ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36$^{\eta}$ Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Η ακολουθία α_ν έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1},\ \nu \geq 2.$$

Να υπολογίσετε το γενικό όρο α_ν και να βρείτε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον όρο a_k, όπου $k = 2^{2019}$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)
Σύμφωνα με τον ορισμό της ακολουθίας έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1\\
\alpha_2 &= 5\alpha_1 + 3\\
\alpha_3 &= 5\alpha_2 + 3^2\\
\alpha_4 &= 5\alpha_3 + 3^3\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\alpha_{\nu-1} &= 5\alpha_{\nu-2} + 3^{\nu-2}\\
\alpha_\nu &= 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
5^{\nu-1}\alpha_1 &= 5^{\nu-1}\\
5^{\nu-2}\alpha_2 &= 5^{\nu-1}\alpha_1 + 5^{\nu-2}\cdot 3\\
5^{\nu-3}\alpha_3 &= 5^{\nu-2}\alpha_2 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2\\
5^{\nu-4}\alpha_4 &= 5^{\nu-3}\alpha_3 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3\\
&\dots\dots\dots\dots\\
5\alpha_{\nu-1} &= 5^2\alpha_{\nu-2} + 5\cdot 3^{\nu-2}\\
\alpha_\nu &= 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1}
\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\substack{\text{πρόσθεση}\\ \text{κατά μέλη}}}$$

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1} + 5^{\nu-2}\cdot 3 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3 + \dots + 5\cdot 3^{\nu-2} + 3^{\nu-1} = \frac{5^\nu - 3^\nu}{5-3} = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),$$

για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$.

Διαφορετικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1}\cdot\left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{\nu-1}\right] = 5^{\nu-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^\nu}{1-\frac{3}{5}}$$

$$= 5^{\nu-1}\cdot\frac{5}{2\cdot 5^\nu}\left(5^\nu - 3^\nu\right) = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),\ \text{για κάθε } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Επομένως έχουμε: $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right)$, για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Για την εύρεση του γενικού όρου, εναλλακτικά μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:
Από τον ορισμό της ακολουθίας διαπιστώνουμε ότι:

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{2}\left(5-3\right),\ \alpha_2 = 5\cdot 1 + 3 = 8 = \frac{1}{2}\left(5^2 - 3^2\right),\ \alpha_3 = 5\cdot 8 + 3^2 = 49 = \frac{1}{2}\left(5^3 - 3^3\right),..$$

Ισχυριζόμαστε ότι πρέπει να ισχύει $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right)$, για κάθε $\nu = 1,2,3,\ldots$, το οποίο αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή.

Τώρα για $k = 2^{2019}$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων, έχουμε

$$2a_k = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}} = 2\cdot(5+3)(5^2+3^2)\ldots(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}),$$

οπότε

$$a_k = (5+3)(5^2+3^2)\ldots(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}).$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι εκτός από την πρώτη παρένθεση που διαιρείται από 8, όλες οι άλλες παρενθέσεις διαιρούνται από το 2 αλλά όχι από το 4.

Πράγματι, ισχύει ότι: $5^{2^\nu} \equiv 1\left(\bmod 4\right)$ και $3^{2^\nu} \equiv 1\left(\bmod 4\right) \Rightarrow 5^{2^\nu} + 3^{2^\nu} \equiv 2\left(\bmod 4\right)$, για κάθε $\nu \geq 1$.

Οι παρενθέσεις από το $5^2 + 3^2$ μέχρι το $(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}})$, είναι συνολικά 2018, οπότε η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον αριθμό είναι $2^3 \cdot \underbrace{2^1 \cdot \ldots \cdot 2^1}_{2018\ \textit{το πλήθος}} = 2^{2021}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει μία ειδική μορφή του λήμματος ανύψωσης του εκθέτη (Lifting the Exponent Lemma) το οποίο αφορά το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του 2 που διαιρεί μία διαφορά δυνάμεων με βάσεις ακέραιους. Σημειώνουμε με $\upsilon_p\left(\alpha\right)$ το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του πρώτου θετικού ακέραιου p που διαιρεί τον ακέραιο α, δηλαδή ισχύει ότι: $p^{\upsilon_p(a)} \mid \alpha$ *και* $p^{\upsilon_p(a)+1}$ δεν διαιρεί το α.

Λήμμα: Έστω α, β δύο περιττοί ακέραιοι και ν ένας άρτιος θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει ότι:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu - \beta^\nu\right) = \upsilon_2\left(\alpha - \beta\right) + \upsilon_2\left(\alpha + \beta\right) + \upsilon_2\left(\nu\right) - 1$$

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι το τετράγωνο περιττού ακέραιου είναι της μορφής $4\kappa + 1$, οπότε ο ακέραιος 4 διαιρεί τη διαφορά $\alpha^2 - \beta^2$. Αν ο ν γράφεται στη μορφή $\nu = \mu \cdot 2^\kappa$, τότε:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu - \beta^\nu\right) = \upsilon_2\left(\alpha^{\mu\cdot 2^\kappa} - \beta^{\mu\cdot 2^\kappa}\right) = \upsilon_2\left(\left(\alpha^2\right)^{2^\kappa} - \left(\beta^2\right)^{2^\kappa}\right) =$$

$$\ldots = \upsilon_2\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + \kappa - 1 = \upsilon_2\left(\alpha - \beta\right) + \upsilon_2\left(\alpha + \beta\right) + \upsilon_2\left(\nu\right) - 1.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα για τον ακέραιο $2a_{2^{2019}} = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}$ λαμβάνουμε:

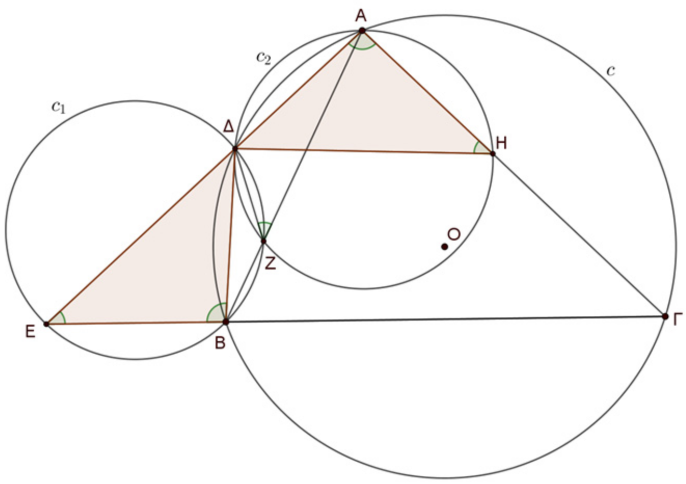
$$\upsilon_2\left(2a_{2^{2019}}\right) = \upsilon_2\left(5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}\right) = \upsilon_2\left(5-3\right) + \upsilon_2\left(5+3\right) + \upsilon_2\left(2^{2019}\right) - 1 = 1 + 3 + 2019 - 1 = 2022,$$

οπότε τελικά έχουμε: $\upsilon_2\left(a_k\right) = 2021$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ} < \text{ΒΓ}$ και έστω Δ το μέσο του μικρού τόξου $\widehat{\text{ΑΒ}}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΕ (έστω c_1) τέμνει την ΑΒ (για δεύτερη φορά) στο σημείο Ζ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΖ (έστω c_2) τέμνει (για δεύτερη φορά) την ΑΓ στο σημείο Η να αποδείξετε ότι $\text{ΒΕ} = \text{ΑΗ}$.

Λύση (1^ος^ τρόπος)



Σχήμα 1

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΓ έχουμε ότι:

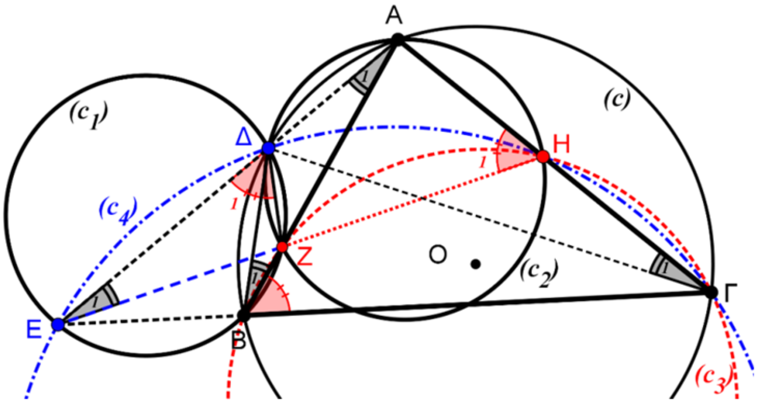
$$\Delta\hat{A}H = \Delta\hat{B}E \qquad (1)$$

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΕΒΖ και ΑΔΖΗ προκύπτουν οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{E}B = \Delta\hat{Z}A = A\hat{H}\Delta \qquad (2)$$

Επειδή το Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ, έπεται ότι: $A\Delta = \Delta B$. Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) και την ισότητα $A\Delta = \Delta B$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΔΕΒ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τις πλευρές ΒΕ και ΑΗ ίσες.

2^ος^ τρόπος



Σχήμα 2

Εφόσον το σημείο Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους διότι η (κοινή) χορδή ΔΖ φαίνεται υπό ίσες γωνίες $(\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1)$.

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι τα τμήματα ΒΕ, ΑΗ (που είναι χορδές των ίσων κύκλων (c_1) και (c_2)) είναι ίσα μεταξύ τους, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες, δηλαδή ότι $\widehat{\mathrm{BZE}} = \widehat{\mathrm{AZH}}$ ή ότι τα σημεία Ε, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το σημείο Ζ είναι το σημείο Miquel του τριγώνου, ως σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων ΒΕΔ, ΑΗΔ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Αυτό προκύπτει εύκολα και από ισότητες γωνιών.

Θεωρούμε τώρα τους κύκλους (c), (c_2) και (c_3). Οι κοινές χορδές τους συντρέχουν στο ριζικό τους κέντρο. Οι κοινές χορδές τους όμως είναι οι ΑΔ, ΖΗ, ΒΓ, οπότε αυτές συντρέχουν. Έπεται ότι η ΖΗ περνά από το σημείο Ε, που είναι το ζητούμενο.

Εναλλακτικά μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση του σημείου Miquel ως εξής. Έχουμε

$$\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma \overset{\text{εξωτερική στο ΒΖΔΕ}}{=} \mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} \overset{\text{εξωτερική στο ΑΔΖΗ}}{=} \mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z},$$

οπότε το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Από το θεώρημα της δύναμης σημείου Ε ως προς κύκλο (c) έχουμε $\mathrm{EB}\cdot\mathrm{E\Gamma} = \mathrm{E\Delta}\cdot\mathrm{EA}$

Όμως το αριστερό μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_3) και το δεξί μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_2). Έπεται ότι το Ε ανήκει στον ριζικό άξονα αυτών των δύο κύκλων, που είναι η κοινή τους χορδή ΖΗ, δηλαδή το Ε ανήκει ΖΗ, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ρητών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση

$$yx^y = y+1$$

Λύση

Θέτουμε $y = \frac{p}{q}$, σε ανάγωγη μορφή με $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$x^{\frac{p}{q}} = \frac{y+1}{y} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}} = \frac{p+q}{p},$$

Και υψώνοντας και τα δύο μέλη στην $\frac{q}{p}$ παίρνουμε:

$$x = \sqrt[p]{\frac{(p+q)^q}{p^q}}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι ρητός, θα πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το δεξί μέλος. Επιπλέον $(p+q,p)=1$, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι τέλειες p δυνάμεις. Άρα πρέπει

$$p+q=a^p \quad \kappa\alpha\iota \quad p=b^p\,, \quad a,b\in\mathbb{N}^*, a>1$$

Αν όμως $b\geq 2$, έχουμε ότι $b^p\geq 2^p>p$, οπότε πρέπει $b=1$, άρα $p=1$ και $q=a-1$. Επομένως τα ζεύγη λύσεων δίνονται παραμετρικά

$$(x,y)=\left(a^{a-1},\,\frac{1}{a-1}\right),\; a\in\mathbb{N}^*, a>1\,.$$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ορθογώνιο $\nu\times\mu$, με $\nu\leq\mu$, το οποίο υποδιαιρούμε με παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του σε $\nu\mu$ μοναδιαία τετράγωνα. Αρχικά τοποθετούμε από ένα μαύρο πιόνι σε N μοναδιαία τετράγωνα και στη συνέχεια προσπαθούμε να γεμίσουμε τον πίνακα με μαύρα πιόνια εκτελώντας την παρακάτω επιτρεπόμενη κίνηση:

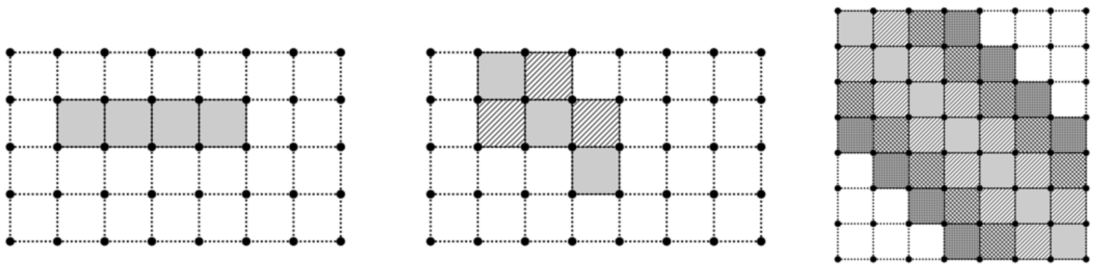
Αν ένα κενό μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με δύο τουλάχιστον μοναδιαία τετράγωνα κατειλημμένα με μαύρο πιόνι, τότε τοποθετούμε και σε αυτό το μοναδιαίο τετράγωνο ένα μαύρο πιόνι.

Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού N των μαύρων πιονιών που πρέπει και αρκεί να υπάρχουν σε μία αρχική τοποθέτηση, έτσι ώστε μετά από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών εφαρμογών της επιτρεπόμενης κίνησης να γεμίσει το ορθογώνιο με μαύρα πιόνια.

Λύση

Αριθμούμε τις γραμμές του ορθογωνίου από το 1 μέχρι το ν και τις στήλες από το 1 μέχρι το μ .

Για $\nu=\mu$ το ορθογώνιο είναι τετράγωνο $\nu\times\nu$, ενώ για $\nu<\mu$ το ορθογώνιο αποτελείται από ένα τετράγωνο $\nu\times\nu$ και από ένα ορθογώνιο $\nu\times(\mu-\nu)$. Παρατηρούμε ότι δύο διπλανά τετράγωνα της ίδιας γραμμής ή της ίδιας στήλης με μαύρα πιόνια δεν δίνουν την δυνατότητα πλήρωσης κάποιου άλλου μοναδιαίου τετραγώνου. Όταν όμως είναι διαδοχικά στην ίδια μεγάλη ή μικρή διαγώνιο τότε δίνουν τη δυνατότητα πλήρωσης δύο μοναδιαίων τετραγώνων, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 2(α) Σχήμα 2(β) Σχήμα 2(γ)

Έτσι για την περίπτωση με $\nu=\mu$, αν τοποθετήσουμε στη κύρια διαγώνιο του τετραγώνου ν μαύρα πιόνια, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι με διαδοχικές κινήσεις μπορούμε να γεμίσουμε το τετράγωνο με μαύρα πιόνια.

Αν υποθέσουμε ότι $\nu < \mu$, τότε στο $\nu \times \nu$ τετράγωνο τοποθετούνε ξανά στη διαγώνιο τα ν μαύρα πιόνια, οπότε μπορούμε να γεμίσουμε το $\nu \times \nu$ τετράγωνο με μαύρα πιόνια. Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\mu-\nu$ περιττός, δηλαδή αν οι μ, ν είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+1-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι. Με αυτό το τετράγωνο μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια. Κάνουμε το ίδιο και για τα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+3), \ldots, (\nu, \nu+2\kappa-1)$ και σταματάμε όταν: $\nu+2\kappa-1=\mu \Leftrightarrow \mu-\nu=2\kappa-1$. Έτσι έχουμε τοποθετήσει μαύρα πιόνια στα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+2\kappa-1)$, για $\kappa=1,2\ldots,\frac{\mu-\nu+1}{2}$ Τότε είναι εύκολο να γεμίσουμε τα ενδιάμεσα τετράγωνα της $\nu-$οστής γραμμής με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu+\frac{\mu-\nu+1}{2}=\frac{\mu+\nu+1}{2}.$$
- Αν $\mu-\nu$ άρτιος, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+2\kappa-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι, για $\kappa=1,2,\ldots,\frac{\mu-\nu}{2}$. Με αυτά τα τετράγωνα μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu+\frac{\mu-\nu}{2}=\frac{\mu+\nu}{2}.$$

Για τις δύο περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό των μαύρων πιονιών που χρησιμοποιήσαμε στην ενιαία μορφή
$$\left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor.$$
Επομένως ο ελάχιστος δυνατός αριθμός N πιονιών που απαιτείται για το γέμισμα του πίνακα με μαύρα πιόνια είναι:
$$\mathrm{N} \leq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor. \qquad (1)$$

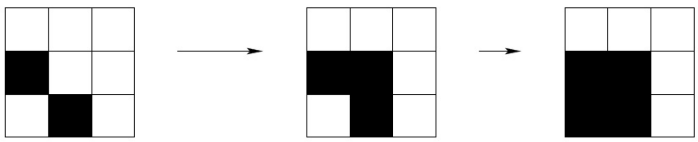
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο παραπάνω αριθμός N είναι και αναγκαίος για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος. Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$\mathrm{N} \geq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor \qquad (2)$$
Ονομάζουμε μία πλευρά ενός μοναδιαίου τετραγώνου **ασπρόμαυρη**, αν είναι πλευρά ενός μόνο μοναδιαίου τετραγώνου που έχει μαύρο πιόνι. Για παράδειγμα ασπρόμαυρες είναι όλες οι πλευρές μοναδιαίων τετραγώνων που βρίσκονται πάνω στις πλευρές του δεδομένου ορθογωνίου. Υποθέτουμε ότι μία αρχική τοποθέτηση μαύρων πιονιών στα μοναδιαία τετράγωνα περιέχει Ν μαύρα πιόνια. Τότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ασπρόμαυρων πλευρών είναι 4Ν.

Σε κάθε κίνηση που εκτελούμε, αν το μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με $\kappa \geq 2$ μοναδιαία τετράγωνα που έχουν μαύρα πιόνια, τότε στο τετράγωνο αυτό τοποθετείται μαύρο πιόνι και δημιουργούνται $4-\kappa$ ασπρόμαυρες πλευρές. Επειδή $4-\kappa \leq \kappa$, ο αριθμός των ασπρόμαυρων τετραγώνων δεν αυξάνει. Όμως σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τα ασπρόμαυρες πλευρές του ορθογωνίου που υπάρχουν στις πλευρές του ορθογωνίου, ακόμα και όταν όλα τα μοναδιαία τετράγωνα αποκτήσουν μαύρο πιόνι, και συνολικά είναι $2(\nu+\mu)$, δηλαδή πρέπει: $4\mathrm{N} \geq 2(\nu+\mu) \Rightarrow \mathrm{N} \geq \dfrac{\mu+\nu}{2}$. Επειδή ο N είναι ακέραιος, πρέπει $\mathrm{N} \geq \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

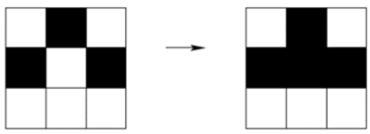
Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\mathrm{N} = \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

2ος τρόπος:

Θα ονομάζουμε το σύνολο όλων των μαύρων τετραγώνων «μαύρη περιοχή». Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν ένα λευκό τετράγωνο έχει τουλάχιστον δύο μαύρα γειτονικά τετράγωνα, τότε μετά την επιτρεπόμενη κίνηση η περίμετρος της μαύρης περιοχής δεν μειώνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Στο παραπάνω σχήμα αυτό η περίμετρος της μαύρης περιοχής παραμένει ίσο με 8 μετά τις δύο κινήσεις.



Στο παραπάνω σχήμα η περίμετρος στην αρχή είναι 12 και στη συνέχεια γίνεται 10, δηλαδή μειώνεται κατά 2.

Αν λοιπόν έχουμε στην αρχή N μαύρα τετράγωνα, τότε η αρχική περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι το πολύ $4\mathrm{N}$. (Είναι ακριβώς $4\mathrm{N}$ όταν δεν υπάρχουν γειτονικά μαύρα τετράγωνα). Αν λοιπόν στο τέλος το ορθογώνιο έχει μόνο μαύρα τετράγωνα, η περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι η περίμετρος του ορθογωνίου, δηλαδή $2\mu+2\nu$.

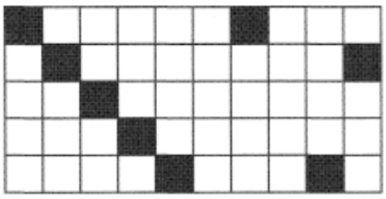
Οπότε από τη βασική παρατήρηση στην αρχική θα έχουμε:

$$4\mathrm{N} \geq \textit{αρχική περίμετρος} \geq \textit{τελική περίμετρος} = 2\mu+2\nu$$

Έπεται ότι, $\mathrm{N} \geq \dfrac{\mu+\nu}{2}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, θα έχουμε $\mathrm{N} \geq \left\lceil \dfrac{\mu+\nu}{2} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$. Θα αποδείξουμε ότι πάντα γίνεται με $\left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε αυτή θα είναι και η ελάχιστη τιμή.

Για το παράδειγμα, τοποθετούμε ν μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του $\nu \times \nu$ τετραγώνου πάνω αριστερά. Στο ορθογώνιο που μένει αφήνουμε την πρώτη στήλη άδεια, στη δεύτερη βάζουμε κάπου ένα μαύρο τετράγωνο, αφήνουμε την επόμενη στήλη άδεια κοκ, μέχρι να φτάσουμε στην τελευταία στήλη όπου βάζουμε οπωσδήποτε ένα μαύρο τετράγωνο. Τοποθετούμε με αυτόν τον τρόπο άλλα $\left\lfloor \dfrac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε συνολικά $\nu + \left\lfloor \dfrac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$, που είναι το ζητούμενο πλήθος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παράδειγμα σε ένα ορθογώνιο 5×10, όπου τοποθετήσαμε 5 μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του 5×5 τετραγώνου, αφήσαμε μία στήλη κενή, στην επόμενη βάλαμε ένα μαύρο και στην συνέχεια τοποθετήσαμε και στην τελευταία.



Μένει να δικαιολογήσουμε ότι με την παραπάνω τοποθέτηση που προτείναμε, μετά από πεπερασμένες κινήσεις, όλο το ορθογώνιο θα έχει μαύρα τετράγωνα. Πράγματι, στην αρχή η κύρια διαγώνιος του $\nu \times \nu$, βήμα-βήμα κάνει μαύρα όλα τα τετράγωνα του $\nu \times \nu$ τετραγώνου και στη συνέχεια με τη βοήθεια των μαύρων που έχουμε τοποθετήσει σε στήλη παρά στήλη, κάνουν όλες τις υπόλοιπες στήλες μαύρες.