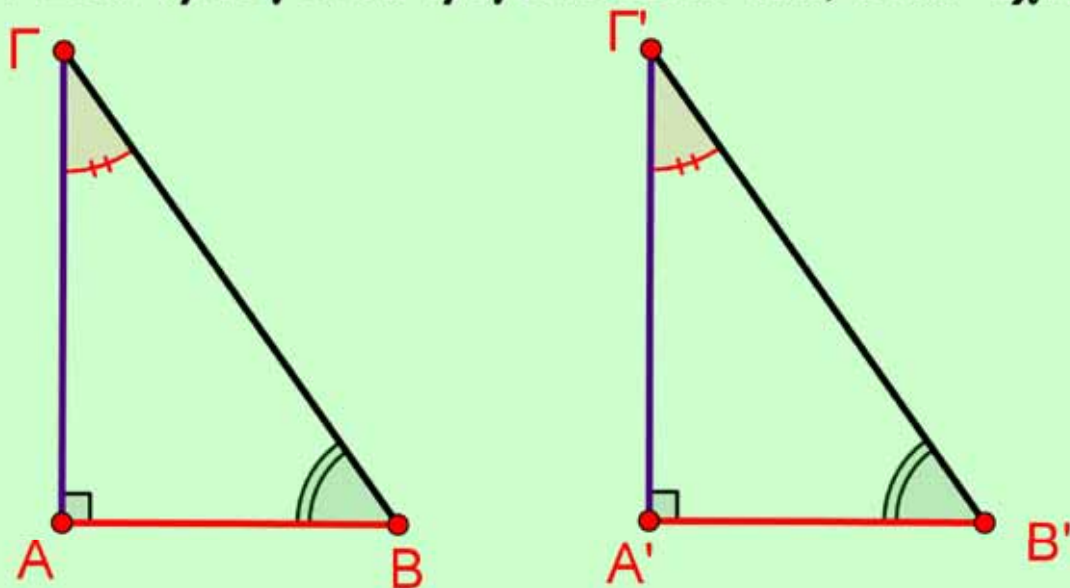


$$\hat{B} = \hat{B}'$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

## Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων.

★ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν...



► ... την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες.

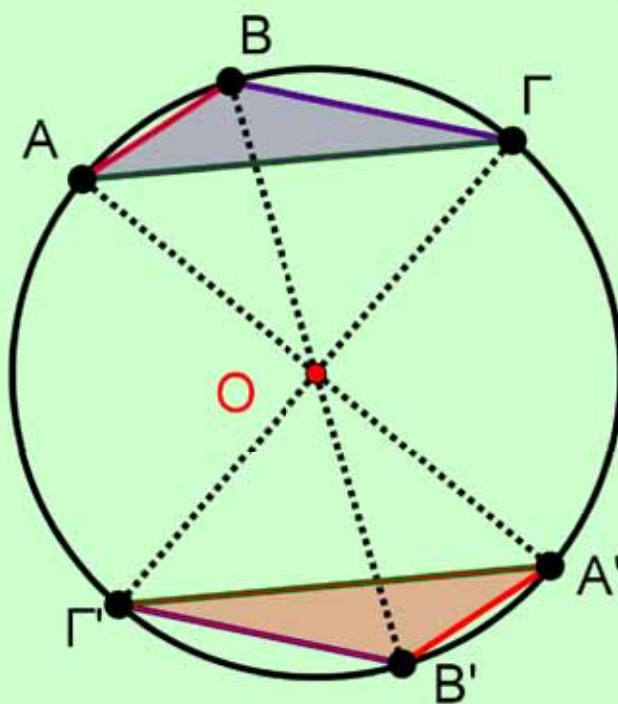
► ... δύο πλευρές ίσες.

Βαννέλης Ψόχας 45

## Άσκηση (Ισότητα Τριγώνων).

★ Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και οι διάμετροί του  $AA', BB'$  και  $ΓΓ'$ .

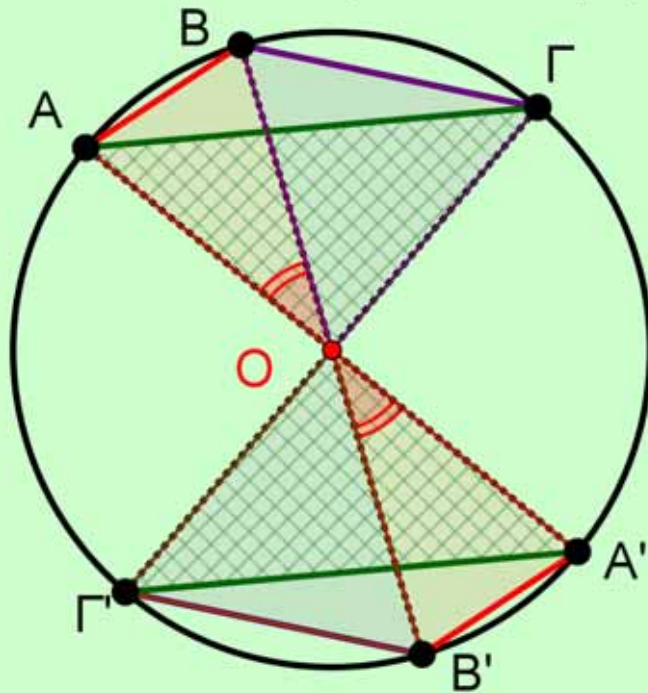
Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα  $ABΓ$  και  $A'B'Γ'$  είναι ίσα.



Βαννέλης Ψόχας 46

## Άσκηση (Ισότητα Τριγώνων).

- ★ Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και οι διάμετροί του  $AA',BB'$  και  $\Gamma\Gamma'$ .  
Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.



- Αποδεικνύουμε τις τρεις ισότητες τριγώνων:

$$\angle OAB = \angle OA'B'$$

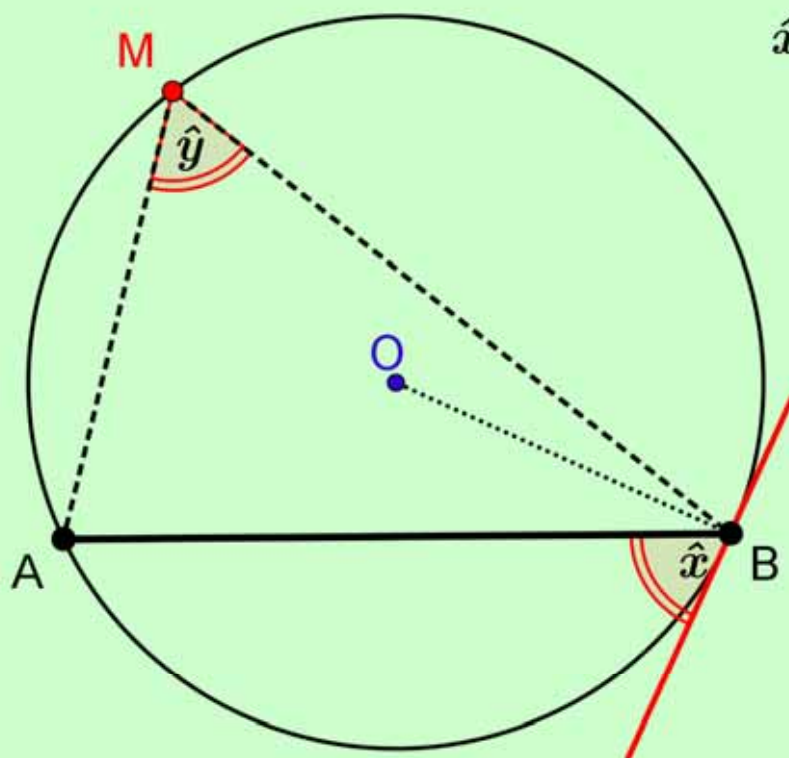
$$\angle OBG = \angle OB'G'$$

$$\angle OAG = \angle OA'G'$$

Βαννέλης Ψόχας 47

## Γωνία από Χορδή και Εφαπτομένη.

Η γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στη χορδή.



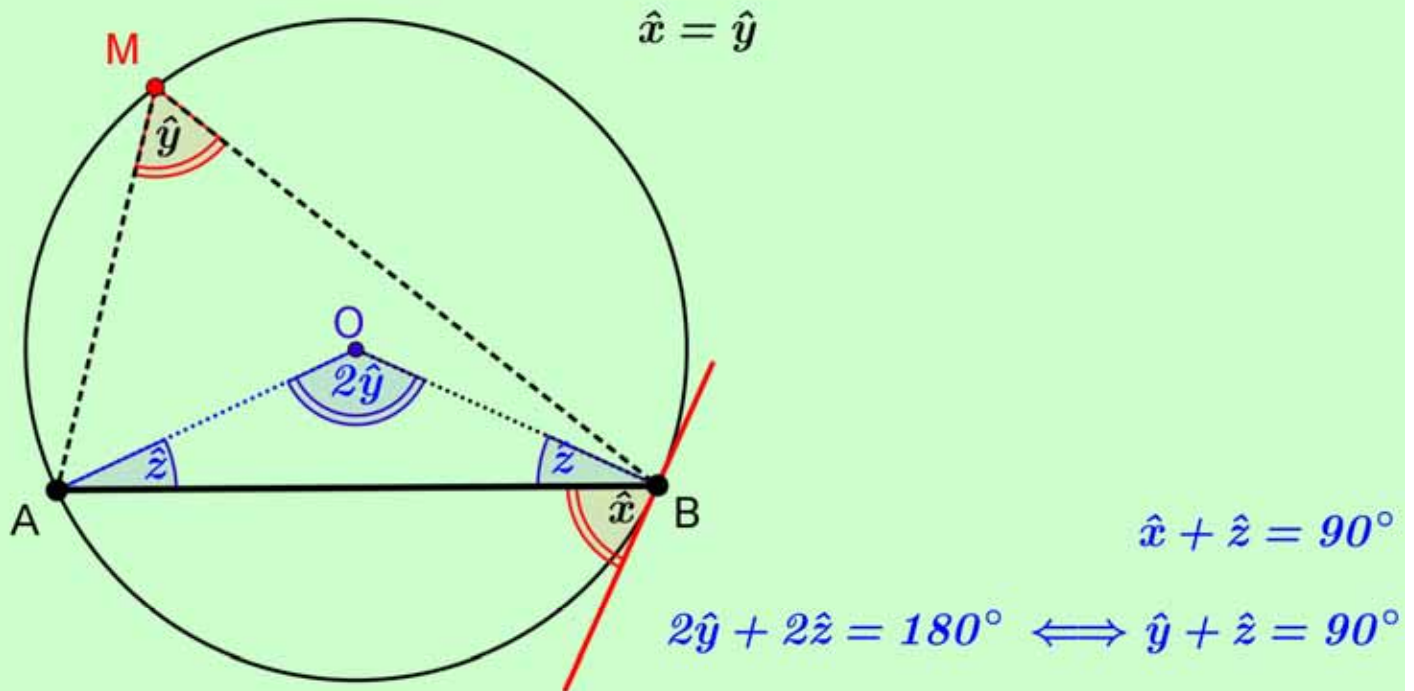
$$\hat{x} = \hat{y}$$

Βαννέλης Ψόχας 48



## Γωνία από Χορδή και Εφαπτομένη.

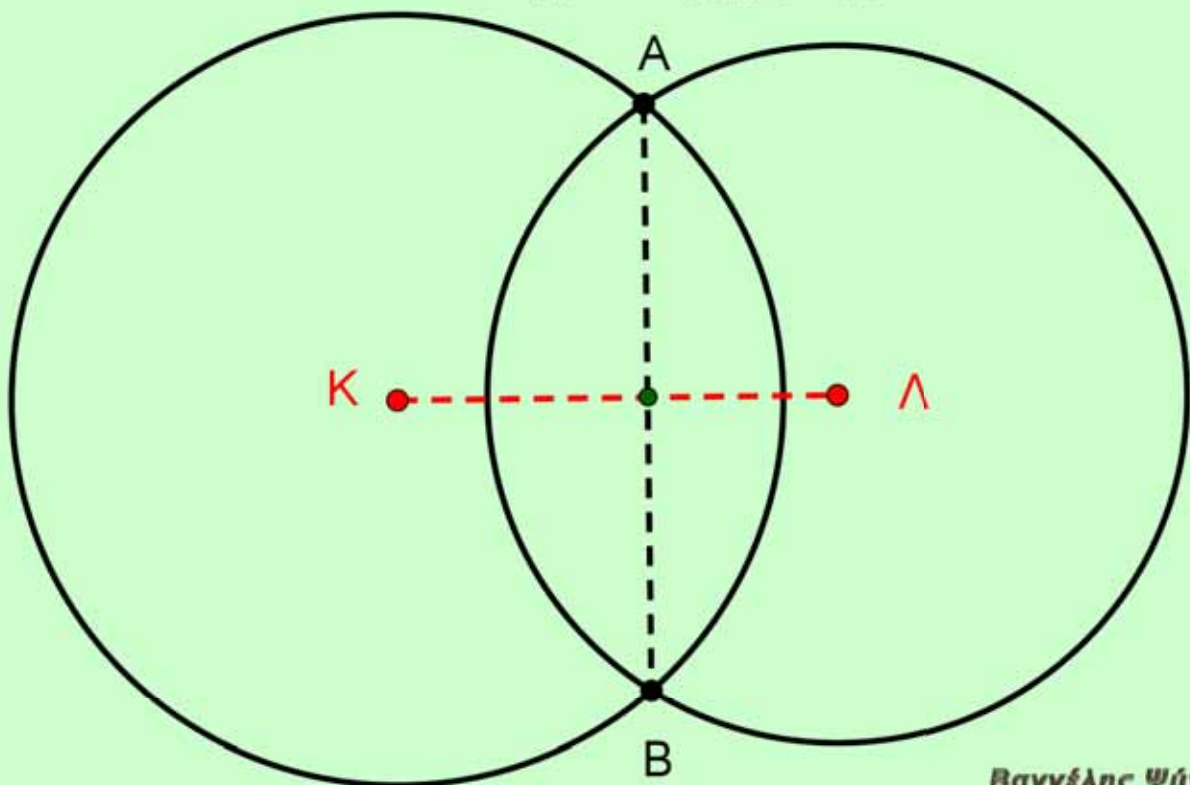
Η γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στη χορδή.



Βαννέλης Ψόχας 49

## Διάκεντρος-Κοινή χορδή.

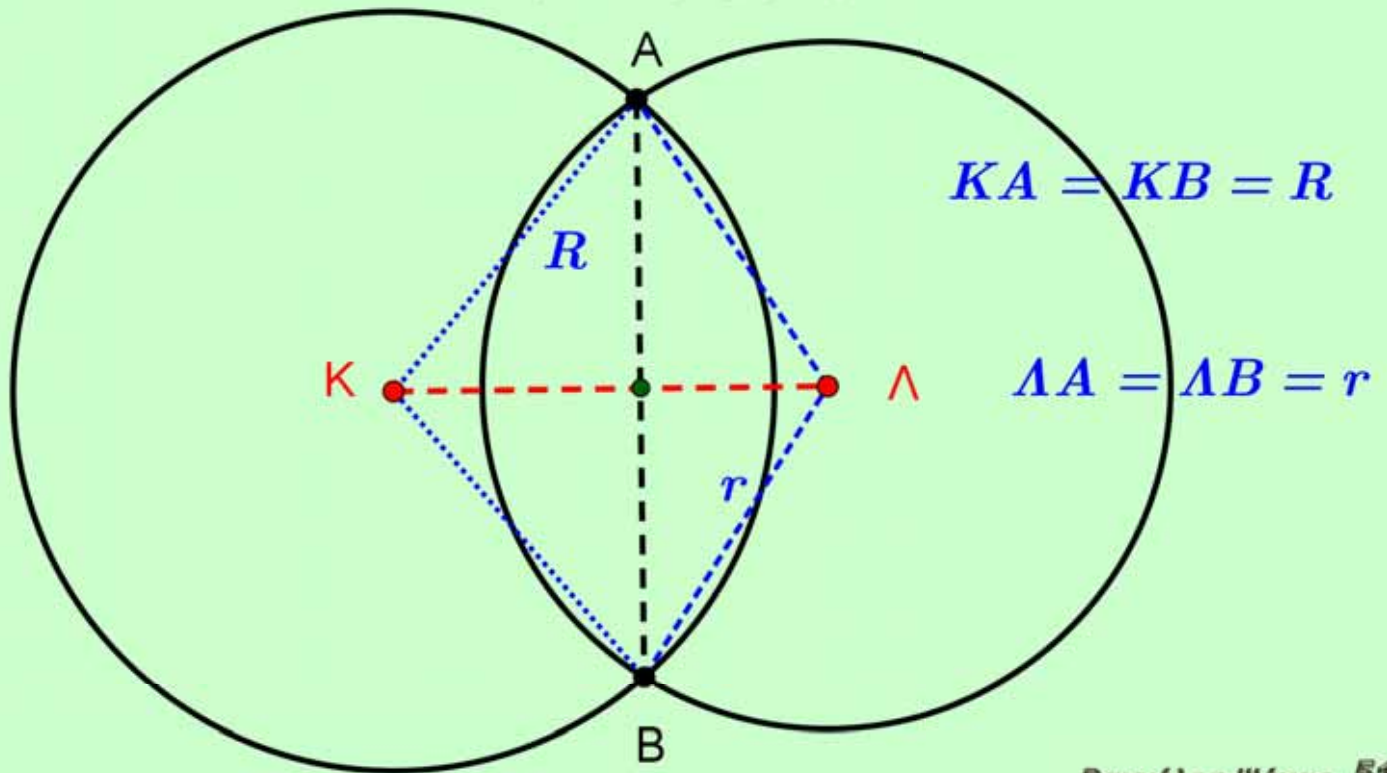
Η διάκεντρος, είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής.



Βαννέλης Ψόχας 50

## Διάκεντρος-Κοινή χορδή.

Η διάκεντρος, είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής.

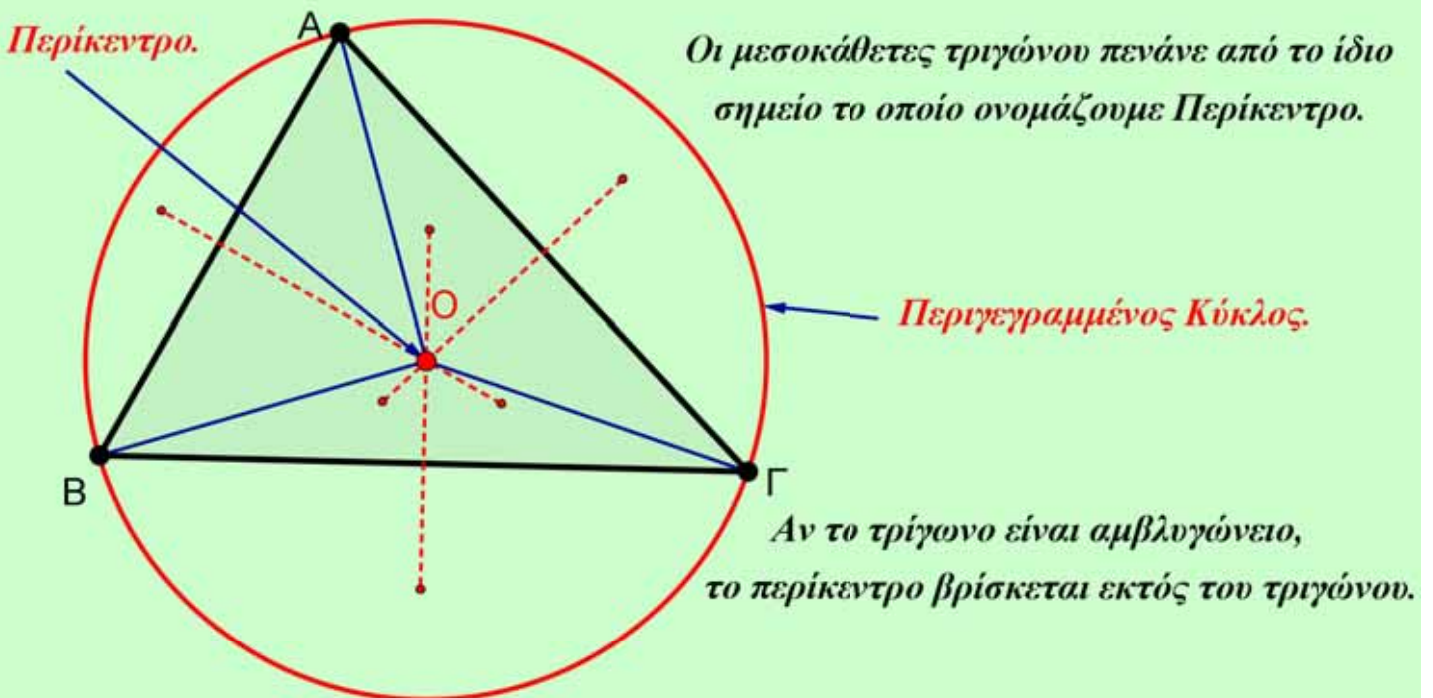


Βαννέλης Ψόχας 51

## Περίκεντρο.

Περίκεντρο.

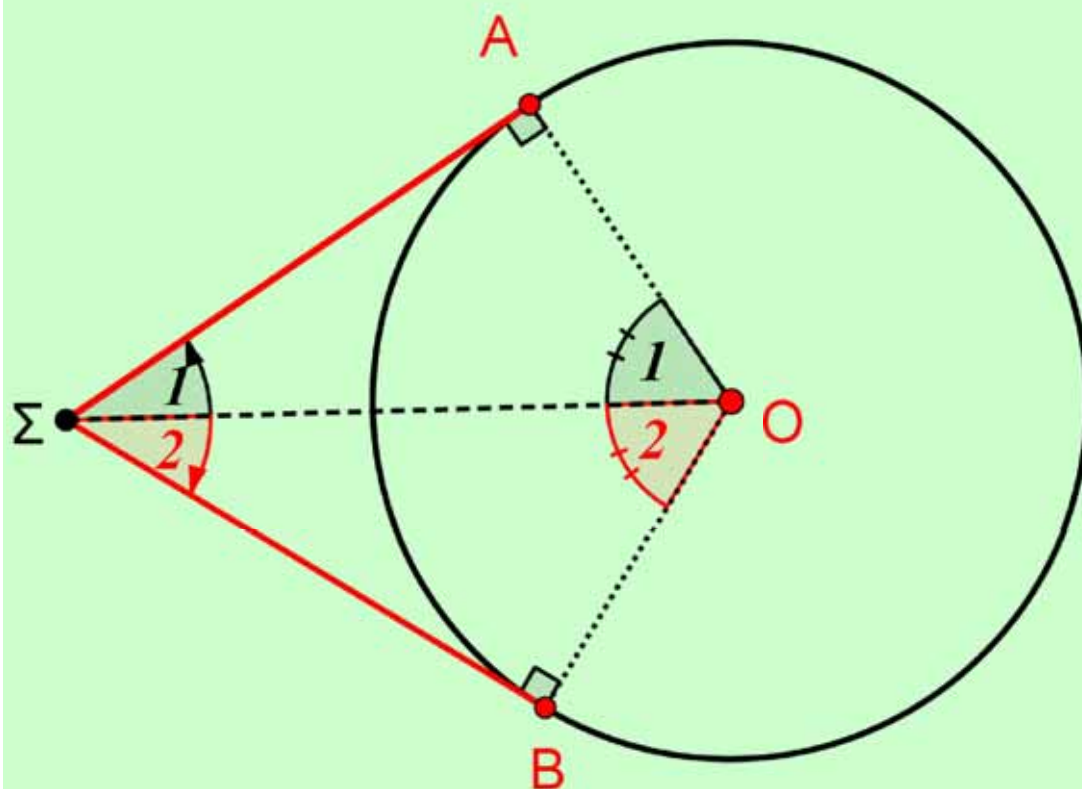
Οι μεσοκάθετες τριγώνου πενάνε από το ίδιο σημείο το οποίο ονομάζουμε Περίκεντρο.



Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, το περίκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

Βαννέλης Ψόχας 52

## Εφαπτόμενα Τμήματα.



$$\Sigma A = \Sigma B$$

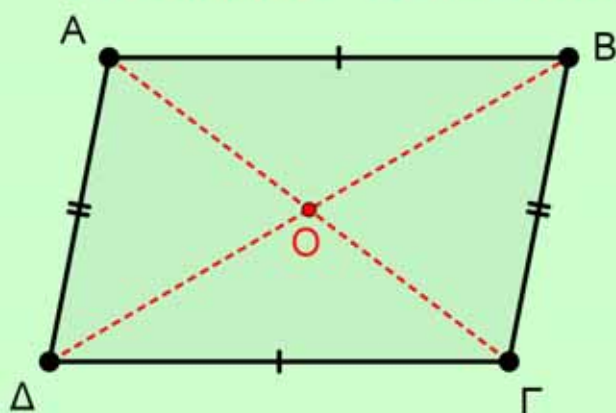
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\hat{\Sigma}_1 = \hat{\Sigma}_2$$

Βαννέλης Ψόχας 53

## Παραλληλόγραμμο.

$AB\Gamma\Delta$  παρλ/μο  $\Leftrightarrow (AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $A\Delta \parallel B\Gamma)$



*Απέναντι Γωνίες ίσες.*

$AB\Gamma\Delta$  παρλ/μο  $\Leftrightarrow (\hat{A} = \hat{\Gamma}$  και  $\hat{B} = \hat{\Delta})$

*Απέναντι Πλευρές ίσες.*

$AB\Gamma\Delta$  παρλ/μο  $\Leftrightarrow (AB = \Gamma\Delta$  και  $A\Delta = B\Gamma)$

*Δύο απέναντι Πλευρές ίσες και παράλληλες.*

$AB\Gamma\Delta$  παρλ/μο  $\Leftrightarrow (AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB = \Gamma\Delta)$

$AB\Gamma\Delta$  παρλ/μο  $\Leftrightarrow (A\Delta \parallel B\Gamma$  και  $A\Delta = B\Gamma)$

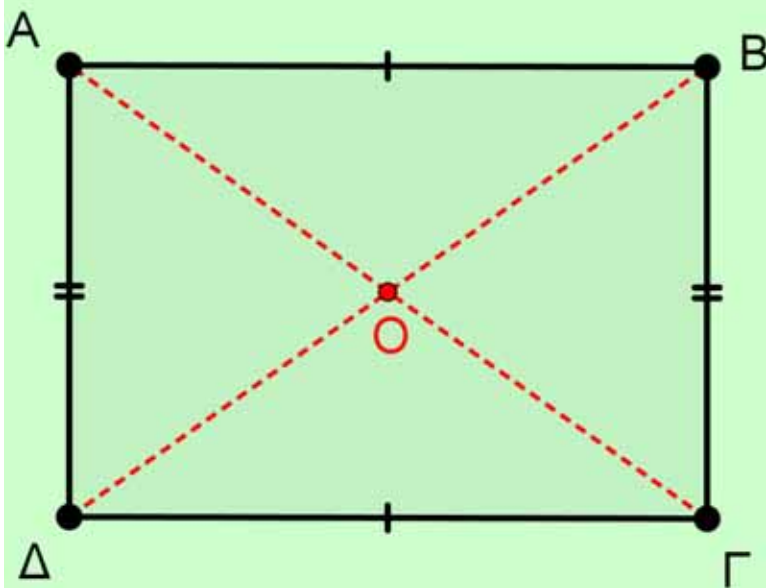
*Οι διαγώνιες διχοτομούνται.*

$AB\Gamma\Delta$  παρλ/μο  $\Leftrightarrow (OA = O\Gamma$  και  $OB = O\Delta)$

Βαννέλης Ψόχας 54

## Ορθογώνιο.

*ΑΒΓΔ Ορθογώνιο Παρλ/μο  $\Leftrightarrow$  (ΑΒΓΔ παραλ/μο με μία γωνία ορθή)*



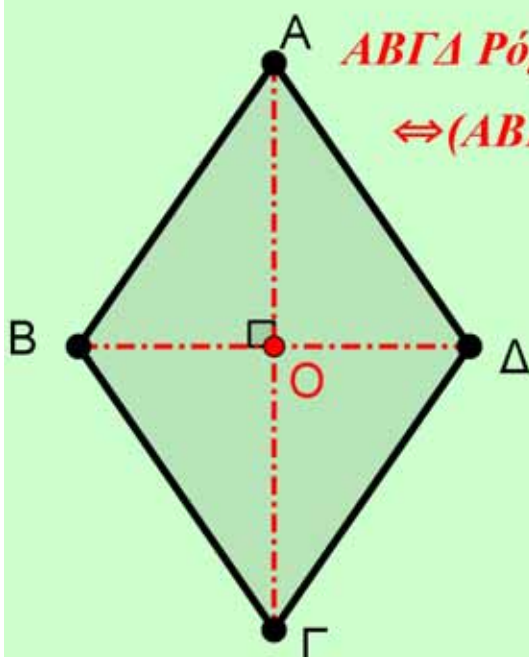
*Όλες οι γωνίες είναι ορθές*

*Οι διαγώνιες είναι ίσες*

## Ρόμβος.

*ΑΒΓΔ Ρόμβος  $\Leftrightarrow$*

*$\Leftrightarrow$  (ΑΒΓΔ παρ/μο και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες)*

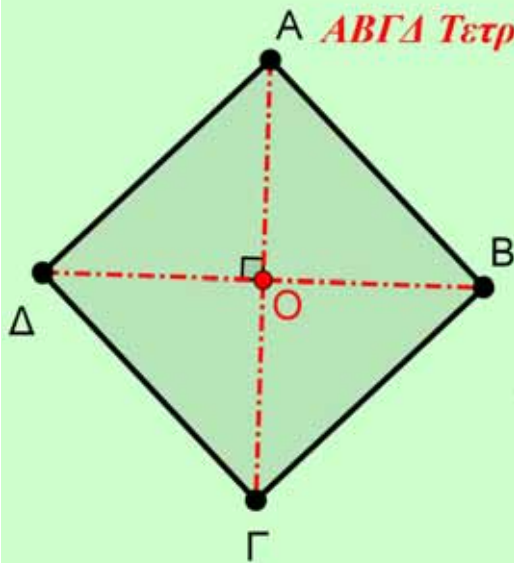


*Όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους*

*Οι διαγώνιες είναι κάθετες μεταξύ τους*

*Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του.*

## Τετράγωνο.



$AB\Gamma\Delta$  Τετράγωνο  $\Leftrightarrow$  ( $AB\Gamma\Delta$  παρ/μο, δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και διαγώνιες ίσες)

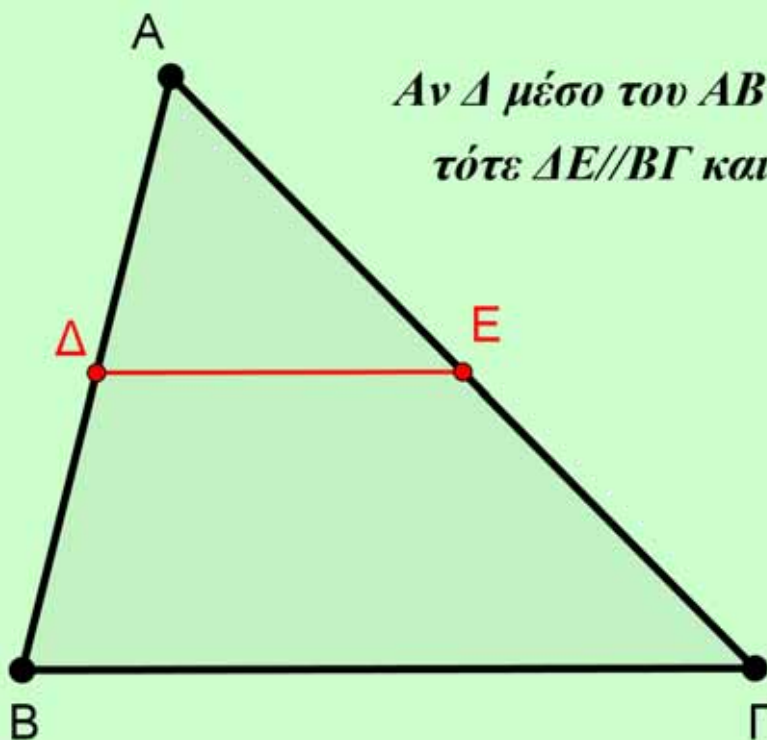
Όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους.

Οι διαγώνιες είναι κάθετες μεταξύ τους.

Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του τετραγώνου.

Βαννέλης Ψόχας 57

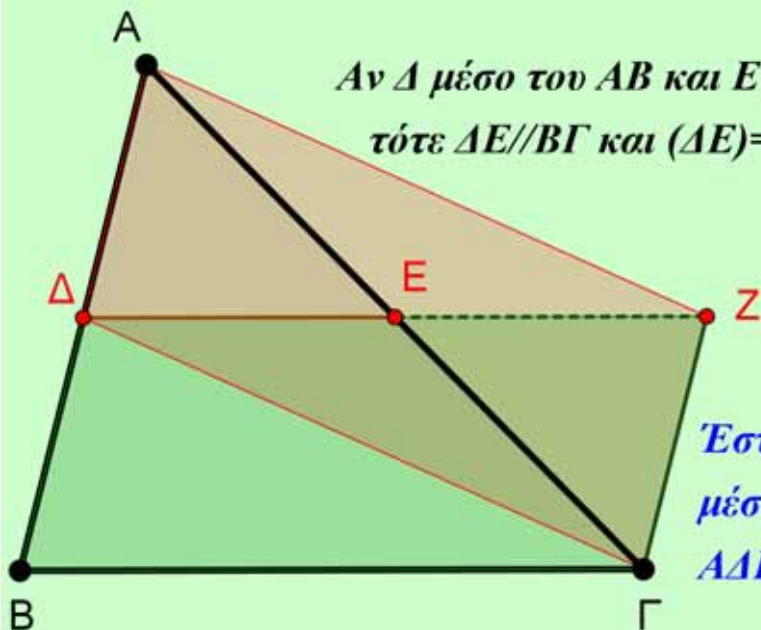
## Εφαρμογή του Παραλληλογράμμου.



Αν  $\Delta$  μέσο του  $AB$  και  $E$  μέσο του  $A\Gamma$   
τότε  $\Delta E \parallel B\Gamma$  και  $(\Delta E) = (B\Gamma)/2$ .

Βαννέλης Ψόχας 58

## Εφαρμογή του Παραλληλογράμμου.

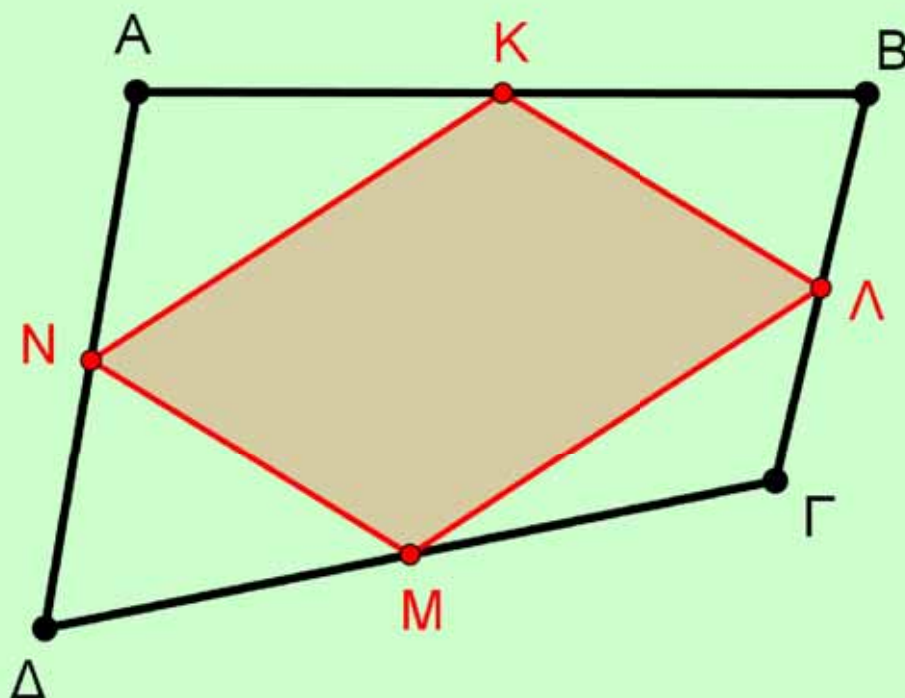


*Αν Δ μέσο του ΑΒ και Ε μέσο του ΑΓ  
τότε ΔΕ//ΒΓ και (ΔΕ)=(ΒΓ)/2.*

*Έστω Ζ το συμμετρικό του Δ ως προς το μέσο Ε της ΒΓ. . . . τότε τα τετράπλευρα ΑΔΓΖ και ΒΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμα.*

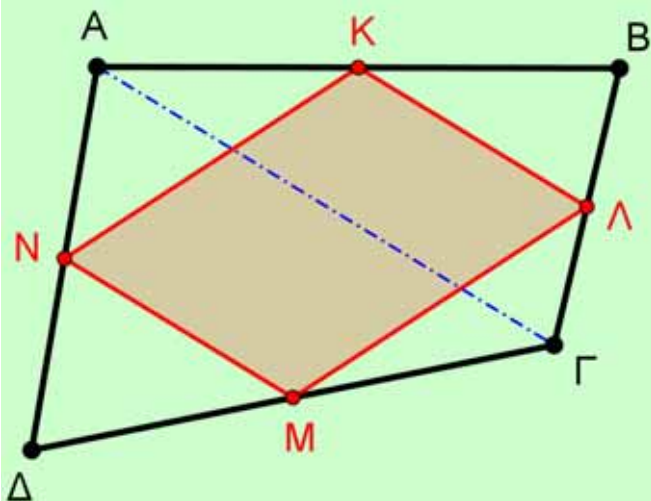
## Εφαρμογή του Παραλληλογράμμου.

*Τα μέσα των πλευρών οποιουδήποτε τετραπλεύρου,  
ορίζουν παραλληλόγραμμο.*



## Εφαρμογή του Παραλληλογράμμου.

Τα μέσα των πλευρών οποιουδήποτε τετραπλεύρου,  
ορίζουν παραλληλόγραμμο.



$$\left. \begin{array}{l} K \text{ μέσο του } AB \\ L \text{ μέσο του } BC \end{array} \right\} \Rightarrow KL = // \frac{AC}{2}$$

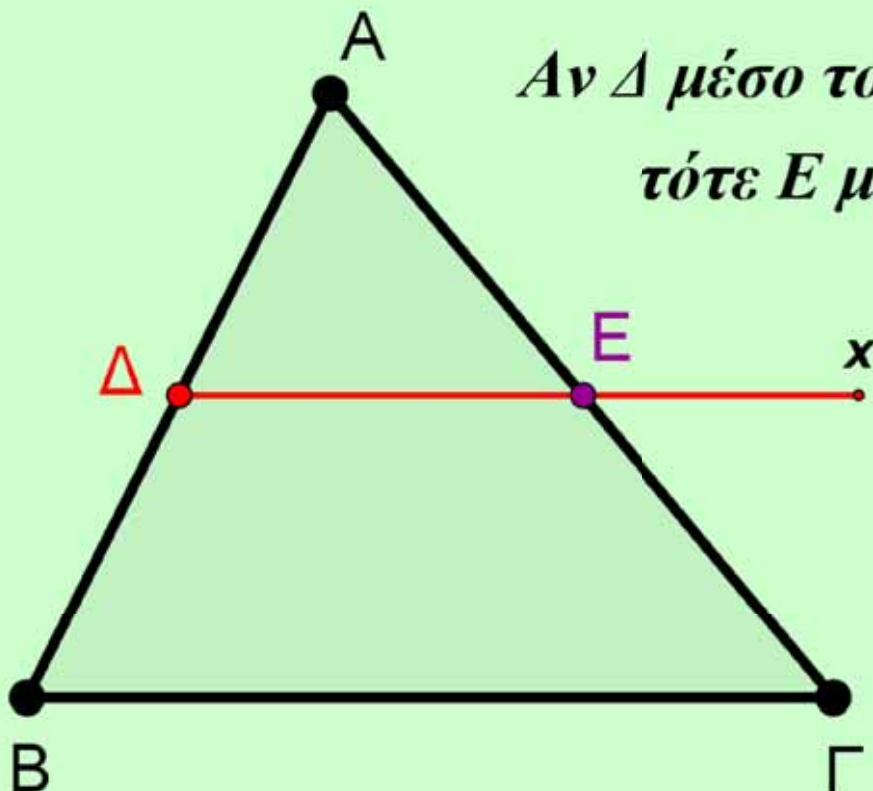
$$\left. \begin{array}{l} N \text{ μέσο του } AD \\ M \text{ μέσο του } CD \end{array} \right\} \Rightarrow MN = // \frac{AC}{2}$$

$$\text{Άρα } KL = // MN = // \frac{AC}{2}$$

Βαννέλης Ψόχας 61

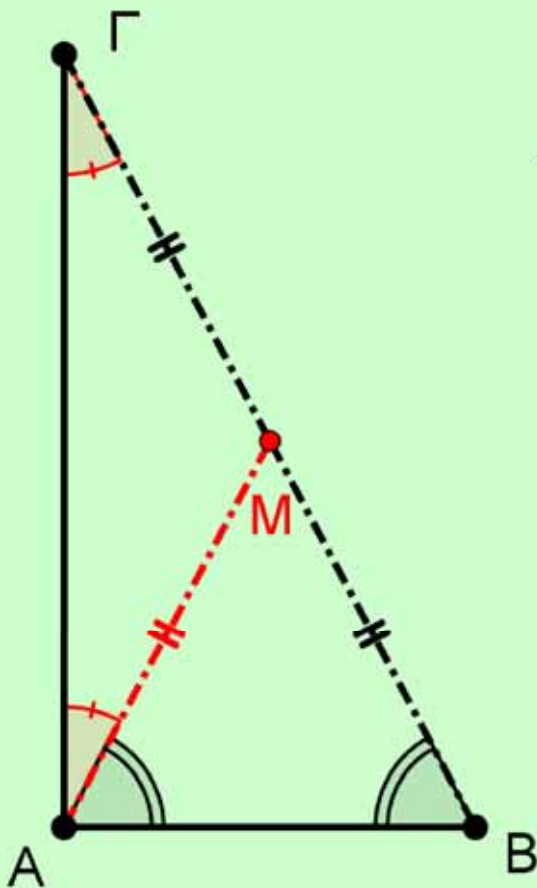
## Εφαρμογή του Παραλληλογράμμου.

Αν  $\Delta$  μέσο του  $AB$  και  $\Delta x // BG$   
τότε  $E$  μέσο του  $AG$ .



Βαννέλης Ψόχας 62

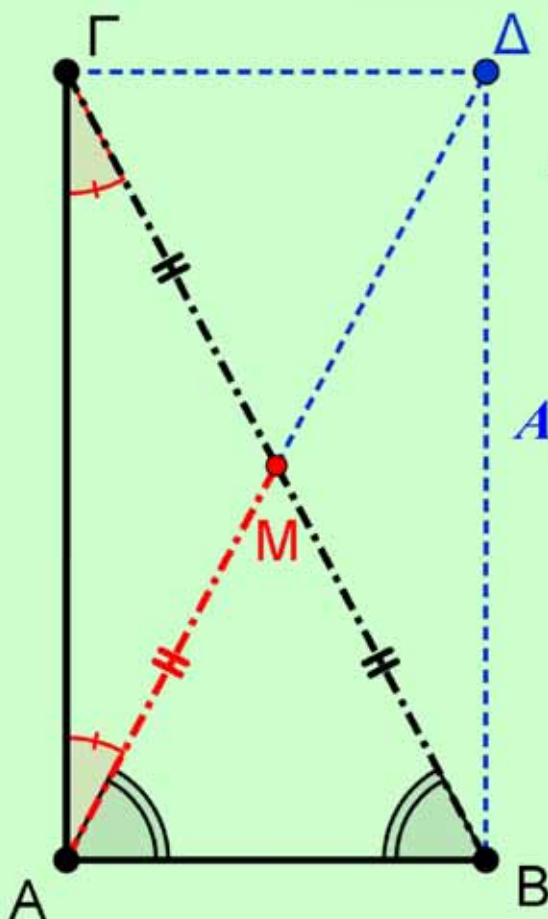
## Ιδιότητα Ορθογωνίου.



*Αν  $M$  μέσο της υποτείνουσας  $BΓ$ ,  
τότε  $MA=MB=MG$ .*

Βαννέλης Ψύχας 63

## Ιδιότητα Ορθογωνίου.



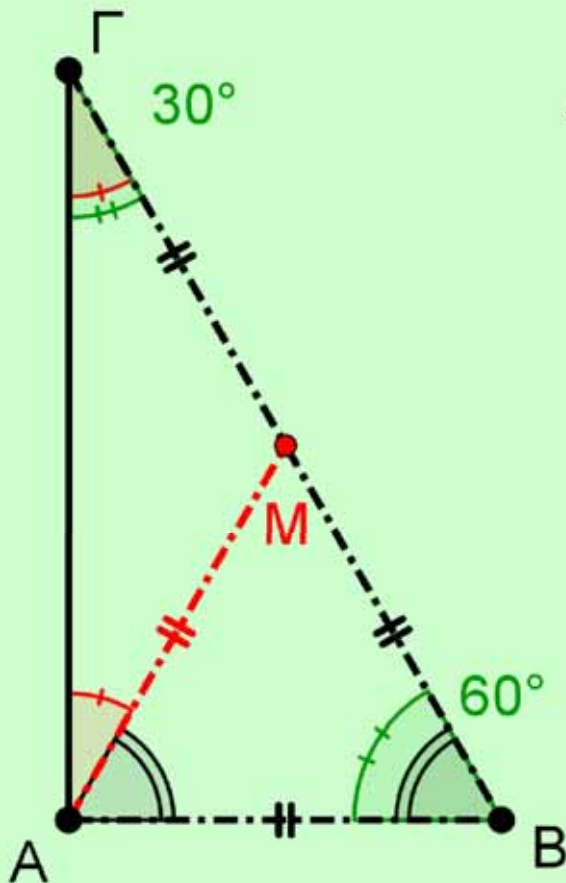
*Αν  $M$  μέσο της υποτείνουσας  $BΓ$ ,  
τότε  $MA=MB=MG$ .*

*Αν  $\Delta$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς  $M$ ,  
τότε το  $AB\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο.*

Βαννέλης Ψύχας 64



## Ιδιότητα Ορθογωνίου.

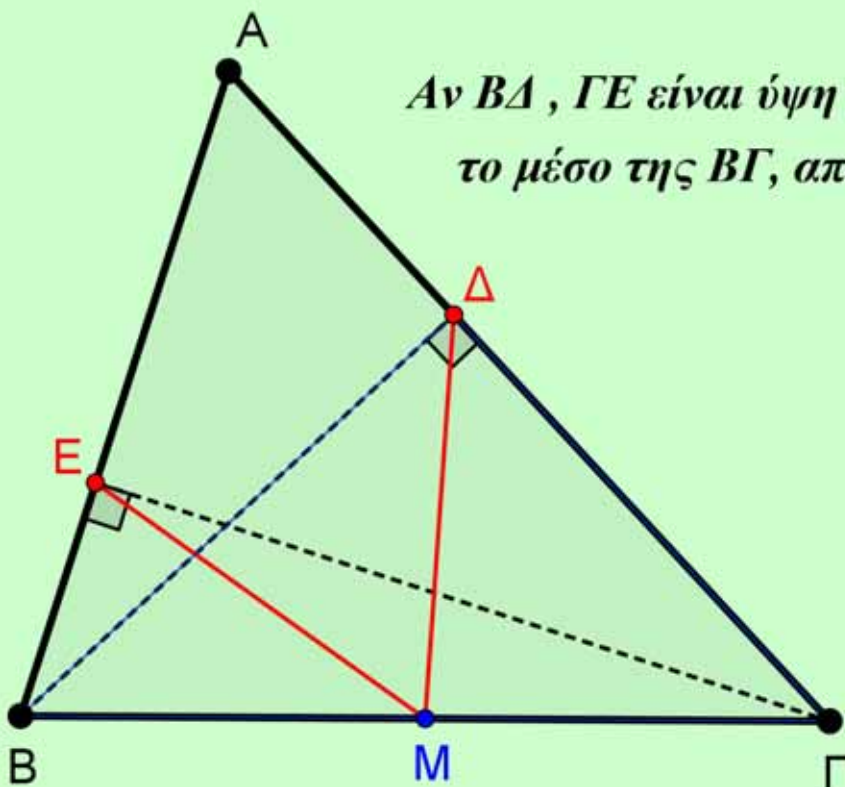


Αν  $M$  μέσο της υποτεινούσας  $B\Gamma$ ,  
τότε  $MA=MB=MG$ .

Αν επί πλέον  $\angle \Gamma=30^\circ$ ,  
τότε  $MA=MB=MG=AB$ .

Βαννέλης Ψόχας 65

## Άσκηση.

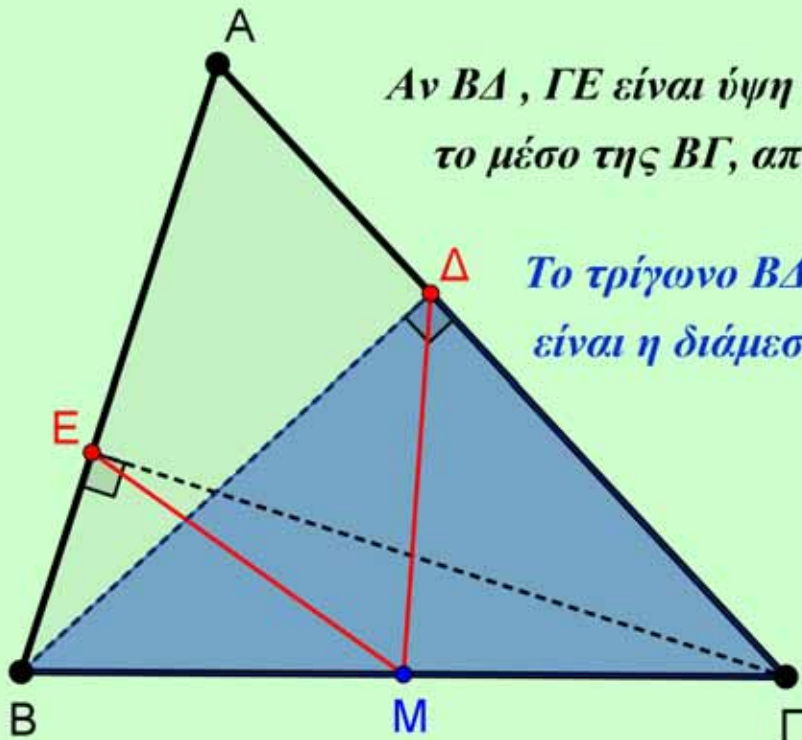


Αν  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  είναι ύψη του τριγώνου και  $M$  είναι  
το μέσο της  $B\Gamma$ , αποδείξτε ότι  $M\Delta=ME$ .

Βαννέλης Ψόχας 66

## Άσκηση (Υ).

Αν  $ΒΔ$ ,  $ΓΕ$  είναι ύψη του τριγώνου και  $Μ$  είναι το μέσο της  $ΒΓ$ , αποδείξτε ότι  $ΜΔ=ΜΕ$ .



Το τρίγωνο  $ΒΔΓ$  είναι ορθογώνιο και η  $ΜΔ$  είναι η διάμεσος ως προς την υποτεινούσα.

Βαννέλης Ψόχας 67

## Τραπέζιο.

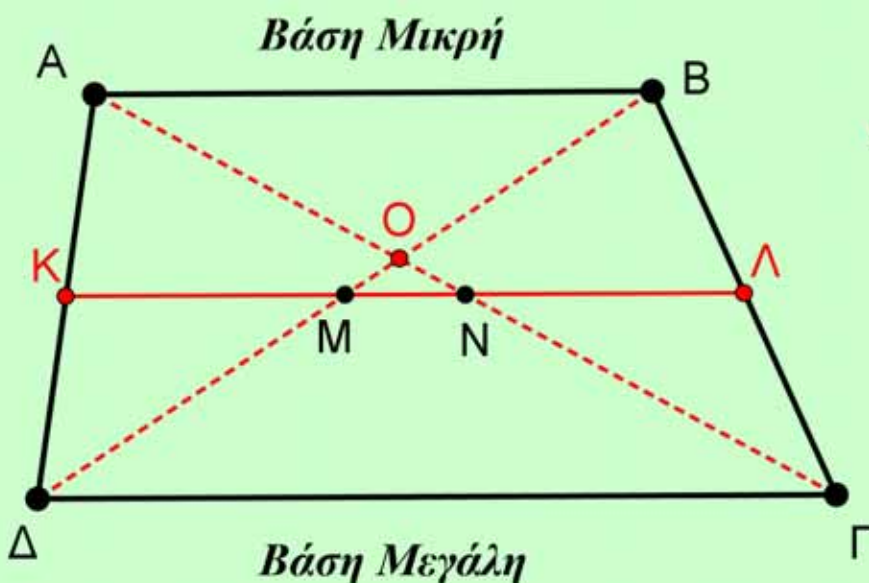
Δύο απέναντι πλευρές (βάσεις) παράλληλες και άνισες

**$ΚΛ$ : Διάμεσος Τραπεζίου**

$$ΚΛ // ΑΒ // ΓΔ$$

$$ΚΛ = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2}$$

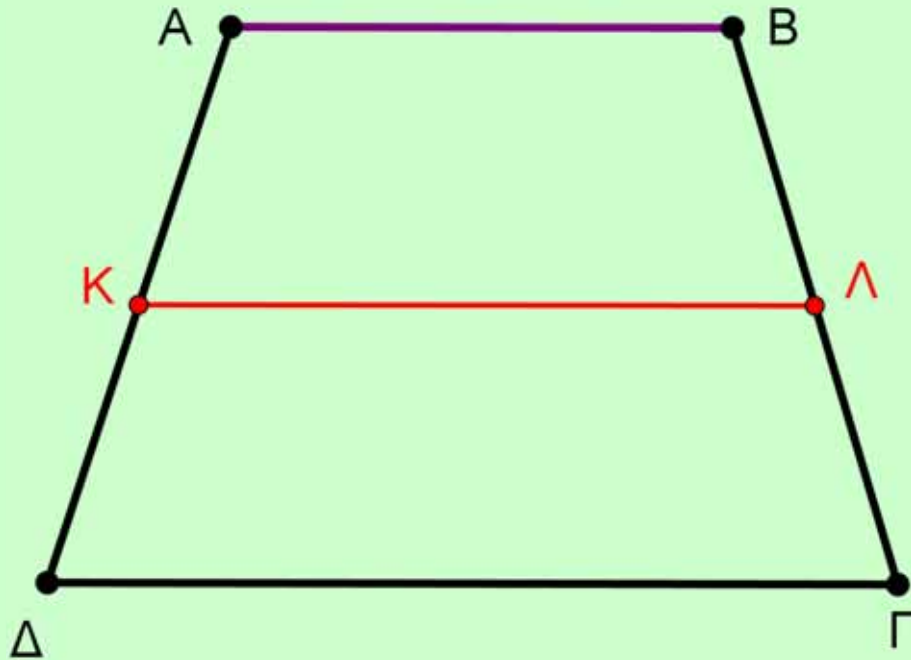
$$ΜΝ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$$



Βαννέλης Ψόχας 68

## Ιδιότητα Τραπεζίου.

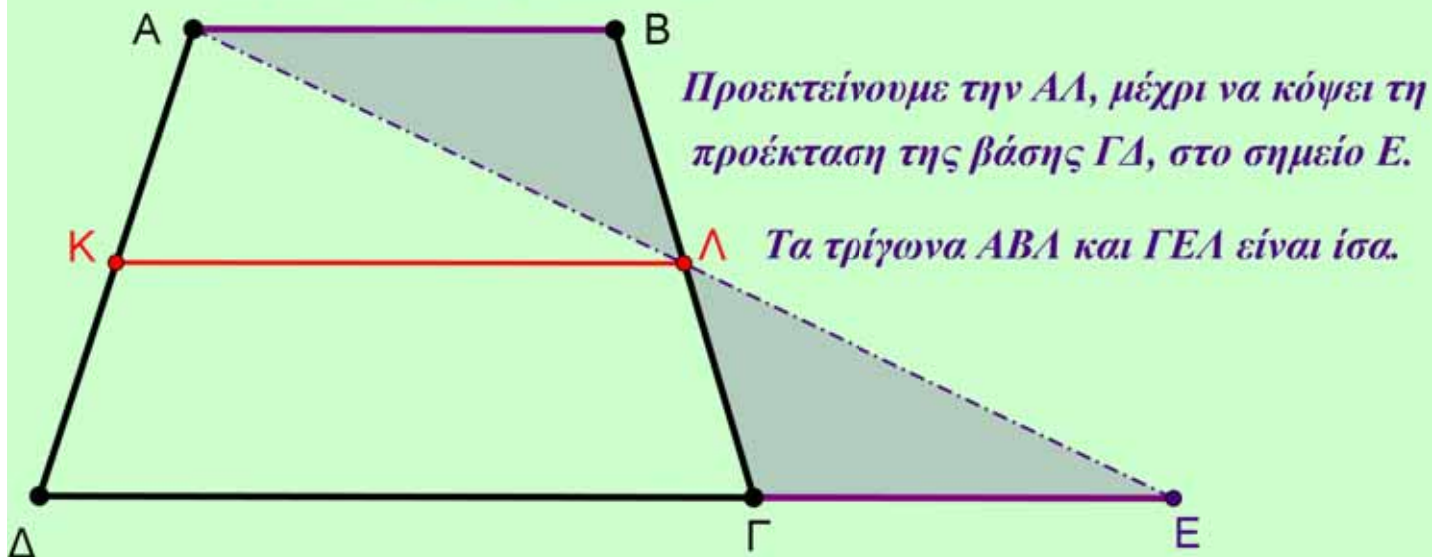
*Η διάμεσος είναι παράλληλη με τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμά τους.*



Βαννέλης Ψόχας 69

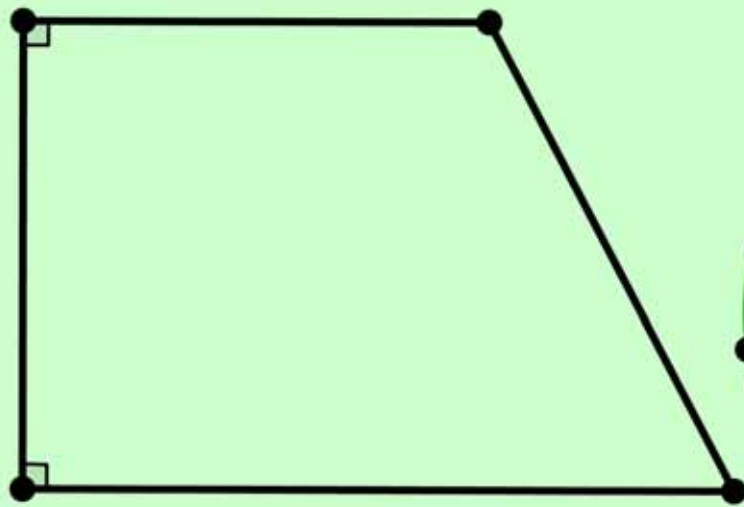
## Ιδιότητα Τραπεζίου (Υ).

*Η διάμεσος είναι παράλληλη με τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμά τους.*

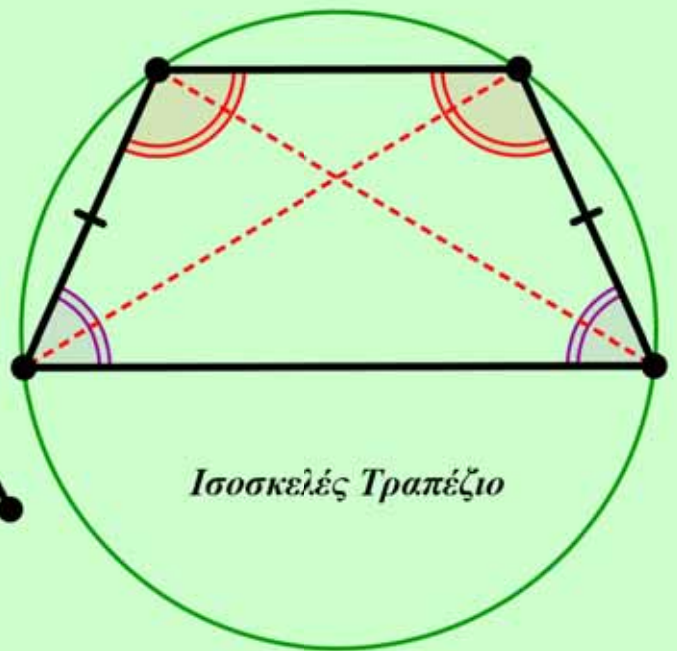


Βαννέλης Ψόχας 70

## Ειδικά Τραπέζια.



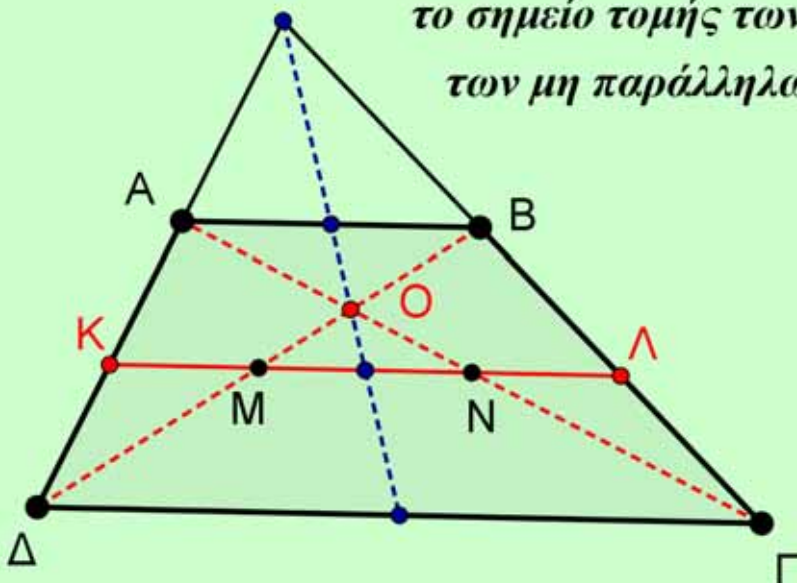
Ορθογώνιο Τραπέζιο



Ισοσκελές Τραπέζιο

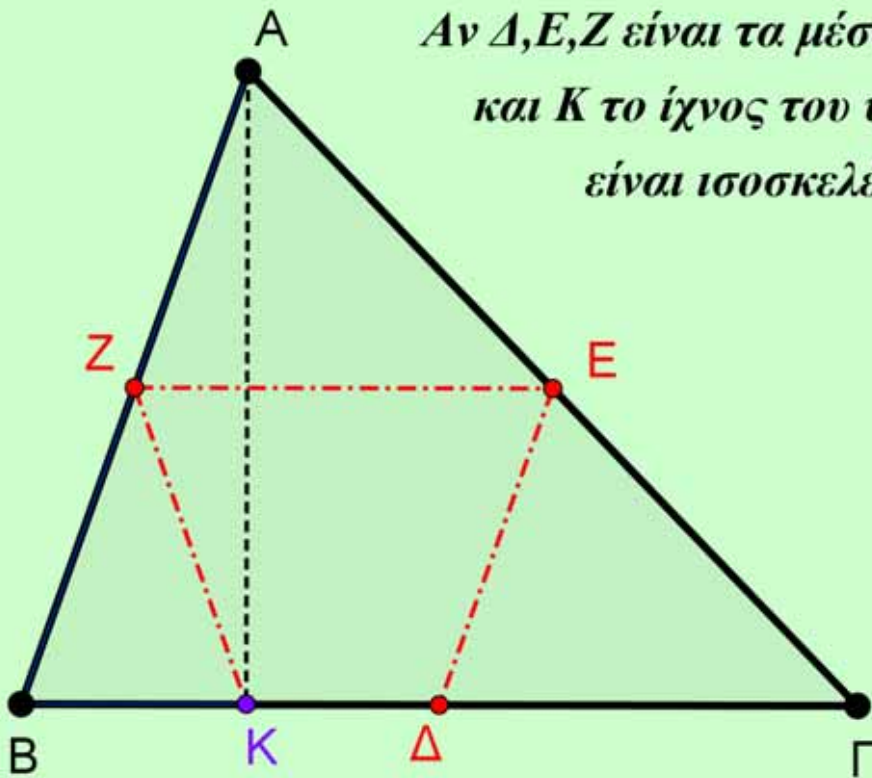
## Ιδιότητες Τραπεζίου

*Τα μέσα των βάσεων, το μέσο της διαμέσου, το σημείο τομής των διαγωνίων και το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών, είναι συνευθειακά.*



## Άσκηση.

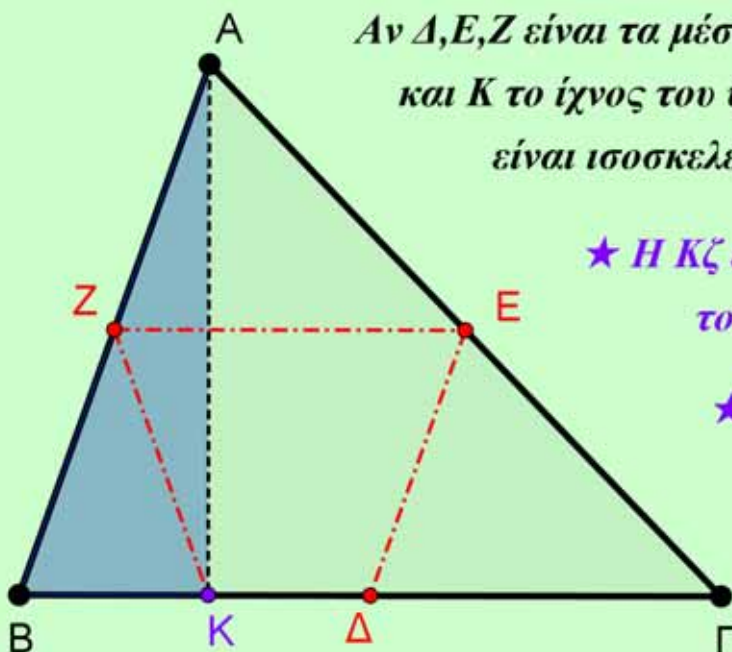
Αν  $\Delta, E, Z$  είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου και  $K$  το ίχνος του ύψους, τότε το  $\Delta EZK$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Βαννέλης Ψόχας 73

## Άσκηση (Υ).

Αν  $\Delta, E, Z$  είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου και  $K$  το ίχνος του ύψους, τότε το  $\Delta EZK$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



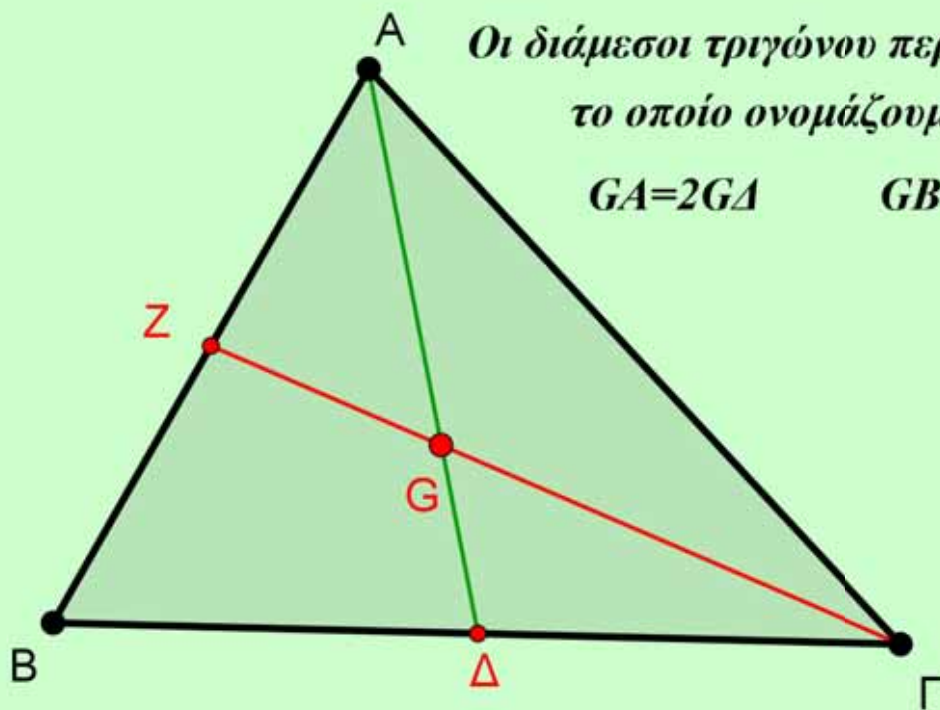
★ Η  $KZ$  είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου  $AKB$ .

★  $Z$  μέσο του  $AB$  και  $E$  μέσο του  $AC$   
άρα  $ZE \parallel BC$ .

★  $\Delta$  μέσο του  $BC$  και  $E$  μέσο του  $AC$   
άρα  $DE \parallel AB$ .

Βαννέλης Ψόχας 74

## Βαρύκεντρο.



Οι διάμεσοι τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο,  
το οποίο ονομάζουμε Βαρύκεντρο.

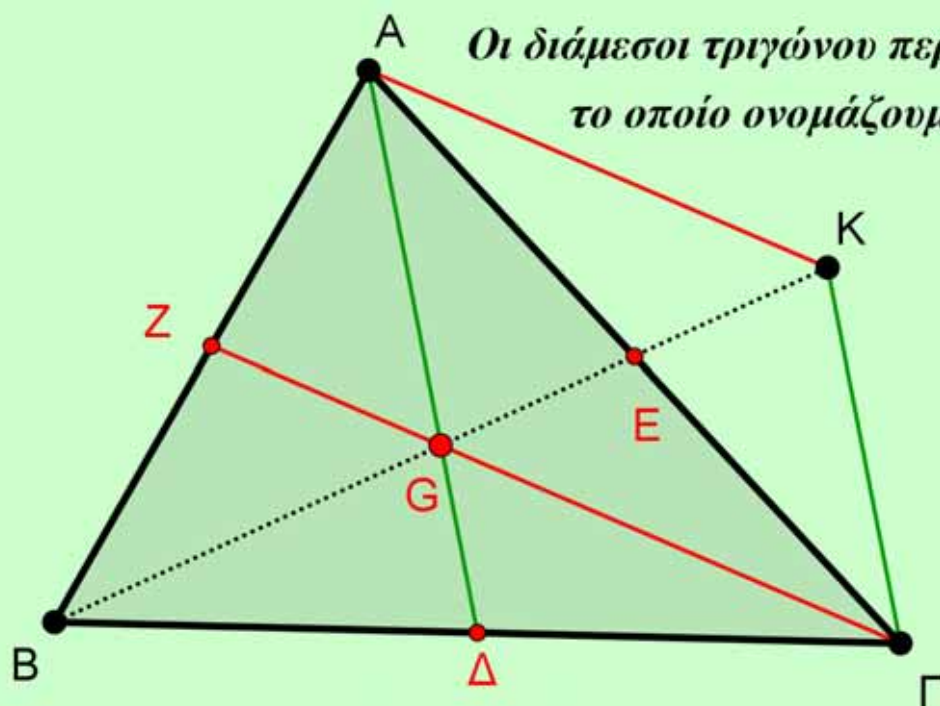
$$GA=2G\Delta$$

$$GB=2GE$$

$$G\Gamma=2GZ$$

Βαννέλης Ψόχας 75

## Βαρύκεντρο (Υ).



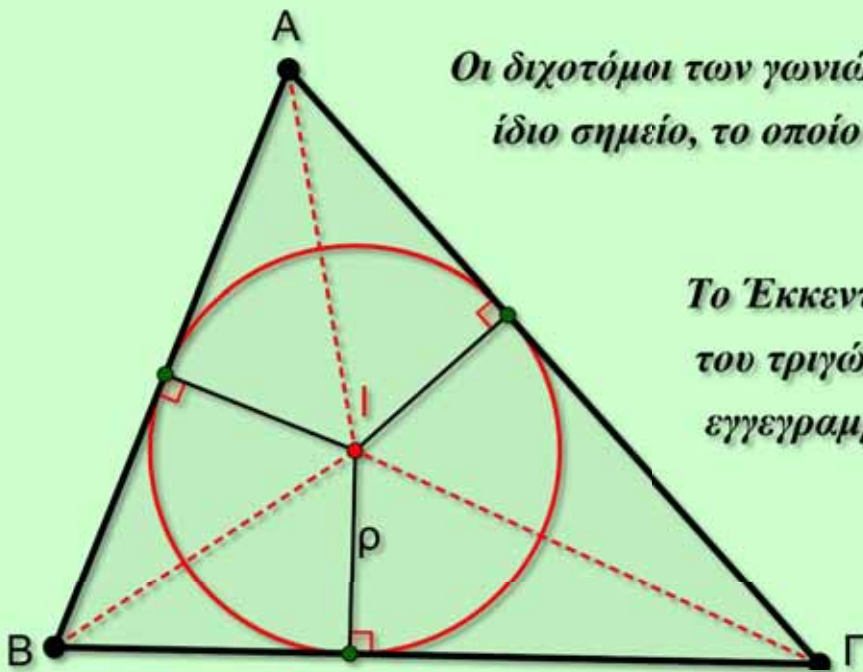
Οι διάμεσοι τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο,  
το οποίο ονομάζουμε Βαρύκεντρο.

Βαννέλης Ψόχας 76

## Έκκεντρο.

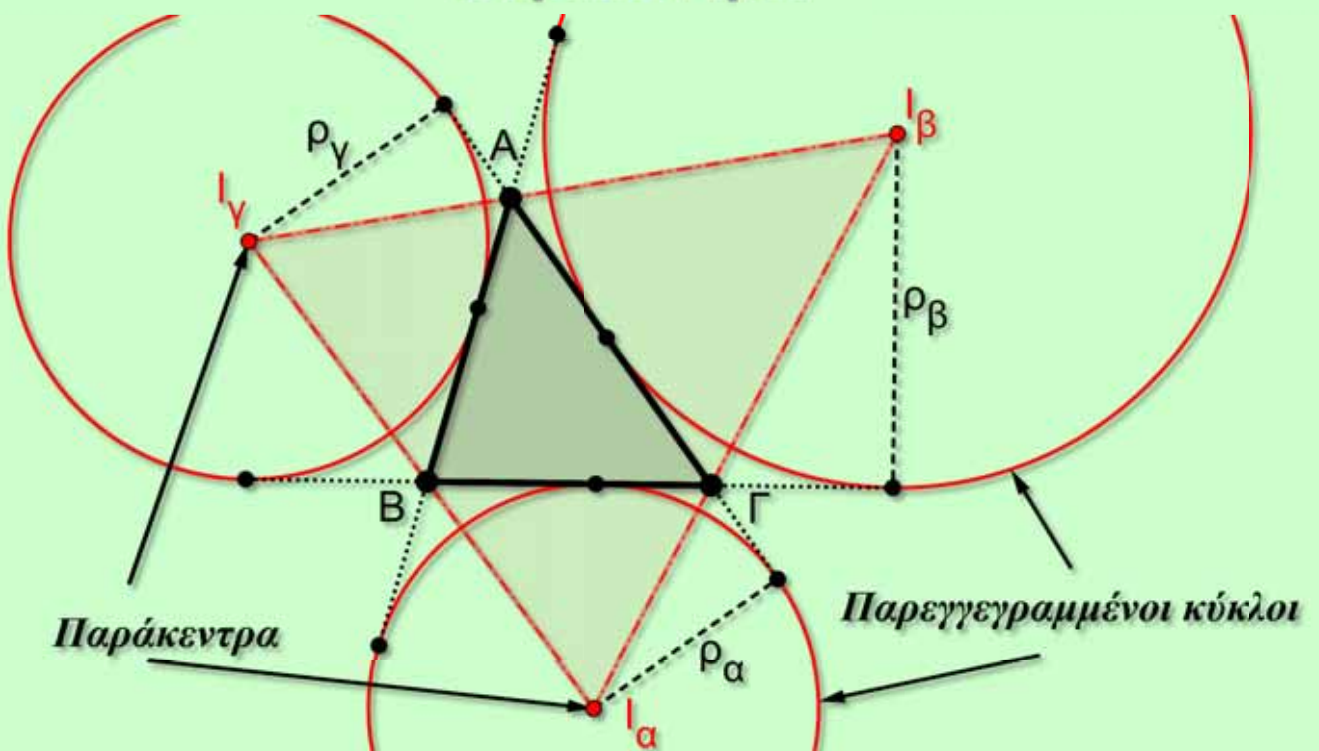
Οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο ονομάζουμε Έκκεντρο.

Το Έκκεντρο, ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου και είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.



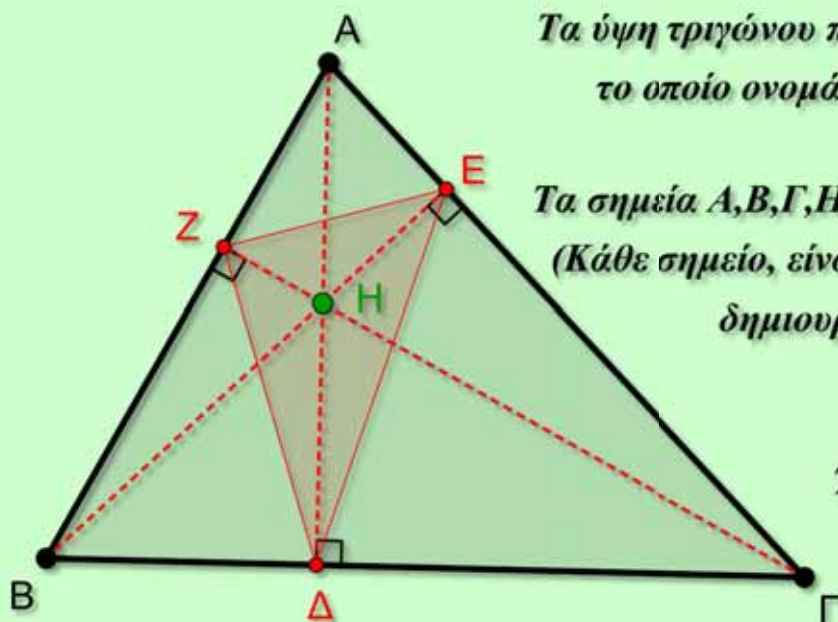
Βαννέλης Ψόχας 77

## Παράκεντρα.



Βαννέλης Ψόχας 78

## Ορθόκεντρο.



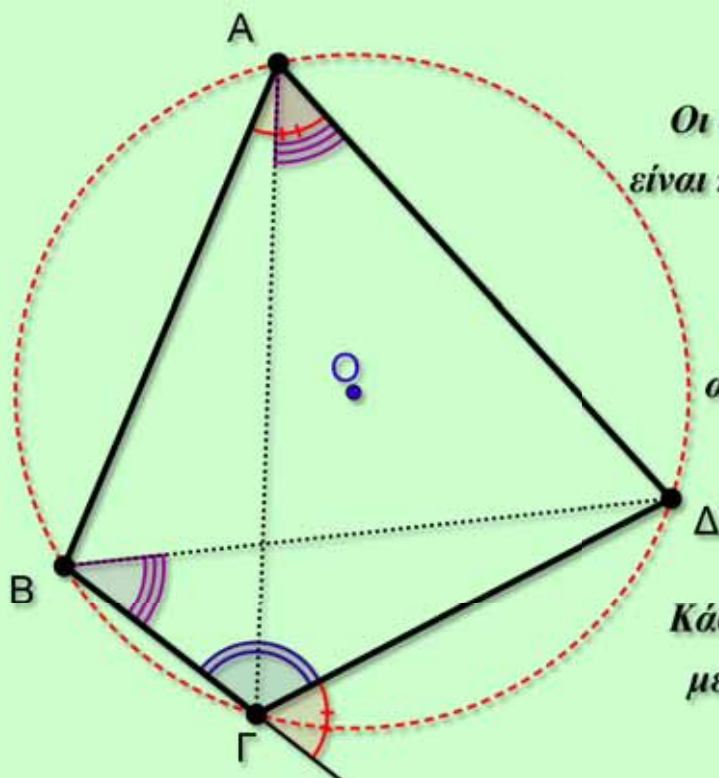
Τα ύψη τριγώνου πενάνε από το ίδιο σημείο,  
το οποίο ονομάζουμε Ορθόκεντρο.

Τα σημεία  $A, B, \Gamma, H$  αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα.  
(Κάθε σημείο, είναι ορθόκεντρο του τριγώνου που  
δημιουργούν τα άλλα τρία)

Το τρίγωνο  $\Delta EZ$  λέγεται ορθικό  
του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Βαννέλης Ψόχας 79

## Εγγράψιμα.



Οι απέναντι γωνίες  
είναι παραπληρωματικές.

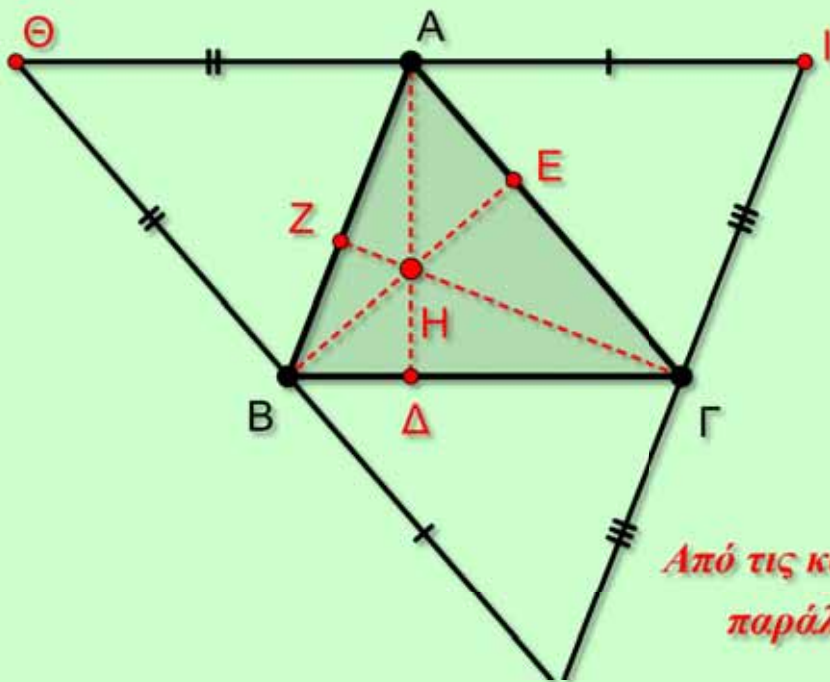
Κάθε πλευρά φαίνεται από τις  
απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες.

Κάθε εξωτερική γωνία ισούται  
με την απέναντι εσωτερική.

Βαννέλης Ψόχας 80



## Ορθόκεντρο (Απόδειξη).



Τα ύψη τριγώνου, περνάνε από το ίδιο σημείο.

☑ Υπόδειξη

Από τις κορυφές του τριγώνου, θεωρούμε παράλληλες προς τις πλευρές του.