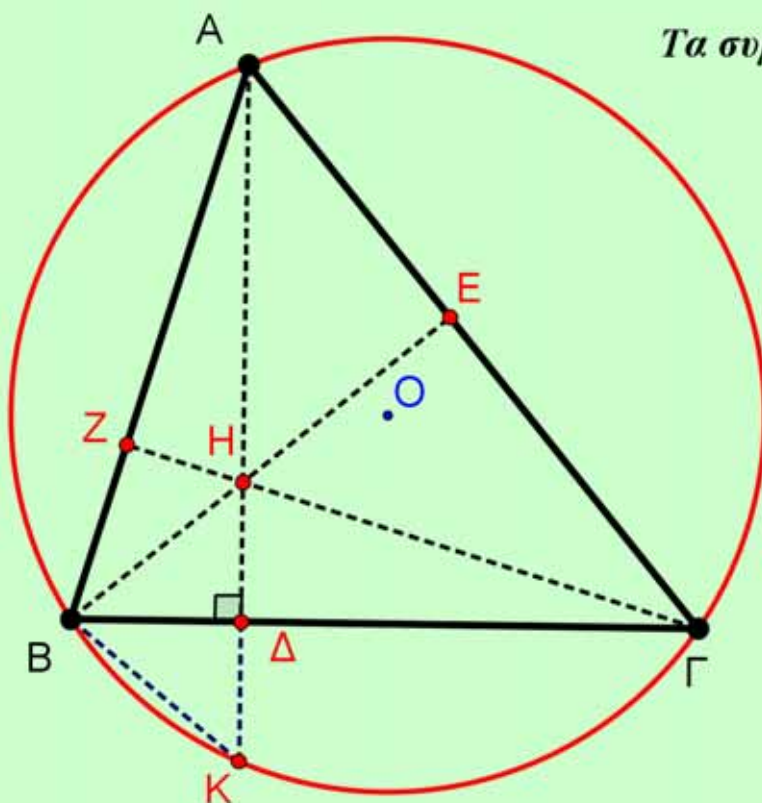


ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Βαννέλης Ψύχας 1

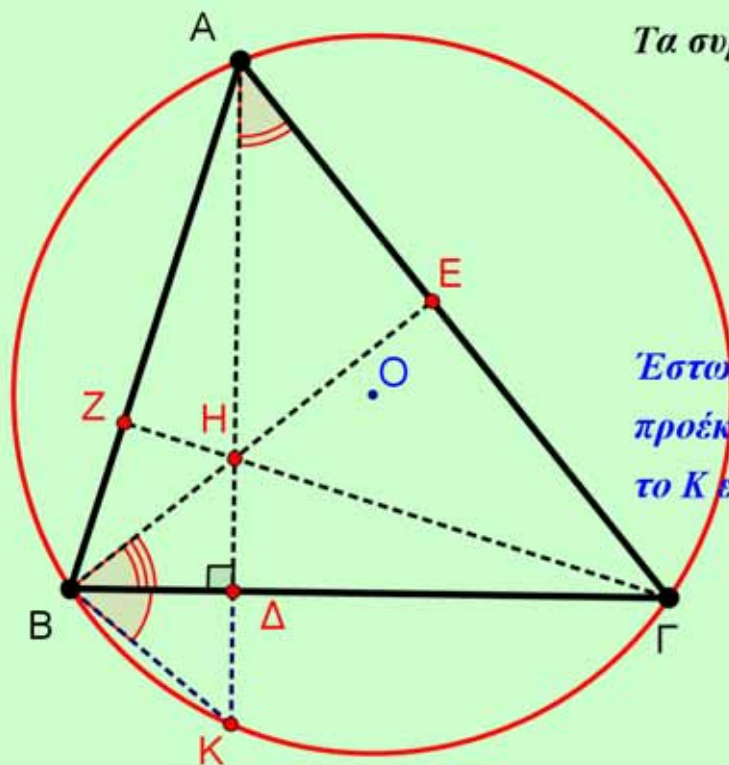
Ιδιότητα Ορθοκέντρου 1.



*Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου
(ως προς τις πλευρές του),
βρίσκονται επάνω στο
περιγεγραμμένο κύκλο του.*

Βαννέλης Ψύχας 2

Ιδιότητα Ορθοκέντρου 1 (α' Τρόπος).

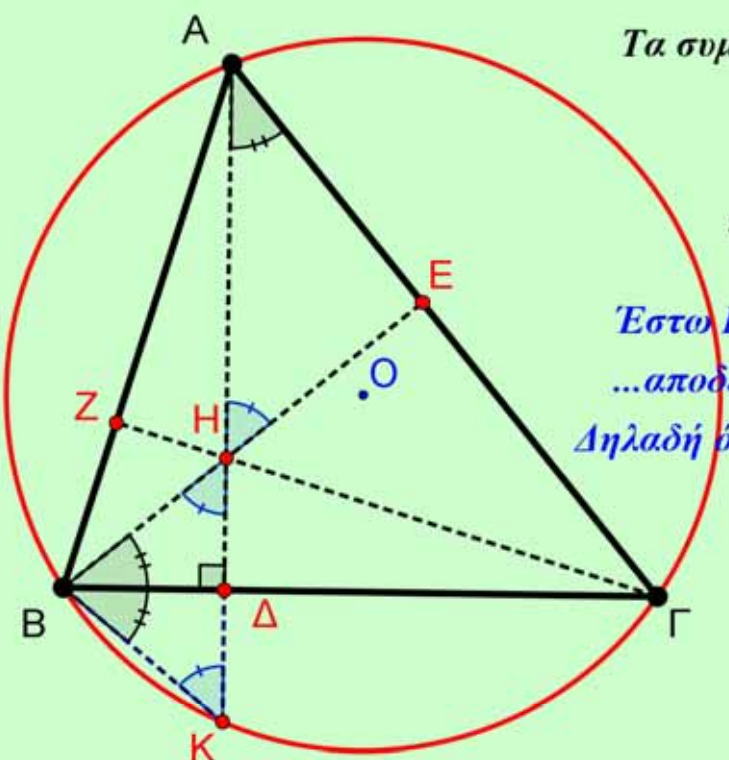


Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου
(ως προς τις πλευρές του),
βρίσκονται επάνω στο
περιγεγραμμένο κύκλο του.

Έστω K το σημείο τομής του κύκλου με την
προέκταση του ύψους αποδεικνύουμε ότι
το K είναι το συμμετρικό του H ως προς το Δ .

Βαννέλης Ψύχας 3

Ιδιότητα Ορθοκέντρου 1 (β' Τρόπος).



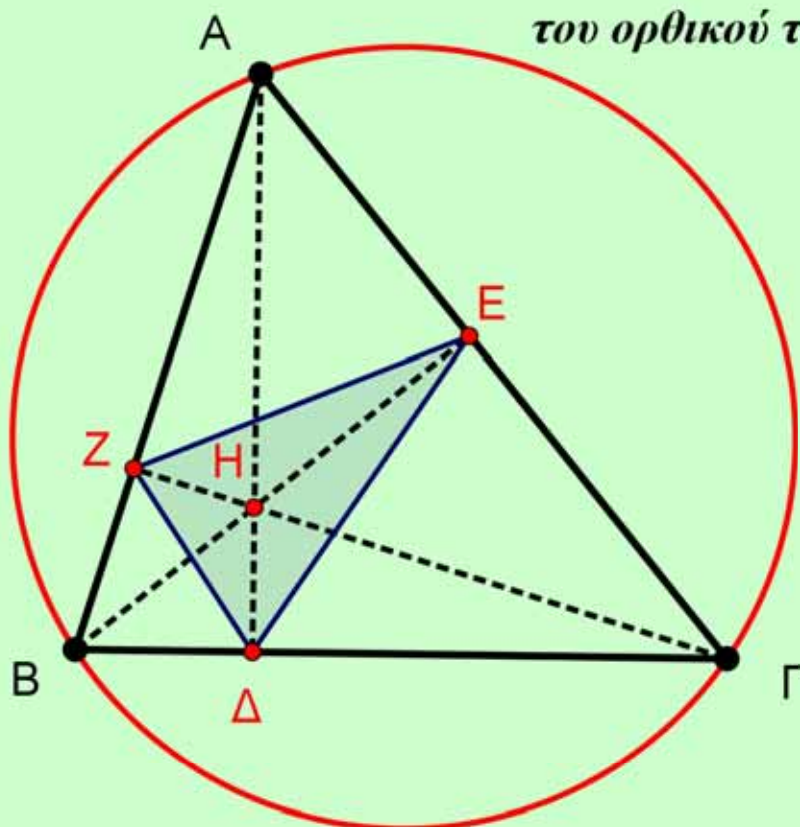
Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου
(ως προς τις πλευρές του),
βρίσκονται επάνω στο
περιγεγραμμένο κύκλο του.

Έστω K το συμμετρικό του H ως προς το Δ ...
... αποδεικνύουμε ότι το K ανήκει στον κύκλο.
Δηλαδή ότι το τετράπλευρο $ABK\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

Βαννέλης Ψύχας 4

Ιδιότητες Ορθικού 1.

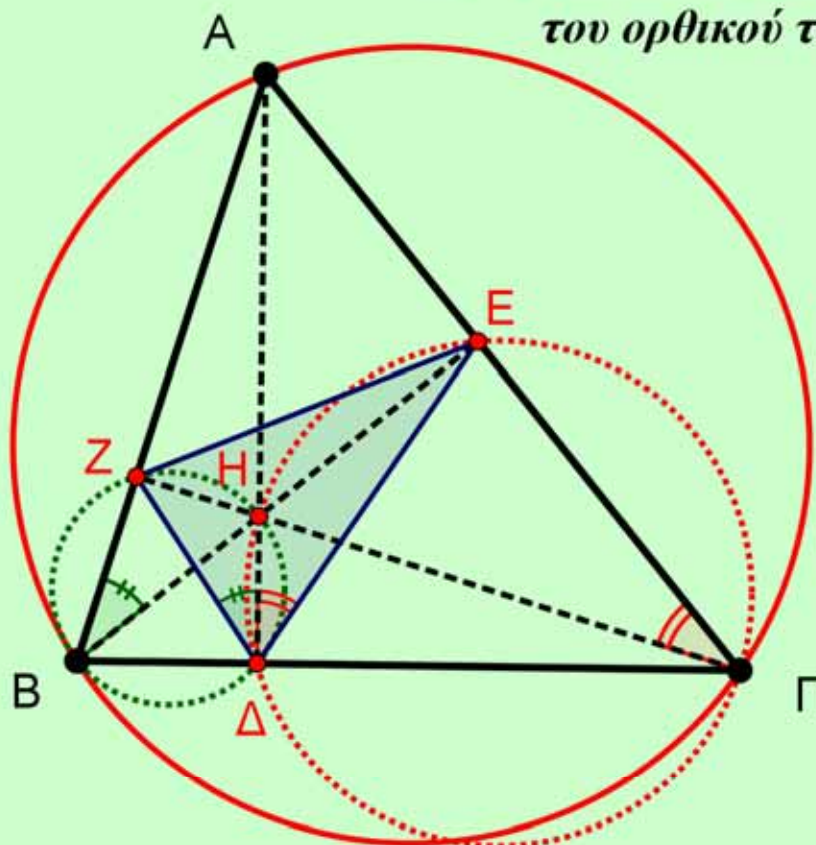
Τα ύψη τριγώνου, διχοτομούν τις γωνίες του ορθικού του.



Βανέλης Ψύχας 5

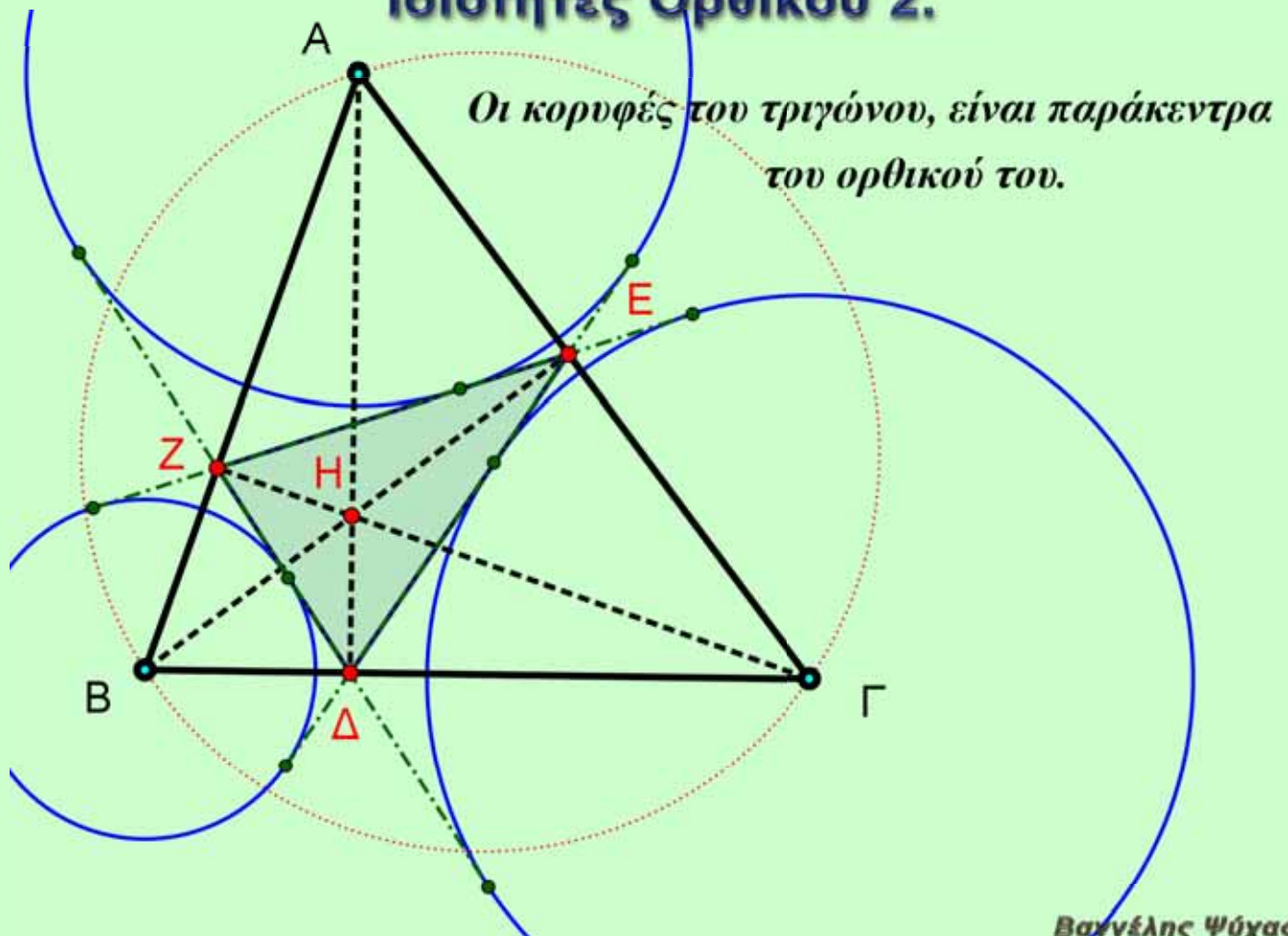
Ιδιότητες Ορθικού 1 (γ).

Τα ύψη τριγώνου, διχοτομούν τις γωνίες του ορθικού του.

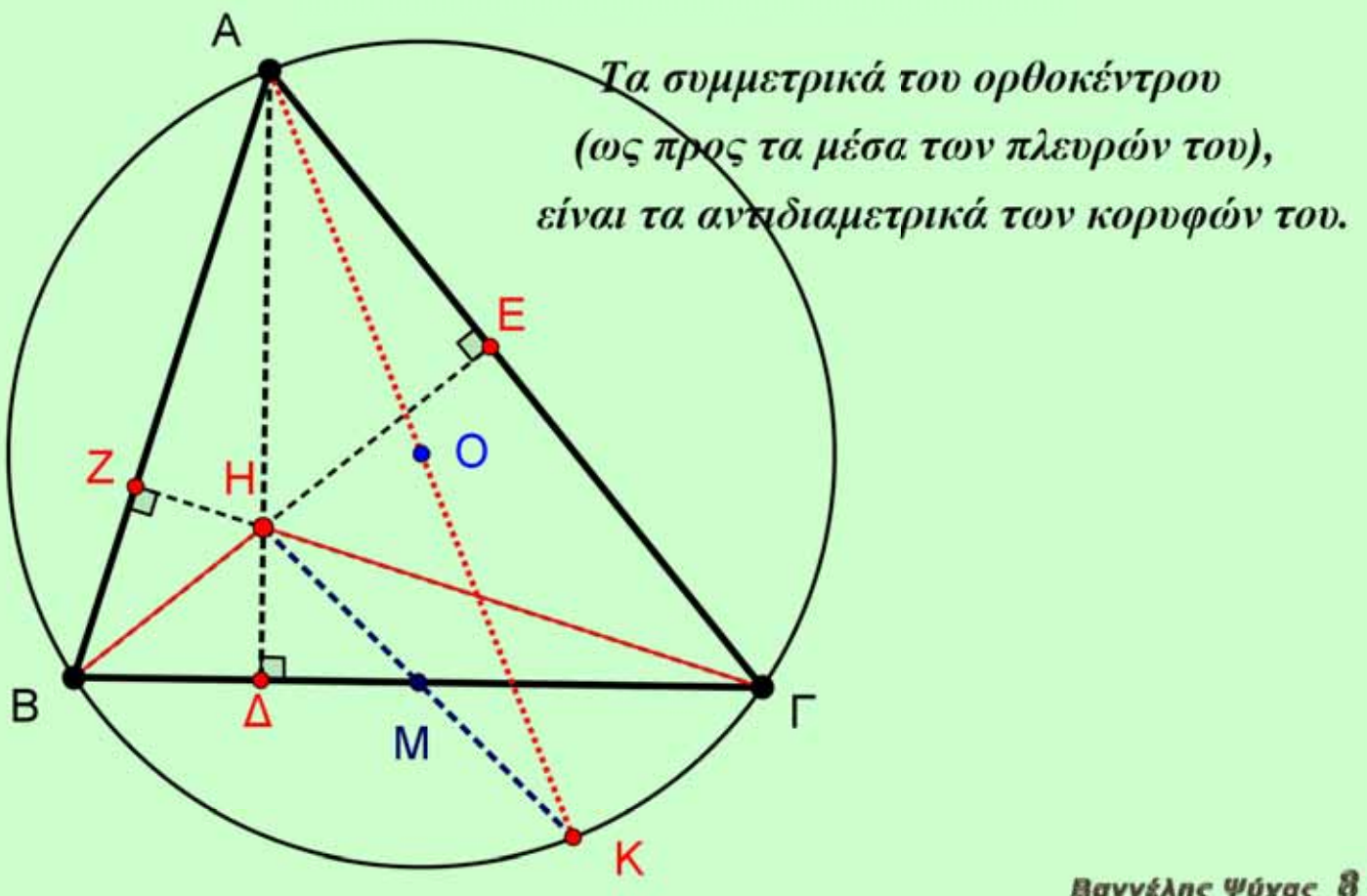


Βανέλης Ψύχας 6

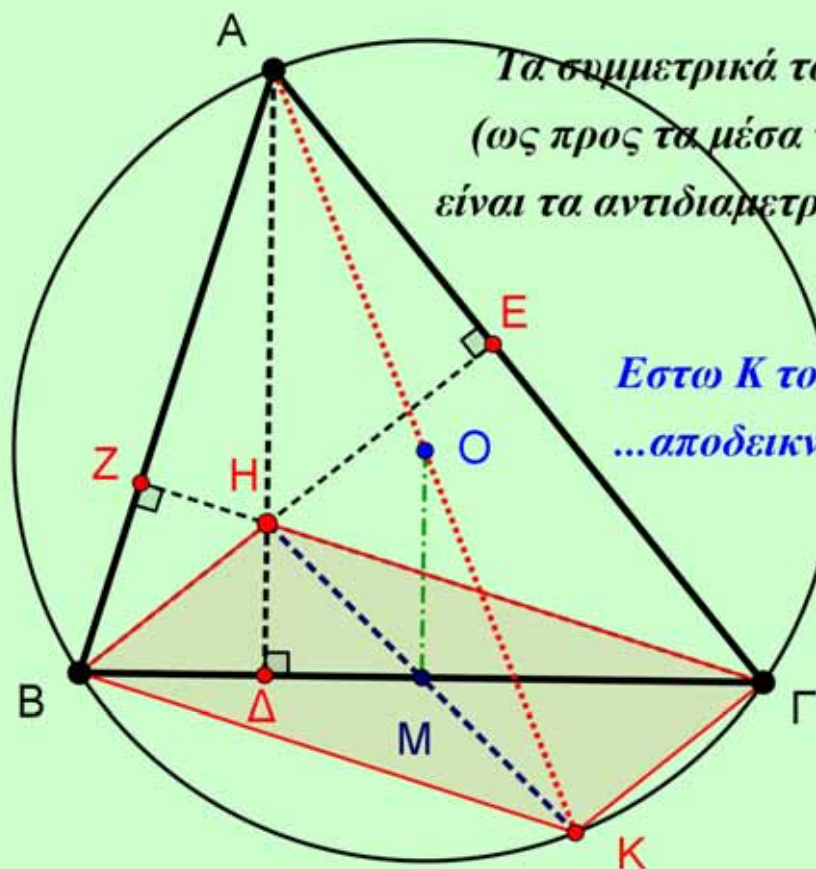
Ιδιότητες Ορθικού 2.



Ιδιότητα Ορθοκέντρου 2.



Ιδιότητα Ορθοκέντρου 2 (Υ).

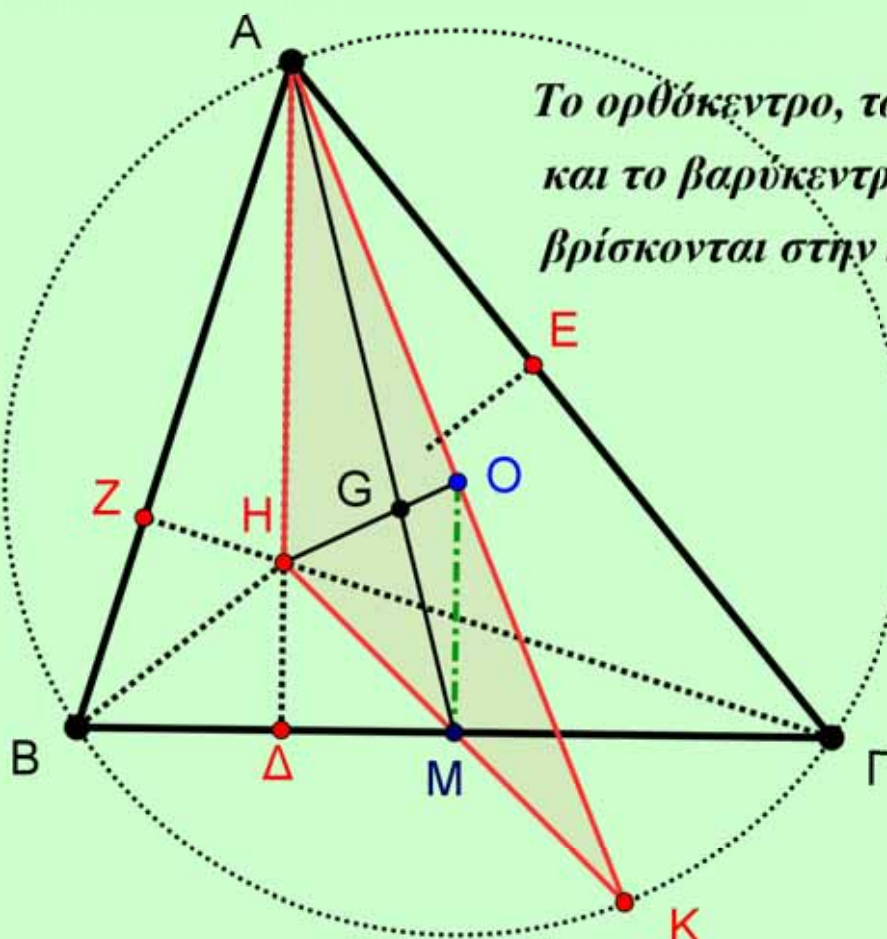


Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου
(ως προς τα μέσα των πλευρών του),
είναι τα αντιδιαμετρικά των κορυφών του.

Εστω K το αντιδιαμετρικό του A ...
...αποδεικνύουμε ότι $HBKΓ$ είναι παρ/μο.

Βαννέλης Ψύχας 9

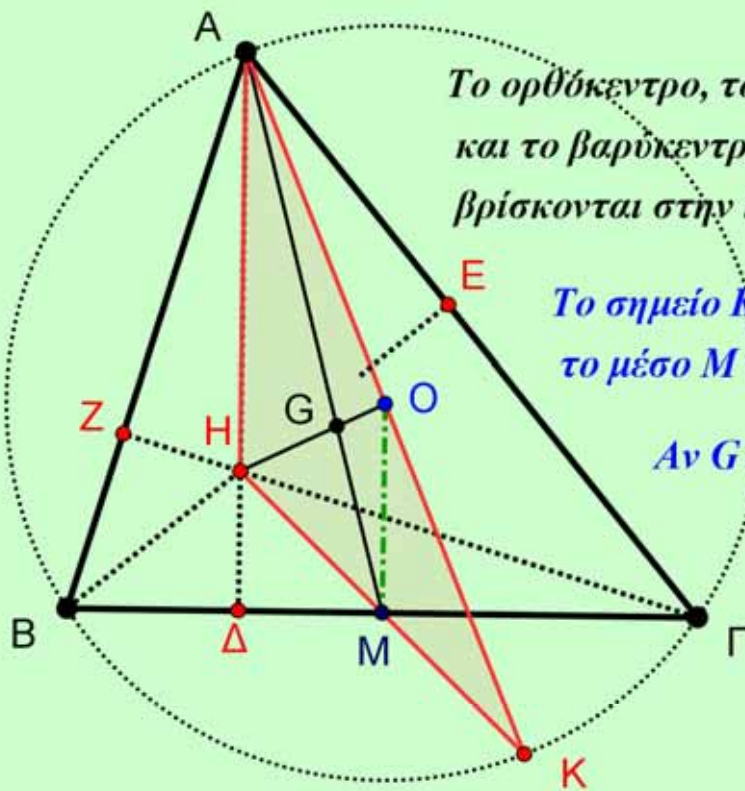
Ευθεία Euler.



Το ορθόκεντρο, το περίκεντρο
και το βαρύκεντρο τριγώνου,
βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Βαννέλης Ψύχας 10

Ευθεία Euler (Υ).



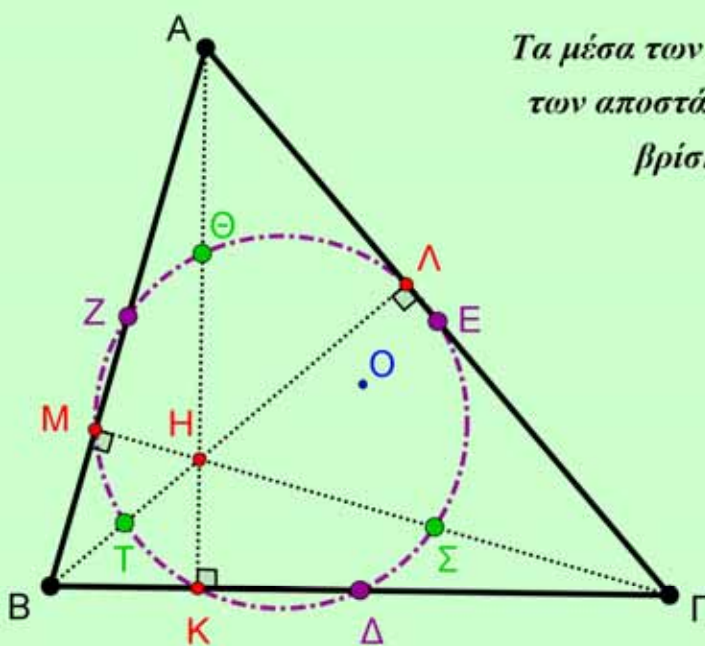
Το ορθόκентρο, το περίκентρο και το βαρύκентρο τριγώνου, βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Το σημείο K είναι συμμετρικό του H ως προς το μέσο M της $BΓ$ και αντιδιαμετρικό του A .

Αν G είναι το σημείο τομής των OH και AM , αποδεικνύουμε ότι: $GA=2GM$.

Βαννέλης Ψόχας 11

Κύκλος του Euler 1.

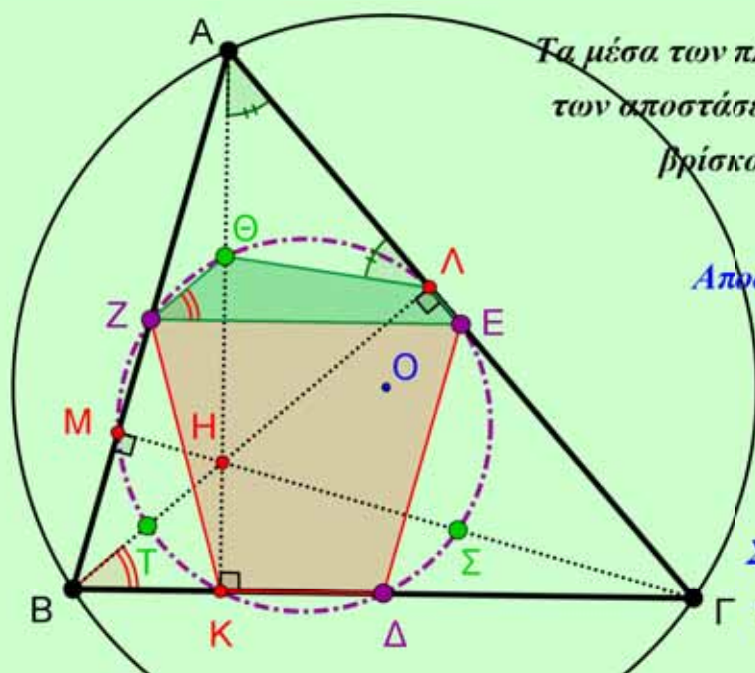


Τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές, βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο.

□ Υπόδειξη

Βαννέλης Ψόχας 12

Κύκλος του Euler 1 (Υ).



Τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές, βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο.

▮ Υπόδειξη

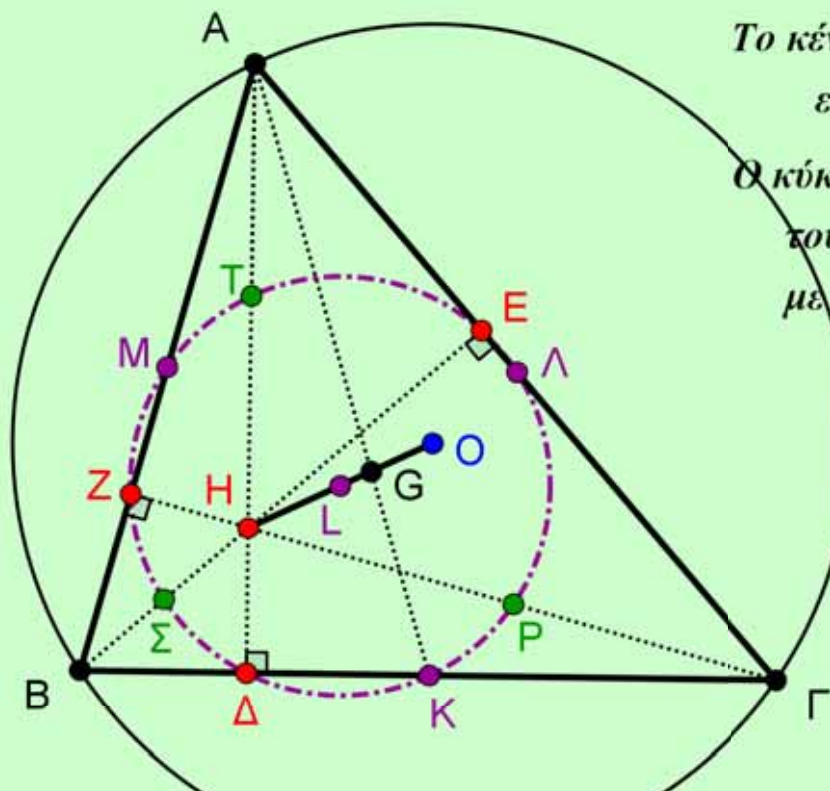
Αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο ZEKΔ είναι εγγράψιμο (ισοσκελές τραπέζιο)...

...οπότε τα μέσα των πλευρών και τα ίχνη των υψών, είναι ομοκυκλικά.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το σημείο τομής του κύκλου και του AH (σημείο Θ), είναι το μέσο του AH.

Βαννέλης Ψόχας 13

Κύκλος του Euler 2.



Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο του OH.

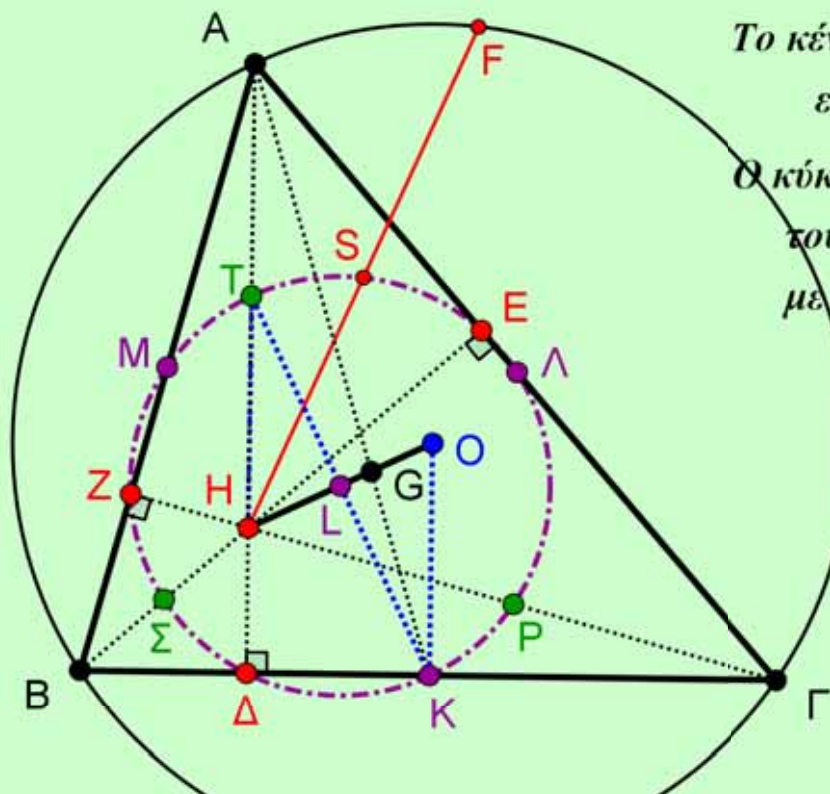
Ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου, με κέντρα τα H, G και λόγο 1/2.

$$SF=SH$$

▮ ▮ ▮

Βαννέλης Ψόχας 14

Κύκλος του Euler 2 (Υ1).



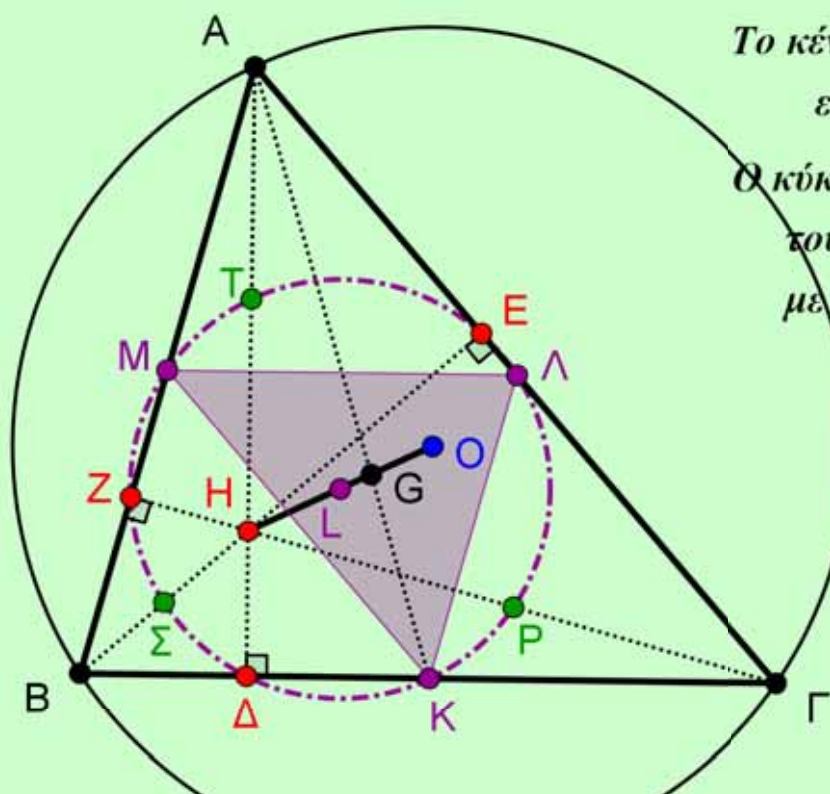
Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο του OH .

Ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου, με κέντρα τα H, G και λόγο $1/2$.

$$SF=SH$$



Κύκλος του Euler 2 (Υ2).



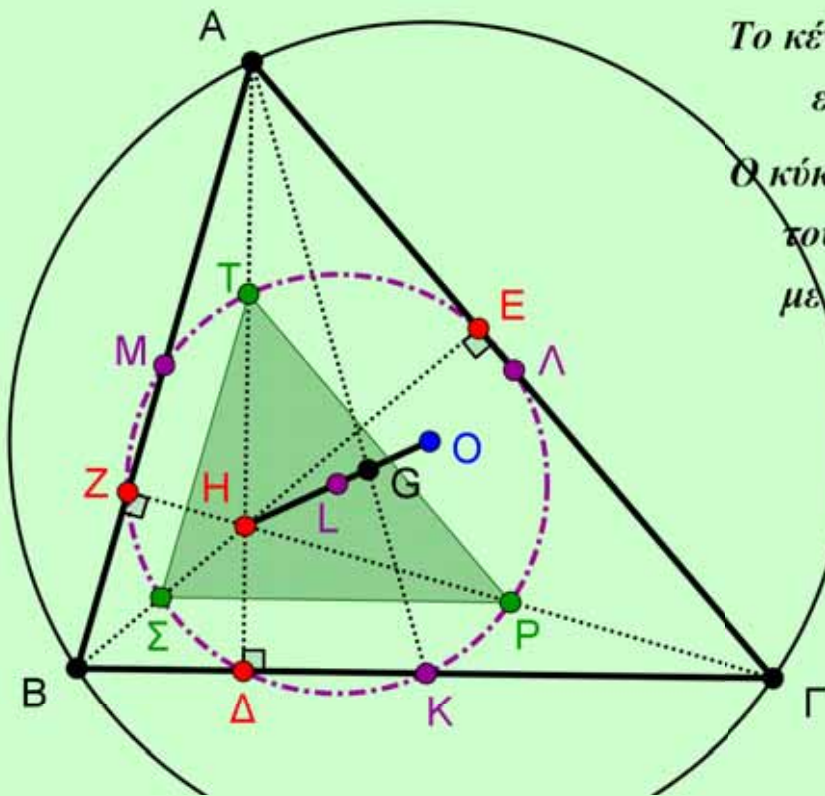
Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο του OH .

Ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου, με κέντρα τα H, G και λόγο $1/2$.

$$SF=SH$$



Κύκλος του Euler 2 (Υ3).



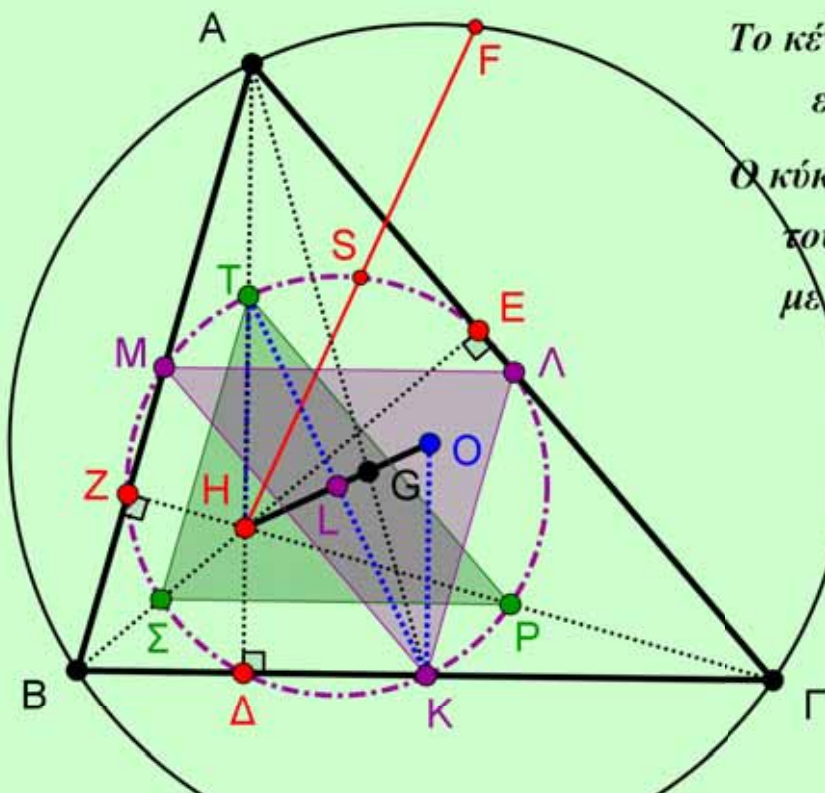
Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο του OH .

Ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου, με κέντρα τα H, G και λόγο $1/2$.

$$SF=SH$$



Κύκλος του Euler 2 (Υ4).



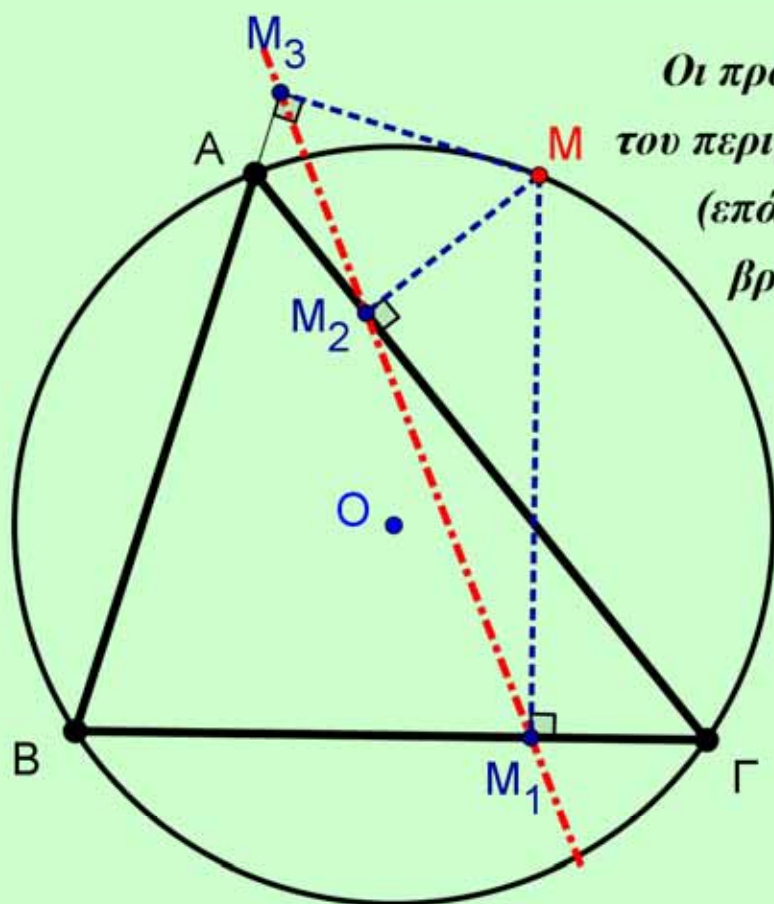
Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο του OH .

Ο κύκλος του Euler είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου, με κέντρα τα H, G και λόγο $1/2$.

$$SF=SH$$



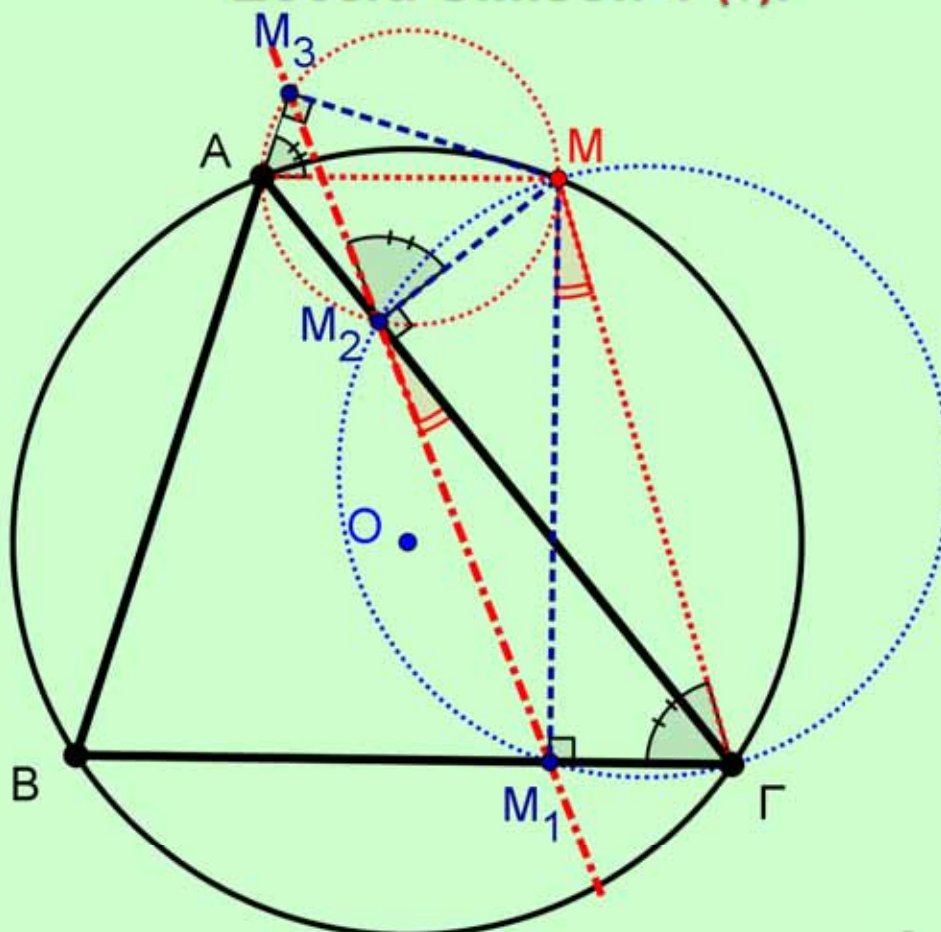
Ευθεία Simson 1.



Οι προβολές τυχόντος σημείου M του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου (επάνω στις πλευρές του) βρίσκονται σε ευθεία.

Βαννέλης Ψόχας 19

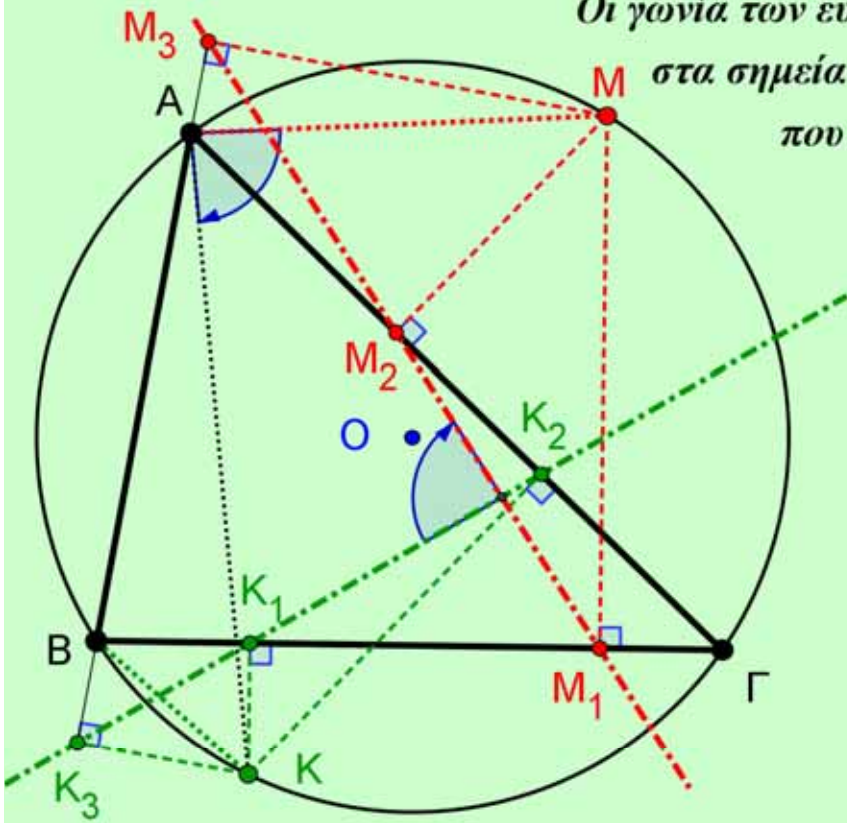
Ευθεία Simson 1 (Υ).



Βαννέλης Ψόχας 20

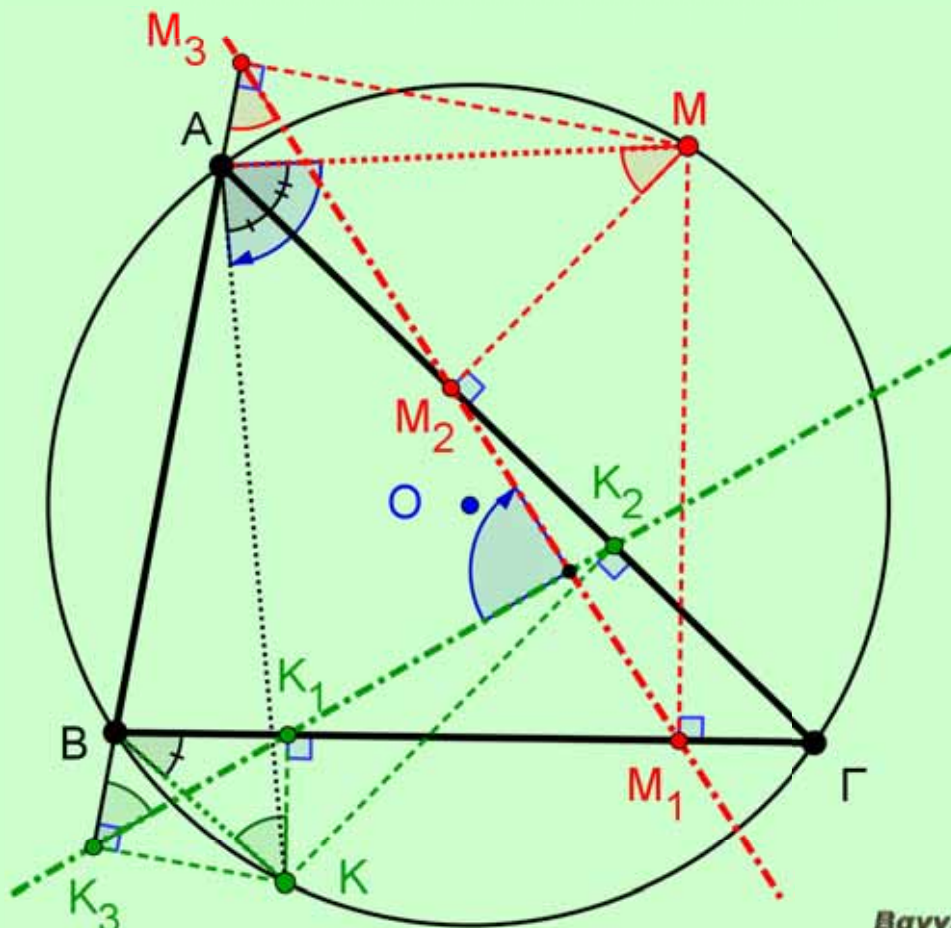
Ευθεία Simson 2.

Οι γωνία των ευθειών Simson (που αντιστοιχούν στα σημεία K και M), ισούται με τη γωνία που βαίνει στο τόξο KM .



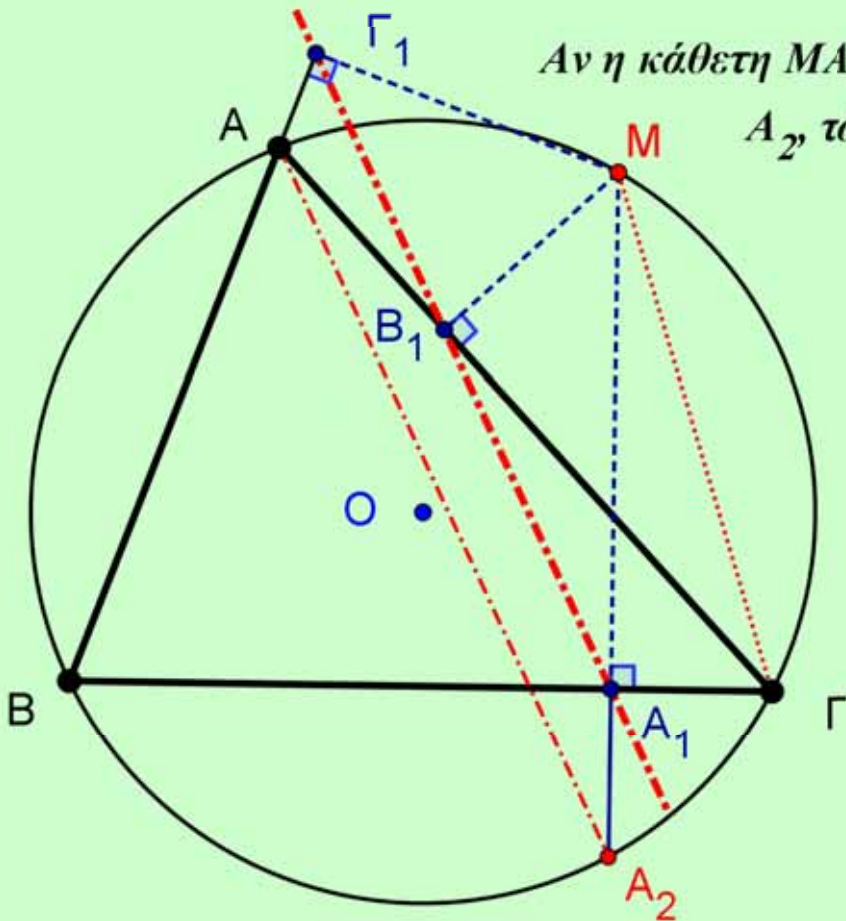
Βαννέλης Ψόχας 21

Ευθεία Simson 2 (Υ).



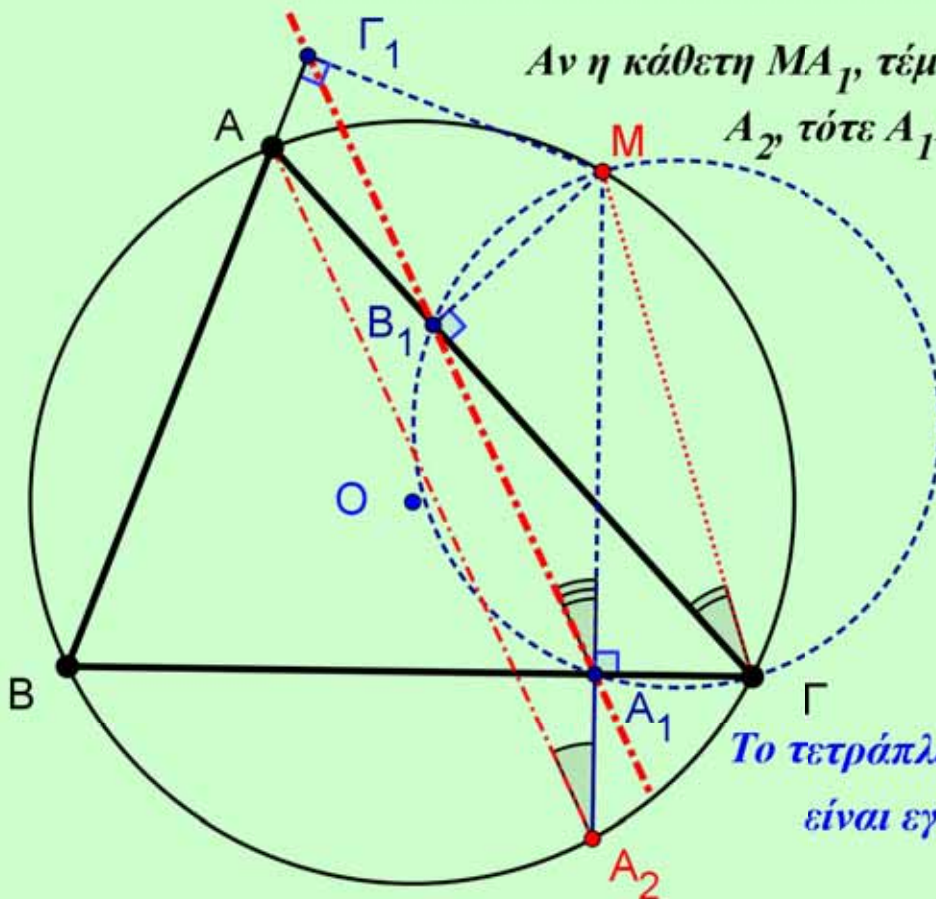
Βαννέλης Ψόχας 22

Ευθεία Simson 3.



Αν η κάθετη MA_1 , τέμνει τον κύκλο στο A_2 , τότε $A_1B_1 \parallel AA_2$

Ευθεία Simson 3 (Υ).

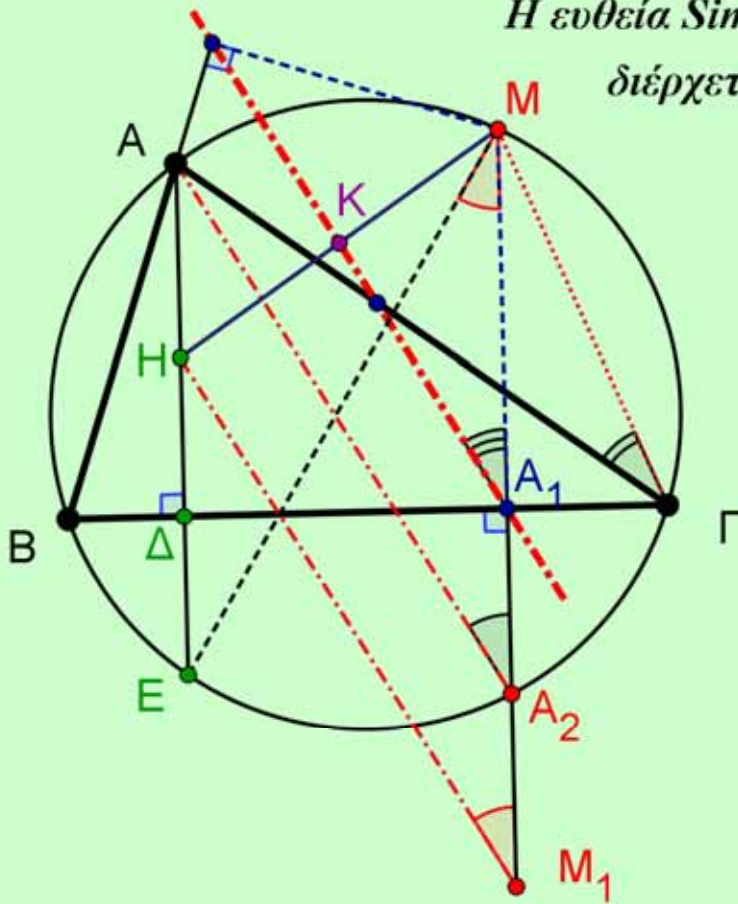


Αν η κάθετη MA_1 , τέμνει τον κύκλο στο A_2 , τότε $A_1B_1 \parallel AA_2$

Το τετράπλευρο $MB_1A_1\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

Ευθεία Simson 4.

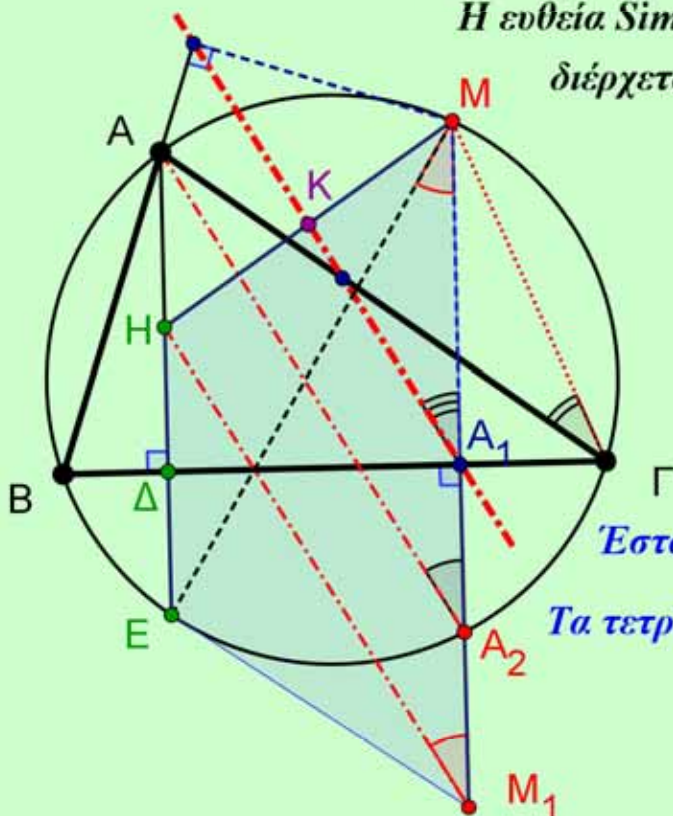
Η ευθεία Simson που αντιστοιχεί στο σημείο M διέρχεται από το μέσο K του HM .



Βαννέλης Ψόχας 25

Ευθεία Simson 4.

Η ευθεία Simson που αντιστοιχεί στο σημείο M , διέρχεται από το μέσο K του HM .



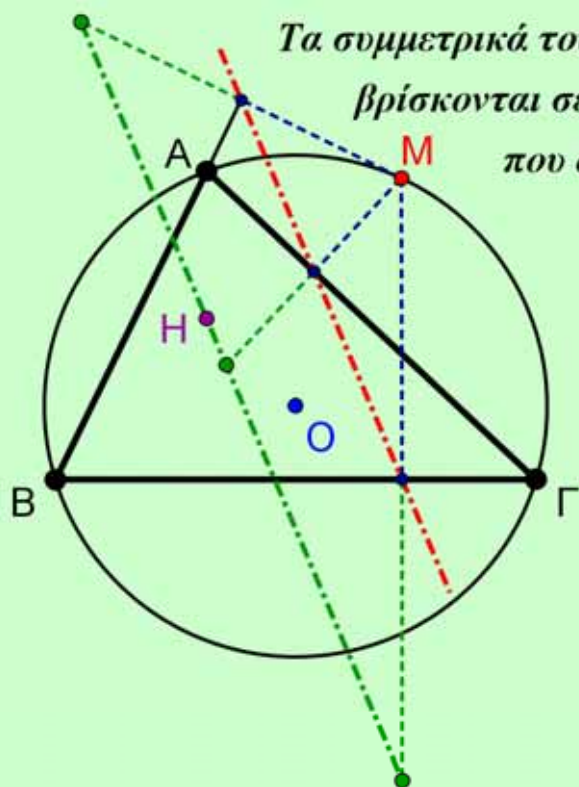
Έστω M_1 το συμμετρικό του M ως προς τη $B\Gamma$.

Τα τετράπλευρα $E H M M_1$ και $A E A_2 M$ είναι
ισοσκελή τραπέζια.

$$K A_1 // A A_2 // H M_1$$

Βαννέλης Ψόχας 26

Ευθεία του Steiner.

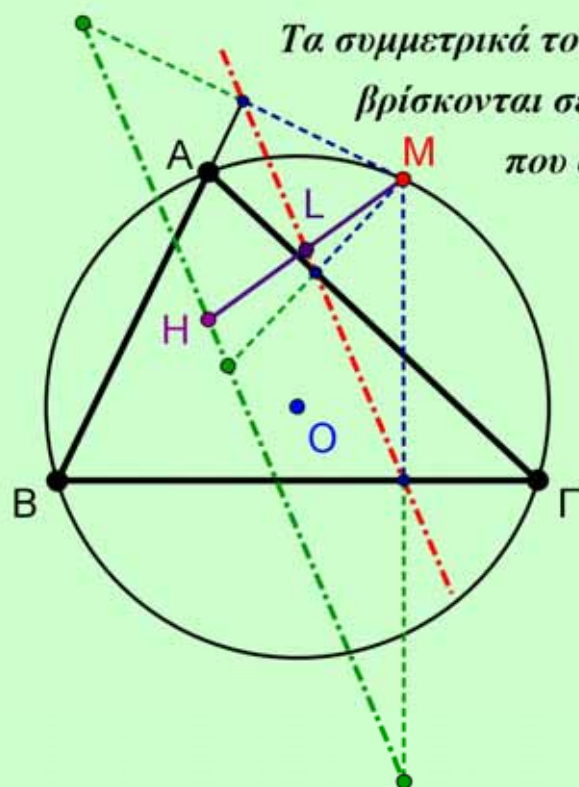


Τα συμμετρικά του σημείου M (ως προς τις πλευρές του τριγώνου) βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία *Simson* που διέρχεται από το ορθόκεντρο.

□ Υπόδειξη

Βαννέλης Ψόχας 27

Ευθεία του Steiner (Υ).



Τα συμμετρικά του σημείου M (ως προς τις πλευρές του τριγώνου) βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία *Simson* που διέρχεται από το ορθόκεντρο.

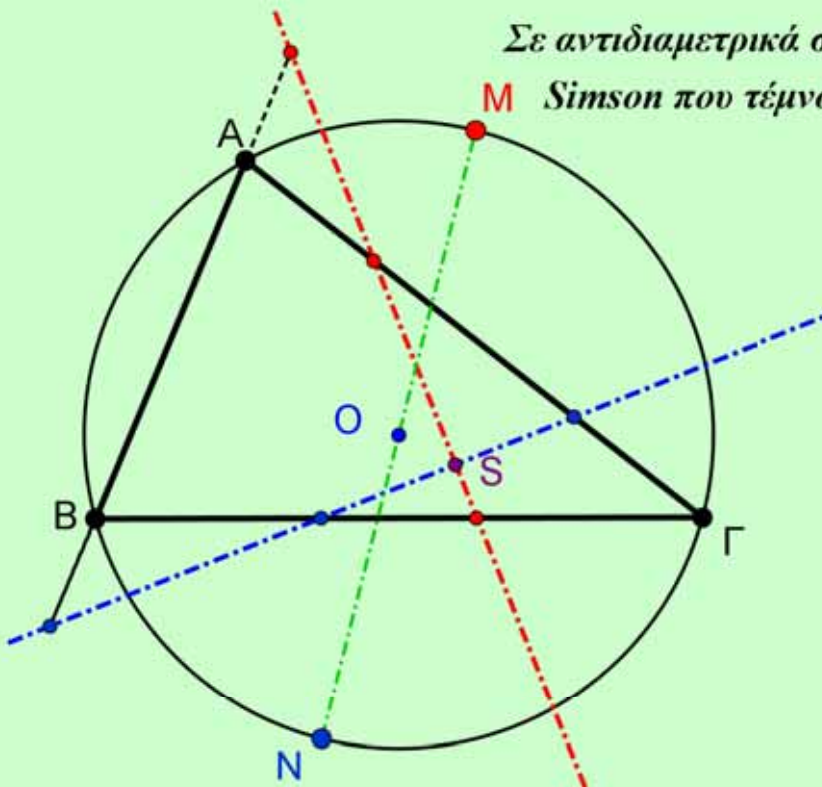
□ Υπόδειξη

Η ευθεία *Simson* διέρχεται από το μέσο L του HM .

Βαννέλης Ψόχας 28

Ευθεία Simson 5.

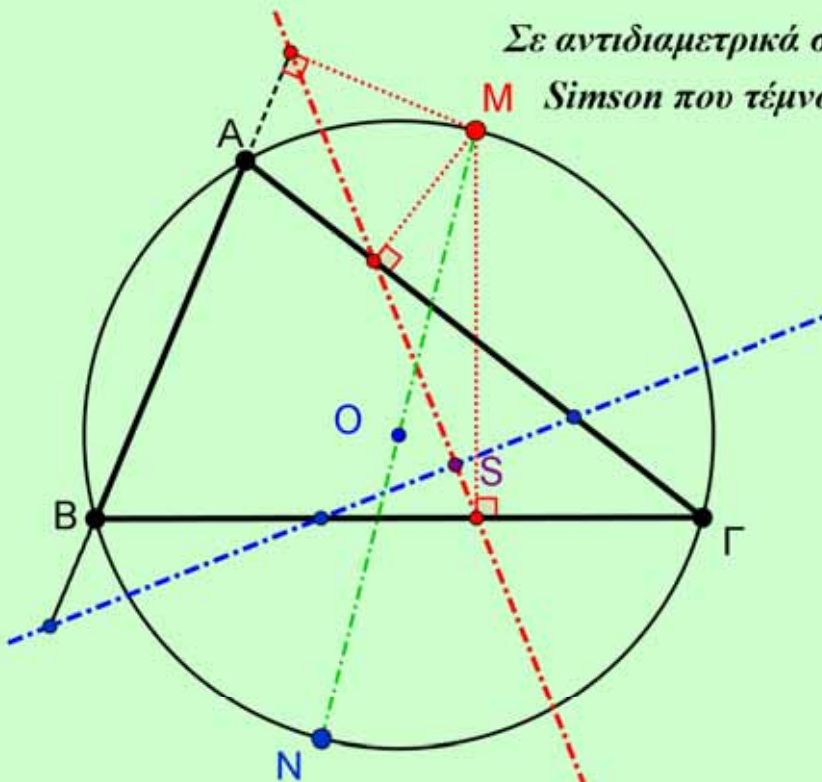
Σε αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχούν κάθετες ευθείες
Simson που τέμνονται επάνω στο κύκλο του Euler.



\square \square \square
M *N* Γεωμετρικός Τόπος

Ευθεία Simson 5 (Υ).

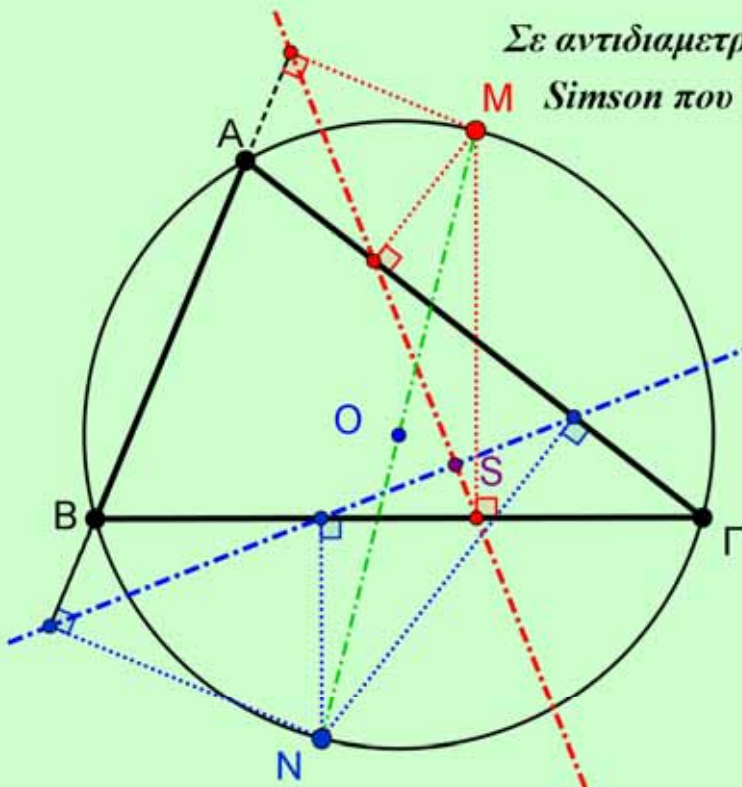
Σε αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχούν κάθετες ευθείες
Simson που τέμνονται επάνω στο κύκλο του Euler.



\square \square \square
M *N* Γεωμετρικός Τόπος

Ευθεία Simson 5 (Υ).

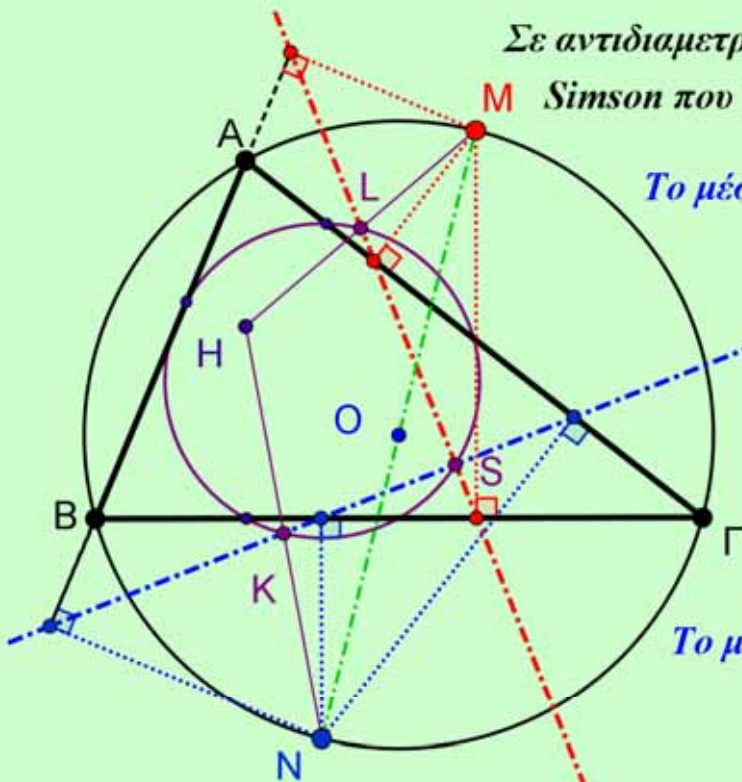
Σε αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχούν κάθετες ευθείες
Simson που τέμνονται επάνω στο κύκλο του Euler.



\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle
M *N* Γεωμετρικός Τόπος

Ευθεία Simson 5 (Υ).

Σε αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχούν κάθετες ευθείες
Simson που τέμνονται επάνω στο κύκλο του Euler.



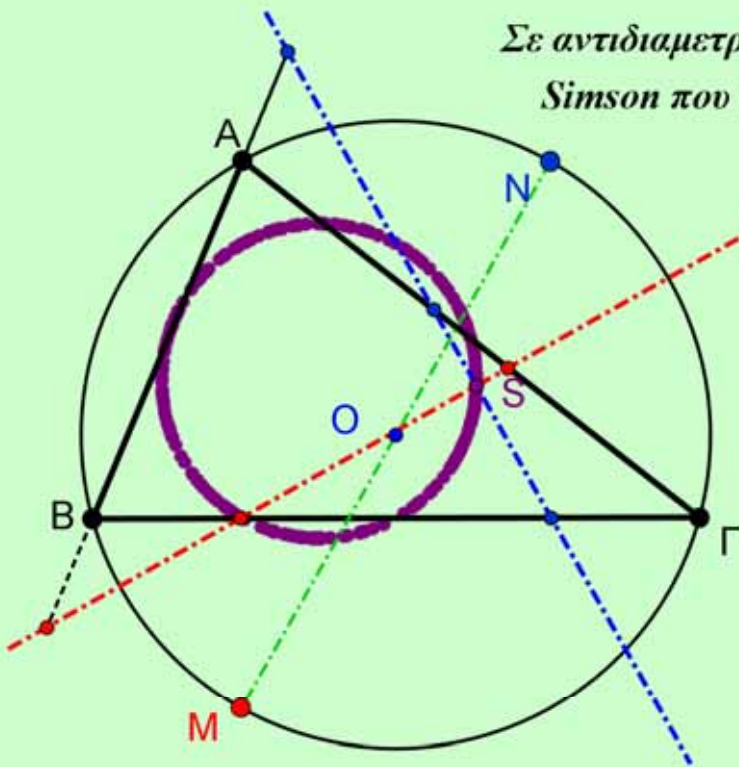
Το μέσο *L* του *HM*, ανήκει στην ευθεία *Simson*
 που αντιστοιχεί στο σημείο *M*.

\sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle
M *N* Γεωμετρικός Τόπος

Το μέσο *K* του *HN*, ανήκει στην ευθεία *Simson*
 που αντιστοιχεί στο σημείο *N*.

Ευθεία Simson 5 (Υ).

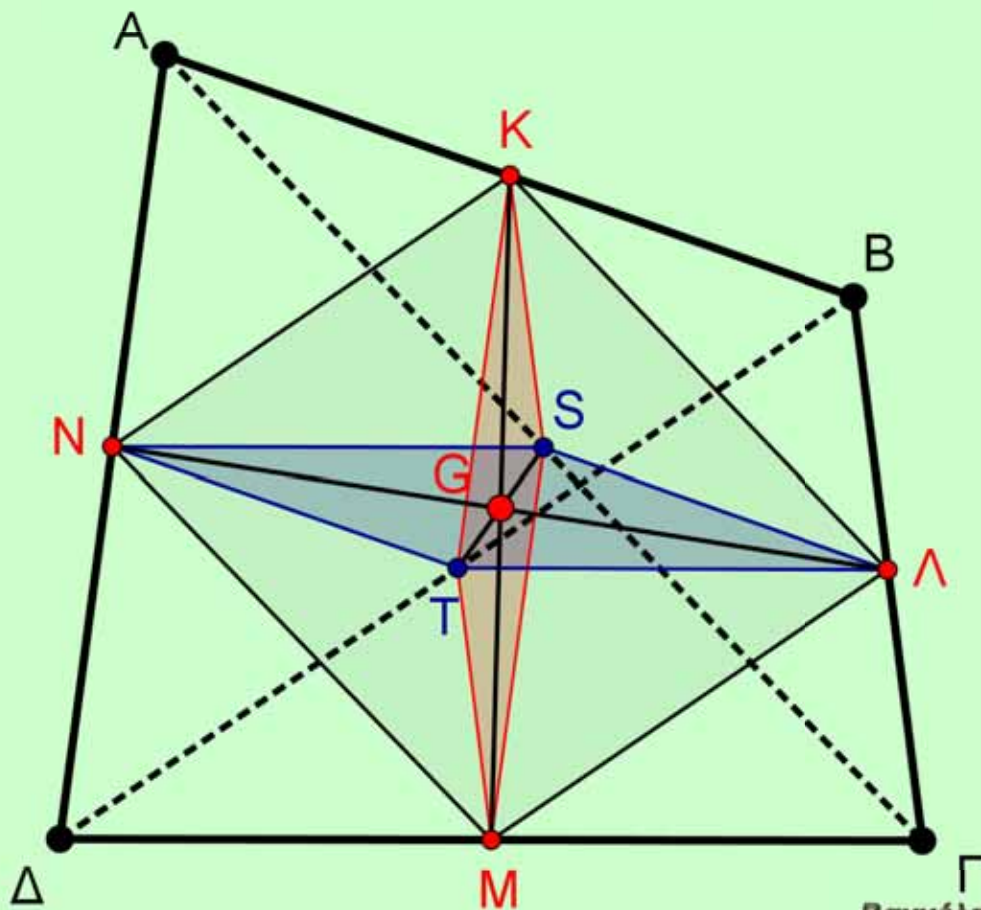
Σε αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχούν κάθετες ευθείες Simson που τέμνονται επάνω στο κύκλο του Euler.



\square M \square N \square Γεωμετρικός Τόπος
 \square S

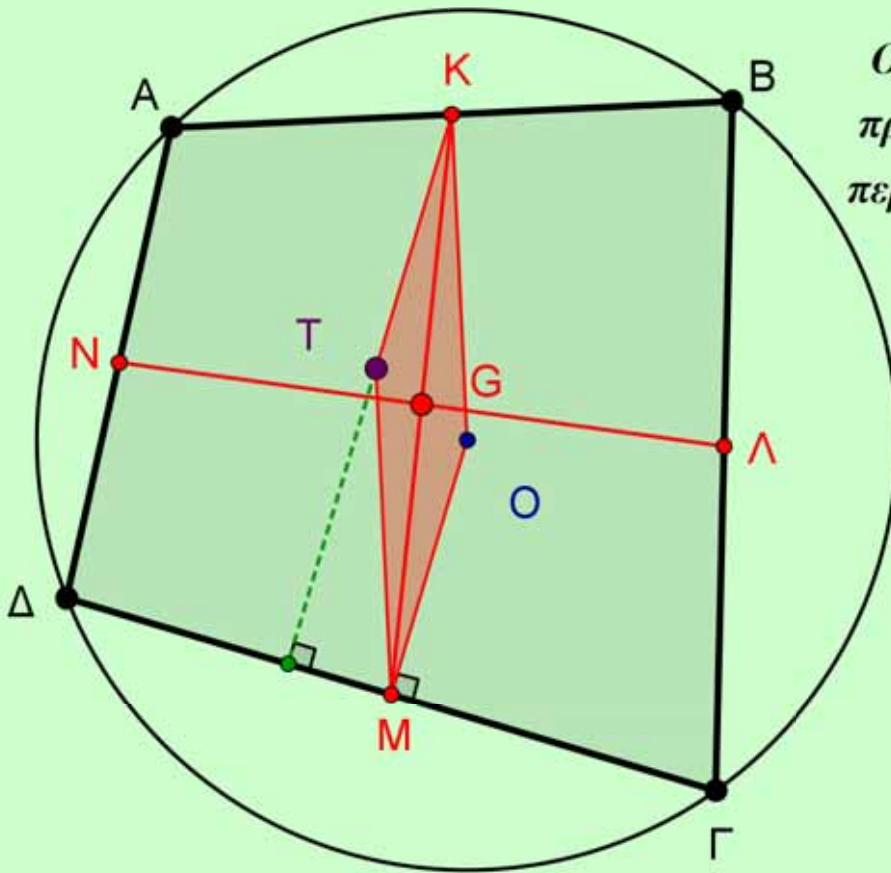
Βαννέλης Ψόχας 33

Βαρύκεντρο Τετραπλεύρου.



Βαννέλης Ψόχας 34

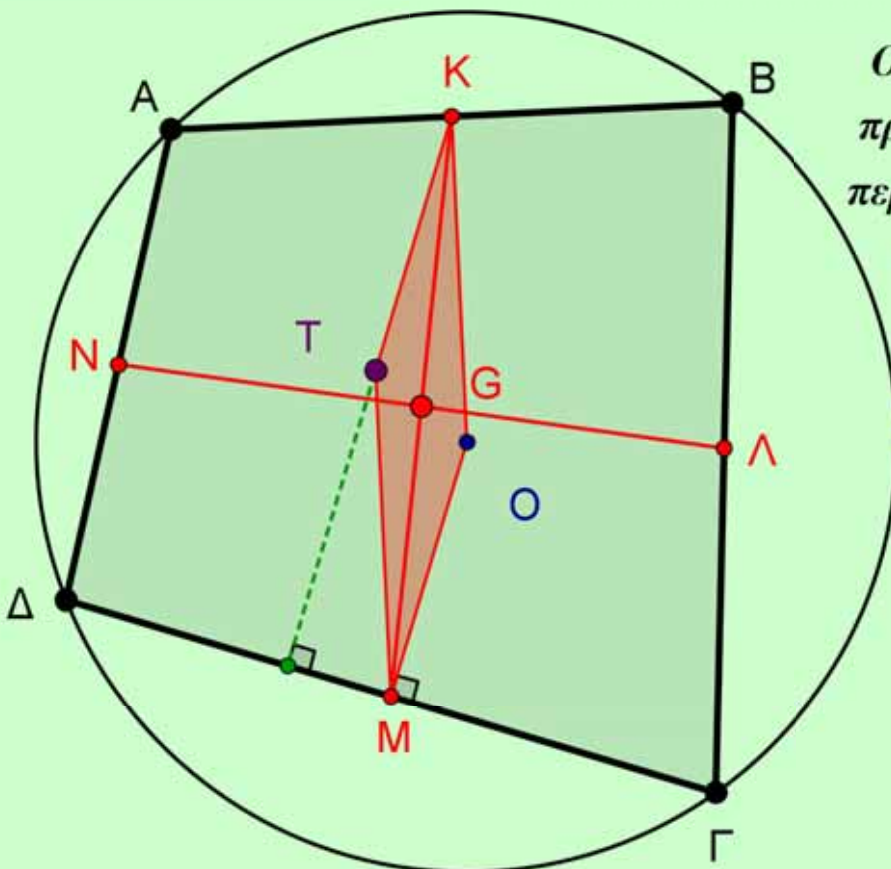
Αντίκεντρο.



Οι κάθετες από τα μέσα προς τις απέναντι πλευρές, περνάνε από το συμμετρικό του O ως προς το G .

Βαννέλης Ψόχας 35

Αντίκεντρο (Υ).

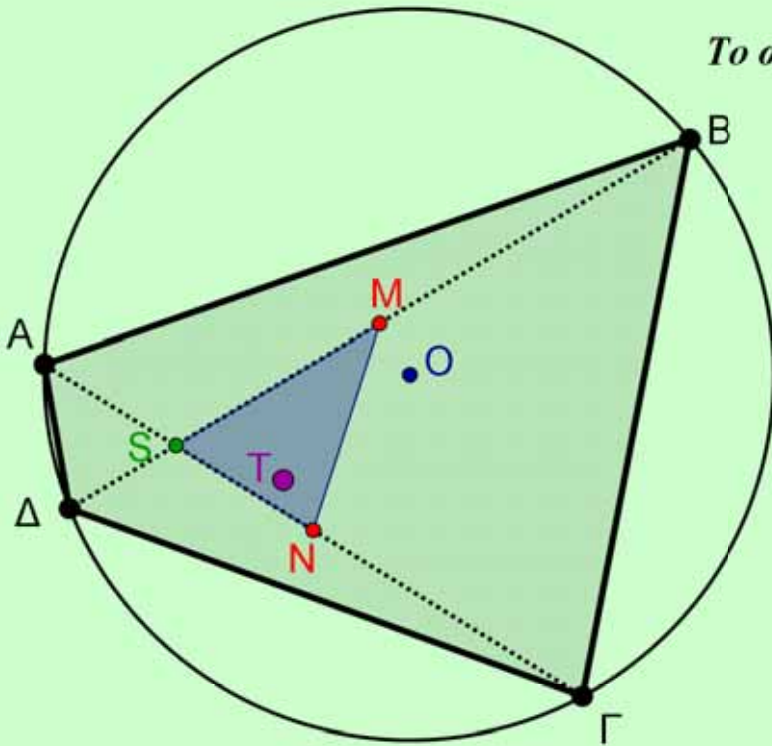


Οι κάθετες από τα μέσα προς τις απέναντι πλευρές, περνάνε από το συμμετρικό του O ως προς το G .

Έστω T το συμμετρικό του O ως προς το G . Τότε το $KGMT$ είναι παραλληλόγραμμο...

Βαννέλης Ψόχας 36

Αντίκεντρο 1.

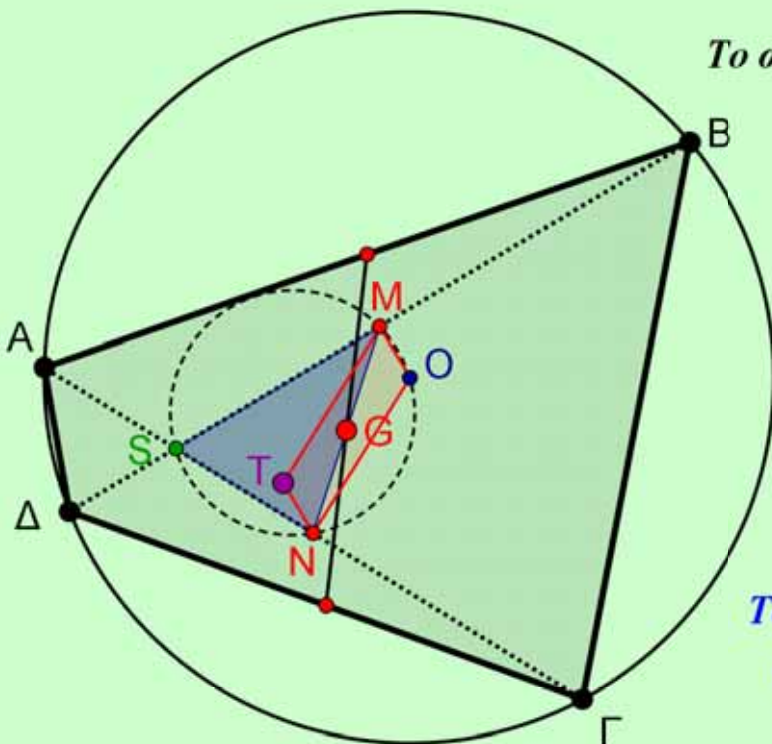


Το αντίκεντρο (T), είναι ορθόκεντρο του τριγώνου SMN .

▣ Υπόδειξη

Βαννέλης Ψόχας 37

Αντίκεντρο 1 (Υ).



Το αντίκεντρο (T), είναι ορθόκεντρο του τριγώνου SMN .

▣ Υπόδειξη

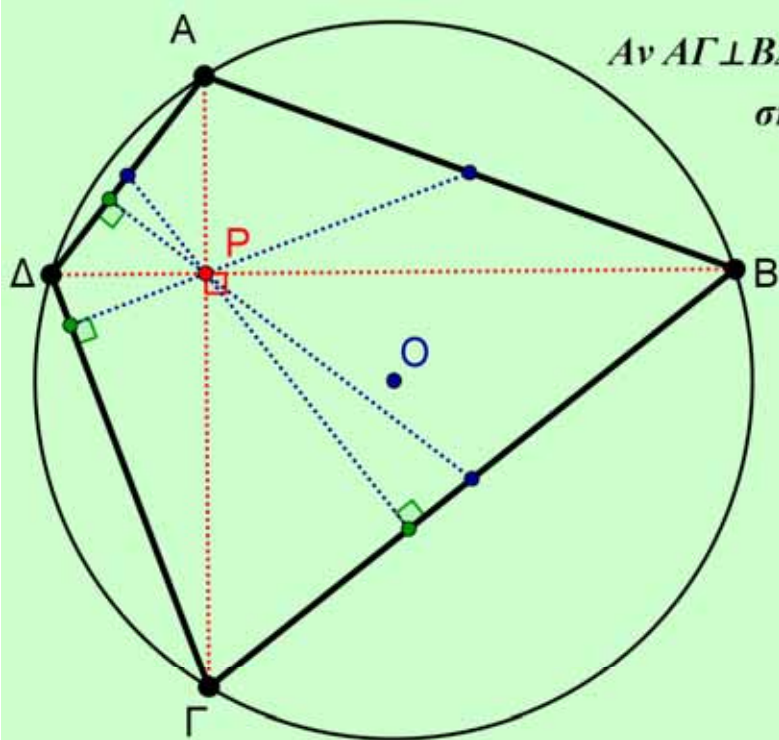
Το τετράπλευρο $OMSN$ είναι εγγράψιμο.

Το αντίκεντρο (T) είναι το συμμετρικό του O ως προς το μέσο G του MN .

Βαννέλης Ψόχας 38

Αντίκεντρο 2.

Αν $ΑΓ \perp ΒΔ$, τότε το αντίκεντρο ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαγωνίων.

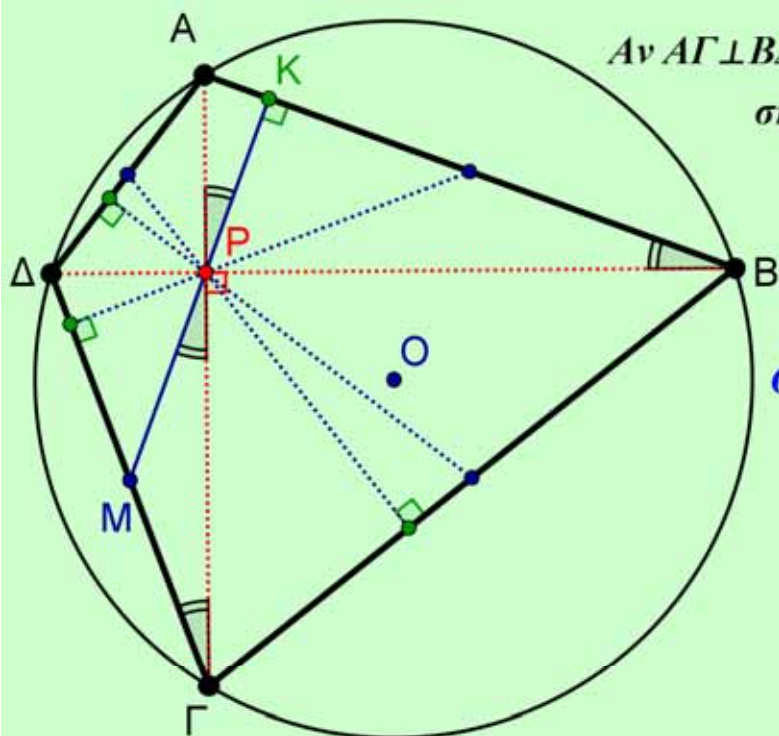


□ Υπόδειξη

Βαννέλης Ψόχας 39

Αντίκεντρο 2 (Υ).

Αν $ΑΓ \perp ΒΔ$, τότε το αντίκεντρο ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαγωνίων.

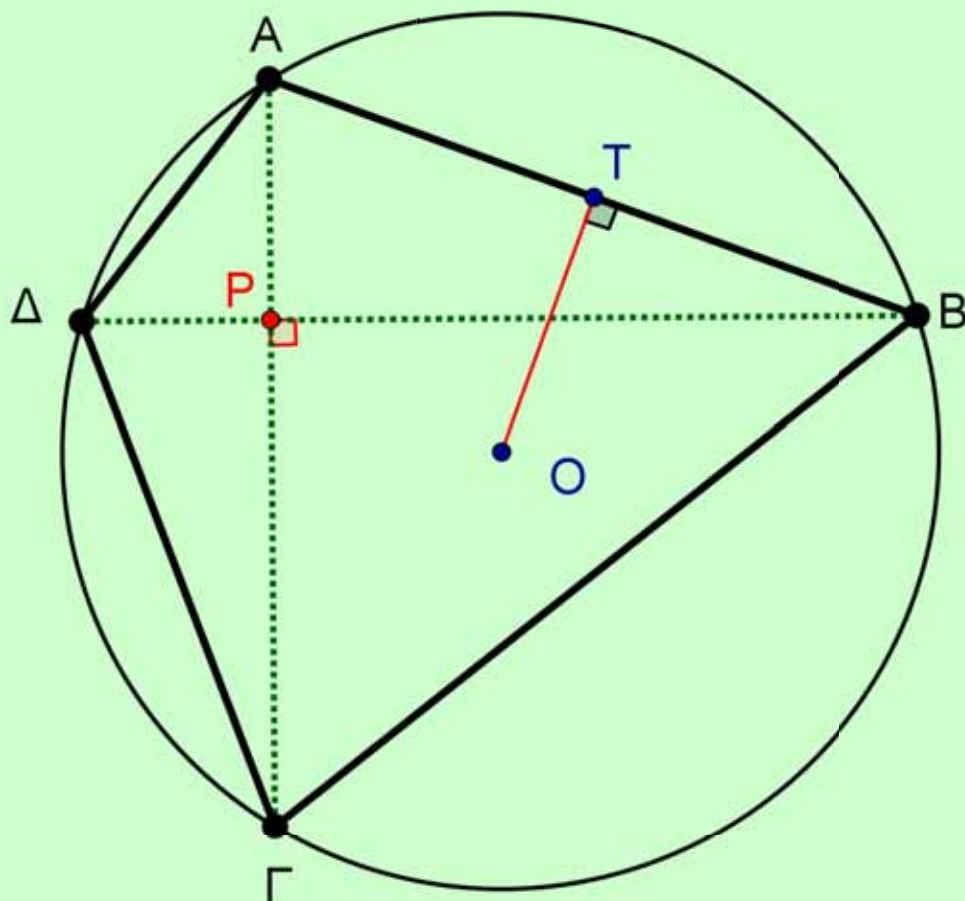


□ Υπόδειξη

Θεωρούμε PM (διάμεσο) και $PK \perp AB$.

Βαννέλης Ψόχας 40

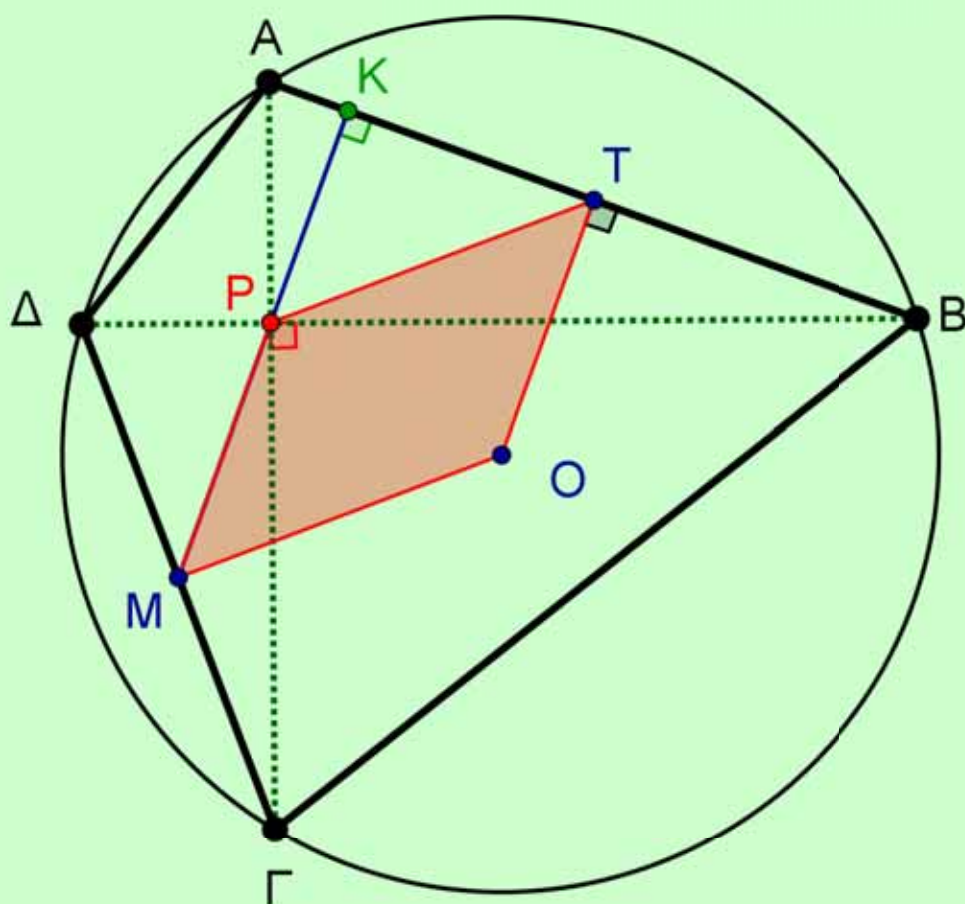
Αντίκεντρο 3.



$$\Delta\Gamma = 2OT$$

□ Υπόδειξη

Αντίκεντρο 3 (Υ).



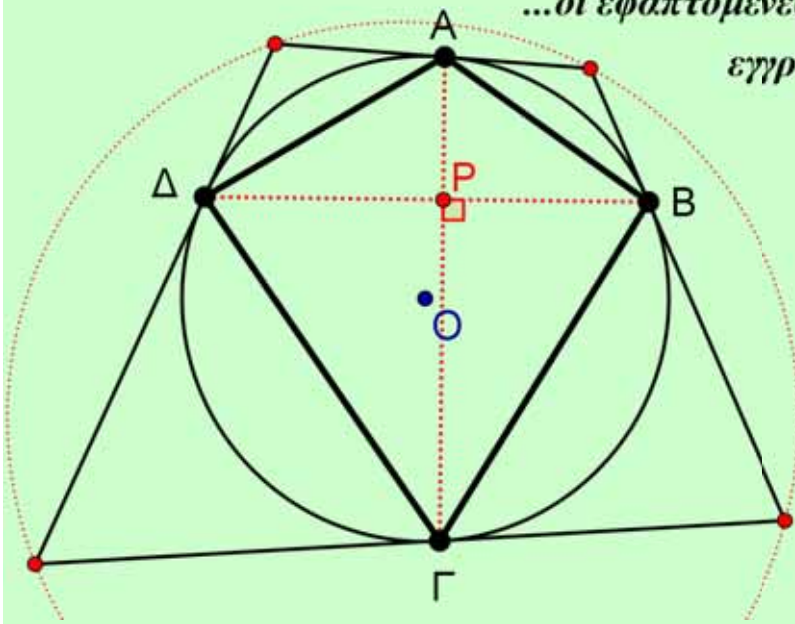
$$\Delta\Gamma = 2OT$$

□ Υπόδειξη

Αντίκεντρο 4.

...οι εφαπτόμενες στις κορυφές $ΑΒΓΔ$, δημιουργούν εγγράψιμο τετράπλευρο.

☐ Υπόδειξη



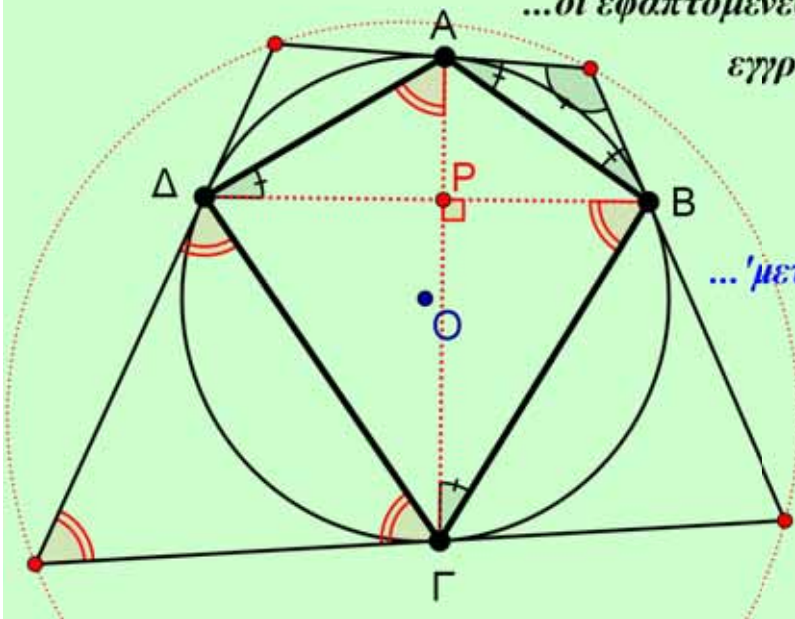
Βαννέλης Ψόχας 43

Αντίκεντρο 4 (Υ).

...οι εφαπτόμενες στις κορυφές $ΑΒΓΔ$, δημιουργούν εγγράψιμο τετράπλευρο.

☐ Υπόδειξη

... 'μεταφορά' γωνιών (όπως σημειώνονται στο σχήμα)....



Βαννέλης Ψόχας 44