



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
9 Νοεμβρίου 2019

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \frac{(-16)^5}{(-8)^5} + \frac{(-12)^5}{6^5} + 1 \right) \cdot \left( \frac{(-16)^3}{8^3} + \frac{(-12)^3}{(-6)^3} + 2019 \right).$$

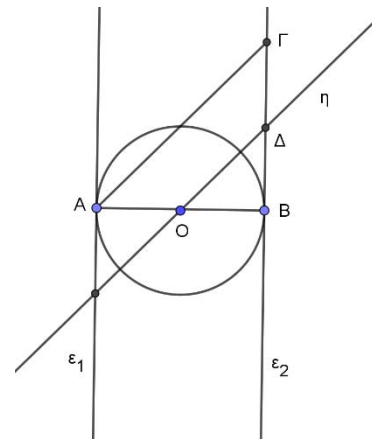
**Πρόβλημα 2**

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{3}$  των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{4}$  των χρημάτων που του είχαν μείνει και την τρίτη μέρα ξόδεψε το  $\frac{1}{5}$  των χρημάτων που του είχαν μείνει. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται κύκλος με διάμετρο  $AB$ , κέντρο  $O$  και οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  που είναι κάθετες στα άκρα  $A$  και  $B$  της διαμέτρου  $AB$ . Στην ευθεία  $\varepsilon_2$  παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία  $\eta$  να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Gamma$ . Η ευθεία  $\eta$  τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $OB\Delta$ .  
(β) Να αποδείξετε ότι το  $\Delta$  είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $B\Gamma$ .  
(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου  $AO\Delta\Gamma$ .



**Πρόβλημα 4**

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**9 Νοεμβρίου 2019**  
**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left( \left( \frac{(-32)^9}{4^9} + \frac{(-16)^9}{(-2)^9} \right) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot \left( \frac{(-10)^{10}}{2^{10}} - \left( -\frac{1}{5} \right)^{-10} + 100 \right).$$

**Πρόβλημα 2**

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιχνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

**Πρόβλημα 3**

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019}, \frac{2021}{2020}, \frac{2022}{2021}, \frac{3020}{3019}, \frac{3021}{3020}, \frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022}, \frac{4022}{4023}, \frac{5020}{5021}, \frac{5021}{5022}, \frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**Πρόβλημα 4**

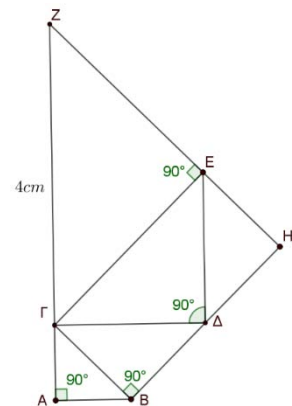
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ ,  $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ ,  $\widehat{E\hat{\Delta}\Gamma}$  και  $\widehat{Z\hat{E}\Gamma}$  είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι:  $AB = A\Gamma$ ,  $B\Gamma = B\Delta$ ,  $\Delta\Gamma = \Delta E$ ,  $E\Gamma = EZ$  και  $\Gamma Z = 4 \text{ cm}$ .

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
 Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10(\alpha^2 + \beta^2) = 29\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  και  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ .

**Πρόβλημα 2**

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο ώστε  $A\hat{B}\Gamma = 2 \cdot B\hat{\Gamma}A$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $B\hat{A}\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε  $AB = \Delta\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{B}\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $B\hat{A}\Gamma$ .

**Πρόβλημα 4**

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού  $\alpha$  για τις οποίες ο ρητός αριθμός

$$A = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4}$$
 είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**9 Νοεμβρίου 2019**

**Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1**

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων  $\alpha + \beta$  και  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ .

**Πρόβλημα 2**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{cases} xy^3 = -8 \\ (x+y)y = 2 \end{cases}.$$

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΓΖΗ.

**Πρόβλημα 4**

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$  για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda - 3)x^2 + (\lambda^2 + 1)x - (11\lambda - 18) = 0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους  $\sqrt{17}$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες*  
*Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**9 Νοεμβρίου 2019**

**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1**

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$108(x-2)^4 + (4-x^2)^3 = 0 .$$

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Παίρνουμε σημείο  $\Delta$  πάνω στην πλευρά  $AB$  και σημείο  $E$  πάνω στην πλευρά  $B\Gamma$  έτσι ώστε οι ευθείες  $DE$  και  $A\Gamma$  να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της  $DE$  προς το μέρος του  $E$  παίρνουμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $EZ = A\Delta$ . Αν  $O$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $\Delta BE$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $O, Z, A$  και  $\Delta$  ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

**Πρόβλημα 3**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: 
$$\begin{cases} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{cases} .$$

**Πρόβλημα 4**

Με  $k$  διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς  $2, 3, 4, \dots, 1024$  έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του  $k$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες*  
*Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*