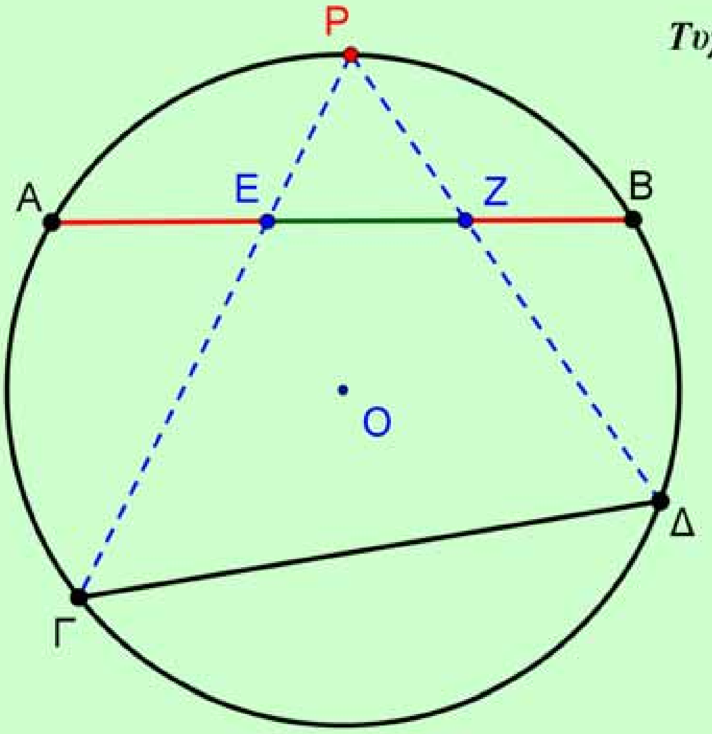
ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Λήμμα Haruki.

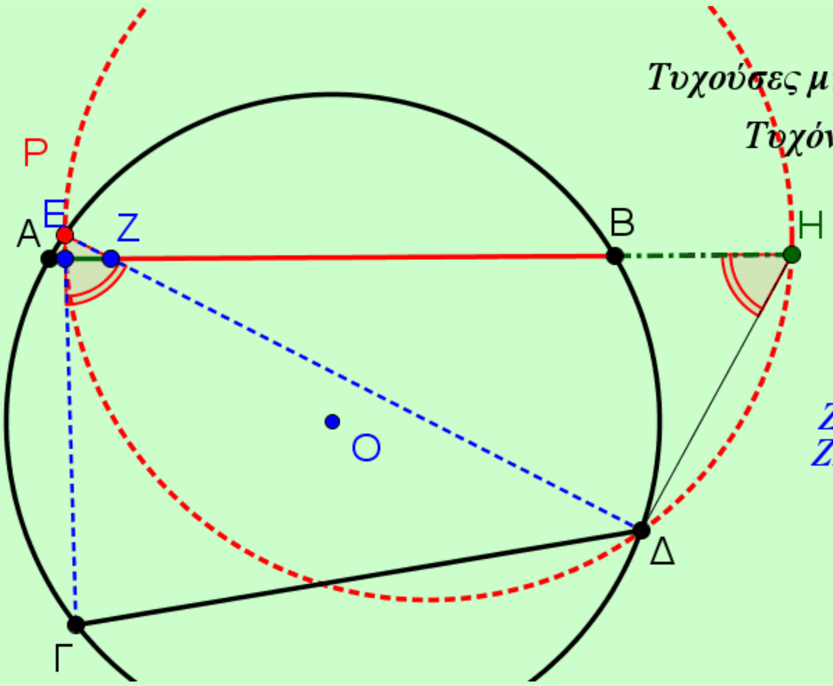


Τυχούσες μη τεμνόμενες χορδές ΑΒ και ΓΔ.

Τυχόν σημείο P του τόξου ΑΒ.

Τότε: $\dfrac{AE \cdot BZ}{EZ} = ct$

Λήμμα Haruki.



Τυχούσες μη τεμνόμενες χορδές ΑΒ και ΓΔ.

Τυχόν σημείο P του τόξου ΑΒ.

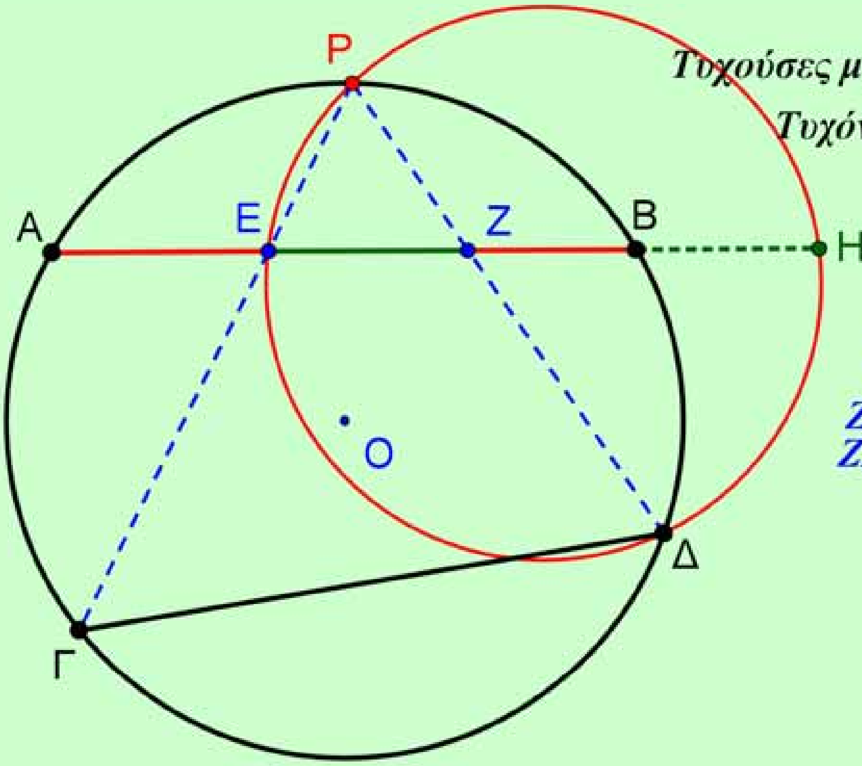
Τότε: $\dfrac{AE \cdot BZ}{EZ} = ct$

Το Η παραμένει σταθερό...

$\left.\begin{matrix} ZA \cdot ZB = ZP \cdot Z\Delta \\ ZA \cdot ZB = ZE \cdot ZH \end{matrix}\right| \Rightarrow ZA \cdot ZB = ZE \cdot ZH$

α = 5°

Λήμμα Haruki



Τυχούσες μη τεμνόμενες χορδές ΑΒ και ΓΔ

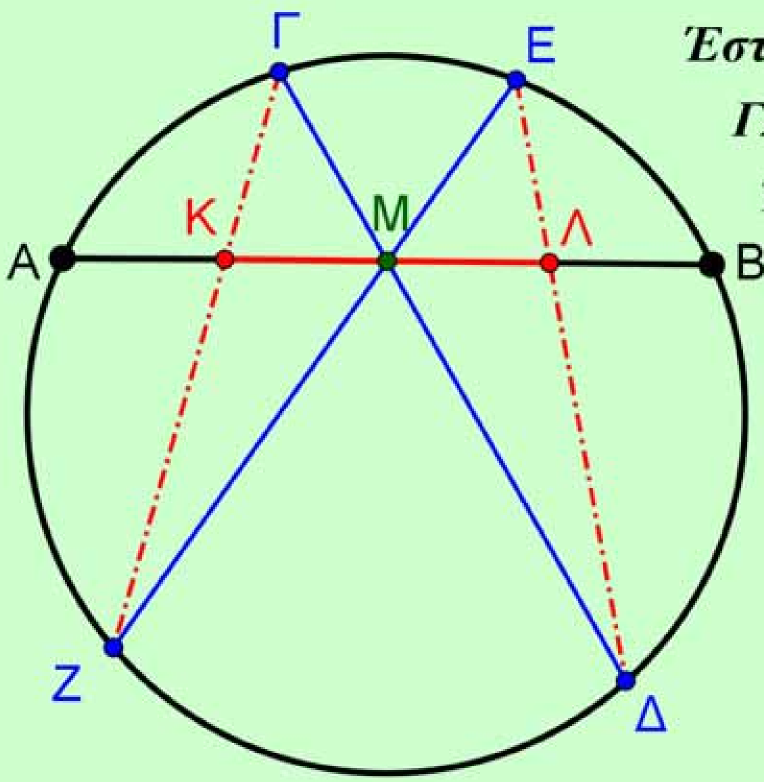
Τυχόν σημείο P του τόξου ΑΒ.

Τότε: $\dfrac{AE \cdot BZ}{EZ} = ct$

Το Η παραμένει σταθερό...

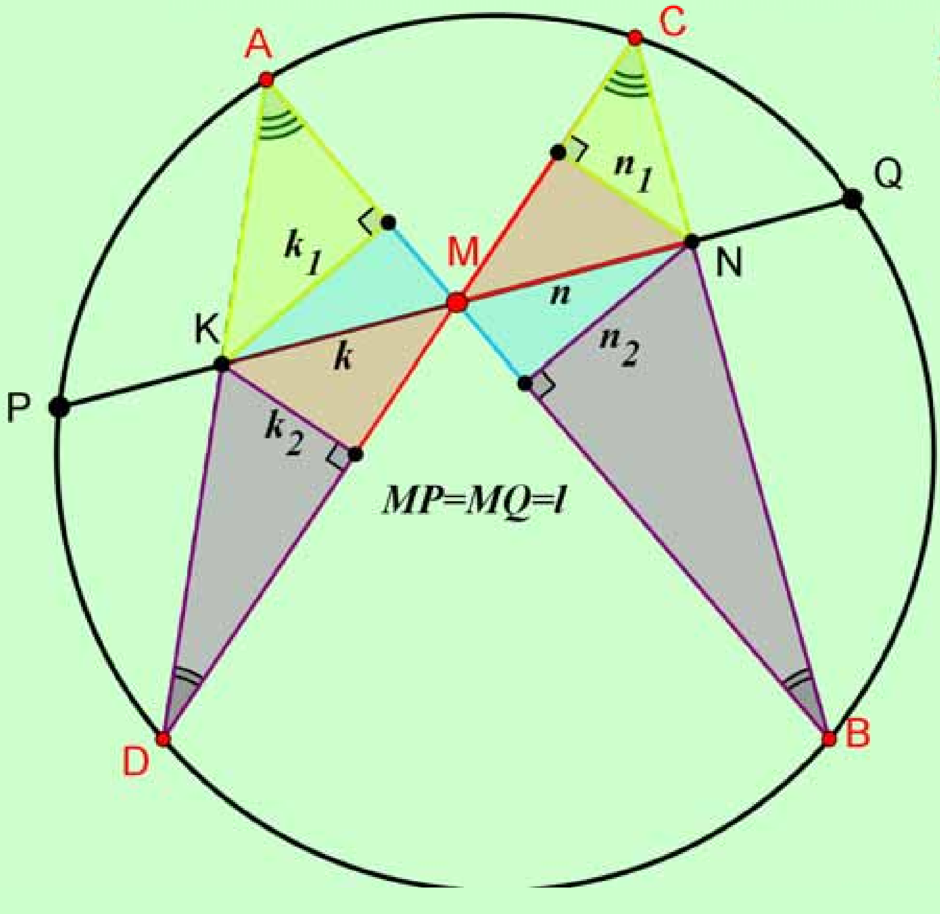
$\left.\begin{matrix} ZA \cdot ZB = ZP \cdot Z\Delta \\ ZA \cdot ZB = ZE \cdot ZH \end{matrix}\right| \Rightarrow ZA \cdot ZB = ZE \cdot ZH$

Θεώρημα Πεταλούδας



Έστω Μ το μέσο της χορδής ΑΒ,
ΓΔ και ΕΖ χορδές από το Μ.
Τότε Μ μέσο και του ΚΛ.

Θεώρημα Πεταλούδας (Y) (α΄ Τρόπος).



$$\frac{k}{n} = \frac{k_1}{n_2} \qquad \frac{k}{n} = \frac{k_2}{n_1}$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{k_1 \cdot k_2}{n_1 \cdot n_2}$$

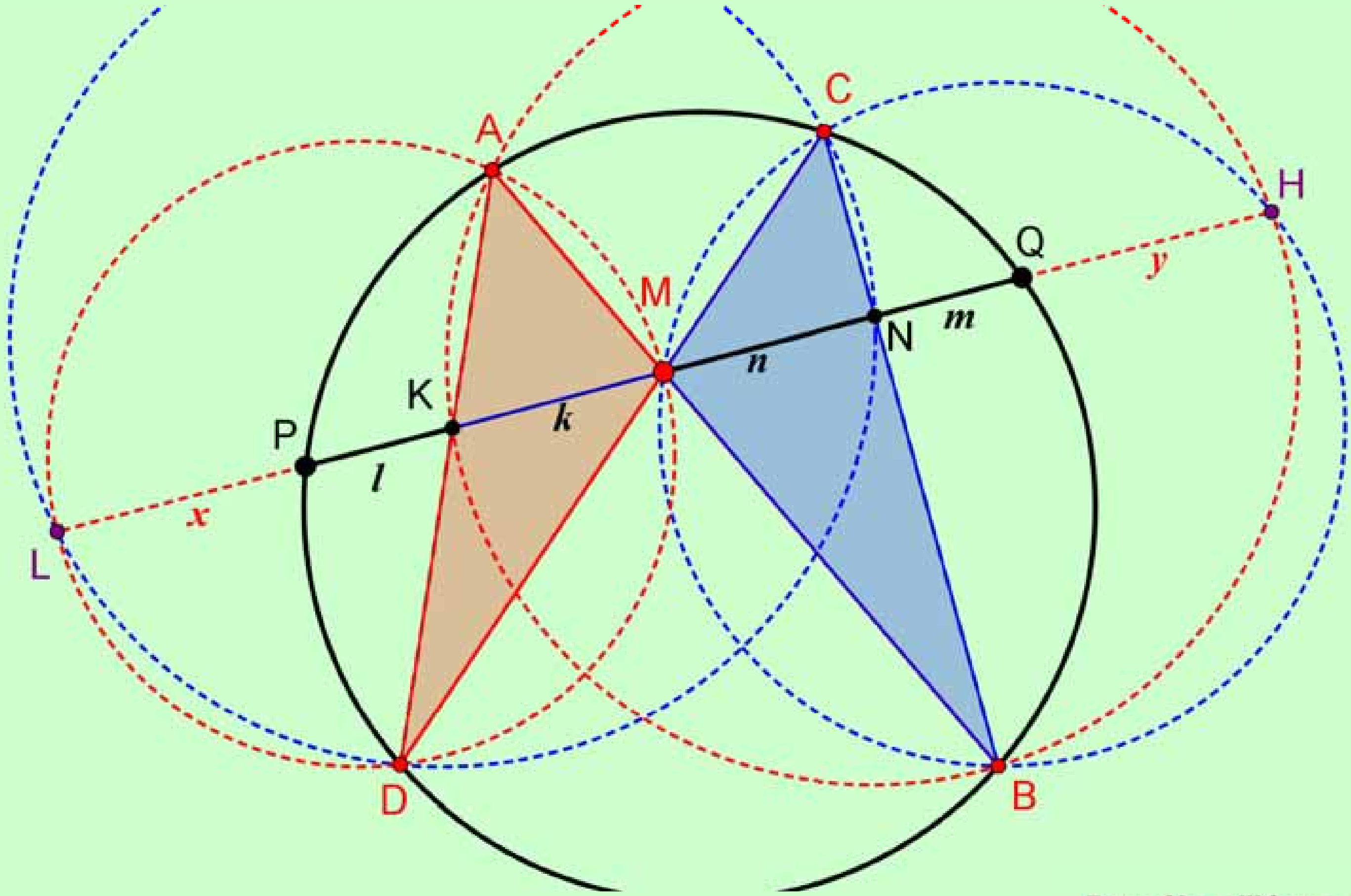
$$\frac{KA}{NC} = \frac{k_1}{n_1} \qquad \frac{KD}{NB} = \frac{k_2}{n_2}$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{KA \cdot KD}{NB \cdot NC}$$

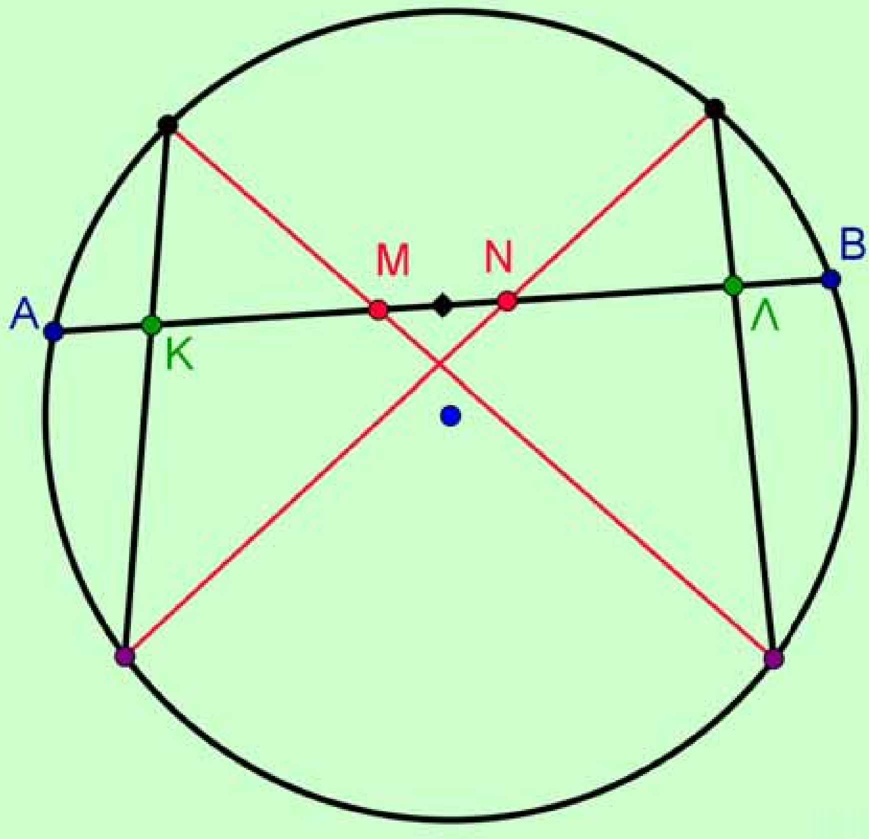
$$KA \cdot KD = KP \cdot KQ = (l-k)(l+k) = l^2 - k^2$$

$$NB \cdot NC = NQ \cdot NP = (l-n)(l+n) = l^2 - n^2$$

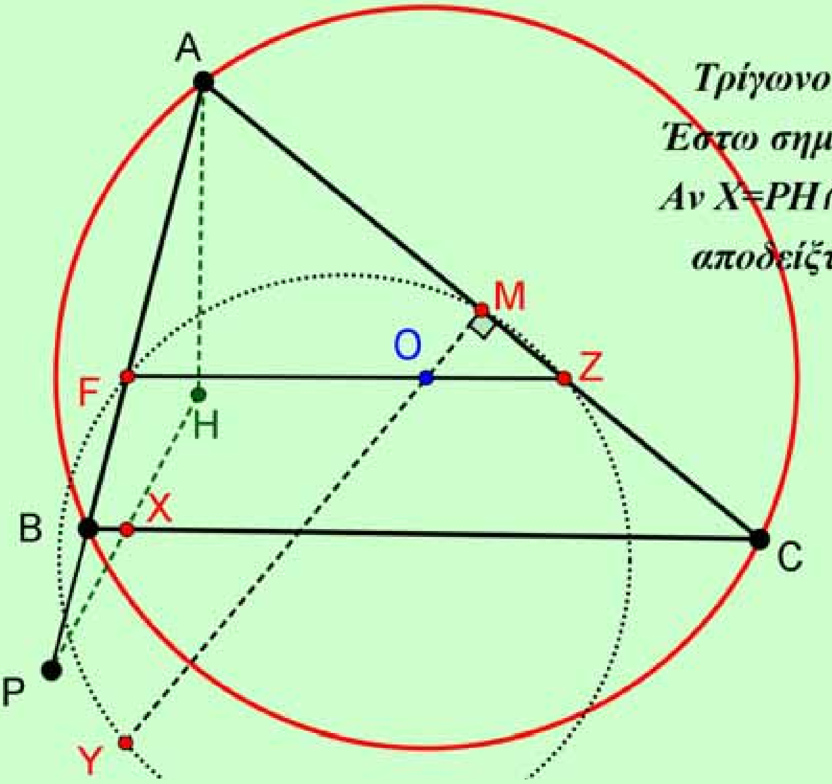
Θεώρημα Πεταλούδας (Υ) (β΄ Τρόπος).



Θεώρημα Πεταλούδας (Γενίκευση).

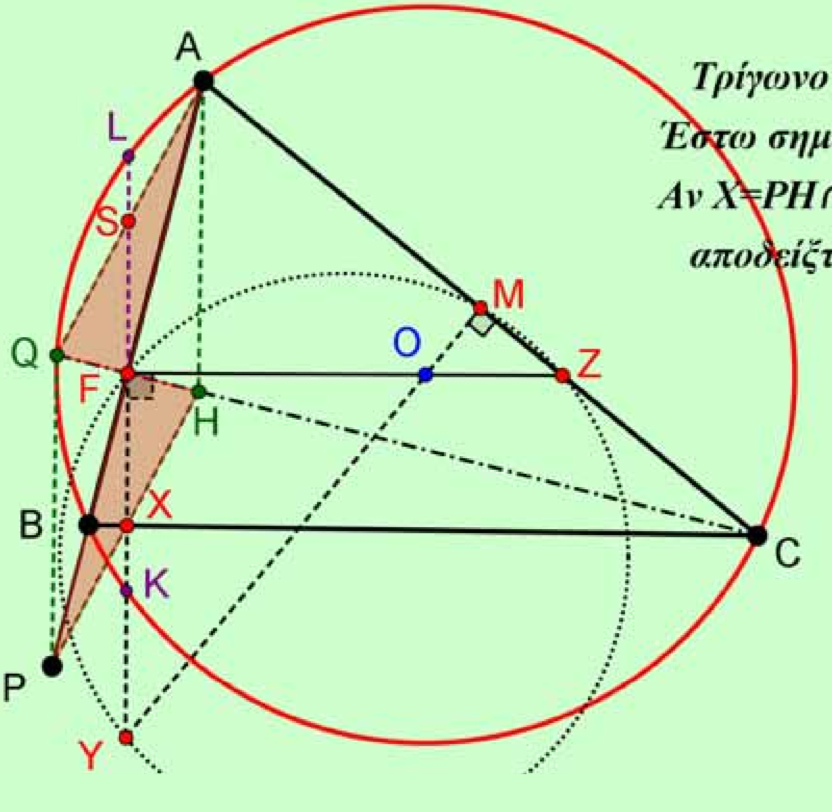


BMO 2008.



Τρίγωνο ABC με AC>BC και CF⊥BC.
Έστω σημείο P: FP=FA και M μέσο του AC.
Αν X=PH∩BC, Y=OM∩FX και Z=OF∩AC,
αποδείξτε ότι F,M,Y και Z ομοκυκλικά.

BMO 2008 (Y).



Τρίγωνο ABC με AC>BC και CF⊥BC.
Έστω σημείο P: FP=FA και M μέσο του AC.
Αν X=PH∩BC, Y=OM∩FX και Z=OF∩AC,
αποδείξτε ότι F,M,Y και Z ομοκυκλικά.

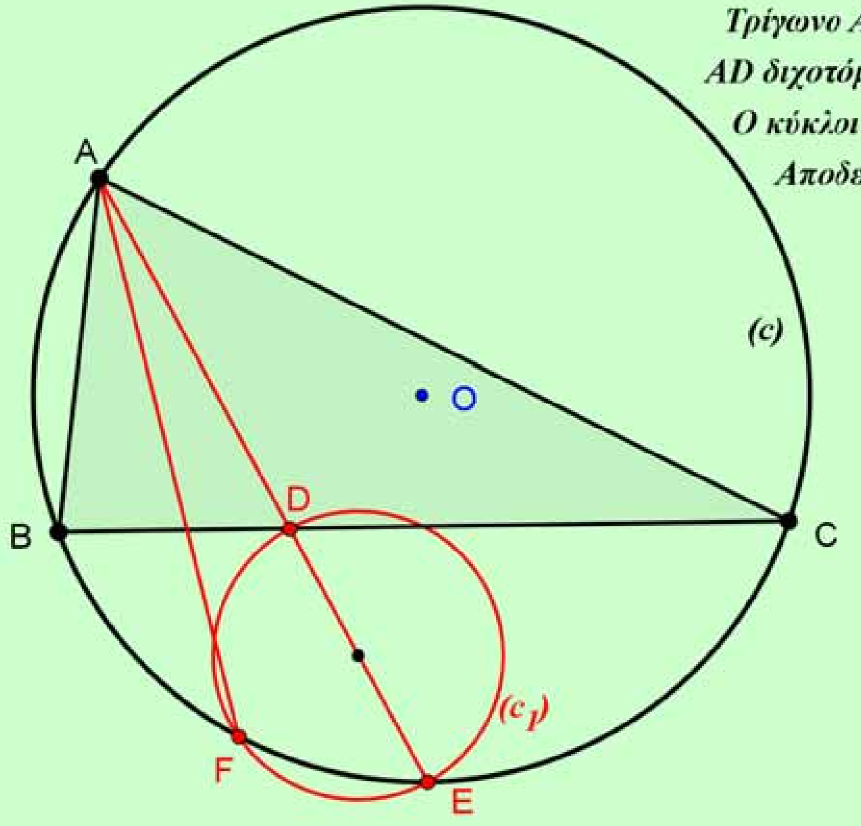
Το AHPQ είναι ρόμβος.

Το F είναι μέσο του SX.

Το F είναι μέσο του KL.

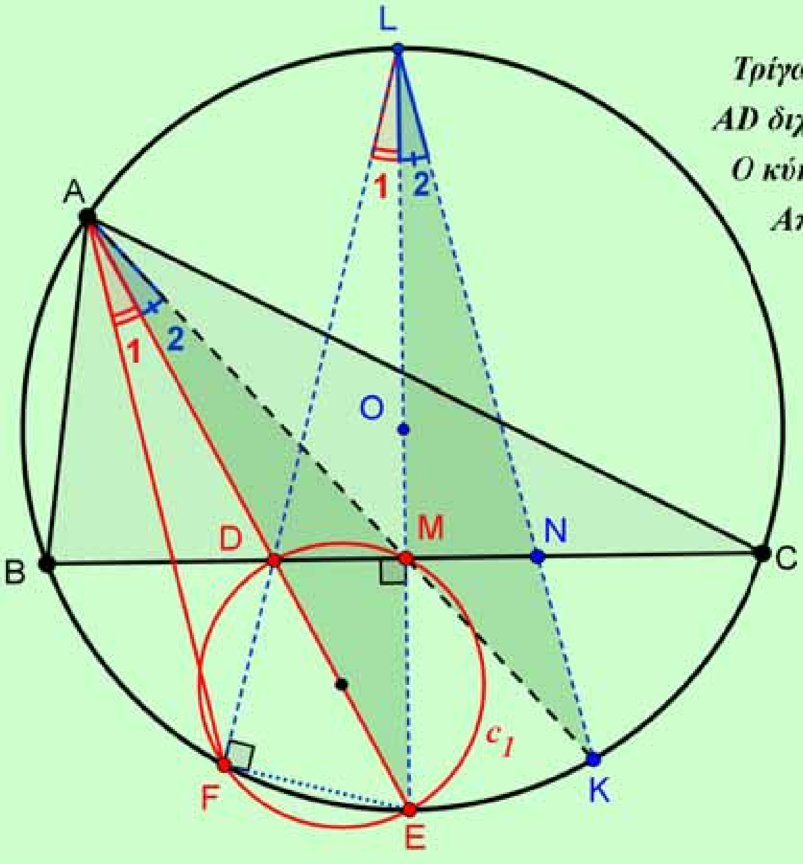
Άσκηση All Russian 2009.

Τρίγωνο ABC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R).
AD διχοτόμος και (c_1) ο κύκλος με διάμετρο DE.
Ο κύκλοι (c) και (c_1) τέμνονται στο σημείο F.
Αποδείξτε ότι AF συμμετροδιάμεσος.



Άσκηση All Russian 2009 (Υ).

Τρίγωνο ABC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R).
AD διχοτόμος και (c_1) ο κύκλος με διάμετρο DE.
Ο κύκλοι (c) και (c_1) τέμνονται στο σημείο F.
Αποδείξτε ότι AF συμμετροδιάμεσος.



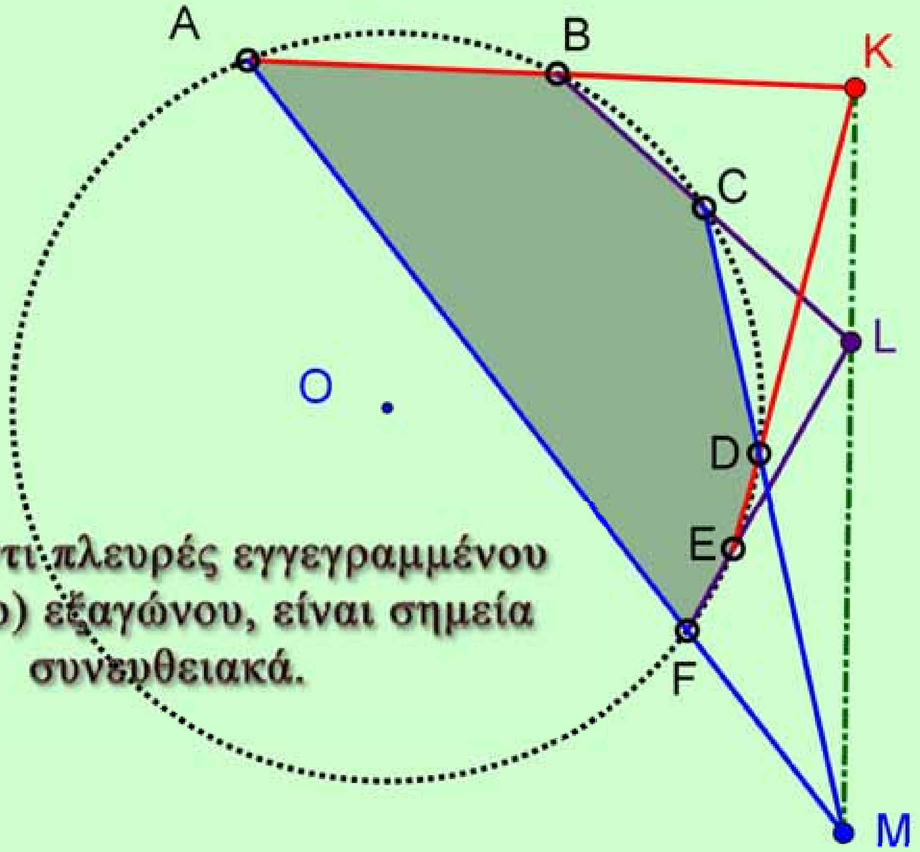
$$\hat{F} = \hat{M} = 90^\circ$$

M μέσο DN

$$\hat{L}_1 = \hat{L}_2$$

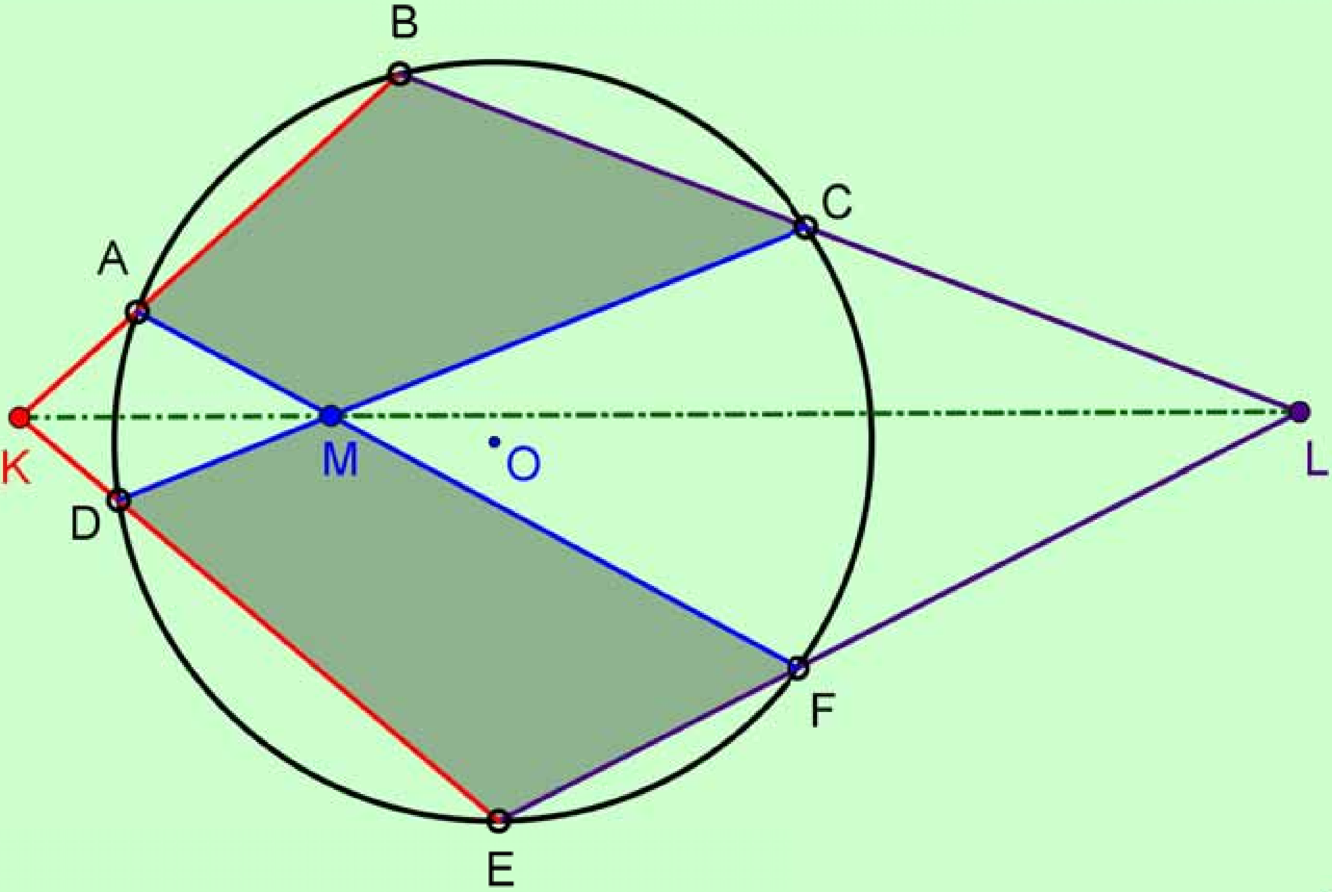
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

Θεώρημα Pascal.



Οι απέναντι πλευρές εγγεγραμμένου (σε κύκλο) εξαγώνου, είναι σημεία συνευθειακά.

Θεώρημα Pascal.



Θεώρημα Pascal (Υ).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{LX}{LY}\cdot\frac{MY}{MZ}\cdot\frac{KZ}{KX}=1$$

$$\frac{KZ}{KX}\cdot\frac{BX}{BY}\cdot\frac{AY}{AZ}=1$$

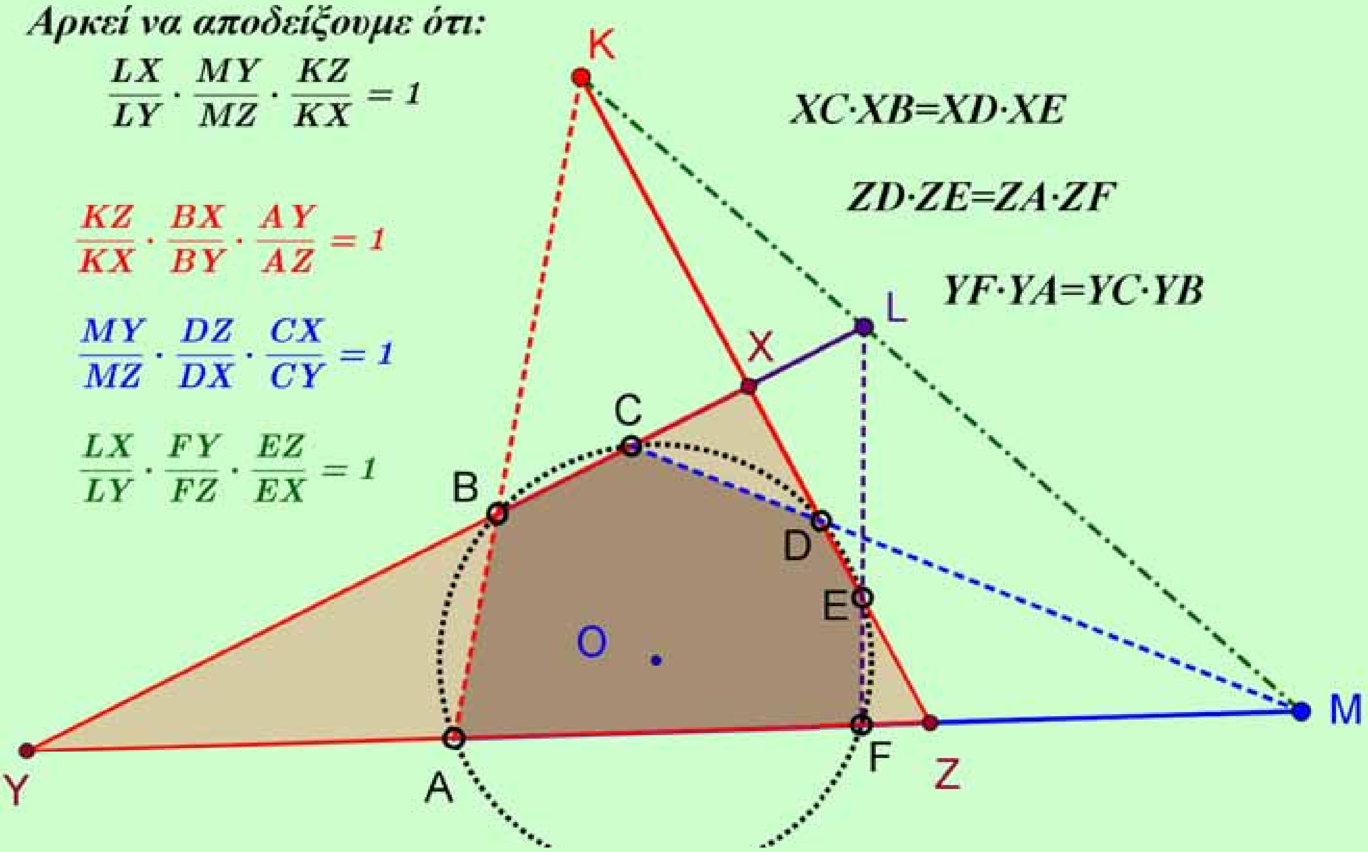
$$\frac{MY}{MZ}\cdot\frac{DZ}{DX}\cdot\frac{CX}{CY}=1$$

$$\frac{LX}{LY}\cdot\frac{FY}{FZ}\cdot\frac{EZ}{EX}=1$$

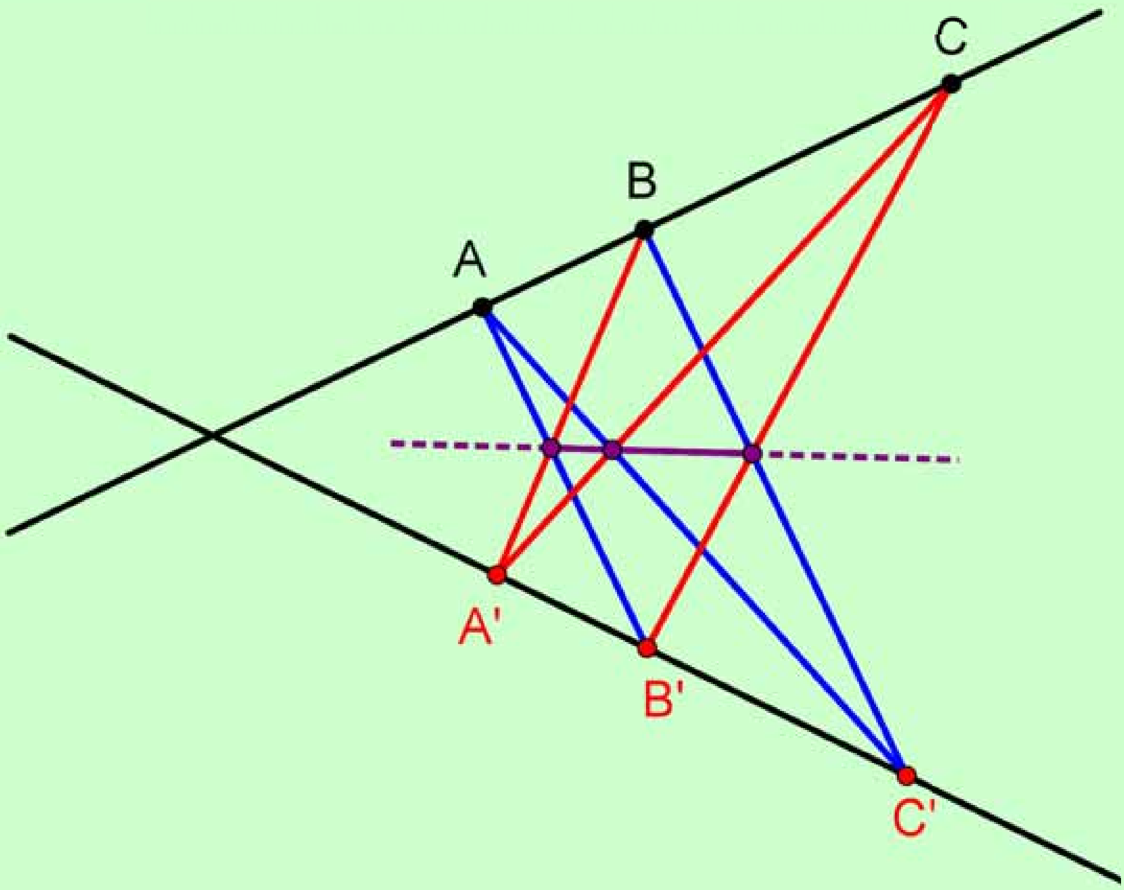
$XC\cdot XB=XD\cdot XE$

$ZD\cdot ZE=ZA\cdot ZF$

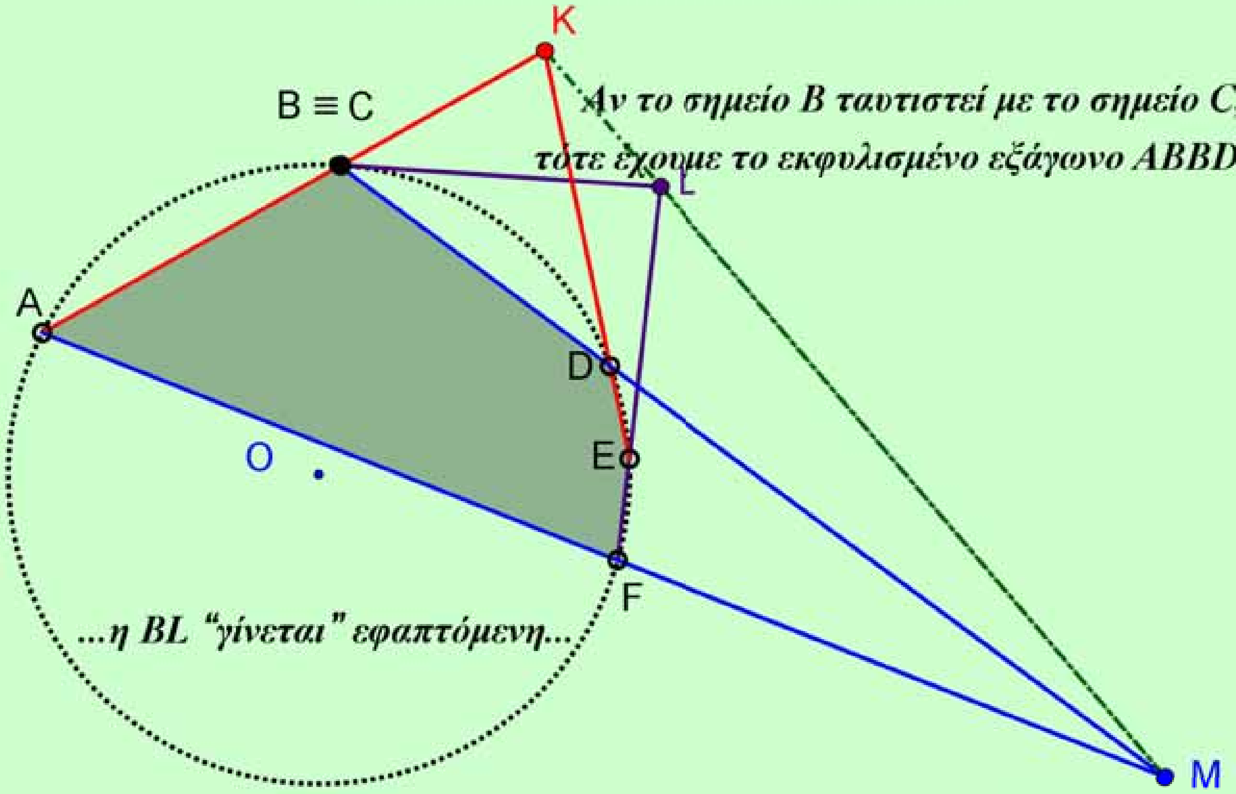
$YF\cdot YA=YC\cdot YB$



Θεώρημα Pascal (Γενίκευση).



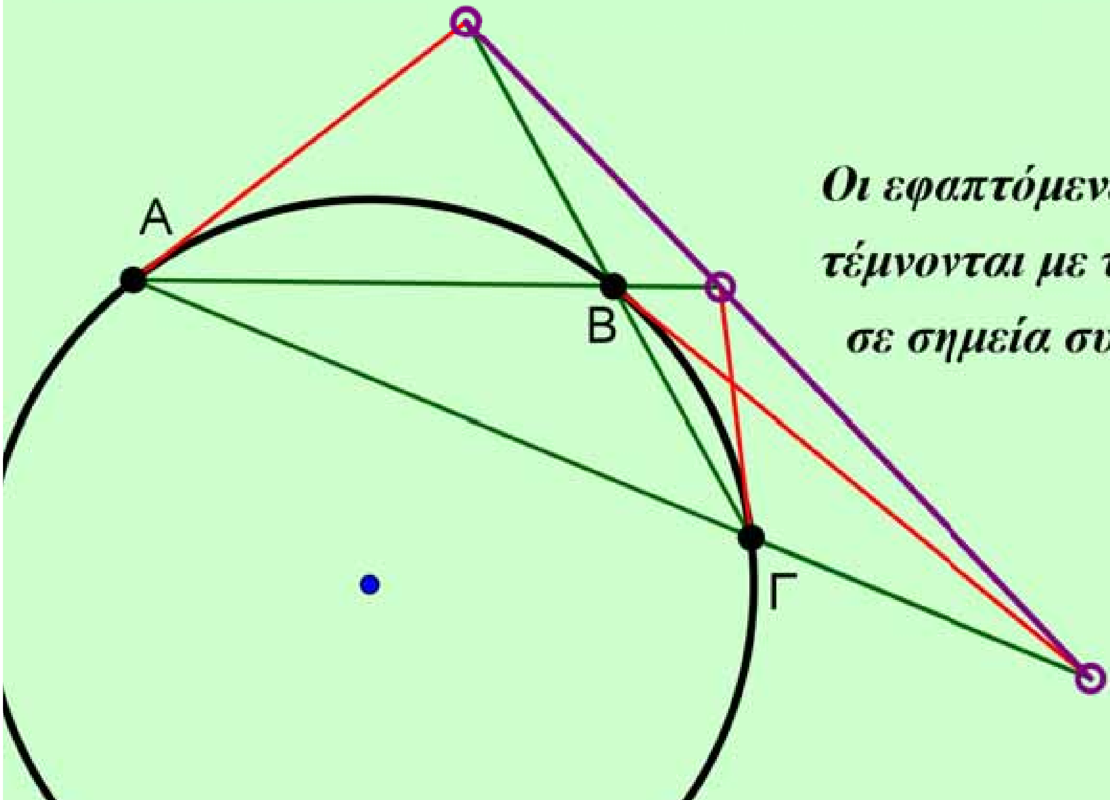
Θεώρημα Pascal
(Εκφυλισμένο Εξάγωνο).



Αν το σημείο B ταυτιστεί με το σημείο C, τότε έχουμε το εκφυλισμένο εξάγωνο ABBDEF.

...η BL "γίνεται" εφαπτόμενη...

Θεώρημα Pascal
(Εκφυλισμένο Εξάγωνο).

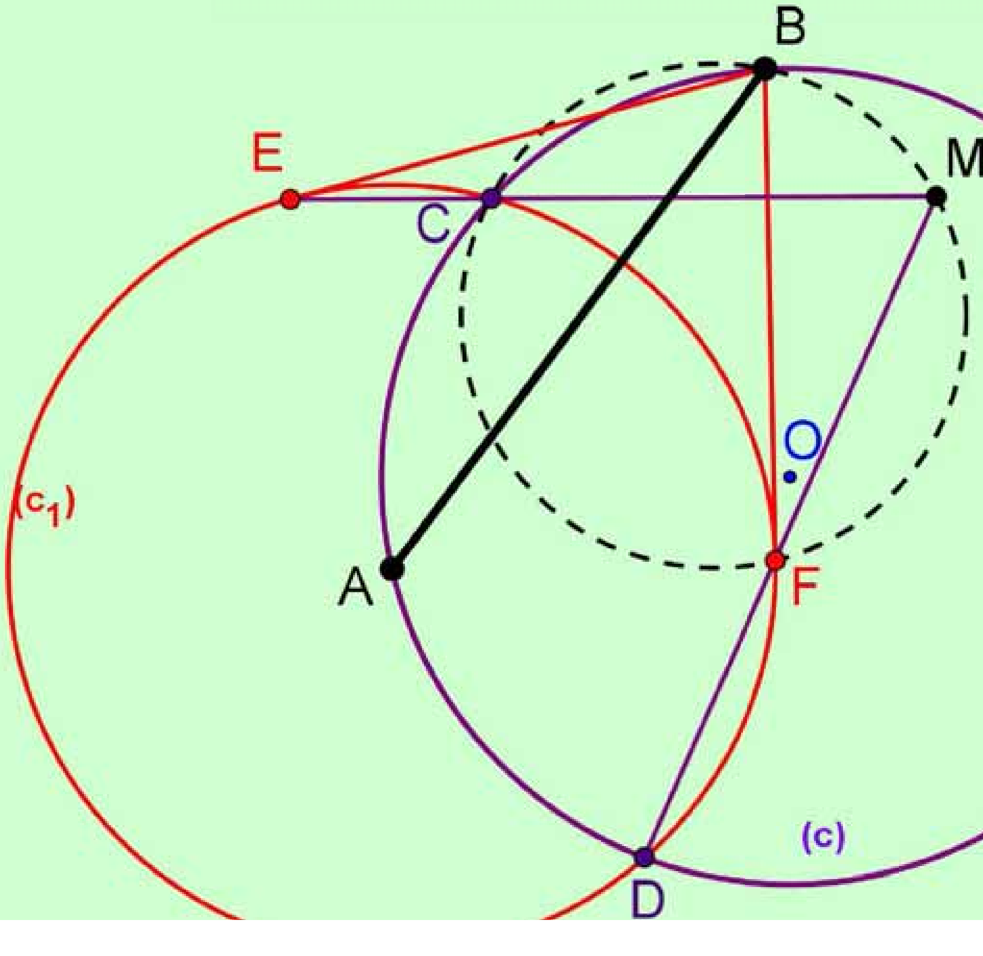


Οι εφαπτόμενες στα Α,Β,Γ τέμνονται με τις ΒΓ,ΑΓ, ΑΒ σε σημεία συνευθειακά.

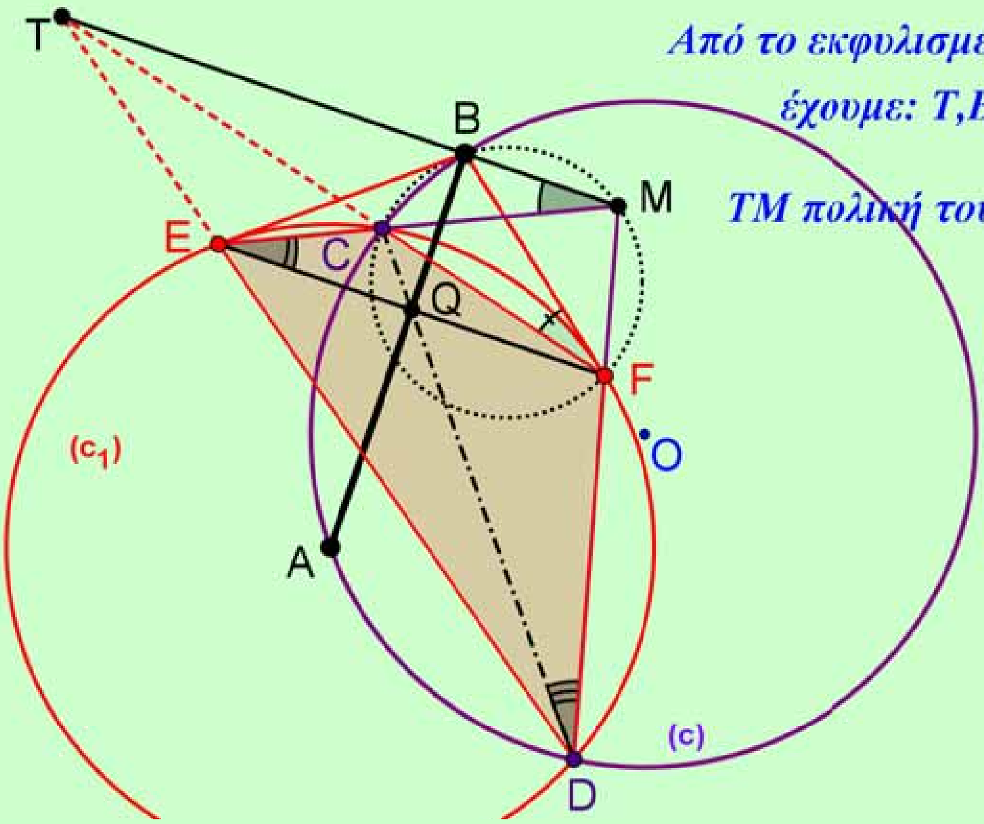
Θεώρημα Pascal (Άσκηση).

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ και χορδή του AB με $R < AB < 2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$ (από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$). Οι EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Θεώρημα Pascal (Άσκηση).



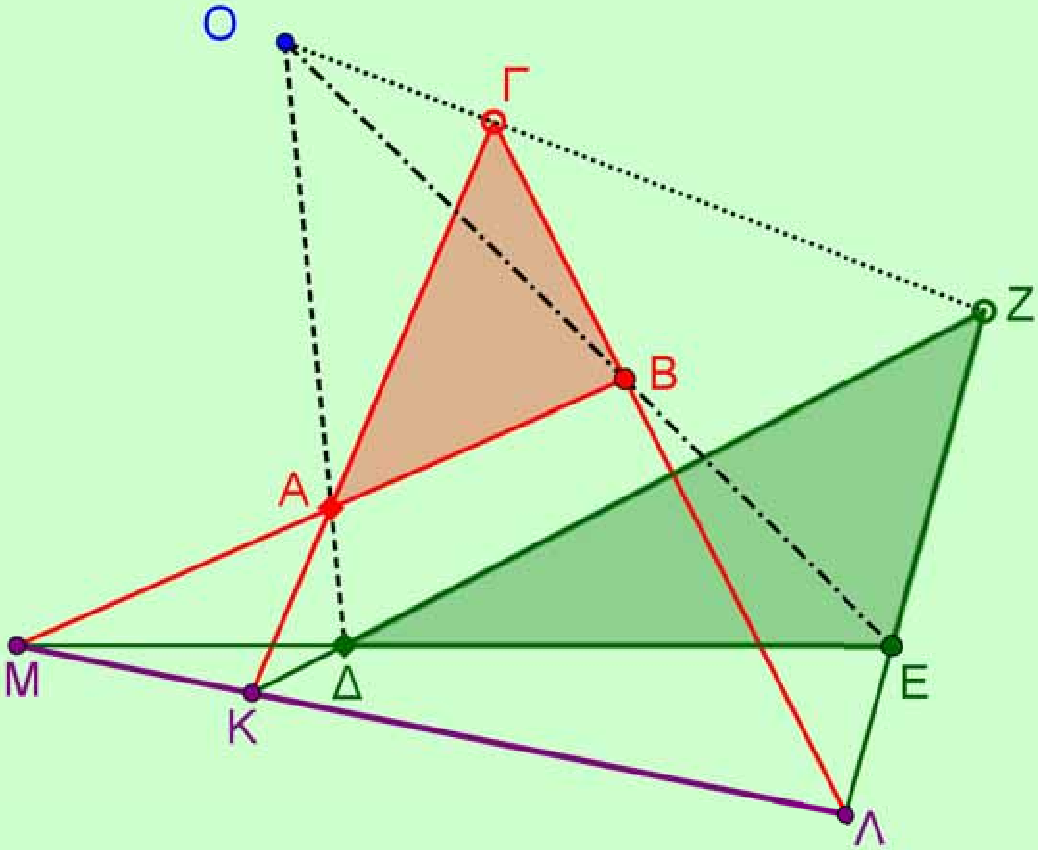
Θεώρημα Pascal (Άσκηση).



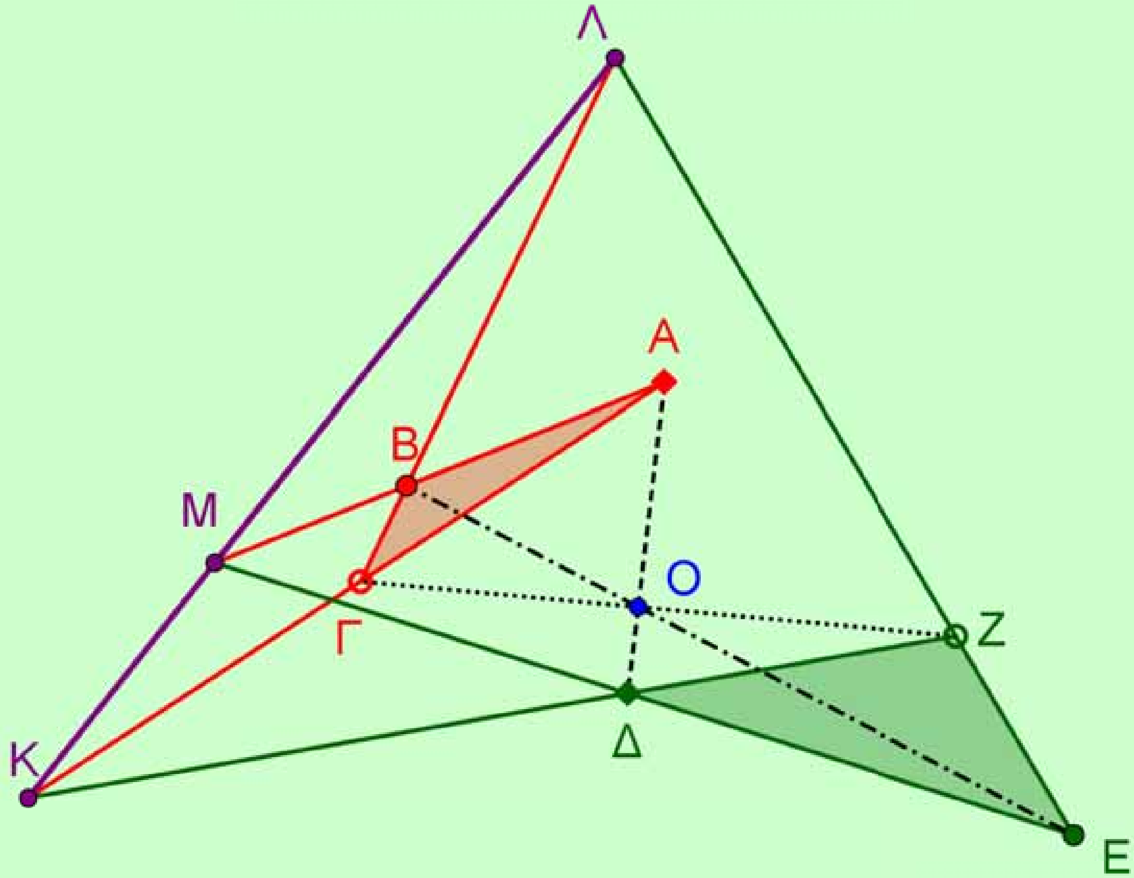
Από το εκφυλισμένο εξάγωνο EECFFB έχουμε: T,B,M συνευθειακά.

TM πολική του Q, οπότε AQ⊥TM.

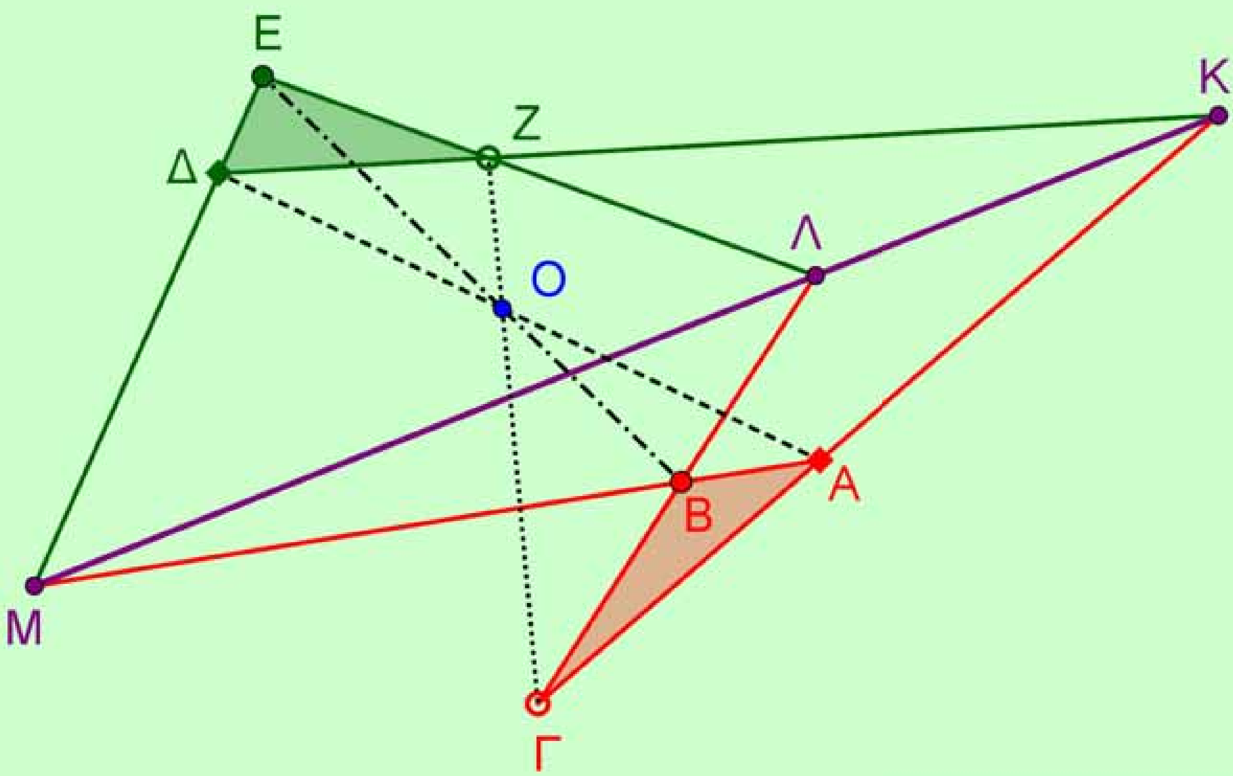
Θεώρημα Desarque.



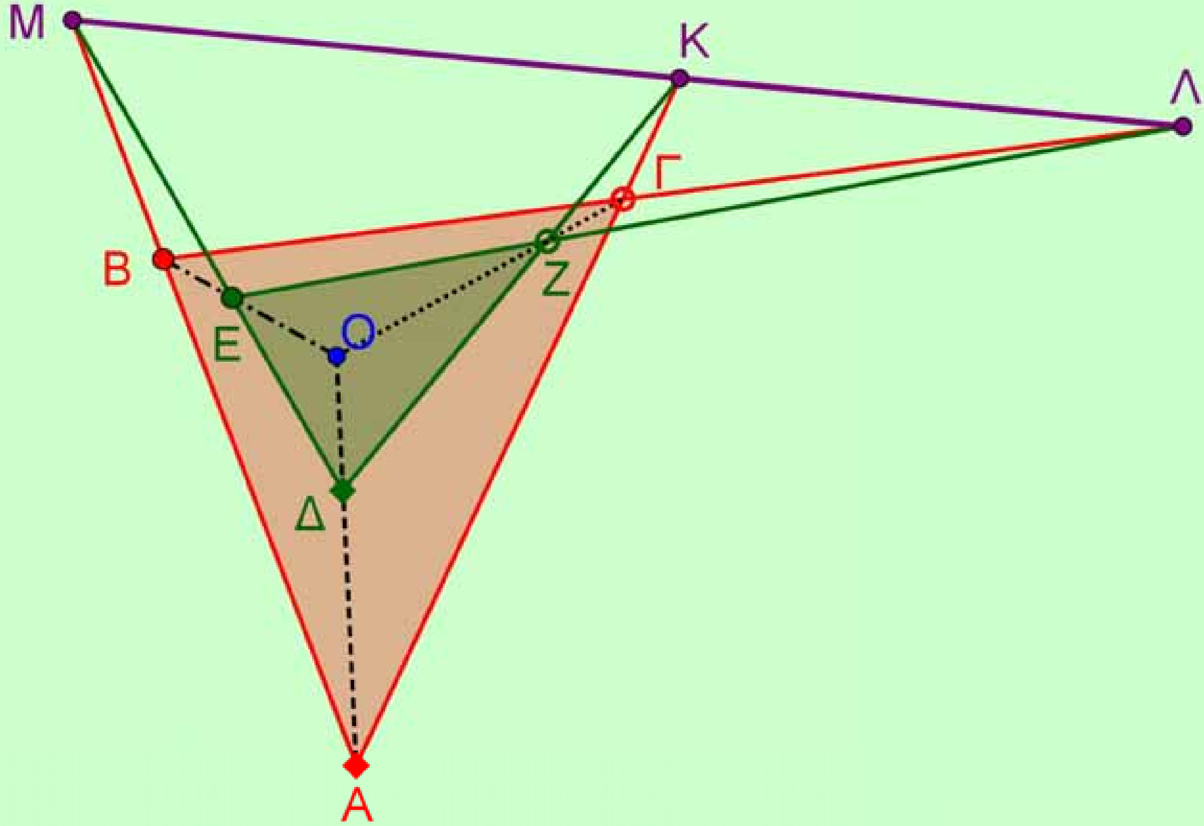
Θεώρημα Desarque.



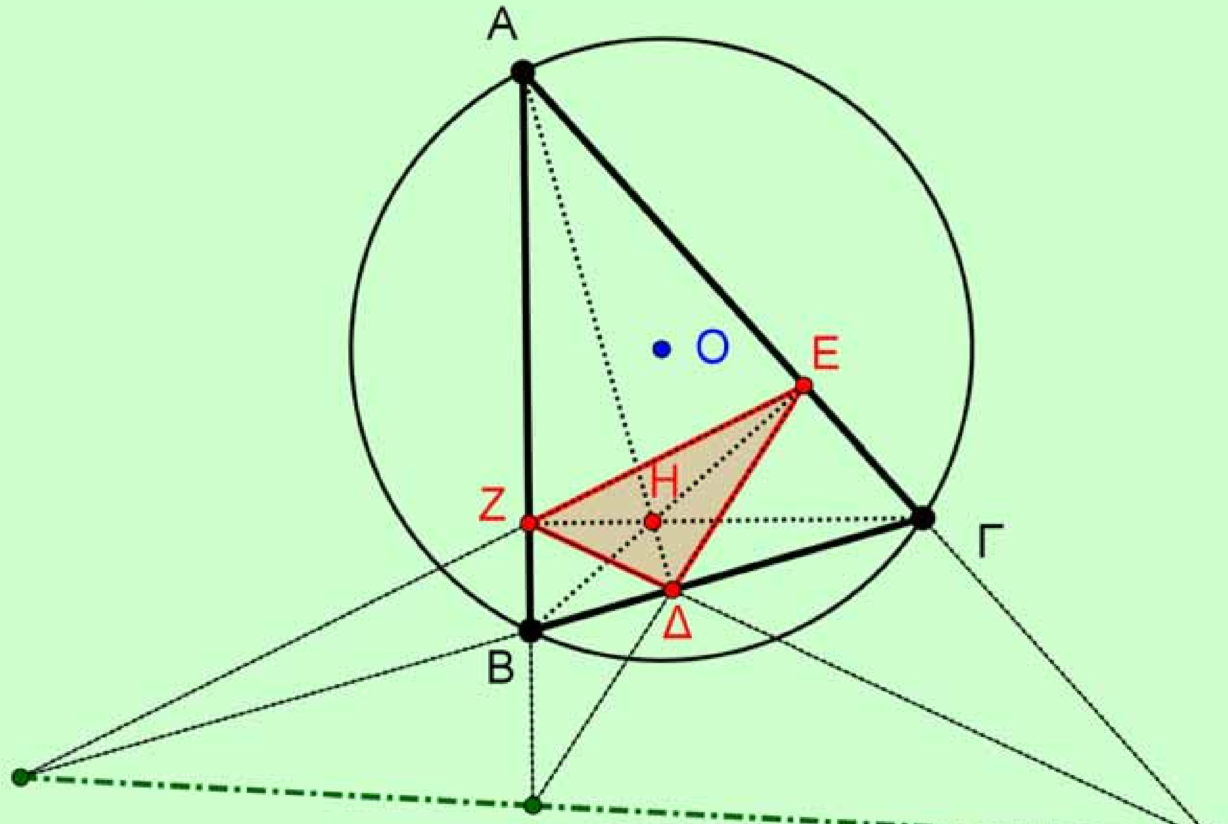
Θεώρημα Desarque.



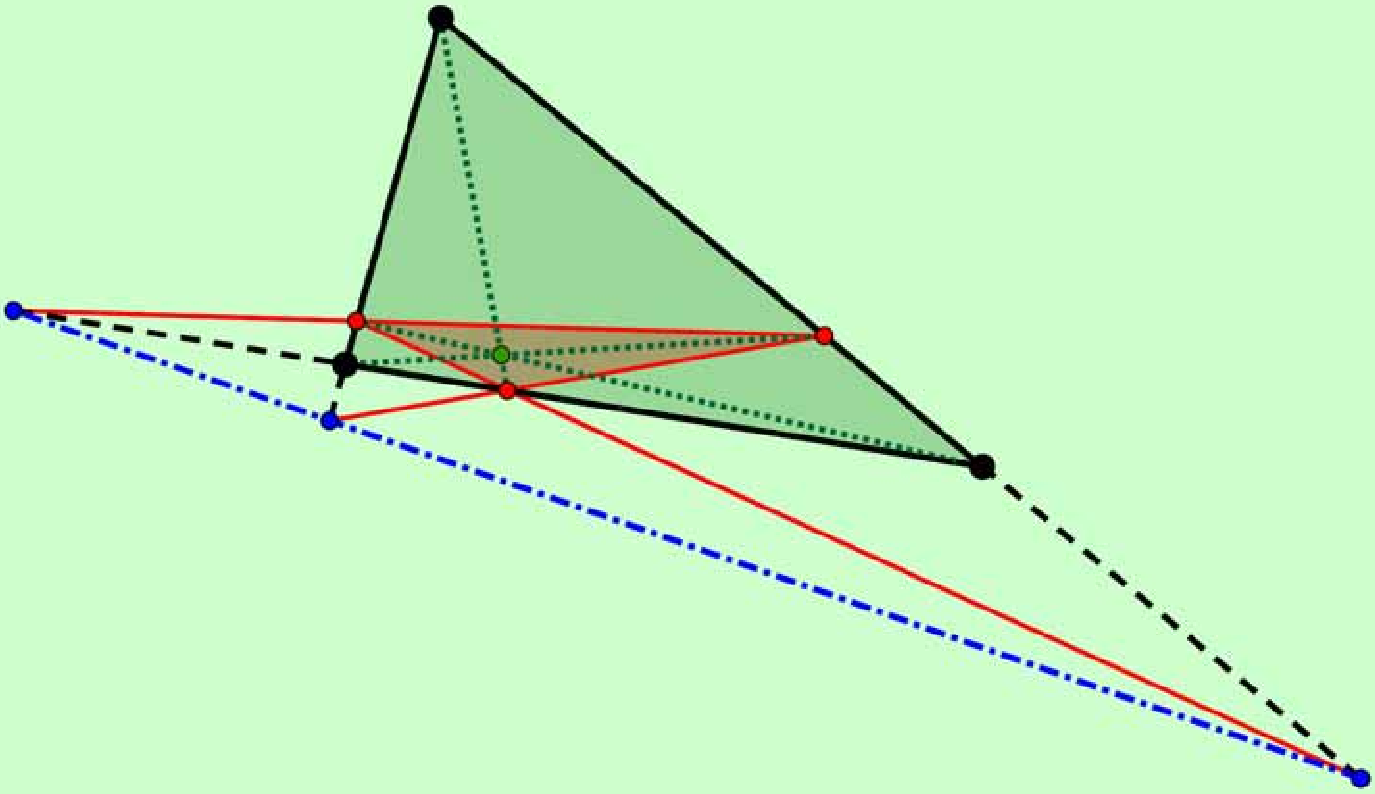
Θεώρημα Desarque.



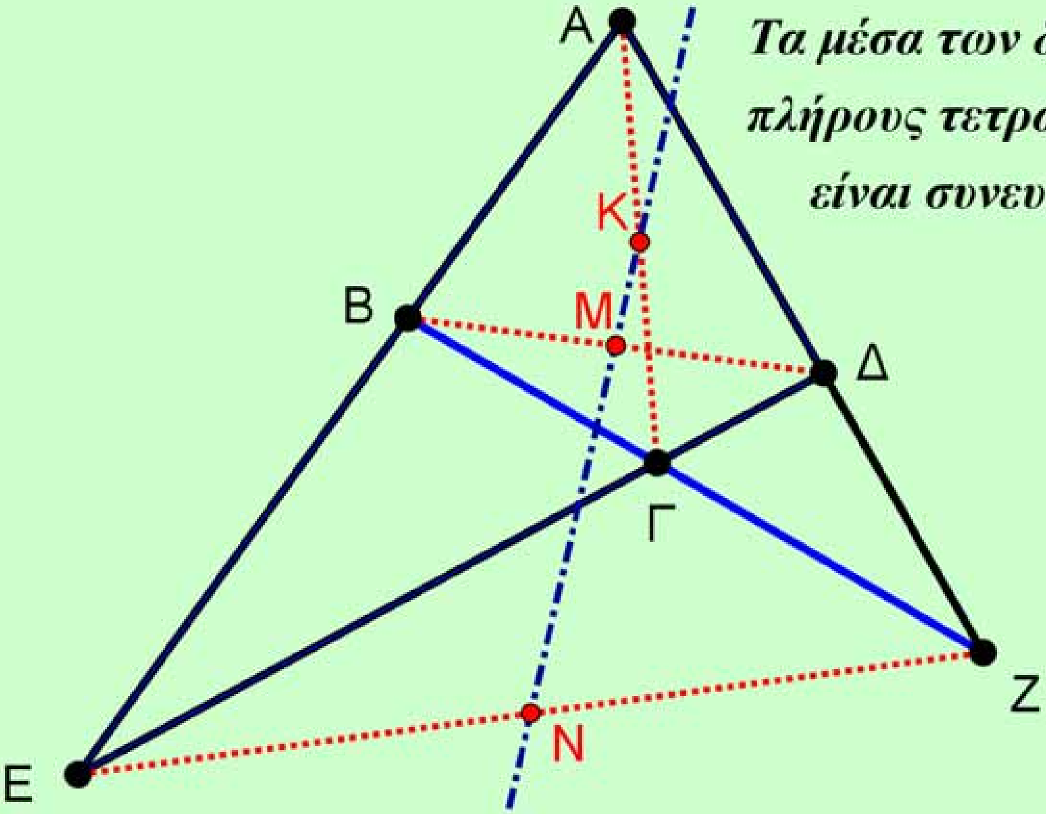
Θεώρημα Desarque (Εφαρμογή 1).



Θεώρημα Desarque (Εφαρμογή 2).



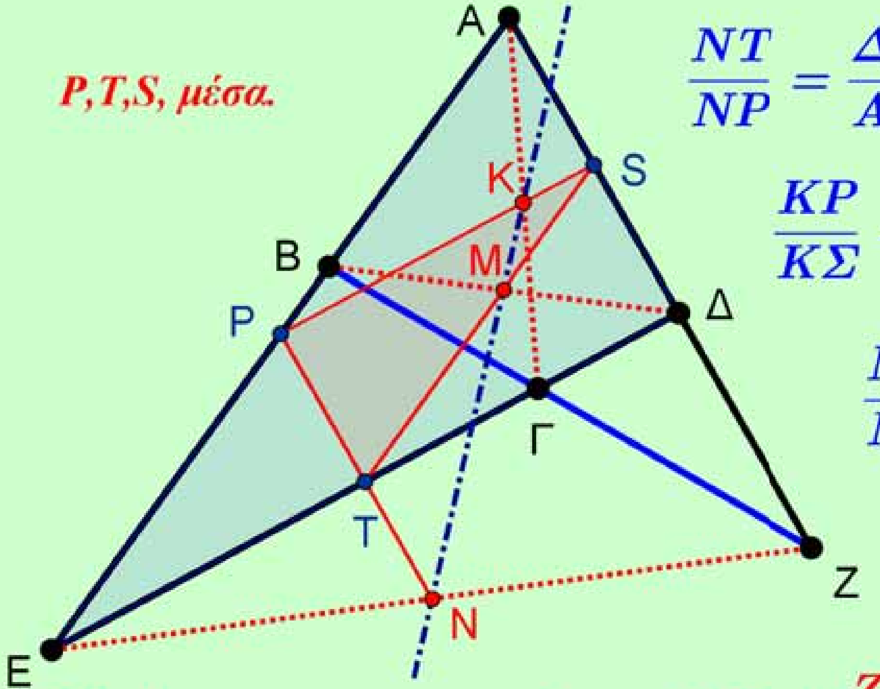
Θεώρημα Newton.



Τα μέσα των διαγωνίων πλήρους τετραπλεύρου είναι συνευθειακά.

Θεώρημα Newton (Υ).

P,T,S, μέσα.



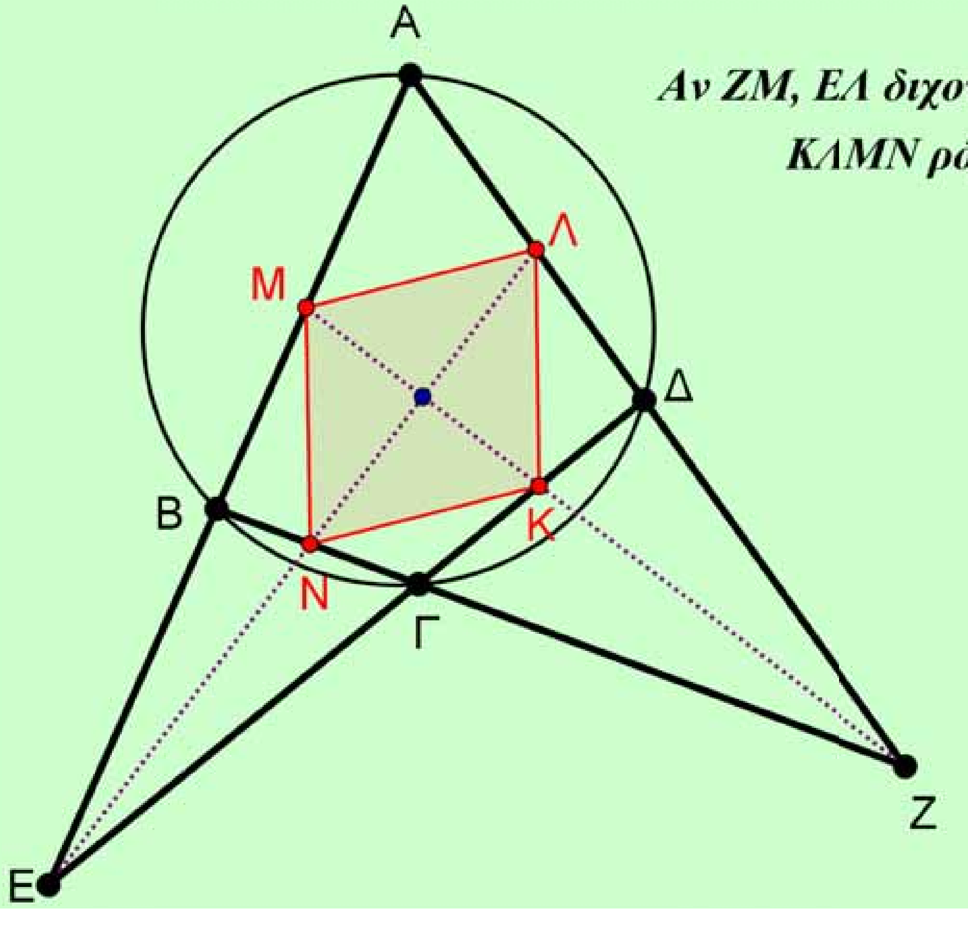
$$\frac{NT}{NP} = \frac{\Delta Z}{AZ}$$

$$\frac{KP}{K\Sigma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Delta}$$

$$\frac{M\Sigma}{MT} = \frac{AB}{BE}$$

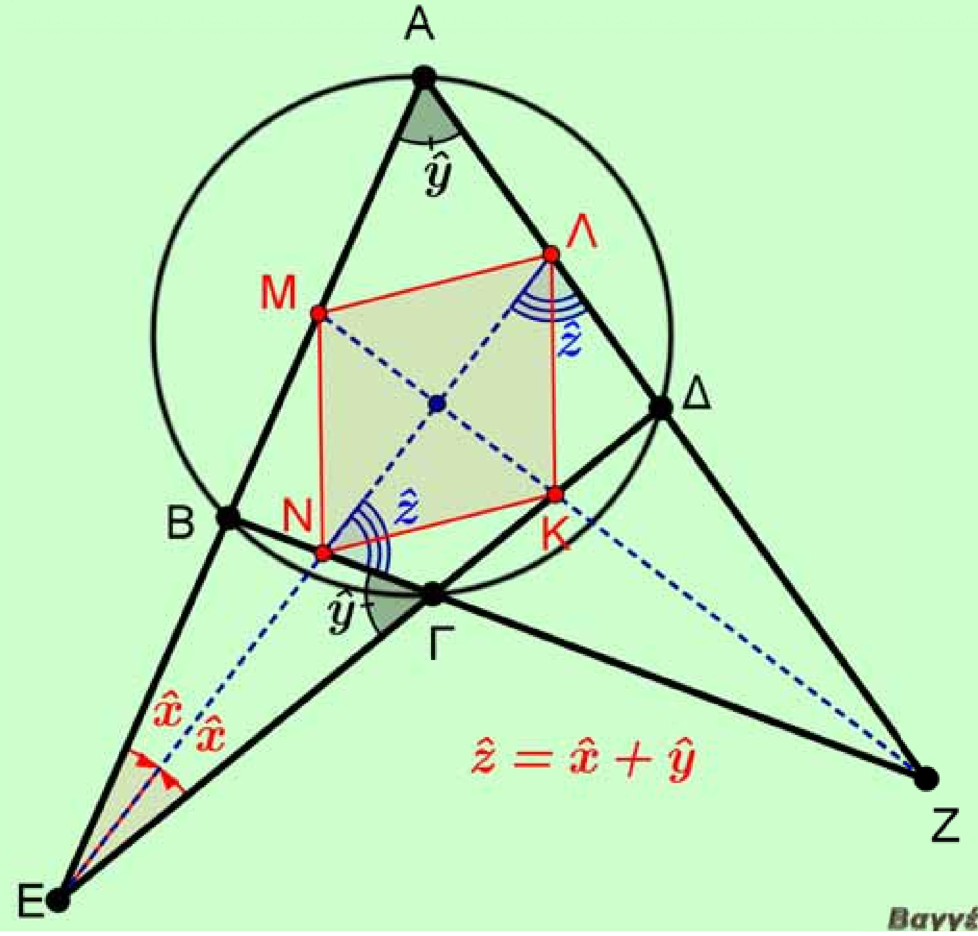
$$BZ \text{ τέμνουσα του τριγώνου } A\Delta E \Rightarrow \frac{Z\Delta}{ZA} \cdot \frac{BA}{BE} \cdot \frac{\Gamma E}{\Gamma\Delta} = 1$$

Πλήρες Τετράπλευρο (Άσκηση).



Αν ZM, EΛ διχοτόμοι, τότε ΚΛΜΝ ρόμβος.

Πλήρες Τετράπλευρο (Άσκηση) (Υ).

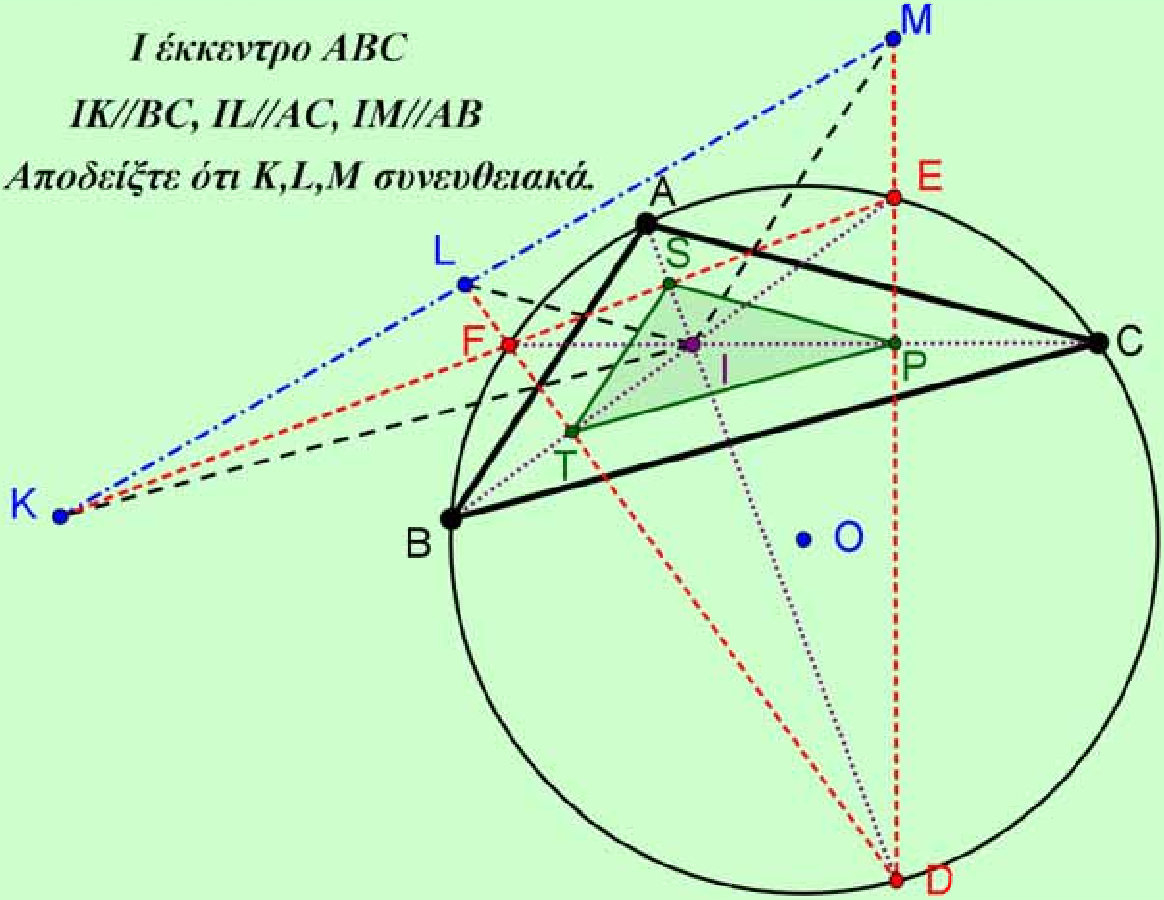


BMO 2015.

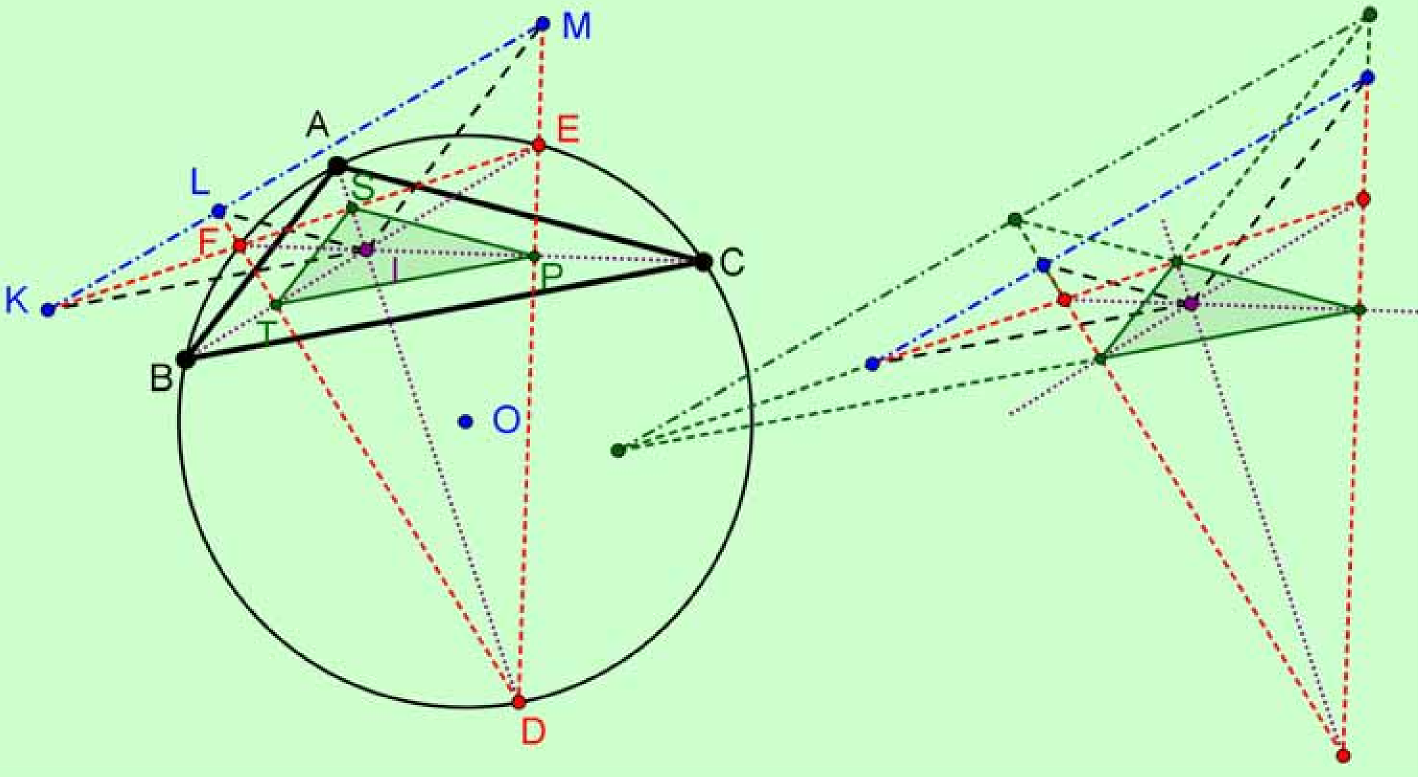
I έκκεντρο ABC

IK//BC, IL//AC, IM//AB

Αποδείξτε ότι K,L,M συνευθειακά.

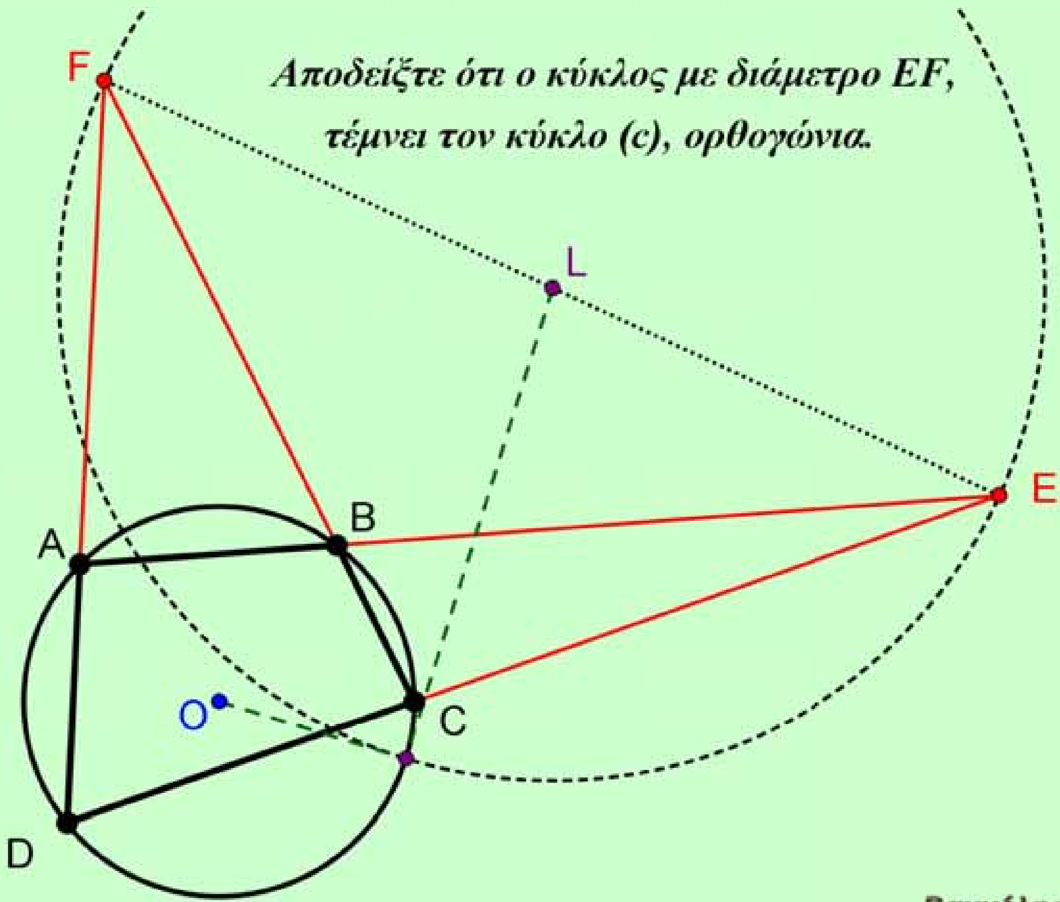


BMO 2015 (Y).

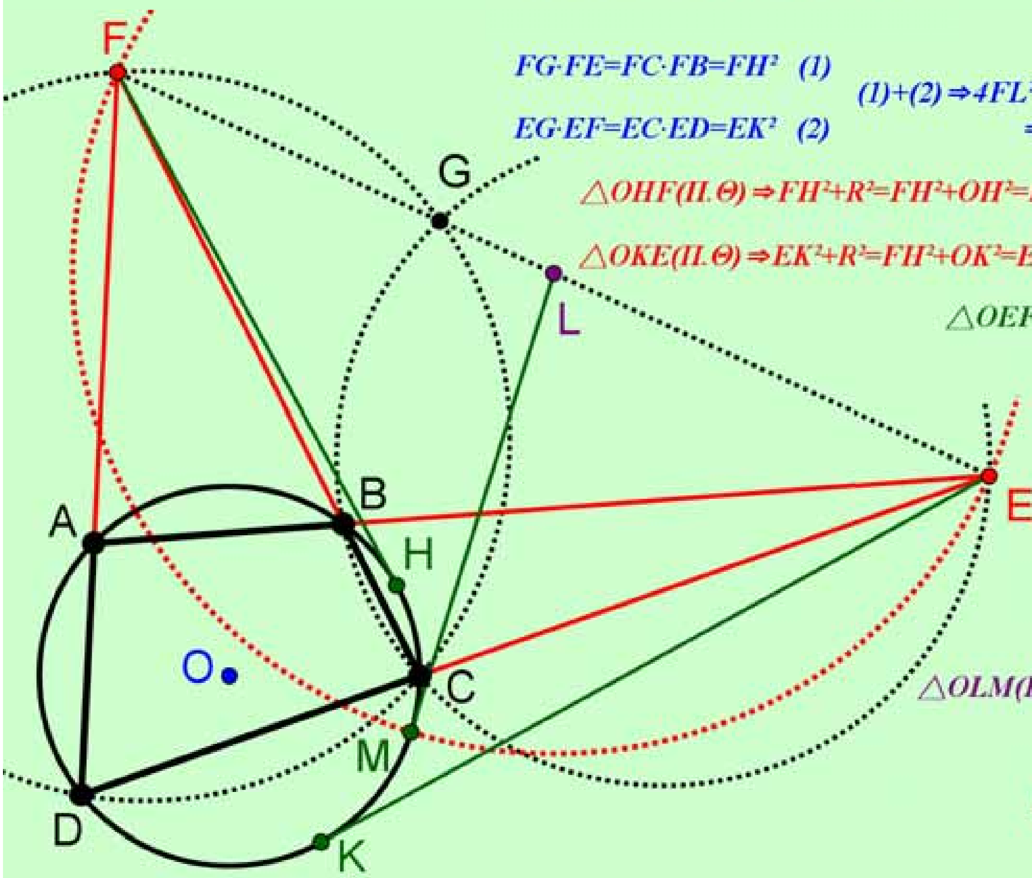


MMC 2013.

Αποδείξτε ότι ο κύκλος με διάμετρο EF, τέμνει τον κύκλο (c), ορθογώνια.



MMC 2013 (Y).



$FG \cdot FE = FC \cdot FB = FH^2 \quad (1)$

$EG \cdot EF = EC \cdot ED = EK^2 \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow 4FL^2 = FH^2 + EK^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4FL^2 + 2R^2 = FH^2 + R^2 + EK^2 + R^2$

$\triangle OHF(\Pi.\Theta) \Rightarrow FH^2 + R^2 = FH^2 + OH^2 = FO^2$

$\Rightarrow 4FL^2 + 2R^2 = OF^2 + OE^2$

$\triangle OKE(\Pi.\Theta) \Rightarrow EK^2 + R^2 = FH^2 + OK^2 = EO^2$

$\triangle OEF \Rightarrow (\Theta.\Delta) OF^2 + OE^2 = 2OL^2 + 2FL^2$

$\cdots \Rightarrow OL^2 = FL^2 + R^2$

$\triangle OLM(\Pi.\Theta) \Rightarrow OL^2 = LM^2 + OM^2 = LM^2 + R^2$

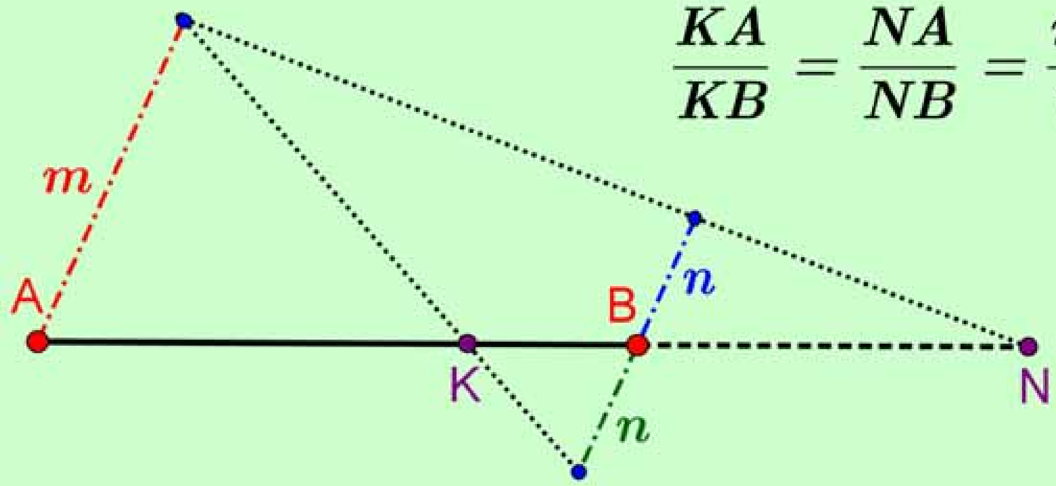
$\Downarrow$

$LM = LE = LF$

ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Αρμονική διαίρεση 1.

$$\frac{KA}{KB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$



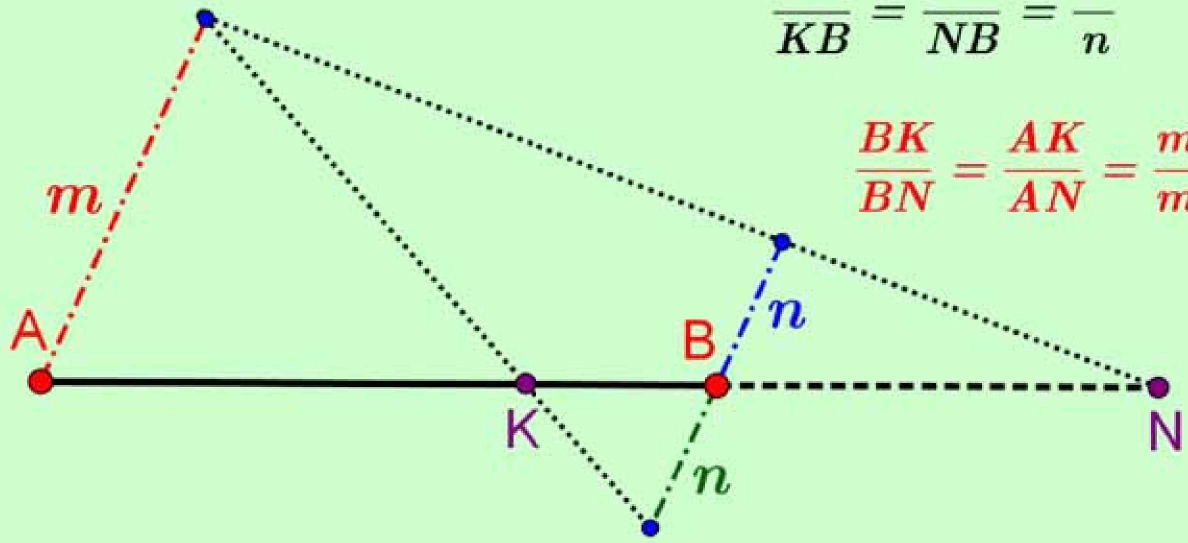
Τα σημεία K, N χωρίζουν (εσωτερικά και εξωτερικά)
το τμήμα AB στον ίδιο λόγο : $\frac{m}{n}$

Τα σημεία K, N λέγονται αρμονικά συζυγή των A, B

Αρμονική διαίρεση 2.

$$\frac{KA}{KB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{BK}{BN} = \frac{AK}{AN} = \frac{m-n}{m+n}$$



Αν τα K, N χωρίζουν το AB σε λόγο : $\frac{m}{n}$,

τότε τα B, A χωρίζουν το KN σε λόγο : $\frac{m-n}{m+n}$

Αρμονική διαίρεση 3.

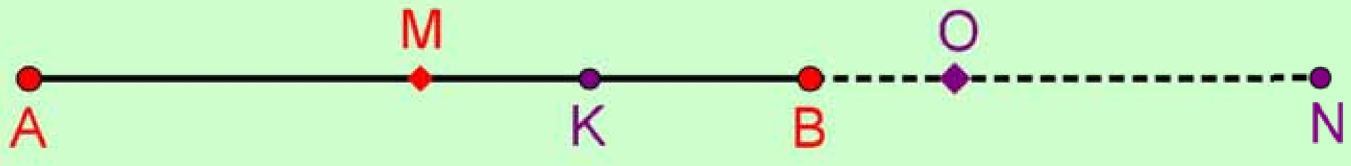
$$\frac{KA}{KB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$

$AB = a$

$M :$ μέσο AB

$KN = \beta$

$O :$ μέσο KN



$$KA = \frac{am}{m+n} \qquad KB = \frac{an}{m+n}$$

$$NA = \frac{am}{m-n} \qquad NB = \frac{am}{m-n}$$

$$\beta = \frac{2amn}{m^2 - n^2}$$

Αρμονική διαίρεση 4.

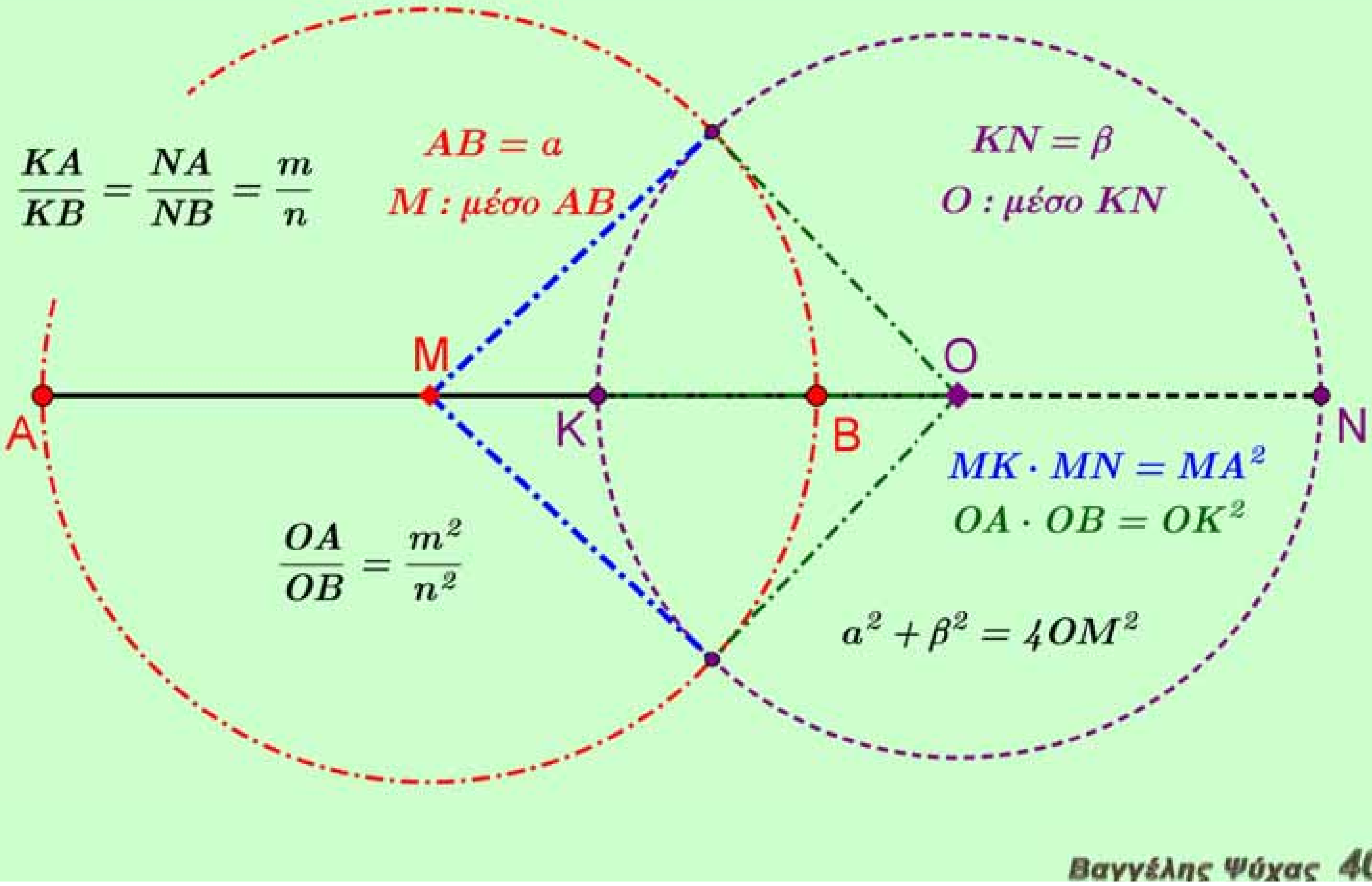
$$\frac{KA}{KB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$

$AB = a$

$M :$ μέσο AB

$KN = \beta$

$O :$ μέσο KN



$MK \cdot MN = MA^2$

$OA \cdot OB = OK^2$

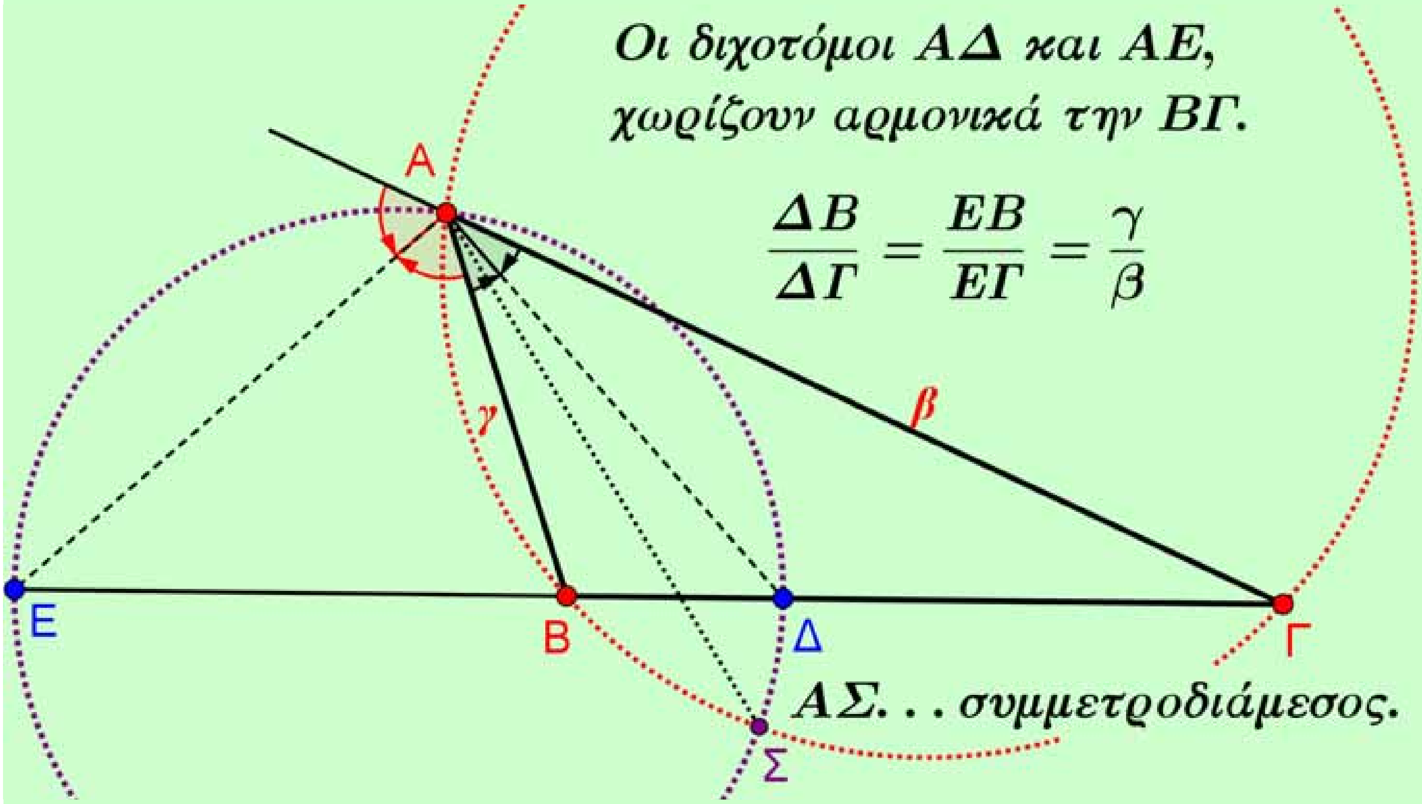
$$\frac{OA}{OB} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$a^2 + \beta^2 = 4OM^2$$

Αρμονική διαίρεση 5.

Οι διχοτόμοι ΑΔ και ΑΕ, χωρίζουν αρμονικά την ΒΓ.

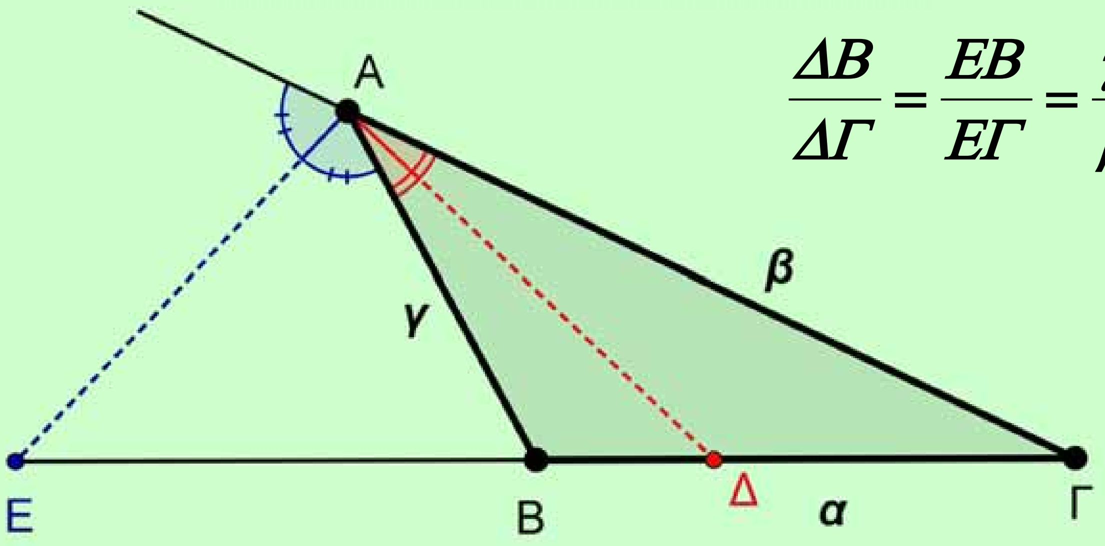
$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$$



ΑΣ. . . συμμετροδιάμεσος.

Θεώρημα Διχοτόμων.

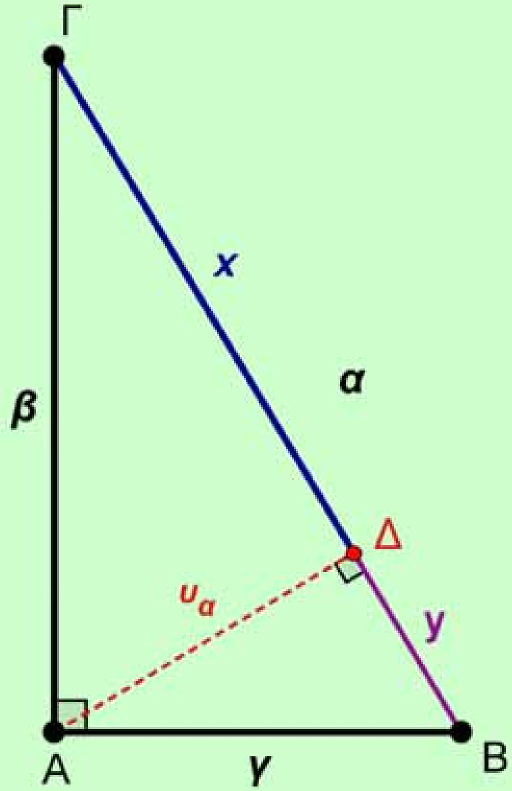
$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$$



$$\Delta B = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta + \gamma} \qquad \Delta \Gamma = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta + \gamma}$$

$$EB = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta - \gamma} \qquad E\Gamma = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta - \gamma}$$

Μετρικές Σχέσεις στο Ορθογώνιο.



$$\beta^2 = \alpha \cdot x$$

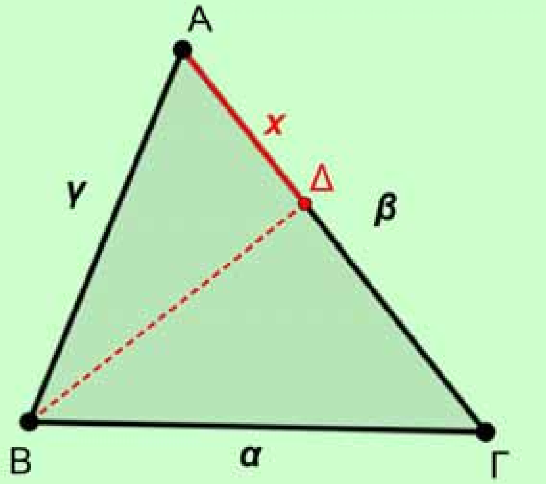
$$\gamma^2 = \beta \cdot y$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

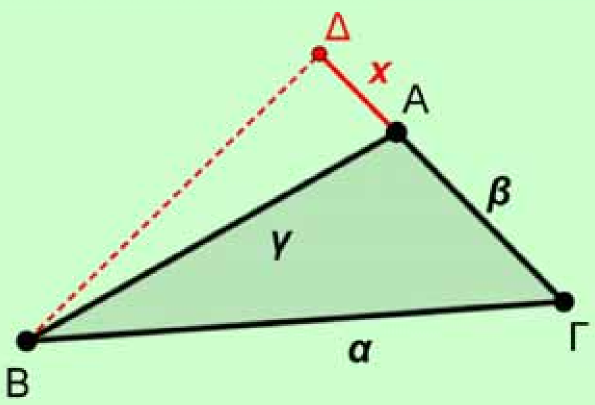
$$\upsilon_\alpha^2 = x \cdot y$$

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

Γενίκευση Πυθαγορείου.



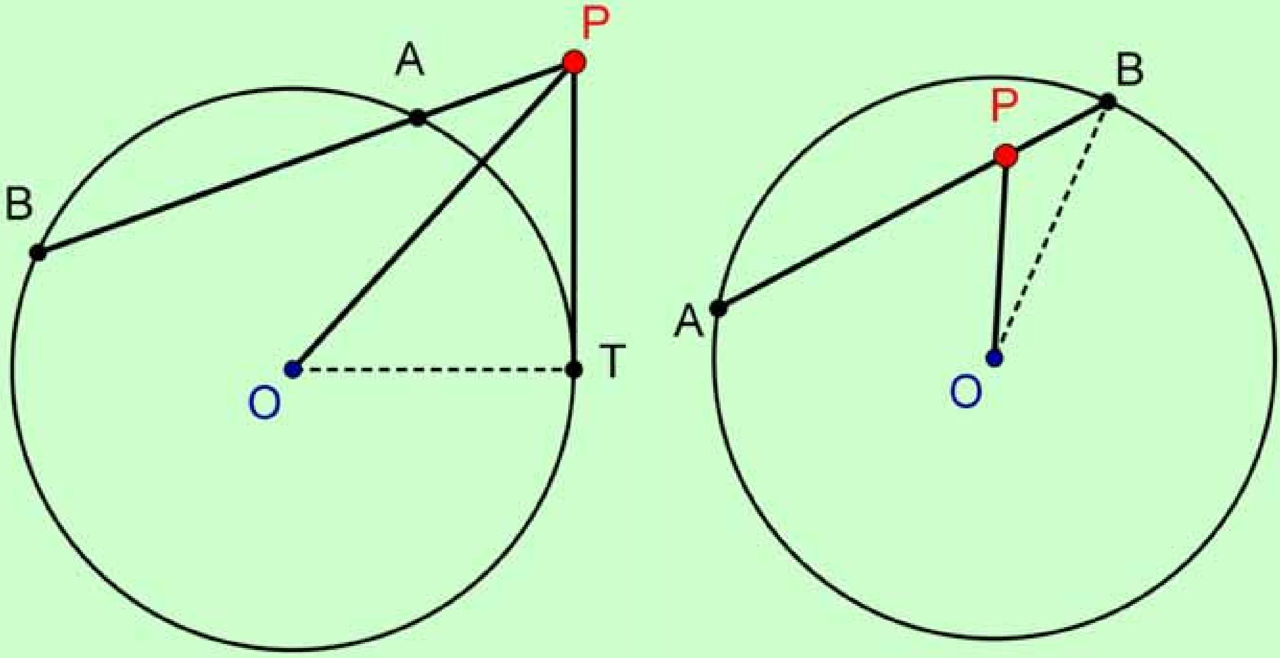
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot x$$



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot x$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \,\sigma\upsilon\nu A$$

Δύναμη Σημείου.

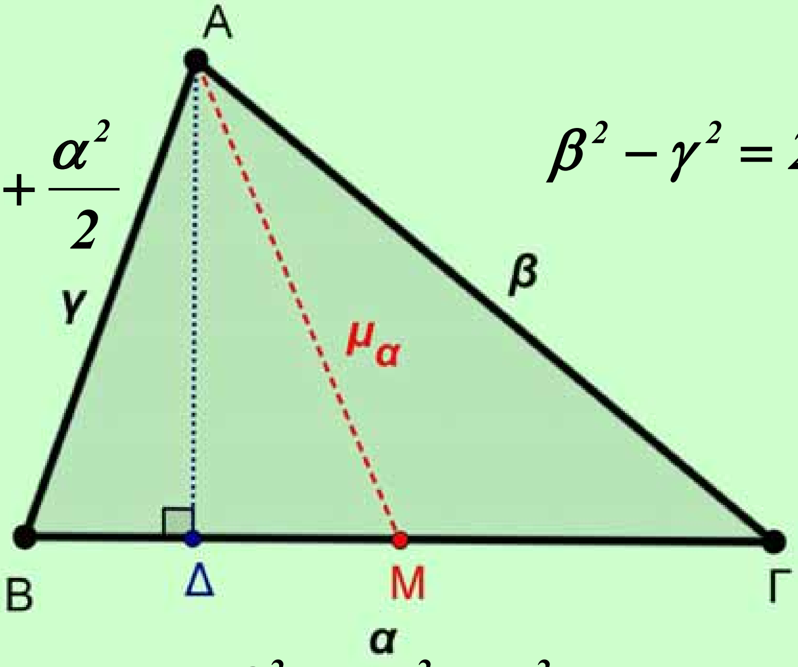


$$PA \cdot PB = OP^2 - R^2 = PT^2 \qquad PA \cdot PB = R^2 - OP^2$$

Θεωρήματα Διαμέσων.

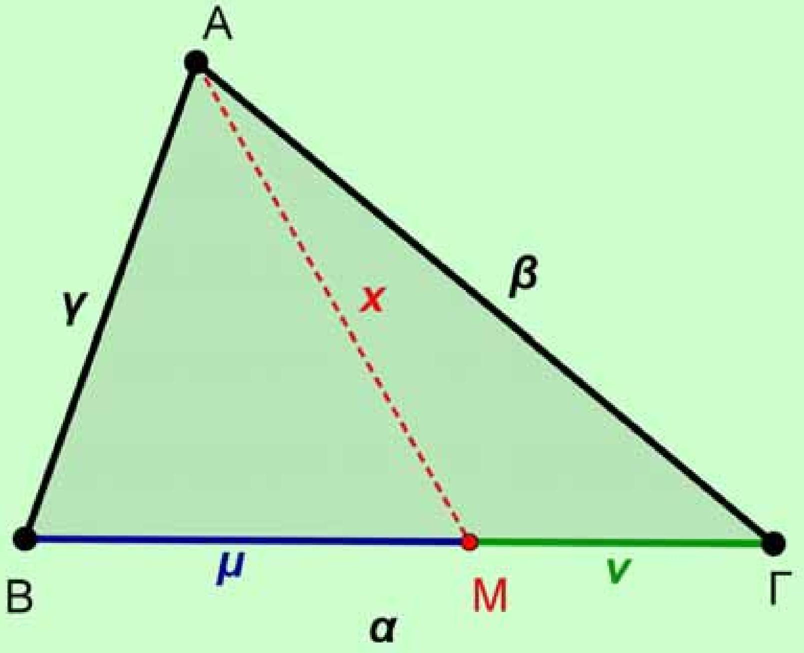
$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$$



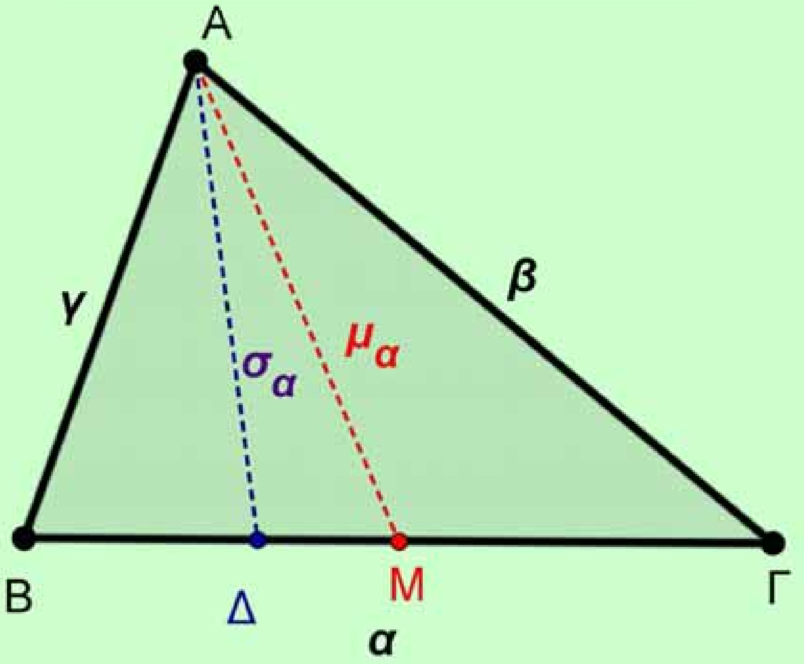
$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$$

Θεώρημα Stewart.



$$\mu \cdot \beta^2 + \nu \cdot \gamma^2 = \alpha \cdot x^2 + \alpha \cdot \mu \cdot \nu$$

Συμμετροδιάμεσοι.



$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \qquad \sigma_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}\mu_\alpha$$

Τύποι για το Εμβαδό Τριγώνου.

$$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2}\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma$$

$$E = \tau \cdot \rho \qquad E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

$$E = \rho_\alpha(\tau - \alpha) = \rho_\beta(\tau - \beta) = \rho_\gamma(\tau - \gamma)$$

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

Μετρικές Σχέσεις.

$$(OH)^2 = 9R^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$(OI)^2 = R(R - 2\rho)$$

$$(OI_\alpha)^2 = R(R + 2\rho_\alpha)$$

$$(OI_\beta)^2 = R(R + 2\rho_\beta)$$

$$(OI_\gamma)^2 = R(R + 2\rho_\gamma)$$

Μετρικές Σχέσεις.

$$\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma = 4R + \rho$$

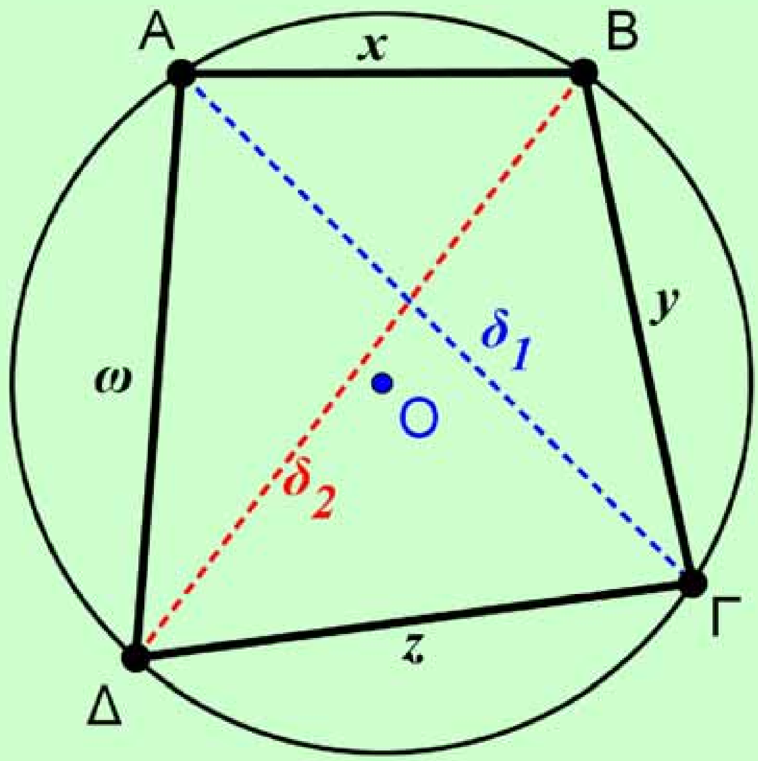
$$(OI)^2 + (OI_\alpha)^2 + (OI_\beta)^2 + (OI_\gamma)^2 = 12R^2$$

$$\delta_\alpha = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\cdot\gamma\cdot\tau(\tau-\alpha)}$$

$$\delta_\beta = \frac{2}{\alpha+\gamma}\sqrt{\alpha\cdot\gamma\cdot\tau(\tau-\beta)}$$

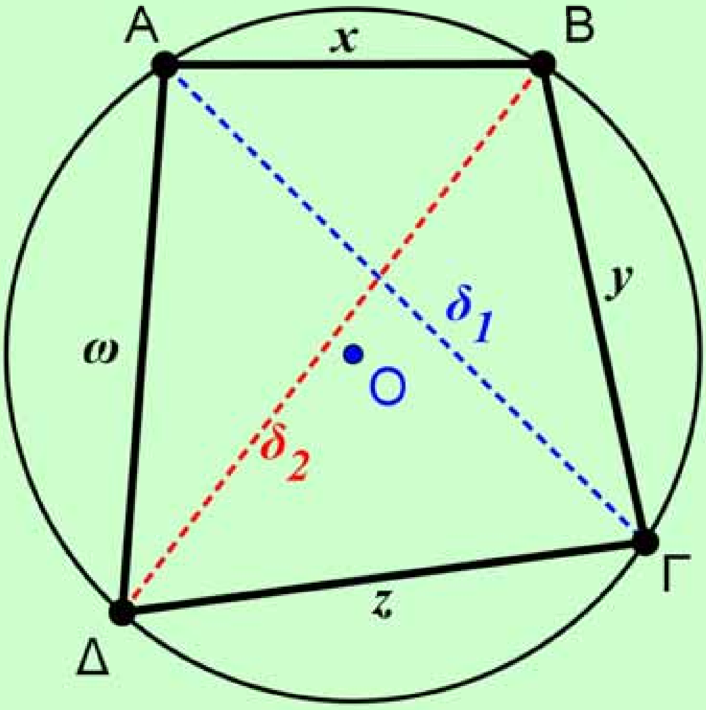
$$\delta_\gamma = \frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\cdot\beta\cdot\tau(\tau-\gamma)}$$

Θεώρημα Πτολεμαίου.



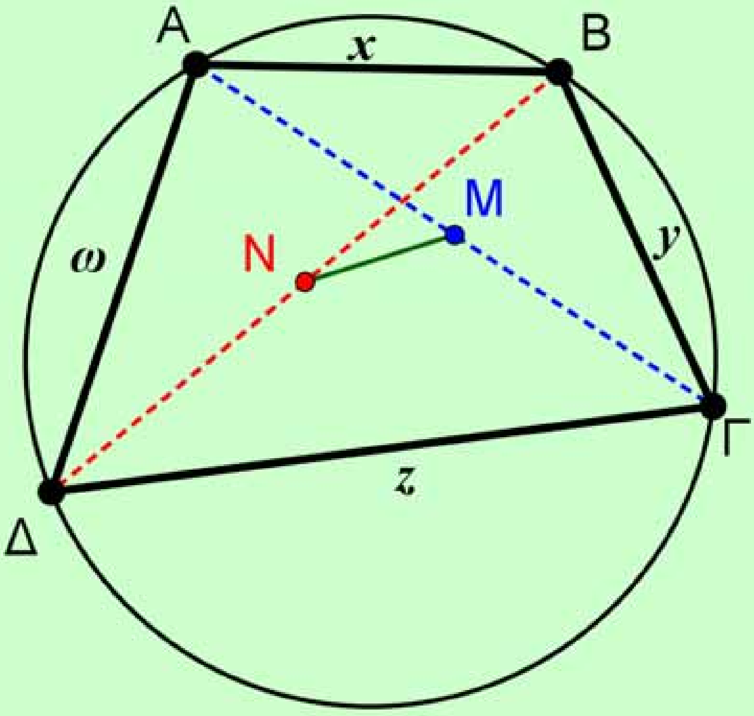
$$x\cdot y + z\cdot\omega = \delta_1\cdot\delta_2$$

Θεώρημα Viet.



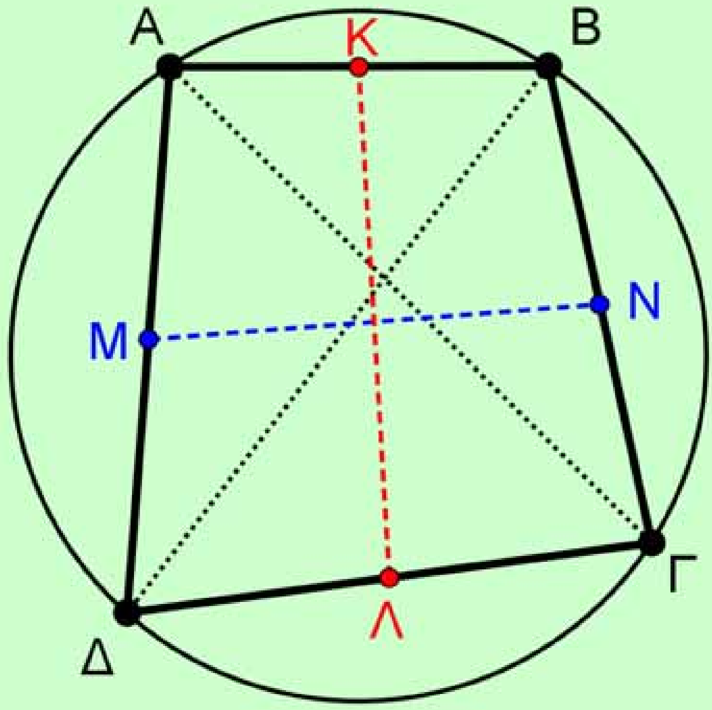
$$\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{x\cdot y+z\cdot \omega}{x\cdot \omega+y\cdot z}$$

Θεώρημα Euler 1.



$$x^2+y^2+z^2+\omega^2=(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2+4(MN)^2$$

Θεώρημα Euler 2.



$$2(K\Lambda)^2 + 2(MN)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2$$