



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ

ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

Μαΐος 2015

Αφιέρωμα 32η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2015



Official Participants

-  Albania
-  Bosnia and Herzegovina
-  Bulgaria
-  Cyprus
-  Former Yugoslav Republic of Macedonia
-  Hellas
-  Montenegro
-  Republic of Moldova
-  Romania
-  Serbia
-  Turkey

Invited Guests

- Azerbaijan 
- Hellas B 
- Independent team from Iran 
- Italy 
- Kazakhstan 
- Kyrgyzstan 
- Saudi Arabia 
- Tajikistan 
- Turkmenistan 
- Republic of Ireland 
- United Kingdom 



32nd Balkan Mathematical Olympiad

Athens May 3-8 2015 Hellas

32nd BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2015

Date and place

The Balkan Mathematical Olympiad 2015 will be held
from **May 3rd** to **May 8th** in **Athens, Hellas**.

**Organized by
HELLENIC MATHEMATICAL SOCIETY**

32η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2015

Χρόνος και Τόπος

Η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2015 πραγματοποιήθηκε από 3 έως 8 Μαΐου στην Αθήνα.

**Διοργανώθηκε από την
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

**Μήνυμα καλωσορίσματος από τον
Dr Γρηγόρη Α. Μακρίδη
Πρόεδρο της Μαθηματικής Εταιρείας της Νοτιοανατολικής Ευρώπης**

Αγαπητοί Συνάδελφοι, αγαπητοί μαθητές

Με μεγάλη χαρά και ικανοποίηση απευθύνομαι σε σας με την ευκαιρία της 32^{ης} Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας 2015 που διοργανώνεται από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Με την ιδιότητα του Προέδρου της Μαθηματικής Εταιρείας της Νοτιοανατολικής Ευρώπης θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμησή μου για τη μεγάλη συμμετοχή μαθητών τόσο από τις χώρες της περιοχής των Βαλκανίων όσο και από άλλες χώρες. Η συνάντηση τόσο πολλών νέων από διαφορετικές χώρες παρέχει τη δυνατότητα ανταλλαγής ιδεών και δημιουργεί παρακαταθήκη ενός καλύτερου μέλλοντος για τους λαούς μας.

Τα Μαθηματικά υπήρξαν, στο πέρασμα του χρόνου, η βάση του επιστημονικού ορθολογισμού και το εργαλείο κλειδί για την προώθηση της ανάπτυξης. Η συμμετοχή σε τέτοιους διαγωνισμούς δημιουργεί τις προϋποθέσεις για αυξημένη συμβολή των Μαθηματικών στην κοινωνία κυρίως στον τομέα των καινοτομιών και της δημιουργίας νέων ευκαιριών. Αυτό γίνεται πιο σημαντικό στις μέρες μας με τη σοβαρή οικονομική κρίση που μαστίζει την κοινωνία. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία με την πολύπλευρη και πλούσια δράση της ανταποκρίνεται επάξια στις απαιτήσεις αυτές.

Αγαπητοί μαθητές,

Θα ήθελα να εκφράσω μέσα από την καρδιά μου τα συγχαρητήριά μου για τις προσπάθειές σας όπως και για την επιτυχία σας να συμμετέχετε και να διακριθείτε στην 32^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα. 2015.

Η Μαθηματική Εταιρεία της Νοτιοανατολικής Ευρώπης υποστηρίζει με κάθε δυνατό τρόπο αυτές τις αξιέπαινες προσπάθειες και δράσεις.

Ευχαριστίες και συγχαρητήρια αξίζουν στους καθηγητές σας που σας καθοδηγούν και σας εμπνέουν, καθώς επίσης και στους γονείς σας που σας κατευθύνουν και σας ενθαρρύνουν σε αυτό το εγχείρημα.

Με αυτές τις σκέψεις σας χαιρετώ και συγχαίρω τους διοργανωτές και τους συμμετέχοντες μαθητές. Σας εύχομαι κάθε επιτυχία.

Σας ευχαριστώ,

**Μήνυμα καλωσορίσματος από τον
Καθηγητή Νικόλαο Αλεξανδρή
Πρόεδρο της Οργανωτικής Επιτροπής της ΒΜΟ 2015**

Εκ μέρους της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και της Οργανωτικής Επιτροπής της 32^{ης} Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας έχω τη χαρά και την τιμή να καλωσορίσω ομάδες από τις Βαλκανικές χώρες και προσκεκλημένες ομάδες από χώρες της Ευρώπης και της Ασίας στην 32^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα που πραγματοποιείται εδώ στην Αθήνα.

Αισθανόμαστε ευτυχείς που φιλοξενούμε φέτος στη χώρα μας, τη χώρα μεγάλων μαθηματικών και φιλοσόφων όπως ο Θαλής, ο Πυθαγόρας, ο Πλάτωνας, ο Αριστοτέλης, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ένα γεγονός μεγάλου κύρους όπως η 32^η ΒΜΟ. Αισθανόμαστε ότι τιμούμε με αυτόν τον τρόπο τη βαριά μαθηματική μας κληρονομιά.

Η Ελλάδα είναι μια χώρα με μεγάλη Ιστορία και σημαντικούς αρχαιολογικούς χώρους, κάποιους από τους οποίους θα έχετε τη δυνατότητα να επισκεφθείτε. Η Αθήνα ειδικότερα θυμίζει στον καθένα τα ιδανικά της δημοκρατίας η οποία άνθισε κατά τον 5^ο π.Χ. αιώνα.

Τα Μαθηματικά βέβαια είναι ο βασικός λόγος που συγκεντρωθήκαμε εδώ στην Αθήνα. Αλλά ακόμη θα έχετε την ευκαιρία και να περάσετε αλησμόνητες στιγμές.

Η Οργανωτική Επιτροπή εργάστηκε σκληρά να εξομαλύνει όποιες δυσκολίες προκύψουν κατά την παραμονή σας στην Ελλάδα. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να έχετε εμπιστοσύνη στην παραδοσιακή Ελληνική φιλοξενία. Στην αρχαιότητα υπήρχε ένας θεός, ο θεός της φιλοξενίας, ο Ξένιος Δίας και βασιζόμαστε στη βοήθειά του!

Εκ μέρους της Ελληνικής Μαθηματικής Κοινότητας εκφράζω τις ευχαριστίες μου στο Υπουργείο Πολιτισμού, Παιδείας και Θρησκευμάτων, την Περιφέρεια Αττικής, το Δήμο Παλαιού Φαλήρου και όλους τους χορηγούς της ΒΜΟ.

Πολλές ευχαριστίες στους εθελοντές, τους μαθηματικούς και σε όλους όσους βοήθησαν με οποιοδήποτε τρόπο στη διοργάνωση αυτής της Ολυμπιάδας.

Σας καλωσορίζω μέσα από την καρδιά μου, για ακόμη μια φορά, και σας εύχομαι να περάσετε καλά στη ΒΜΟ 2015.

ΔΕΛΤΙΟ ΤΥΠΟΥ

Αθήνα, 7 Μαΐου 2015
Αρ. Πρωτ. 15344/7-5-2015

Ένα Χρυσό και πέντε Χάλκινα Μετάλλια στην 32η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Ολοκληρώνεται σήμερα με την Τελετή Απονομής των μεταλλίων η 32η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα που διοργανώνεται φέτος με επιτυχία στην Αθήνα στις 3 - 8 Μαΐου 2015 από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία με τη συμμετοχή έντεκα ομάδων από χώρες της Νοτιοανατολικής Ευρώπης με παράδοση στα μαθηματικά, καθώς και εννέα φιλοξενούμενες χώρες από την Ευρώπη και την Ασία..

Η Ελληνική αποστολή κατέκτησε ένα χρυσό και πέντε χάλκινα μετάλλια.

Συγκεκριμένα:

Ντούνης Πέτρος	Αθήνα	Χρυσό Μετάλλιο
Μελάς Δημήτριος	Αθήνα	Χάλκινο Μετάλλιο
Μισιακός Παναγιώτης	Αθήνα	Χάλκινο Μετάλλιο
Χαχαμης Νεστορας	Αιτωλοακαρνανία	Χάλκινο Μετάλλιο
Καρατζά Παναγιώτα	Βέροια	Χάλκινο Μετάλλιο
Τσιντσιλίδας Δημήτριος	Δράμα	Χάλκινο Μετάλλιο

Όλα τα αποτελέσματα στον σύνδεσμο: <http://www.hms.gr/32bmo2015/main.htm>

Συνοδοί των μαθητών ήταν οι Μαθηματικοί κ. Αγγελική Βλάχου και Ευάγγελος Ζώτος.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συγχαίρει την Ελληνική αποστολή. Τα αποτελέσματα αυτά δικαιώνουν τις προσπάθειες της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας στη χώρα μας, δείχνουν τις δυνατότητες των Ελλήνων μαθητών και ενισχύουν την ελπίδα μας για ένα καλύτερο αύριο.

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος
Νικόλαος Αλεξανδρής
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιά

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής
Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΕΠΙΤΡΟΠΕΣ 32^{ης} Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (BMO) 2015

BMO –2015 Οργανωτική Επιτροπή

Αλεξάνδρης Νικόλαος, Πρόεδρος

Βαρόπουλος Δημοσθένης
Βλάμος Παναγιώτης
Γεωργούδη Μαρία
Δρούτσας Παναγιώτης
Ιατρού Δέσποινα
Κρητικός Εμμανουήλ
Μαλαφέκας Αθανάσιος

Μαραγκάκης Στυλιανός
Μπακάλης Αναστάσιος
Παπαναστασίου Νικόλαος
Σωτήρος Δημήτριος
Στεφανής Παναγιώτης
Τριανταφύλλου Ανδρέας
Τυρλής Ιωάννης
Χριστόπουλος Παναγιώτης

Επιτροπή Κριτών

Μπόλης Θεόδωρος, Πρόεδρος

Φελλούρης Ανάργυρος, Αντιπρόεδρος
Korliku Fatos, Αλβανία
Radovic Jelena, Βοσνία Ερζεγοβίνη
Kortezov Ivaylo Stefanov, Βουλγαρία
Timotheou Savvas, Κύπρος
Vesna Manova-Erakovic, Πρώην
Γιουγκοσλαβική Δημοκρατία της Μακεδονίας
Vlachou Angeliki, Ελλάδα
Popivoda Goran, Μαυροβούνιο
Guțu Valeriu, Μολδαβία
Gherghe Cătălin Liviu, Ρουμανία

Bašić Bojan, Σερβία
Şahin Emrah, Τουρκία
Garayev Fuad, Αζερμπαϊτζάν
Tefagh Mojtaba, Ιράν
Gobbino Massimo, Ιταλία
Vassilyev Anton, Καζακιστάν
Kosimov Dilshod, Κυργκιστάν
Althukair Fawzi, Σαουδική Αραβία
Zerenturk Sabri, Τατζικιστάν
Hojjiyev Arslan, Τουρκμενιστάν
Betts Alexander, Ηνωμένο Βασίλειο και
Ιρλανδία

Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων

Πρόεδρος: Fellouris Anargyros
Αντιπρόεδρος: Κοντοκώστας Δημήτριος
Μέλη : Μπραζιτικός Σιλουανός
Ψύχας Ευάγγελος

Βαθμολογητές Προβλημάτων

Πρόεδρος: Φελλούρης Ανάργυρος

Βισκαδουράκης Βασίλειος
Δημητρίου Ξενοφών
Ζητρίδης Αντώνιος
Καλαμπόκα Αθηνά
Κοντοκώστας Δημήτριος
Λιναρδάτου Σταβέυ
Μπραζιτικός Σιλουανός
Μπραζιτικός Κωνσταντίνος
Μπούκας Ανδρέας

Οικονόμου Αντώνιος
Παπαϊωάννου Αλέξανδρος
Σαράντης Μιχαήλ
Σκιαδόπουλος Αθηναγόρας
Τσαμπασίδης Ζαχαρίας
Τυρλής Ιωάννης
Ψαρομίλιγκος Κωνσταντίνος
Ψαρράκος Παναγιώτης
Ψύχας Ευάγγελος

Επιτροπή Τεχνικής Υποστήριξης

Μαλαφέκας Αθανάσιος, Πρόεδρος

Αθανασόπουλος Κωνσταντίνος

Γεωργούδη Μαρία

Θεοδωρόπουλος Θρασύβουλος

Καλλιβωκάς Δημήτριος

Κερασαρίδης Φώτης

Μαραγκάκης Στυλιανός

Σωτήρος Δημήτριος

Συνοδοί Εθνικών Ομάδων Μαθητών

1. Γαγάνης Νικόλαος
2. Γιανναδάκης Παναγιώτης
3. Δήμα Δήμητρα
4. Ζαρκάδα Ευτυχία
5. Καλογεροπούλου Ιωάννα
6. Λάζαρης Ευάγγελος Δαμιανός
7. Λέκκα Ελπινίκη
8. Μηλιώρη Ελευθερία
9. Οικονόμου Δημήτριος
10. Παπαδάκη Θεοδώρα
11. Πίντζου Αναστασία
12. Σφυρίδης Αναστάσιος
13. Χάμαλης Λεωνίδα

Κατάλογος συμμετεχουσών χωρών, Αρχηγοί, Υπαρχηγοί, Παρατηρητές

A/A	Χώρα	Αρχηγός	Υπαρχηγός
1	Αλβανία	Fatos Kopliku	Adrian Naço
2	Βοσνία Ερζεγοβίνη	Jelena Radović	Franjo Šarčević
3	Βουλγαρία	Ivaylo Korteov	Peter Boyvalenkov
4	Κύπρος	Savvas Timotheou	Savvas Antoniou
5	Πρώην Γιουγκοσλαβική Δημοκρατία της Μακεδονίας	Vesna Manova Erakovic	Martin Soptrajanov
6	Ελλάς	Angeliki Vlachou	Evangelos Zotos
7	Μαυροβούνιο	Goran Popivoda	Gojko Jelovac
8	Μολδαβία	Valeriu Guțu	Anatolie Topală
9	Ρουμανία	Cătălin Liviu Gherghe	Ovidiu Șontea
10	Σερβία	Bojan Bašić	Miloš Milosavljević
11	Τουρκία	Şahin Emrah	Melih Üçer
12	Αζερμπαϊτζαν (Guest)	Fuad Garayev	Elvin Mammadov
13	Ιράν (Guest)	Mojtaba Tefagh	Sina Rezaiezareie
14	Ελλάς Β (Guest)	Angeliki Vlachou	Evangelos Zotos
15	Ιταλία (Guest)	Massimo Gobbino	Samuele Mongodi
16	Καζακστάν (Guest)	Anton Vassilyev	Bayan Baitukova
17	Κιργκιστάν (Guest)	Dilshod Kosimov	
18	Σαουδική Αραβία (Guest)	Fawzi Althukair	Tarek Shehata
19	Τατζικιστάν (Guest)	Sabri Zerentürk	
20	Τουρκμενιστάν (Guest)	Arslan Hojiyev	Annamurat Gundogdyev
21	Ηνωμένο Βασίλειο και Ιρλανδία(Guest)	Alexander Betts	Gerry Leversha
1	Βουλγαρία	Oleg Mushkarov	Παρατηρητής Α
2	Αζερμπαϊτζαν (Guest)	İlham Huseynov	Παρατηρητής Α
3	Σαουδική Αραβία	Malik Talbio	Παρατηρητής Α
4	Ιράν (Guest)	Maryam Vezyari	Παρατηρητής Β
5	Ιράν (Guest)	Mozhgan Noori	Παρατηρητής Β
6	Ιράν (Guest)	Ladan Malek Ghassemi	Παρατηρητής Β
7	Ιράν (Guest)	Hanieh Tajik	Παρατηρητής Β
8	Ιράν (Guest)	Kayvan Jalalian	Παρατηρητής Β
9	Ιταλία	Davide Lombardo	Παρατηρητής Β
10	Σαουδική Αραβία (Guest)	Modi Alshammari	Παρατηρητής Β
11	Σαουδική Αραβία (Guest)	Rola Abouassi	Παρατηρητής Β
12	Ηνωμένο Βασίλειο και Ιρλανδία (Guest)	Jill Parker	Παρατηρητής Β

A/A	ΣΗΜΑΙΕΣ	ΧΩΡΕΣ	ΜΑΘΗΤΕΣ
1		Albania	<ul style="list-style-type: none"> • Gledis Kallço • Ana Peçini • Alboreno Voci • Selion Haxhi • Naisila Puka • Enes Kristo
2		Bosnia And Herzegovina	<ul style="list-style-type: none"> • Milica Djukic • Tijana Babić • Zlatko Salko Lagumdžija • Adisa Bolic • Demir Papic • Nikica Peric
3		Bulgaria	<ul style="list-style-type: none"> • Lyuben Lichev; • Emiliyan Rogachev • Denitsa Markova • Alexander Tenev • Aleksandar Cherganski • Violeta Naydenova
4		Cyprus	<ul style="list-style-type: none"> • Marangos Dimitris • Theocharous Andreas • Chatzimiltis Christodoulos • Economou Anna • Pelecanos Angelos • Stylianos Stelios
5		Former Yugoslav Republic Of Macedonia	<ul style="list-style-type: none"> • Andrej Ilievski • Nikoloski Stefan • Sanja Simonovikj • Andrej Ivanov • Nikola Grunchevski • Bozhidar Stevanoski
6		Hellas	<ul style="list-style-type: none"> • Chachamis Nestor • Karatza Panayiota • Melas Dimitrios Chrysovalantis • Misiakos Panayiotis • Ntounis Petros • Tsintilidas Dimitrios
7		Montenegro	<ul style="list-style-type: none"> • Sanja Kastratović • Ognjen Đuković • Nikola Raičević
8		Republic Of Moldova	<ul style="list-style-type: none"> • Valeriu Cojocari • Vladimir Cucu • Daniel Griza • Dionisie Nipomici • Cezar Port • Mihail Țarigradschi

A/A	ΣΗΜΑΙΕΣ	ΧΩΡΕΣ	ΜΑΘΗΤΕΣ
9		Romania	<ul style="list-style-type: none"> • Spătaru Ștefan • Bocanu Marius Ioan • Diaconu Simona • Bonciocat Ciprian Mircea • Ploscaru Laurențiu • Puiu Andrei Bogdan
10		Serbia	<ul style="list-style-type: none"> • Marijana Vujadinović • Ognjen Tošić • Ivan Damjanović • Aleksa Milojević • Aleksa Konstantinov • Anđela Šarković
11		Turkey	<ul style="list-style-type: none"> • Feyza Duman • Halil İbrahim Güllük • Ahmet İleri • Ahmet Abdullah Keleş • Muhammet Furkan Merdan • Ali Haydar Sever
Guest		Azerbaijan (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Farman Dumanov • Ismat Aghayev • Mahammad Shirinov • Tahir Nadirov • Fazil Amirli • Mirali Ahmadli
Guest		Hellas B (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Dimitrakakis Alexandros • Gavrilopoulos Georgios • Ketsetsidis Rafail • Panayiotopoulos Apostolos • Tsaggalidou Zoi • Venizelos Georgios
Guest		Independent team from I.R. of Iran (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Yasamin Jalalian • Helia Homami • Sarvin Motamen • Rozhin Hezaveh
Guest		Italy (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Alfarano Alberto • Gori Davide • Macchiaroli Luca • Pozzoli Andrea • Ulliana Andrea • Zanotto Riccardo
Guest		Kazakhstan (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Akhan Ismailov • Olzhas Kadyrakunov • Alexandr Shakiyev • Temirlan Amangeldin • Daniyar Abesbek • Alen Abdrakhmanov

A/A	ΣΗΜΑΙΕΣ	ΧΩΡΕΣ	ΜΑΘΗΤΕΣ
Guest		Kyrgystan (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Kanybek Asanbekov • Elaman Sarsembaev • Arstan Ashyrbekov
Guest		Saudi Arabia (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Alzubair Habibullah • Shaden Alshammari • Arabiah Omar • Alnufaili Alhamzah • Saleh Salman • Renad Abualjmal
Guest		Tajikistan (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Kalomidin Klychev • Farrukh Karimov • Sobirdzhon Bobiev • Jakhongir Murodov • Sunatullo Gafurov • Sakhizhoni Narzullozoda
Guest		Turkmenistan (Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Alshir Soyunjov • Bazarbay Halmedov • Dovlet Ovlyagulyyev • Dovran Nurgeldiyev • Perman Iljanov • Ruslan Myratgeldiyev
Guest		United Kingdom and Republic of Ireland(Guest)	<ul style="list-style-type: none"> • Luke Gardiner • Alex Harris • Lawrence Hollom • Samuel Kittle • Kirsten Land • Philip Peters

32η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2015 ΕΛΛΑΣ



Οργάνωση
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΑΘΗΝΑ, 3-8 ΜΑΪΟΥ 2015



Hellenic Mathematical Society

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Κυριακή 3 Μαΐου (1^η μέρα)

Ωρα	Μαθητές	Υπαρχηγοί	Αρχηγοί
08:00-21:00	Άφιξη και μεταφορά στο Ξενοδοχείο	Άφιξη και μεταφορά στο Ξενοδοχείο	Άφιξη και μεταφορά στο Ξενοδοχείο
13:00-15:00	Γεύμα	Γεύμα	Γεύμα
20:00-21:00	Δείπνο	Δείπνο	Δείπνο
21:00-22:00			1η Σύσκεψη Επιτροπής Κριτών

Δευτέρα 4 Μαΐου (2^η μέρα)

Ωρα	Μαθητές	Υπαρχηγοί	Αρχηγοί
07:00-09:00	Πρόγευμα	Πρόγευμα	Πρόγευμα
09:00-10:30	Ελεύθερος Χρόνος	Ελεύθερος Χρόνος	2η Σύσκεψη Επιτροπής Κριτών
11:30-13:00	Τελετή Έναρξης	Τελετή Έναρξης	Τελετή Έναρξης
14:00-15:00	Γεύμα	Γεύμα	Γεύμα
15:00-20:00	Ελεύθερος Χρόνος	Ελεύθερος Χρόνος	3rd Σύσκεψη Επιτροπής Κριτών. Μετάφραση προβλημάτων διαγωνισμού
20:00-21:00	Δείπνο	Δείπνο	Δείπνο

Τρίτη 5 Μαΐου (3^η μέρα)

Ωρα	Μαθητές	Υπαρχηγοί	Αρχηγοί
07:00-08:00	Πρόγευμα	Πρόγευμα	Πρόγευμα
			Αναχώρηση από το Ξενοδοχείο
09:00-13:30	Διαγωνισμός	Απάντηση ερωτήσεων (09:00-09:30) Επίσκεψη στο Μουσείο της Ακρόπολης	Απάντηση ερωτήσεων (09:00-09:30) Επίσκεψη στο Μουσείο της Ακρόπολης
14:00-15:00	Γεύμα	Γεύμα	Γεύμα
15:00-20:00	Ελεύθερος Χρόνος	Ελεύθερος Χρόνος	Ελεύθερος Χρόνος και λήψη γραπτών
20:00-21:00	Δείπνο	Δείπνο	Δείπνο

Τετάρτη 6 Μαΐου (4^η μέρα)

Ωρα	Μαθητές	Υπαρχηγοί	Αρχηγοί
08:00-09:00	Πρόγευμα	Πρόγευμα	Πρόγευμα
09:30-13:30	Επίσκεψη στο Μουσείο της Ακρόπολης	Βαθμολόγηση	Βαθμολόγηση
13:30-15:00	Γεύμα	Γεύμα	Γεύμα
16:00-19:30	Ελεύθερος Χρόνος	Βαθμολόγηση	Βαθμολόγηση
20:00-21:00	Ελεύθερος Χρόνος	Τελική Σύσκεψη Επιτροπής Κριτών	Τελική Σύσκεψη Επιτροπής Κριτών
21:00-23:00	Δείπνο	Δείπνο	Δείπνο

Πέμπτη 7 Μαΐου (5^η μέρα)

Ωρα	Μαθητές	Υπαρχηγοί	Αρχηγοί
08:00-09:00	Πρόγευμα	Πρόγευμα	Πρόγευμα
09:00-14:30	Εκδρομή	Εκδρομή	Εκδρομή
14:30-15:30	Γεύμα	Γεύμα	Γεύμα
15:30-18:00	Ελεύθερος Χρόνος	Ελεύθερος Χρόνος	Ελεύθερος Χρόνος
18:00-20:00	Τελετή Λήξης	Τελετή Λήξης	Τελετή Λήξης
20:30-22:00	Επίσημο Δείπνο	Επίσημο Δείπνο	Επίσημο Δείπνο

Παρασκευή 8 Μαΐου (6^η μέρα)

Ωρα	Μαθητές	Υπαρχηγοί	Αρχηγοί
08:00-09:00	Πρόγευμα	Πρόγευμα	Πρόγευμα
09:00-13:30	Αναχώρηση	Αναχώρηση	Αναχώρηση

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

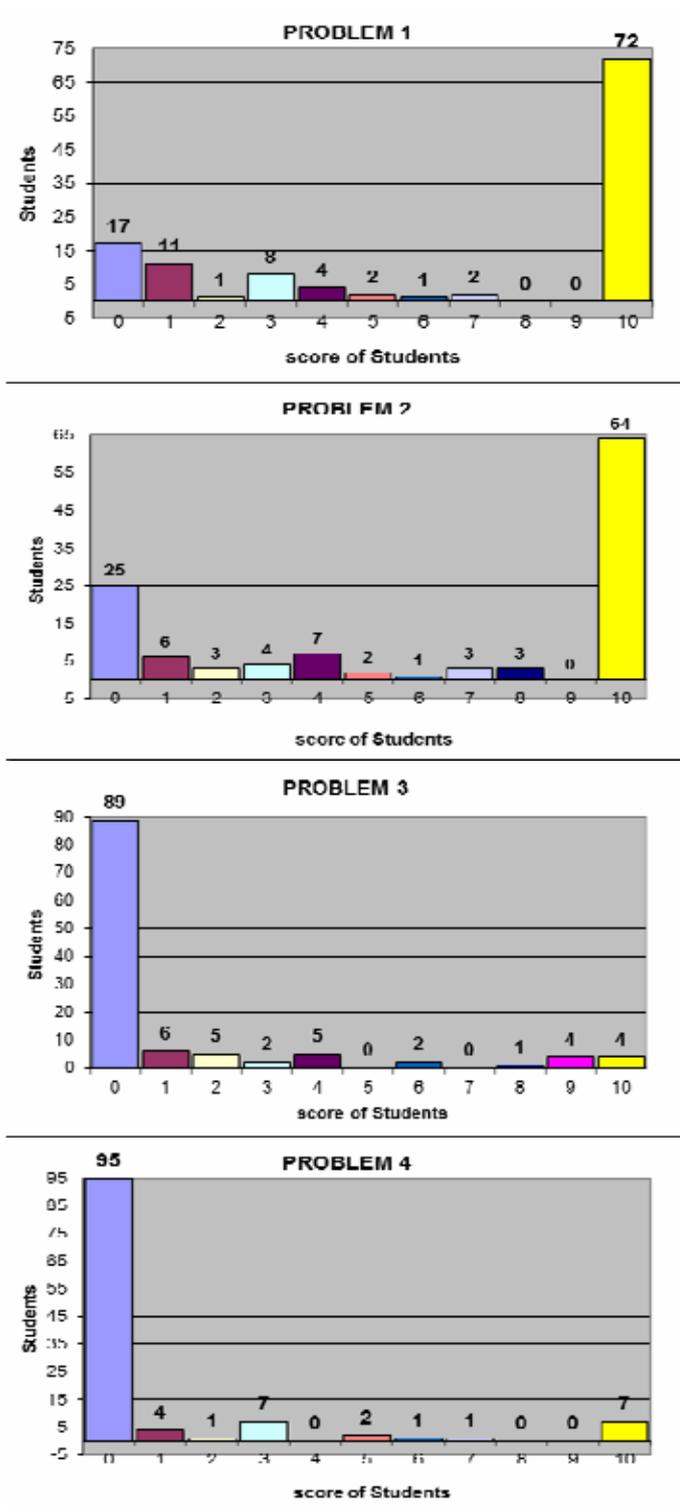
ΜΕΤΑΛΙΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΧΩΡΑ
Χρυσό Μετάλλιο	Ahmet	İleri	Turkey
Χρυσό Μετάλλιο	Ştefan	Spătaru	Romania
Χρυσό Μετάλλιο	Muhammed Furkan	Merdan	Turkey
Χρυσό Μετάλλιο	Dionisie	Nipomici	Republic of Moldova
Χρυσό Μετάλλιο	Petros	Ntounis	Hellas
Χρυσό Μετάλλιο	Marius Ioan	Bocanu	Romania
Αργυρό Μετάλλιο	Lyuben	Lichev	Bulgaria
Αργυρό Μετάλλιο	Violeta	Naydenova	Bulgaria
Αργυρό Μετάλλιο	Vladimir	Cucu	Republic of Moldova
Αργυρό Μετάλλιο	Simona	Diaconu	Romania
Αργυρό Μετάλλιο	Laurențiu	Ploscaru	Romania
Αργυρό Μετάλλιο	Marijana	Vujadinović	Serbia
Αργυρό Μετάλλιο	Ahmet Abdullah	Keleş	Turkey
Αργυρό Μετάλλιο	Denitsa	Markova	Bulgaria
Αργυρό Μετάλλιο	Aleksandar	Cherganski	Bulgaria
Αργυρό Μετάλλιο	Luca	Mmacchiaroli	Italy
Αργυρό Μετάλλιο	Feyza	Duman	Turkey
Αργυρό Μετάλλιο	Emiliyan	Rogachev	Bulgaria
Αργυρό Μετάλλιο	Milica	Đukić	Bosnia and Herzegovina
Αργυρό Μετάλλιο	Sobirdzhon	Bobiev	Tajikistan
Αργυρό Μετάλλιο	Ali Haydar	Sever	Turkey
Χάλκινο Μετάλλιο	Nestor	Chachamis	Hellas
Χάλκινο Μετάλλιο	Dimitrios Chrysovalantis	Melas	Hellas
Χάλκινο Μετάλλιο	Panagiotis	Misiakos	Hellas
Χάλκινο Μετάλλιο	Georgios	Gavrilopoulos	Hellas B
Χάλκινο Μετάλλιο	Apostolos	Panagiotopoulos	Hellas B
Χάλκινο Μετάλλιο	Andrei Bogdan	Puiu	Romania
Χάλκινο Μετάλλιο	Halil İbrahim	Güllük	Turkey

ΜΕΤΑΛΙΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΧΩΡΑ
Χάλκινο Μετάλλιο	Cezar	Port	Republic of Moldova
Χάλκινο Μετάλλιο	Ciprian Mircea	Bonciocat	Romania
Χάλκινο Μετάλλιο	Adisa	Bolić	Bosnia and Herzegovina
Χάλκινο Μετάλλιο	Olzhas	Kadyrakunov	Kazakstan
Χάλκινο Μετάλλιο	Alzubair	Habibullah	Saudi Arabia
Χάλκινο Μετάλλιο	Alshir	Soyunjov	Turkmenistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Alboreno	Voci	Albania
Χάλκινο Μετάλλιο	Tijana	Babić	Bosnia and Herzegovina
Χάλκινο Μετάλλιο	Zlatko Salko	Lagumdžija	Bosnia and Herzegovina
Χάλκινο Μετάλλιο	Demir	Papić	Bosnia and Herzegovina
Χάλκινο Μετάλλιο	Panagiota	Karatzza	Hellas
Χάλκινο Μετάλλιο	Zoi	Tsangalidou	Hellas B
Χάλκινο Μετάλλιο	Alberto	Alfarano	Italy
Χάλκινο Μετάλλιο	Akhan	Ismailov	Kazakstan
Χάλκινο Μετάλλιο	Alexandr	Shakiyev	Kazakstan
Χάλκινο Μετάλλιο	Daniyar	Abesbek	Kazakstan
Χάλκινο Μετάλλιο	Alen	Abdrakhmanov	Kazakstan
Χάλκινο Μετάλλιο	Mihail	Țarigradschi	Republic of Moldova
Χάλκινο Μετάλλιο	Andrej	Ilievski	Former Yugoslav Republic of Macedonia
Χάλκινο Μετάλλιο	Nikola	Grunchevski	Former Yugoslav Republic of Macedonia
Χάλκινο Μετάλλιο	Alrabiah	Omar	Saudi Arabia
Χάλκινο Μετάλλιο	Saleh	Salman	Saudi Arabia
Χάλκινο Μετάλλιο	Kalomidin	Klychev	Tajikistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Jakhongir	Murodov	Tajikistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Dovlet	Ovlyagulyyev	Turkmenistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Dovran	Nurgeldiyev	Turkmenistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Alex	Harris	United Kingdom and Republic of Ireland
Χάλκινο Μετάλλιο	Philip	Peters	United Kingdom and Republic of Ireland
Χάλκινο Μετάλλιο	Farrukh	Karimov	Tajikistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Davide	Gori	Italy
Χάλκινο Μετάλλιο	Temirlan	Amangeldin	Kazakstan
Χάλκινο Μετάλλιο	Andrej	Ivanov	Former Yugoslav Republic of Macedonia

ΜΕΤΑΛΙΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΧΩΡΑ
Χάλκινο Μετάλλιο	Perman	Iljanov	Turkmenistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Tahir	Nadirov	Azerbaijan
Χάλκινο Μετάλλιο	Ognjen	Tošić	Serbia
Χάλκινο Μετάλλιο	Gledis	Kallço	Albania
Χάλκινο Μετάλλιο	Alnufaili	Alhamzah	Saudi Arabia
Χάλκινο Μετάλλιο	Sunatullo	Gafurov	Tajikistan
Χάλκινο Μετάλλιο	Mahammad	Shirinov	Azerbaijan
Χάλκινο Μετάλλιο	Alexander	Tenev	Bulgaria
Χάλκινο Μετάλλιο	Dimitrios	Tsintsilidas	Hellas
Χάλκινο Μετάλλιο	Rafail	Ketsetsidis	Hellas B
Χάλκινο Μετάλλιο	Gorgios	Venizelos	Hellas B
Χάλκινο Μετάλλιο	Luke	Gardiner	United Kingdom and Republic of Ireland
Χάλκινο Μετάλλιο	Ismat	Aghayev	Azerbaijan
Χάλκινο Μετάλλιο	Bozhidar	Stevanoski	Former Yugoslav Republic of Macedonia
Χάλκινο Μετάλλιο	Lawrence	Hollom	United Kingdom and Republic of Ireland
Εύφημη Μνεία	Anna	Economou	Cyprus
Εύφημη Μνεία	Stelios	Stylianou	Cyprus
Εύφημη Μνεία	Kanybek	Asanbekov	Kyrgyzstan
Εύφημη Μνεία	Bazarbay	Halmedov	Turkmenistan
Εύφημη Μνεία	Mirali	Ahmadli	Azerbaijan
Εύφημη Μνεία	Christodoulos	Chatzimiltis	Cyprus
Εύφημη Μνεία	Andrea	Pozzoli	Italy
Εύφημη Μνεία	Riccardo	Zanotto	Italy
Εύφημη Μνεία	Aleksa	Milojević	Serbia
Εύφημη Μνεία	Aleksa	Konstantinov	Serbia
Εύφημη Μνεία	Anđela	Šarković	Serbia

Συνολική Βαθμολογία Ομάδων (με αλφαβητική σειρά)							
ID	Flag	Country	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Total
1		ALB	24	14	0	0	38
2		BIH	50	50	5	0	105
3		BGR	53	60	35	8	156
4		CYP	35	10	0	0	45
5		FYR	44	35	0	0	79
6		HEL	53	58	6	16	133
7		MDA	36	38	16	16	106
8		MNE	0	3	0	0	3
9		ROU	57	60	13	41	171
10		SRB	19	50	10	0	79
11		TUR	60	60	37	20	177
Guest		AZE	43	18	0	0	61
Guest		HEL (b)	46	45	0	6	97
Guest		IRN	4	4	0	0	8
Guest		ITA	40	41	2	7	90
Guest		KAZ	60	48	7	3	118
Guest		KGZ	4	10	0	0	14
Guest		SAU	44	34	0	1	79
Guest		TJK	48	44	5	0	97
Guest		TKM	50	39	0	1	90
Guest		UK-IRE	33	32	2	1	68

ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΑΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ



ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΙΑ

32^{ης} Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (BMO) 2015

1^η Μέρα

Η 32^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα ξεκίνησε επίσημα στις 3 Μαΐου 2015. Σε αυτή συμμετείχαν **20 χώρες** (οι έντεκα (11) χώρες της περιοχής της Νοτιοανατολικής Ευρώπης, αλλά και όπως προβλέπεται και από τον κανονισμό εννέα (9) ακόμη χώρες από την Ευρώπη και την Ασία ως φιλοξενούμενες). **Η εγκυρότητα και η αξιοπιστία του θεσμού που ξεκίνησε το 1984**, του οποίου εμπνευστής και πρωτεργάτης ήταν η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, καθώς και η ομορφιά της χώρας μας προσέλκυσαν χώρες όπως η Ιταλία, το Ηνωμένο Βασίλειο, η Σαουδική Αραβία, το Ιράν να δηλώσουν συμμετοχή.

Οι αποστολές ξεκίνησαν να φθάνουν από την Πρωτομαγιά. Οι περισσότερες όμως ήρθαν στις 3 Μαΐου και εγκαταστάθηκαν στα Ξενοδοχεία τους. Υπενθυμίζουμε ότι οι αρχηγοί μένουν σε διαφορετικό ξενοδοχείο τουλάχιστον μέχρι την ημέρα του διαγωνισμού για το αδιάβλητο της διοργάνωσης.

Η πρώτη μέρα ήταν μέρα αναγνώρισης και ξεκούρασης για τα παιδιά.

Οι αρχηγοί όμως των αποστολών ξεκίνησαν δουλειά. Το βράδυ έγινε η πρώτη συνάντηση της Επιτροπής Κριτών στην οποία συμμετέχουν όλοι οι αρχηγοί των αποστολών και παρατηρητές Α οι οποίοι μπορούν να τους συνοδεύουν. Στη συνεδρίαση αυτή μοιράστηκε η λίστα με τα προβλήματα που επέλεξε η Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων (Short list) με Πρόεδρο τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ανάργυρο Φελλούρη από τα προβλήματα που είχε προτείνει η κάθε χώρα. Από αυτή τη λίστα στις επόμενες συνεδριάσεις θα επιλεγούν τα τέσσερα προβλήματα που θα δοθούν στους μαθητές.

2η μέρα

Στις επόμενες δυο συνεδριάσεις που έγιναν τη Δευτέρα 4 Μαΐου επελέγησαν τα προβλήματα, τα οποία μοιράστηκαν την ημέρα του διαγωνισμού στους μαθητές στα Αγγλικά και στη γλώσσα της κάθε χώρας που συμμετείχε. Επίσης συμφωνήθηκε το σχέδιο βαθμολόγησης.

Τη Δευτέρα πραγματοποιήθηκε η Τελετή Έναρξης της 32^{ης} Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας στο Ξενοδοχείο Κοράλι όπου διέμεναν οι μαθητές σε μια ηλιόλουστη αίθουσα με θέα το Σαρωνικό. Τους καλωσόρισαν ο Πρόεδρος της Οργανωτικής Επιτροπής Καθηγητής Νικόλαος Αλεξανδρής, ο Πρόεδρος της Επιτροπής Κριτών Καθηγητής Θεόδωρος Μπόλης και διαβάστηκε ο χαιρετισμός του Προέδρου της Μαθηματικής Εταιρείας της Νοτιοανατολικής Ευρώπης Δρ. Γρηγόρη Μακρίδη. Στη συνέχεια έγινε η παρουσίαση των ομάδων.

3η μέρα

Η 5^η Μαΐου ήταν η μέρα του Διαγωνισμού. Οι μαθητές μεταφέρθηκαν στο Αναγνωστήριο του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών και για τέσσερις και μισή ώρες προσπάθησαν να λύσουν τα τέσσερα προβλήματα που τους δόθηκαν.

Οι αρχηγοί και υπαρχηγοί των ομάδων επισκέφθηκαν το Μουσείο της Ακρόπολης και την Πλάκα. Το βράδυ πήραν τα γραπτά των μαθητών τους για να τα διορθώσουν και να προετοιμαστούν για την επόμενη μέρα που θα γινόταν η συνάντηση με τους βαθμολογητές.

4η μέρα

Την Τετάρτη 6 Μαΐου οι μαθητές πήγαν στο Μουσείο της Ακρόπολης. Μαζί τους ήταν οι φοιτητές Πανεπιστημίων της Αθήνας που εθελοντικά προσφέρθηκαν να είναι βοηθοί και συμπαραστάτες των ομάδων κατά τη διάρκεια της παραμονής τους στην Ελλάδα. Την ίδια

στιγμή οι καθηγητές τους συμμετείχαν στη βαθμολόγηση των γραπτών ενώπιον της επιτροπής των Βαθμολογητών.

Το απόγευμα της ίδιας μέρας εκδόθηκαν τα αποτελέσματα τα οποία επικυρώθηκαν στην τελευταία συνεδρίαση της Επιτροπής Κριτών.

5η μέρα

Απαλλαγμένοι από το άγχος και την πίεση του διαγωνισμού και της βαθμολόγησης καθηγητές και μαθητές επισκέφθηκαν την Πέμπτη 7 Μαΐου τον τύμβο του Μαραθώνα και απόλαυσαν τον ήλιο και τη θάλασσα στην παραλία της Νέας Μάκρης.

Η 32^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα έκλεισε πανηγυρικά το απόγευμα της Πέμπτης με την Τελετή Λήξης, που έγινε στον Πολυχώρο του Δημαρχείου Παλαιού Φαλήρου, και την απονομή των μεταλλίων στους νικητές.

Στην τελετή παρευρέθηκαν και απηύθυναν χαιρετισμό ο εκπρόσωπος του Υπουργού Πολιτισμού Παιδείας και Θρησκευμάτων κ. Δημήτριος Ζέρβας, ο οποίος μετέφερε και το μήνυμα του Υπουργού, εκπρόσωπος του Αναπληρωτή Υπουργού Παιδείας κ. Γεώργιος Μπουγγελέκας, ο Αντιπεριφερειάρχης Αττικής Νοτίου Τομέα κ. Χρήστος Καπάταης, ο αντιδήμαρχος Παλαιού Φαλήρου κ. Ιωάννης Γουλιέλμος, ο Πρόεδρος του Πολιτιστικού Κέντρου Παλαιού Φαλήρου κ. Κωνσταντίνος Νικολαΐδης.

Την τελετή πλαισίωσαν και έδωσαν μια ευχάριστη νότα ο παλιός Ολυμπιονίκης στα Μαθηματικά Κωνσταντίνος Παπέλης που έπαιξε στο πιάνο γνωστές ελληνικές μελωδίες και ο χορευτικός Τομέας ΠΟΦΤΑ του Πανεπιστημίου Αθηνών που παρουσίασε χορούς από τις Κυκλάδες.

Η βραδιά έκλεισε με το επίσημο δείπνο στο ξενοδοχείο Κοράλι με θέα το φωτισμένο Σαρωνικό.

6η μέρα

Στις 8 Μαΐου όλες οι αποστολές αναχώρησαν για τις πατρίδες τους με τις καλύτερες ελπίζουμε αναμνήσεις.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι όλη αυτή η διοργάνωση δεν θα είχε επιτυχία, χωρίς την εθελοντική εργασία των 50 περίπου μελών των επιτροπών που για πολλούς μήνες δούλευαν συντονισμένα, η κάθε μια στον τομέα της, άοκνα για την επίτευξη ενός άρτιου αποτελέσματος. Συμμετοχή στην επιτυχία είχαν 15 φοιτητές του Πανεπιστημίου Αθηνών που συνόδευαν τους μαθητές και έδειξαν στους συμμετέχοντες το νόημα της ελληνικής φιλοξενίας.

Ακολουθούν στιγμιότυπα από την 32^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα.



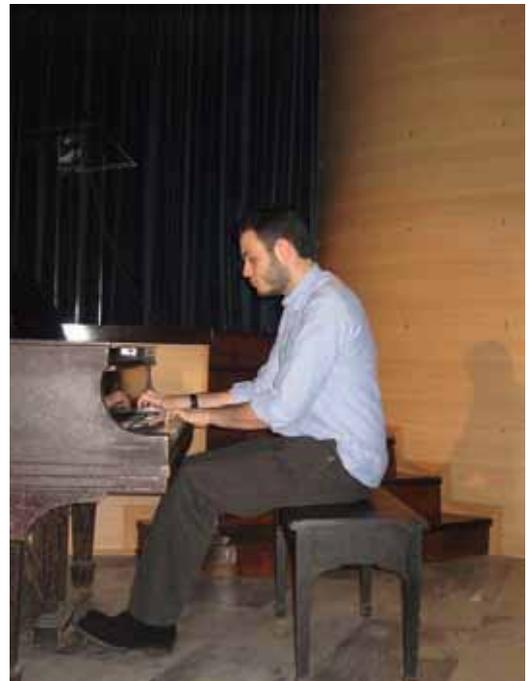




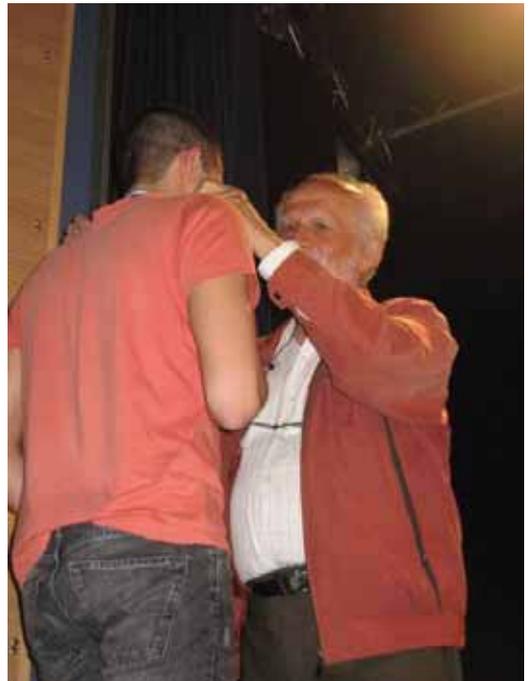




























ΤΕΛΟΣ
32^{ΗΣ} ΒΑΛΚΑΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑΣ
ΑΝΑΧΩΡΗΣΕΙΣ ΑΠΟΣΤΟΛΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ 32BMO



32^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Αθήνα 4-5-2015

Πρόβλημα 1. Αν a , b και c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι

$$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3).$$

Λύση. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της προς απόδειξη με $a^3b^3c^3$ παίρνουμε

$$\left(\frac{b}{c}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3 \geq \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}\right). \quad (1)$$

Θέτουμε

$$\frac{a}{b} = x, \quad \frac{b}{c} = y, \quad \frac{c}{a} = z. \quad (2)$$

Τότε $xyz = 1$ και αντικαθιστώντας την (2) στην (1), παίρνουμε

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3 \geq \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right). \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (3) με xyz , και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $xyz = 1$, η ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - xy^2 - yz^2 - zx^2 - yx^2 - zy^2 - xz^2 \geq 0. \quad (4)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι από την ειδική περίπτωση της ανισότητας Schur

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-y)(z-x) \geq 0, \quad x, y, z \geq 0, r > 0,$$

για $r = 1$ έχουμε

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-y)(z-x) \geq 0, \quad (5)$$

που μετά τις πράξεις δίνει ακριβώς την (4). □

Παρατήρηση 1. Η ανισότητα (5) προκύπτει άμεσα υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x \geq y \geq z$, και γράφοντας το αριστερό μέλος της (5) στη μορφή

$$(x-y)(x(x-z) - y(y-z)) + z(y-z)(x-z),$$

που είναι προφανώς ≥ 0 .

Παρατήρηση 2. Μπορούμε να οδηγηθούμε στην (4) χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = ab^2$, $y = bc^2$ και $z = ca^2$.

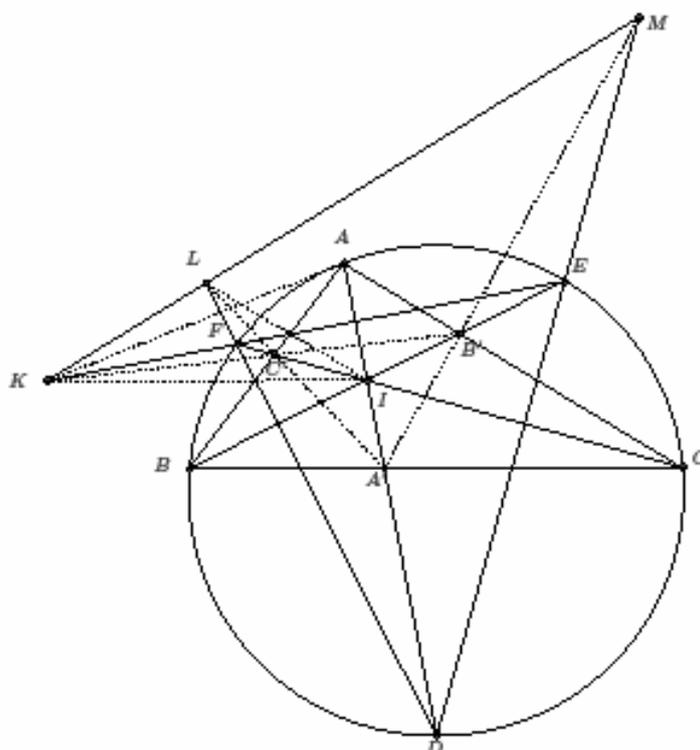
Πρόβλημα 2. Έστω ABC ένα σκαληνό τρίγωνο με έκκεντρο I και περιγεγραμμένο κύκλο (ω) . Οι ευθείες AI, BI, CI τέμνουν τον (ω) για δεύτερη φορά στα σημεία D, E, F , αντίστοιχα. Οι παράλληλες ευθείες από το I προς τις πλευρές BC, AC, AB τέμνουν τις ευθείες EF, DF, DE στα σημεία K, L, M , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, L, M είναι συνευθειακά.

Λύση. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η KA εφάπτεται στον (ω) .

Πράγματι, είναι γνωστό ότι $FA = FB = FI$ και $EA = EC = EI$, οπότε η FE είναι μεσοκάθετη της AI . Έπεται ότι $KA = KI$ και

$$\angle KAF = \angle KIF = \angle FCB = \angle FEB = \angle FEA,$$

οπότε η KA εφάπτεται στον (ω) . Όμοια δείχνουμε ότι οι LB, MC εφάπτονται στον (ω) .



Έστω A', B', C' οι τομές των AI, BI, CI με τις BC, CA, AB αντίστοιχα. Από το θεώρημα του Pascal στο εγγράφημο εξαγώνο $AACDEB$ παίρνουμε ότι τα K, C', B' είναι συνευθειακά. Όμοια τα L, C', A' είναι συνευθειακά, όπως και τα M, B', A' .

Από το θεώρημα Desargues για τα τρίγωνα $\triangle DEF, \triangle A'B'C'$ που είναι προοπτικά ως προς το I , παίρνουμε ότι τα K, L, M είναι συνευθειακά ως τομές των αντιστοίχων πλευρών. \square

Σημείωση (Π.Σ.΄). Αφού δείξουμε ότι οι KA, LB, MC εφάπτονται στον (ω) , μπορούμε να συνεχίσουμε εναλλακτικά ως εξής:

Τα τρίγωνα $\triangle KAF \sim \triangle KAE$ είναι όμοια οπότε $\frac{KA}{KE} = \frac{KF}{KA} = \frac{AF}{AE}$, άρα $\frac{KF}{KE} = \left(\frac{AF}{AE}\right)^2$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\frac{ME}{MD} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2$ και $\frac{LD}{LF} = \left(\frac{BD}{BF}\right)^2$. Πολλαπλασιάζοντας παίρνουμε $\frac{KF}{KE} \cdot \frac{ME}{MD} \cdot \frac{LD}{LF} = 1$, οπότε από το ανίστροφο του θεωρήματος του Μενελάου στο τρίγωνο DEF παίρνουμε ότι τα σημεία K, L, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3. Μία επιτροπή από 3366 κριτικούς κινηματογράφου ψηφίζει για τα Όσκαρ. Κάθε κριτικός ψηφίζει ακριβώς έναν ηθοποιό και ακριβώς μία ηθοποιό. Μετά την ψηφοφορία διαπιστώθηκε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$, υπάρχει κάποιος ηθοποιός ή κάποια ηθοποιός που ψηφίστηκε ακριβώς n φορές. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο κριτικοί που ψήφισαν τον ίδιο ηθοποιό και την ίδια ηθοποιό.

Λύση. Υποθέτουμε ότι κάθε κριτικός ψήφισε ένα διαφορετικό ζεύγος ενός ηθοποιού και μιας ηθοποιού.

Θα ονομάζουμε διπλή ψήφο την ψήφο ενός κριτικού, δηλαδή την επιλογή ζεύγους ενός ηθοποιού και μιας ηθοποιού, και θα ονομάζουμε μονή ψήφο καθεμιά από τις δύο επιλογές που κάνει για τον ηθοποιό και την ηθοποιό. Με αυτή την ορολογία μία διπλή ψήφος αντιστοιχεί σε δύο μονές.

Για κάθε $n = 34, 35, \dots, 100$ παίρνουμε έναν ηθοποιό ή μία ηθοποιό που ψηφίστηκε από ακριβώς n κριτικούς (δηλαδή εμφανίζεται σε n μονές ψήφους) και ονομάζουμε S το σύνολο των ηθοποιών αυτών. Θέτοντας a, b το πλήθος των ανδρών και γυναικών στο S , έχουμε ότι $a + b = 67$.

στοιχώς S_1 το σύνολο των διπλών ψήφων καθεμιά από τις οποίες έχει ακριβώς μία μονή ψήφο ψήφους στο S , και έστω S_2 το σύνολο των διπλών ψήφων καθεμιά από τις οποίες έχει και τις δύο αντίστοιχες μονές ψήφους στο S . Αν s_1, s_2 είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων S_1, S_2 , τότε το πλήθος όλων των διπλών ψήφων με τουλάχιστον μία μονή ψήφο στο S είναι $s_1 + s_2$, ενώ το πλήθος όλων των διπλών ψήφων που και οι δύο μονές ψήφοι είναι στο S είναι $s_2 \leq ab$.

Αφού όλες οι διπλές ψήφοι είναι διαφορετικές ανά δύο, θα έχουμε τουλάχιστον $s_1 + s_2$ κριτικούς. Αλλά το πλήθος των μονών ψήφων στο S είναι $s_1 + 2s_2 = 34 + 35 + \dots + 100 = 4489$, και επιπλέον $s \leq ab$. Οπότε υπάρχουν τουλάχιστον $s_1 + s_2 = s_1 + 2s_2 - s_2 \geq 4489 - ab$ κριτικοί.

Από το γεγονός ότι $a + b = 67$, η μέγιστη τιμή του ab με a, b ακέραιους, επιτυγχάνεται όταν $\{a, b\} = \{33, 34\}$, οπότε $ab \leq 33 \cdot 34 = 1122$. Πράγματι: $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{67^2 - (a-b)^2}{4}$ που μεγιστοποιείται (για φυσικούς a, b) όταν $|a-b| = 1$, οπότε $\{a, b\} = \{33, 34\}$.

Οπότε υπάρχουν τουλάχιστον $4489 - 1122 = 3367$ κριτικοί, που είναι άτοπο. \square

Σημείωση. Θα δώσουμε ένα επιχειρήμα για την επιλογή του αριθμού 34, στην παραπάνω λύση. Υποθέτουμε ότι κάθε κριτικός ψήφισε διαφορετικό ζεύγος από ενός ηθοποιού και μιας ηθοποιού. Και πάλι παίρνουμε έναν ηθοποιό ή μία ηθοποιό που ψηφίστηκε από n κριτικούς για $n = k, k+1, \dots, 100$. Τότε $a + b = 100 - k + 1 = 101 - k$ και ο αριθμός των μονών ψήφων είναι $s_1 + 2s_2 = k + k + 1 + \dots + 100 = 5050 - \frac{k(k-1)}{2}$, άρα υπάρχουν τουλάχιστον $s_1 + s_2 = s_1 + 2s_2 - s_2 \geq 5050 - \frac{k(k-1)}{2} - ab$ κριτικοί και

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{(101-k)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{(101-k)^2 - 1}{4}.$$

Οπότε οι κριτικοί είναι τουλάχιστον

$$5050 - \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(101-k)^2 - 1}{4}.$$

Για να καταλήξουμε σε άτοπο θέλουμε να διαλέξουμε το k έτσι ώστε

$$5050 - \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(101-k)^2 - 1}{4} \geq 3367$$

και λύνοντας την τελευταία δευτεροβάθμια ανίσωση ως προς k , η μόνη τιμή για την οποία έχουμε άτοπο είναι η $k = 34$.

Πρόβλημα 4. Να αποδείξετε ότι μεταξύ 20 διαδοχικών θετικών ακέραιων υπάρχει ένας ακέραιος d τέτοιος ώστε για κάθε θετικό ακέραιο n να ισχύει η ανισότητα

$$n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2}$$

όπου με $\{x\}$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του πραγματικού x . Το κλασματικό μέρος του πραγματικού αριθμού x ορίζεται ως η διαφορά του μεγαλύτερου ακέραιου που είναι μικρότερος ή ίσος του x από τον πραγματικό αριθμό x .

Λύση. Μεταξύ των δοθέντων αριθμών υπάρχει ένας αριθμός της μορφής $20k + 15 = 5(4k + 3)$. Θα αποδείξουμε ότι ο $d = 5(4k + 3)$ ικανοποιεί το ζητούμενο. Πράγματι, αφού $d \equiv -1 \pmod{4}$, έπεται ότι ο d δεν είναι τέλειο τετράγωνο και επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a \in \mathbb{N}$ ώστε $a + 1 > n\sqrt{d} > a$, οπότε, $(a + 1)^2 > n^2d > a^2$. Θα αποδείξουμε ότι $n^2d \geq a^2 + 5$. Πράγματι:

Είναι γνωστό ότι κάθε θετικός ακέραιος της μορφής $4s + 3$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη της ίδιας μορφής. Έστω $p \mid 4k + 3$ και $p \equiv -1 \pmod{4}$. Τότε λόγω της μορφής του p , οι αριθμοί $a^2 + 1^2$ και $a^2 + 2^2$ δεν διαιρούνται από το p , και αφού $p \mid n^2d$, έπεται ότι $n^2d \neq a^2 + 1, a^2 + 4$. Επιπλέον, $5 \mid n^2d$, και $5 \nmid a^2 + 2, a^2 + 3$, οπότε $n^2d \neq a^2 + 2, a^2 + 3$. Τελικά επειδή $n^2d > a^2$, θα πρέπει να έχουμε $n^2d \geq a^2 + 5$. Τότε,

$$n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} = n\sqrt{d}(n\sqrt{d} - a) \geq a^2 + 5 - a\sqrt{a^2 + 5} > a^2 + 5 - \frac{a^2 + (a^2 + 5)}{2} = \frac{5}{2},$$

που είναι το ζητούμενο. □

**Αποχαιρετιστήριο μήνυμα από τον
Καθηγητή Νικόλαο Αλεξανδρή
Πρόεδρο της Οργανωτικής Επιτροπής της ΒΜΟ 2015**

Αξιότιμε κ. Εκπρόσωπε του Υπουργείου Πολιτισμού Παιδείας και Θρησκευμάτων
κ. Αντιπεριφερειάρχη
Αξιότιμε κ. Εκπρόσωπε του Δημάρχου του Παλαιού Φαλήρου
Αξιότιμε κ. Σγουρέ
Επίσημοι προσκεκλημένοι
Κύριοι Συνάδελφοι
Κυρίες και Κύριοι

Η 32^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα έφτασε στο τέλος. Θέλουμε να πιστεύουμε ότι ανταποκριθήκαμε στις προσδοκίες της Βαλκανικής Μαθηματικής Κοινότητας που μας εμπιστεύτηκε τη διοργάνωση αυτή.

Σ' αυτή τη ΒΜΟ μαθητές από τις Βαλκανικές χώρες και μαθητές από χώρες της Ευρώπης και της Ασίας που προσκλήθηκαν ως φιλοξενούμενες χώρες είχαν την ευκαιρία να συμμετάσχουν συνοδευόμενοι από τους Αρχηγούς τους, τους Υπαρχηγούς και Παρατηρητές και μας έδωσαν τη χαρά και την τιμή να τους γνωρίσουμε.

Αγαπητοί μαθητές,

Σε όλους εσάς, που είστε ανάμεσα στους καλύτερους μαθητές στα Μαθηματικά στις χώρες σας, αξίζουν συγχαρητήρια για τη συμμετοχή σας σε αυτόν το διαγωνισμό, ανεξάρτητα αν πήρατε βραβείο. Σε κάθε περίπτωση αυτό που αξίζει είναι η συμμετοχή.

Το γεγονός ότι ήρθατε στην ΒΜΟ αποδεικνύει ότι θεωρείτε τα Μαθηματικά μια επιλογή για τη μελλοντική σας σταδιοδρομία πάνω στα Μαθηματικά ή σε σχετικό επιστημονικό πεδίο. Κάνατε μια καλή αρχή και ο δρόμος φαντάζει ανοιχτός αλλά μια τέτοια επιλογή δεν υπόσχεται μια εύκολη ζωή. Πολλοί από εσάς γνωρίζουν ότι τα μαθηματικά προβλήματα είναι εύκολο να τα διατυπώσεις αλλά μάλλον δύσκολο να επιλύσεις και ακόμη και μια έξυπνη ιδέα χρειάζεται μεγάλη προσπάθεια για να την επεξεργαστείς σωστά.

Μια μαθηματική Ολυμπιάδα δεν είναι το τέλος. Μια εξαιρετική επίδοση σε αυτή δεν είναι απαραίτητη ούτε αρκετή για να γίνει κάποιος μεγάλος μαθηματικός. Η ικανότητα να έχεις ιδέες και να κάνεις γρήγορα υπολογισμούς είναι υπέροχα ταλέντα αλλά πολλοί διακεκριμένοι μαθηματικοί δεν έχουν κερδίσει διακρίσεις σε Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Αυτός ο διαγωνισμός, όπως όλοι οι άλλοι μαθηματικοί διαγωνισμοί, παραμένει ένα μέσο για περαιτέρω εξέλιξη στα Μαθηματικά.

Είμαι σίγουρος ότι σε μερικά χρόνια από σήμερα οι περισσότεροι από εσάς θα είναι μέλη Επιτροπών κάποιας Μαθηματικής Ολυμπιάδας ή αρχηγοί των ομάδων των χωρών σας.

Αγαπητοί καλεσμένοι,

Ζητούμε συγνώμη για τη λιτότητα στη φιλοξενία μας εξαιτίας των οικονομικών δυσκολιών που αντιμετωπίζει η χώρα μας.

Σε κάθε όμως περίπτωση θέλουμε να πιστεύουμε ότι η ΒΜΟ 2015 θα είναι μια αξέχαστη εμπειρία για όλους σας.

Έτσι εκ μέρους της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και της Οργανωτικής Επιτροπής της 32^{ης} Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους εργάστηκαν για την επιτυχία της ΒΜΟ αυτής.

Είναι τόσοι πολλοί, ξέρουν ποιοι είναι, είναι όλοι εθελοντές και όλοι δούλεψαν σκληρά.

Πρέπει επίσης να εκφράσουμε την ευγνωμοσύνη μας στο Υπουργείο Πολιτισμού Παιδείας και Θρησκευμάτων, την Περιφέρεια Αττικής, στο Δήμο Παλαιού Φαλήρου και κυρίως στο Δήμαρχο κ. Διονύσιο Χατζηδάκη και όλους τους χορηγούς της ΒΜΟ.

Τέλος οφείλουμε πολλές ευχαριστίες στο πιανίστα κ. Κωνσταντίνο Παππέλη και στο Χορευτικό Τμήμα που θα μας χαρίσουν μια ευχάριστη βραδιά.

Αγαπητοί φίλοι, αύριο θα αναχωρήσετε για τις χώρες σας
Σας ευχόμαστε καλό ταξίδι και ό,τι καλύτερο.

Ευχαριστώ

**Αποχαιρετιστήριο μήνυμα από τον
Υπουργό Πολιτισμού Παιδείας και Θρησκευμάτων
κ. Αριστεΐδη Μπαλτά**

Με την ολοκλήρωση της 32^{ης} Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας είναι μεγάλη χαρά για τον Υπουργό να υποδέχεται σήμερα τόσους νέους ανθρώπους, τόσα φωτεινά μυαλά.

Εκπροσωπείτε τις χώρες σας στην Ελλάδα, τη χώρα του Ευκλείδη και του Πυθαγόρα, του Θαλή και του Αρχιμήδη.

Η εξέλιξη των Μαθηματικών επηρέασε και καθόρισε ριζικά την πρόοδο του πολιτισμού μας. Σε μια πορεία αιώνων, τα Μαθηματικά ενσωματώθηκαν στη βασική εκπαίδευση, προσφέροντας ένα αντικειμενικό κριτήριο περιγραφής καταστάσεων και θεωρούνται πλέον ως το πιο ενοποιητικό στοιχείο της πολιτισμικής κληρονομιάς μας.

Η επιστήμη των μαθηματικών μελετά τις δομές, τα σχήματα, το χώρο, τη μεταβολή των σχέσεων και της διαδραστικότητας όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας αλλά και της φαντασίας μας.

Τα Μαθηματικά αποτελούν βασικό πυλώνα της εκπαίδευσης και ευχόμαστε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία να αναπτυχθεί ακόμη περισσότερο και να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές και να αναδειξουν τις ικανότητες και δεξιότητές τους στις επιστήμες και τις τέχνες.

Σας εύχομαι καλή επιτυχία και καλή Λογική και να θυμάστε όλοι το ρητό του μεγάλου φιλοσόφου μας και μαθηματικού Πυθαγόρα «Πάντα κατ' αριθμόν γίνονται»

Σας ευχαριστώ πολύ.

SPONSORS

- *Prefecture of Athens*
- *Palaio Faliro Municipality*
- *OTE-COSMOTE*
- *DEH AE*
- *ATTICA BANK*
- *Hellenic Tourism Organization (EOT)*
- *Acropolis Museum*
- *FAGE A.E.*
- *NESTLE HELLAS A.E*
- *LOUX Marlafekas AVEE*
- *VIKOS A.E*
- *Chios Fruits*
- *Emmanouil G.Mendonidis-Mastic Products “Ek Chiou”*