ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε.Μ.Ε.
ΛΕΠΤΟΚΑΡΥΑ ΠΙΕΡΙΑΣ 2012
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αργύρης Φελλούρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό θεωρούμε γνωστές τις βασικές έννοιες του μονωνύμου, του πολυωνύμου και των πράξεών τους. Θα ασχοληθούμε με την ανάλυση πολυωνύμων σε γινόμενο παραγόντων, με ταυτότητες και με ρητά αλγεβρικά κλάσματα.

Οι συντελεστές των μονωνύμων και των πολυωνύμων θεωρούμε ότι παίρνουν τιμές από το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

1. Ανάλυση πολυωνύμων σε γινόμενο παραγόντων

Ανάλυση πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων ή απλούστερα παραγοντοποίηση είναι η γραφή ενός δεδομένου πολυωνύμου ως γινόμενο πολυωνυμικών παραγόντων. Οι πολυωνυμικοί παράγοντες που εμφανίζονται πρέπει να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού.

Η ανάλυση πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων πολλές φορές δεν είναι δυνατή. Δεν υπάρχει γενικός κανόνας για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων. Όμως, για ειδικές μορφές πολυωνύμων δίνουμε μεθόδους παραγοντοποίησης.

(α) Πολυωνυμικές παραστάσεις που οι όροι τους έχουν κοινό παράγοντα

Παραδείγματα.

1. $2\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha\beta\cdot(2\alpha - 3\beta)$

2. $5\alpha^\nu - 10\alpha^{\nu+1}\beta + 20\alpha^{\nu+2}\beta^2 = 5\alpha^\nu\cdot(1 - 2\alpha\beta + 4\alpha^2\beta^2)$

3. $3x(y-1)^2 - 6x^2(y-1)^2 + 3x(y-1) = 3x(y-1)\cdot[y-1-2x(y-1)+1]$

$$= 3x(y-1)(y-1-2xy+2x+1) = 3x(y-1)(y-2xy+2x).$$

(β) Χωρισμός σε ομάδες

Στην περίπτωση αυτή η πολυωνυμική παράσταση χωρίζεται σε ομάδες, σε καθεμία από τις οποίες υπάρχει κοινός παράγοντας. Η παραγοντοποίηση είναι δυνατή, όταν μετά την παραγοντοποίηση τους οι ομάδες αυτές εμφανίζουν κοινόν παράγοντα.

Παραδείγματα

1. $ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=a\cdot(x+y)+b\cdot(x+y)=(x+y)\cdot(a+b)$.

2. $a^2x^2+b^2x^2-2xa^2-2xb^2=x^2(a^2+b^2)-2x(a^2+b^2)=(a^2+b^2)\cdot(x^2-2x)=$
$=x(x-2)(a^2+b^2)$.

(γ) Διαφορά τετραγώνων

Αν A, B είναι πολυωνυμικές παραστάσεις, τότε:

$$A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$$

Παραδείγματα

1. $x^6-y^4=(x^3)^2-(y^2)^2=(x^3+y^2)(x^3-y^2)$.

2. $16x^4-81y^4=(4x^2)^2-(9y^2)^2=(4x^2-9y^2)\cdot(4x^2+9y^2)$
$=[(2x)^2-(3y)^2]\cdot(4x^2+9y^2)=(2x-3y)\cdot(2x+3y)\cdot(4x^2+9y^2)$.

***(δ) Πολυωνυμικές παραστάσεις της μορφής* : $A^2\pm 2AB+B^2$**

Αν A, B είναι πολυωνυμικές παραστάσεις, τότε:

$$A^2+2AB+B^2=A^2+AB+AB+B^2$$
$$=A\cdot(A+B)+B\cdot(A+B)=(A+B)^2,$$

δηλαδή έχουμε

$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$

Ομοίως έχουμε

$$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$$

Παραδείγματα

1. $9x^2+30xy+25y^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=(3x+5y)^2$.

2. $x^{2\nu}\pm 2x^\nu y^\nu+y^{2\nu}=(x^\nu)^2\pm 2\cdot x^\nu\cdot y^\nu+(y^\nu)^2=(x^\nu\pm y^\nu)^2$

3. $(4x^2-5y)^2-(3y-6x^2)^2=(4x^2-5y+3y-6x^2)\cdot[4x^2-5y-(3y-6x^2)]$
$=(-2x^2-2y)\cdot(4x^2-5y-3y+6x^2)$
$=-2(x^2+y)\cdot(10x^2-8y)=-4(x^2+y)\cdot(5x^2-4y)$.

(ε) Τριώνυμα

Τριώνυμα είναι πολυωνυμικές παραστάσεις της μορφής

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

με $\alpha\neq 0$ και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Ο αριθμός $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** του τριωνύμου $f(x)$ και ισχύουν τα εξής:

- Αν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο $f(x)$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων της μορφής $f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$, όπου οι αριθμοί $x_1,\ x_2$ δίνονται από τους τύπους

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

Πράγματι, αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, έχουμε

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{a}\right]$$

$$= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) =$$

$$= \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$

αν θέσουμε

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε: $f(x) = \alpha\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

Πράγματι, αν $\Delta = 0$ έχουμε:

$$f(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] = a\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν $\Delta < 0$, τότε το τριώνυμο $f(x)$ δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Πράγματι, αν $\Delta < 0$, τότε έχουμε

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2}\right] = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right],$$

δηλαδή το τριώνυμο $f(x)$ είναι γινόμενο του συντελεστή α επί μία παράσταση που είναι άθροισμα τετραγώνων.

Παραδείγματα

1. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Αφού είναι: $\alpha = 1,\ \beta = -4,\ \gamma = 3$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 4 > 0$, οπότε

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1.$$

Έχουμε $f(x)=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$.

2. Ομοίως για το τριώνυμο $f(x)=25x^2-20x+1$, έχουμε

$\alpha=25, \beta=-20, \gamma=1, \Delta=(-20)^2-4\cdot 1\cdot 25=300>0$ και

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{20\pm\sqrt{300}}{2\cdot 25}=\frac{20\pm 10\sqrt{3}}{50}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{5}$$

Άρα είναι

$$f(x)=25x^2-20x+1=25\left(x-\frac{2+\sqrt{3}}{5}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}}{5}\right).$$

3. Ομοίως για το τριώνυμο $f(x)=x^2+x+1$, είναι $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1,$ και $\Delta=1^2-4=-3<0$, οπότε το τριώνυμο $f(x)=x^2+x+1$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

4. Ομοίως για το τριώνυμο $f(x)=x^2-8x+16$, είναι $\alpha=1,\ \beta=-8,\ \gamma=16,$ και $\Delta=(-8)^2-4\cdot 16\cdot 1=0$, οπότε :

$$f(x)=x^2-8x+16=1\cdot\left(x+\frac{-8}{2\cdot 1}\right)^2=(x-4)^2.$$

(στ) Ανάλυση ενός όρου σε άθροισμα ή διαφορά άλλων όρων

Πολλές φορές, για την ανάλυση μιας πολυωνυμικής παράστασης σε γινόμενο παραγόντων, είναι αναγκαίο να αναλύσουμε έναν ή περισσότερους όρους σε άθροισμα ή διαφορά άλλων όρων. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα να εφαρμόσουμε μία από τις προηγούμενες μεθόδους παραγοντοποίησης, π.χ. με τον χωρισμό σε ομάδες.

Παραδείγματα

1. Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση

$$A=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2+2\alpha\beta\gamma.$$

Λύση

$$\begin{aligned}A&=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2+2\alpha\beta\gamma\\&=(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma)+(\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)+(\gamma^2\alpha+\alpha\beta\gamma)\\&=\alpha^2(\beta+\gamma)+\alpha\beta(\beta+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\beta+\gamma)\\&=(\beta+\gamma)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)\\&=(\beta+\gamma)\left[(\alpha^2+\alpha\beta)+(\beta\gamma+\alpha\gamma)\right]\\&=(\beta+\gamma)\left[(\alpha(\alpha+\beta)+\gamma(\alpha+\beta)\right]\\&=(\beta+\gamma)\ (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha).\end{aligned}$$

2. Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση

$$f(x)=x^3-5x+4.$$

Λύση

$$f(x)=x^3-5x+4=x^3-x-4x+4=x(x^2-1)-4(x-1)$$
$$=x(x+1)(x-1)-4(x-1)=(x-1)[x(x+1)-4]=(x-1)(x^2+x-4)$$
$$=(x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right).$$

3. Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση

$$f(x)=x^3-3x^2+4.$$

Λύση

$$f(x)=x^3-3x^2+4=x^3+x^2-4x^2+4=x^2(x+1)-4(x^2-1)$$

$$=(x+1)\cdot[x^2-4(x-1)]=(x+1)\cdot(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$$

(ζ) Αξιοσημείωτα πηλίκα της μορφής: $\alpha^\nu \pm \beta^\nu$ **,** $\nu \in \mathbb{N}^*$**.**

Σύμφωνα με την ταυτότητα της τέλειας διαίρεσης κάθε παράσταση της μορφής $\alpha^\nu-\beta^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$ διαιρούμενη με $\alpha-\beta$ δίνει υπόλοιπο 0 και πηλίκο

$$\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-2}\beta^2+...+\alpha^2\beta^{\nu-3}+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}.$$

Έτσι έχουμε

$$\boxed{\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+...+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}).}$$

Ειδικά για $\nu=2\mu$, $\mu\in\mathbb{N}^*$, έχουμε

$$\alpha^\nu-\beta^\nu=\alpha^{2\mu}-\beta^{2\mu}=(\alpha^\mu)^2-(\beta^\mu)^2=(\alpha^\mu-\beta^\mu)\cdot(\alpha^\mu+\beta^\mu).$$

Για παράδειγμα, έχουμε

1. $\alpha^3-\beta^3=(a-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

2. $\alpha^5-\beta^5=(a-\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3\beta^4)$

3. $\alpha^4-\beta^4=(a^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

.

Για $\nu=2\mu+1$, $\mu\in\mathbb{N}$, η παράσταση $\alpha^\nu+\beta^\nu$ διαιρούμενη με $\alpha+\beta$ δίνει υπόλοιπο 0 και ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-...-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}).}$$

Για παράδειγμα, έχουμε

1. $\alpha^3+\beta^3=(a+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

2. $\alpha^5+\beta^5=(a+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)$

3. $\alpha^7+\beta^7=(a^2+\beta^2)(\alpha^6-\alpha^5\beta+\alpha^4\beta^2-\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4-\alpha\beta^5+\beta^6)$

Ειδικές περιπτώσεις

Για $\nu = 2\mu + 1$, $\mu \in \mathbb{N}^*$, η παράσταση $\alpha^\nu + \beta^\nu$ διαιρούμενη με $\alpha + \beta$ δίνει υπόλοιπο $2\beta^\nu$, οπότε η παραπάνω μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η παράσταση $\alpha^\nu + \beta^\nu$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

Στην ειδική περίπτωση που το ν είναι άρτιο πολλαπλάσιο περιττού αριθμού, έστω $\nu = 2\kappa \cdot \mu$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$ περιττός , τότε

$$\begin{aligned}\alpha^\nu + \beta^\nu &= \alpha^{2\kappa\mu} + \beta^{2\kappa\mu}\\ &= (\alpha^{2\kappa})^\mu + (\beta^{2\kappa})^\mu\\ &= (\alpha^{2\kappa} + \beta^{2\kappa})[(\alpha^{2\kappa})^{\mu-1} - (\alpha^{2\kappa})^{\mu-2}\beta^{2\kappa} + \cdots + (\beta^{2\kappa})^{\mu-1}].\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

1. $\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^2)^3 + (\beta^2)^3 = (\alpha^2 + \beta^2)[(\alpha^2)^2 - \alpha^2\beta^2 + (\beta^2)^2]$
$= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 + \beta^4)$.

2. $\alpha^{10} + \beta^{10} = (\alpha^2)^5 + (\beta^2)^5 = (\alpha^2 + \beta^2)\cdot(\alpha^8 - \alpha^6\beta^2 + \alpha^4\beta^4 - \alpha^2\beta^6 + \beta^8)$

3. $\alpha^{12} + \beta^{12} = (\alpha^4)^3 + (\beta^4)^3 = (\alpha^4 + \beta^4)\cdot(\alpha^8 - \alpha^4\beta^4 + \beta^8)$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $\nu = 2^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 1$ έχουμε:

$$\alpha^\nu + \beta^\nu = \alpha^{2^\kappa} + \beta^{2^\kappa} = \left(\alpha^{2^{\kappa-1}}\right)^2 + \left(\beta^{2^{\kappa-1}}\right)^2$$

$$= \left(\alpha^{2^{\kappa-1}}\right)^2 + \left(\beta^{2^{\kappa-1}}\right)^2 + 2\alpha^{2^{\kappa-1}}\beta^{2^{\kappa-1}} - 2\alpha^{2^{\kappa-1}}\beta^{2^{\kappa-1}} = \left(\alpha^{2^{\kappa-1}} + \beta^{2^{\kappa-1}}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\alpha^{2^{\kappa-2}}\beta^{2^{\kappa-2}}\right)$$

$$= \left(\alpha^{2^{\kappa-1}} + \beta^{2^{\kappa-1}} + \sqrt{2}\alpha^{2^{\kappa-2}}\beta^{2^{\kappa-2}}\right)\left(\alpha^{2^{\kappa-1}} + \beta^{2^{\kappa-1}} - \sqrt{2}\alpha^{2^{\kappa-2}}\beta^{2^{\kappa-2}}\right)$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

1. $\alpha^4 + \beta^4 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - (\sqrt{2}\alpha^2\beta^2)^2$
$= (\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{2}\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{2}\alpha\beta)$

2. $\alpha^8 + \beta^8 = \alpha^8 + \beta^8 + 2\alpha^4\beta^4 - 2\alpha^4\beta^4 = (\alpha^4 + \beta^4)^2 - (\sqrt{2}\alpha^2\beta^2)^2$
$= (\alpha^4 + \beta^4 + \sqrt{2}\alpha^2\beta^2)(\alpha^4 + \beta^4 - \sqrt{2}\alpha^2\beta^2)$

(η) Συνδυασμός άλλων μεθόδων

Αναφέρουμε τις παρακάτω χαρακτηριστικές περιπτώσεις :

$$\boxed{\mathbf{A^2 + 2AB + B^2 - \Gamma^2 = (A + B)^2 - \Gamma^2 = (A + B + \Gamma)(A + B - \Gamma)}}$$

$$\boxed{\mathbf{A^2 - 2AB + B^2 - \Gamma^2 = (A - B)^2 - \Gamma^2 = (A - B + \Gamma)(A - B - \Gamma)}}$$

Για παράδειγμα έχουμε

1. $16\alpha^2+24\alpha\beta+9\beta^2-4\gamma^2=(4\alpha+3\beta)^2-(2\gamma)^2=(4\alpha+3\beta+2\gamma)(4\alpha+3\beta-2\gamma)$
2. $25\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2=(5\alpha)^2-(\beta-\gamma)^2=\left[(5\alpha+(\beta-\gamma)\right]\cdot\left[(5\alpha-(\beta-\gamma)\right]$
$=(5\alpha+\beta-\gamma)(5\alpha-\beta+\gamma)$.
3. $\alpha^4+4\beta^4=(\alpha^2)^2+(2\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+2\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2$
$=(\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta)$.
4. $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-\alpha^2\beta^2$
$=(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$.

(θ) Χρήση ταυτοτήτων

Η περίπτωση αυτή θα μελετηθεί στην επόμενη ενότητα των ταυτοτήτων.

(ι) Πολυώνυμα βαθμού $\nu>2$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\quad \alpha_\kappa\neq 0$.

Σύμφωνα με τη θεωρία διαιρετότητας πολυωνύμων, αν για τον αριθμό $\rho\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(\rho)=0$, τότε το πολυώνυμο $x-\rho$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$. Το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης αυτής, μπορεί να βρεθεί με το σχήμα Horner. Έτσι έχουμε $f(x)=(x-\rho)\ \pi(x)$.

Ειδικότερα, για να είναι ο ακέραιος αριθμός ρ ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές πρέπει ο αριθμός ρ να είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. Επομένως οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου α_0.

Επιπλέον, για να είναι ο ρητός αριθμός $\rho=\dfrac{\kappa}{\lambda}$ ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές πρέπει ο αριθμητής κ να είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 και ο παρανομαστής λ να είναι διαιρέτης του μεγιστοβάθμιου όρου α_ν.

.

Παράδειγμα

Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

Λύση

Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι οι: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, οπότε με το σχήμα Horner λαμβάνουμε

1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	
1	-5	6	0	

Έτσι έχουμε

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3),$$

αφού για το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$, $\Delta = 1 > 0$ και

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \; x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

2. Ταυτότητες

Ταυτότητα είναι η ισότητα μεταξύ δύο αλγεβρικών παραστάσεων που αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται.

Στην ενότητα αυτή θα απαριθμήσουμε τις βασικές ταυτότητες που χρησιμοποιούμε για τη διευκόλυνση του αλγεβρικού λογισμού. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους επαλήθευσης ταυτοτήτων

.

(α) Τετράγωνο αθροίσματος (διαφοράς) δύο όρων

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

(β) Γινόμενο αθροίσματος δύο όρων επί τη διαφορά τους

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

(γ) Κύβος αθροίσματος (διαφοράς) δύο όρων

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

(δ) Άθροισμα (διαφορά) κύβων

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

(ε) Τετράγωνο αθροίσματος ν όρων, $\nu \geq 3$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta$$

Γενικότερα, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^2=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)\\
&=\alpha_1\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)+\alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)+\ldots+\alpha_\nu\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)\\
&=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu)+2(\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_\nu)+\ldots+2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu\\
&=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2+2(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu).
\end{aligned}
$$

ή συνοπτικά $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^2=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i^2+2\sum_{1\le i<j\le\nu}\alpha_i\alpha_j$,

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το σύμβολο $\sum$ του αθροίσματος γράφοντας

$$\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2$$

$$\sum_{1\le i<j\le\nu}\alpha_i\alpha_j=\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu.$$

Έτσι έχουμε τον κανόνα:

Το τετράγωνο του αθροίσματος *ν* όρων, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των όρων του, αυξημένο κατά το διπλάσιο του αλγεβρικού αθροίσματος των γινομένων των όρων του λαμβανομένων ανά δύο με όλους τους δυνατούς τρόπους.

(στ) Κύβος αθροίσματος τριών όρων

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+\gamma)^3&=(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma\alpha^2+6\alpha\beta\gamma\\
&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2+2\alpha\beta\gamma)\\
&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha),
\end{aligned}
$$

σύμφωνα με το Παράδειγμα 1 της (στ) περίπτωσης της παραγοντοποίησης πολυωνυμικών παραστάσεων.

Άρα έχουμε:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

απ' όπου προκύπτει ο κανόνας:

Ο κύβος του αθροίσματος τριών όρων ισούται με το άθροισμα των κύβων των όρων του, αυξημένο κατά το τριπλάσιο του γινομένου των αλγεβρικών αθροισμάτων των όρων του λαμβανομένων ανά δύο με όλους τους δυνατούς τρόπους.

Για παράδειγμα έχουμε:

1. $(\alpha^2+\beta^2+1)^3=\alpha^6+\beta^6+1+3(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+1)(\beta^2+1)$.

2. $(2\alpha-\beta-3)^3=(2\alpha)^3+(-\beta)^3+(-3)^3+3(2\alpha-\beta)(-\beta-3)(-3+2\alpha)$.

$$=8\alpha^3-\beta^3-27+3(2\alpha-\beta)(\beta+3)(2\alpha-3).$$

(ζ) Η ταυτότητα των κύβων (Euler)

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\text{αβγ}$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]+3\text{αβγ}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\\&=(\alpha+\beta)^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)\\&=\left[(\alpha+\beta)+\gamma\right]\left[(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2\right]-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)\\&=(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha+\beta)^2+\gamma^2-\alpha\gamma-\beta\gamma-3\alpha\beta\right]\\&=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha).\end{aligned}$$

Η δεύτερη μορφή προκύπτει μέσω της ισότητας

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha&=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha)\\&=\frac{1}{2}\left[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right].\end{aligned}$$

Για παράδειγμα έχουμε:

1. $\alpha^3-8\beta^3-64\gamma^3-24\alpha\beta\gamma=\alpha^3+(-2\beta)^3+(-4\gamma)^3-3\cdot\alpha\cdot(-2\beta)(-4\gamma)$

$$=(\alpha-2\beta-4\gamma)(\alpha^2+4\beta^2+16\gamma^2+2\alpha\beta-8\beta\gamma+4\gamma\alpha).$$

2. $(\alpha-\beta)^3-\alpha^3+3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)^3+(-\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\alpha-\beta)(-\alpha)(\alpha+\beta)$

$$=\left[(\alpha-\beta)+(-\alpha)+(\alpha+\beta)\right]\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(-\alpha)^2+(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)\alpha+\alpha(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\right]$$
$$=(\alpha-\beta-\alpha+\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2-\alpha\beta+\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^2+\beta^2)$$
$$=\alpha\cdot(4\alpha^2+3\beta^2).$$

(η) Οι ταυτότητες του Lagrange

$$\textbf{(i)}\ (\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$$

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ορίζουσας ενός πίνακα 2×2, το δεύτερο μέλος της (i) γράφεται:

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2.$$

Η επαλήθευση της (i) γίνεται εύκολα με πράξεις στο πρώτο μέλος.

(ii) $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta+_2\alpha_3\beta_{_3})^2$

$$=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2$$

$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2$$

(Επαλήθευση εύκολη με πράξεις στο πρώτο μέλος).

(iii) Γενικότερα για τις ν-άδες $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu)$, $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_\nu)$ έχουμε

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+...+\beta_\nu^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\cdots+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_\nu\\ \beta_1 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\div\cdots+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_\nu\\ \beta_2 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\cdots+\begin{vmatrix}\alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu\\ \beta_{\nu-1} & \beta_\nu\end{vmatrix}^2$$

Παραδείγματα

1. Να αποδείξετε ότι

$$(1+\alpha^2)(1+\beta^2)-(1+\alpha\beta)^2=(\alpha-\beta)^2.$$

Απόδειξη

$$(1+\alpha^2)(1+\beta^2)-(1+\alpha\beta)^2=(1^2+\alpha^2)(1^2+\beta^2)-(1\cdot 1+\alpha\cdot\beta)^2$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ 1 & \beta\end{vmatrix}^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha-\beta)^2.$$

2. Να μετατρέψετε την παράσταση

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2+1)-(\alpha x+\beta y)^2$$

σε άθροισμα τετραγώνων.

Λύση

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2+1)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha^2+\beta^2+0^2)(x^2+y^2+1^2)-(\alpha x+\beta y+0\cdot 1)^2$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & 0\\ x & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta & 0\\ y & 1\end{vmatrix}^2=(\alpha y-\beta x)^2+\alpha^2+\beta^2.$$

(θ) Η ταυτότητα του De Moirve

$$\begin{aligned}&\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2\\&=-(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\end{aligned}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\alpha^4&+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2\\&=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-4\alpha^2\beta^2\\&=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(2\alpha\beta)^2\\&=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta)\\&=[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2][(\alpha-\beta)^2-\gamma^2]\\&=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)\\&=-(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\,.\end{aligned}$$

.

(ι) Η ταυτότητες του Νεύτωνα

$$\begin{aligned}(x+\alpha)(x+\beta)&=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\\(x-\alpha)(x-\beta)&=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\\(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)&=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma\\(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)&=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

Η επαλήθευση των παραπάνω ταυτοτήτων γίνεται εύκολα με πράξεις στο πρώτο μέλος τους.

Γενικότερα, αν θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$, έχουμε τις ταυτότητες:

$$\begin{aligned}(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)\ldots(x\pm\alpha_\nu)&=x^\nu\pm(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)\\&=x^{\nu-1}+(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-2}\\&\pm(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-3}\\&+\ldots+(-1)^{\nu-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu-1}+\ldots)x+(-1)^\nu\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu\,.\end{aligned}$$

ή συντομότερα,

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_\nu)=x^\nu+\Sigma_1x^{\nu-1}+\Sigma_2x^{\nu-2}+\Sigma_3x^{\nu-3}+\ldots+\Sigma_{\nu-1}x+\Sigma_\nu,$$

όπου για τους αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$, έχουμε θέσει:

$$\Sigma_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu,$$

$$\Sigma_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu\,.$$

[*Άθροισμα γινομένων των αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$, *λαμβανομένων ανά δύο. Υπάρχουν συνολικά* $\binom{\nu}{2} := \frac{\nu!}{(\nu-2)!2!} = \frac{(\nu-1)\nu}{2}$ *όροι*].

Το σύμβολο $\nu!$ διαβάζεται «**νι παραγοντικό**» και ορίζεται ως εξής:

$$\nu! = 1\cdot 2\cdot .....\cdot \nu, \text{ αν } \nu = 1,2,3,... \text{ και } 0! = 1.$$

$\Sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_1\alpha_2\alpha_\nu + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + ... + \alpha_1\alpha_3\alpha_\nu + ... + \alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$

[*Άθροισμα γινομένων των αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$, *λαμβανομένων ανά τρεις. Υπάρχουν συνολικά* $\binom{\nu}{3} := \frac{\nu!}{3!(\nu-2)!} = \frac{(\nu-1)\nu}{2}$ *όροι*].

……………………………………………………………………………………..

$\Sigma_{\nu-1} = \alpha_1\alpha_2...\alpha_{\nu-1} + \alpha_1\alpha_2...\alpha_{\nu-2}\alpha_\nu + ... + \alpha_2\alpha_3...\alpha_\nu$

[*Άθροισμα γινομένων των αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$, *λαμβανομένων ανά* $\nu-1$. *Υπάρχουν* ν *όροι*].

$\Sigma_\nu = \alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu$.

(ια) Το διώνυμο του Νεύτωνα

Αν στις ταυτότητες του Νεύτωνα θέσουμε: $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha$, λαμβάνουμε το ανάπτυγμα του διωνύμου του Νεύτωνα:

$$\boxed{(x+\alpha)^\nu = x^\nu + \Sigma_1 x^{\nu-1} + \Sigma_2 x^{\nu-2} + \Sigma_3 x^{\nu-3} + ... + \Sigma_{\nu-1}x + \Sigma_\nu,}$$

όπου έχουμε

$$\boxed{\Sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \nu\alpha = \binom{\nu}{1}\alpha,}$$

αφού $\binom{\nu}{1} = \frac{\nu!}{(\nu-1)!1!} = \nu$,

$$\boxed{\Sigma_2 = \binom{\nu}{2}\alpha^2}$$

αφού $\binom{\nu}{2} = \frac{\nu!}{2!(\nu-2)!} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$,

$$\boxed{\Sigma_3 = \binom{\nu}{3}\alpha^3 = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6}\alpha^3,...,\Sigma_{\nu-1} = \binom{\nu}{\nu-1}\alpha = \nu\alpha^{\nu-1}, \Sigma_\nu = \alpha^\nu,}$$

αφού είναι: $\binom{\nu}{3} := \frac{\nu!}{3!(\nu-3)!} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6}, \binom{\nu}{\nu-1} = \binom{\nu}{1} = \nu$.

Έτσι έχουμε:

$$(x+\alpha)^{\nu} = x^{\nu} + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^2 + \binom{\nu}{3}x^{\nu-3}\alpha^3 + ... + \binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1}\alpha^{\nu}$$

Από την παραπάνω ταυτότητα λαμβάνουμε:

$$\left(x-\alpha\right)^{\nu} = \left[x+\left(-\alpha\right)\right]^{\nu} =$$

$$= x^{\nu} - \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^2 - \binom{\nu}{3}x^{\nu-3}\alpha^3 + ... + (-1)^{\nu-1}\binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1} + (-1)^{\nu}\alpha^{\nu}$$

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο Σ του αθροίσματος και το σύμβολο των συνδυασμών ν ανά κ μπορούμε να γράψουμε το διώνυμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$(x+\alpha)^{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\nu-\kappa}\alpha^{\kappa}$$

$$(x-\alpha)^{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu}(-1)^{\kappa}\binom{\nu}{\kappa}x^{\nu-\kappa}\alpha^{\kappa}$$

Για τις μικρές τιμές του ν έχουμε τα αναπτύγματα:

$$(x\pm\alpha)^2 = x^2 \pm 2x\alpha + \alpha^2$$

$$(x\pm\alpha)^3 = x^3 \pm 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 \pm \alpha^3$$

$$(x\pm\alpha)^4 = x^4 \pm 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 \pm 4x\alpha^3 + \alpha^4$$

$$(x\pm\alpha)^5 = x^5 \pm 5x^4\alpha + 10x^3\alpha^2 \pm 10x^2\alpha^3 + 5x\alpha^4 \pm \alpha^5$$

$$(x\pm\alpha)^6 = x^6 \pm 6x^5\alpha + 15x^4\alpha^2 \pm 20x^3\alpha^3 \pm 15x^2\alpha^4 + 6x\alpha^5 \pm \alpha^6$$

Παρατηρήσεις

Ένα πολυώνυμο $f(x,\alpha)$ είναι **ομογενές βαθμού k**, αν για κάθε $t \in \mathrm{R}$ ισχύει η ισότητα $f(tx,t\alpha) = t^{\kappa} f(x,\alpha)$. Έτσι, εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα πολυώνυμα $(x\pm a)^{\nu}$ είναι ομογενή βαθμού ν.

Το πλήθος των όρων των δύο αναπτυγμάτων είναι $\nu+1$.

Οι εκθέτες του x από αριστερά προς τα δεξιά μειώνονται κατά 1, ενώ οι εκθέτες του α αυξάνονται κατά 1.

Όλοι οι όροι του αναπτύγματος $(x+a)^{\nu}$ έχουν θετικά πρόσημα, ενώ οι όροι του $(x-a)^{\nu}$ έχουν εναλλάξ θετικό-αρνητικό πρόσημο.

Επειδή ισχύει $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}:=\dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$, $0\le\kappa\le\nu$, 0!=1, οι συντελεστές των όρων που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι ίσοι.

Αν ο ν είναι άρτιος, το πλήθος των όρων των δύο αναπτυγμάτων είναι περιττό και τότε μόνον υπάρχει μεσαίος όρος.

Ο συντελεστής ενός όρου (χωρίς πρόσημο), μετά τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενο όρο ως εξής:

$$\frac{(συντελεστής)\times(εκθέτης\ του\ x)}{θέση\ του\ όρου\ στο\ ανάπτυγμα}$$

Για παράδειγμα, στο ανάπτυγμα του $(x+a)^6$ ο συντελεστής του τρίτου όρου προκύπτει από το δεύτερο όρο ως εξής:

$$\frac{(συντελεστής)\times(εκθέτης\ του\ x)}{θέση\ δεύτερου\ όρου}=\frac{6\cdot 5}{2}=15.$$

Εκτός του παραπάνω μνημονικού κανόνα για την εύρεση των συντελεστών του αναπτύγματος $(x+a)^{\nu}$ για τις διάφορες τιμές του ν, χρησιμοποιούμε και το **τρίγωνο του Pascal** (1623 – 1662) που εμφανίζεται πρώτα στο έργο του Pascal «Περί αριθμητικού τριγώνου» το 1653. Τα ακραία στοιχεία κάθε γραμμής είναι 1, ενώ τα υπόλοιπα προκύπτουν με πρόσθεση δύο στοιχείων της προηγούμενης γραμμής, δηλαδή του στοιχείου που βρίσκεται στην ακριβώς από πάνω θέση αριστερά και του στοιχείου που βρίσκεται ακριβώς δεξιά του.

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1
\end{array}$$

Το τρίγωνο του Pascal μέχρι $\nu=7$

Για παράδειγμα, το στοιχείο 20 του πίνακα προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων 10 και 10 της προηγούμενης γραμμής.

.

(ιβ) Ταυτότητες κάτω από συνθήκες

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \text{ή} \quad \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της ταυτότητας των κύβων (Euler)

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right].$$

3. Αναλογίες

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων, δηλαδή η ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}, \qquad \beta\delta \neq 0.$$

Οι όροι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μιας αναλογίας μπορεί να είναι αριθμοί ή γενικότερα αλγεβρικές παραστάσεις. Οι α, δ είναι οι **άκροι** όροι, ενώ οι β, γ είναι οι **μέσοι** όροι της αναλογίας.

Η αναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}, \qquad \beta\gamma \neq 0,$$

λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέσος ανάλογος** των α και γ

Στη συνέχεια αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητες των αναλογιών, όπου όλοι οι εμφανιζόμενοι παρανομαστές πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός.

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$

Τα γινόμενα των άκρων και των μέσων όρων είναι ίσα.

Απόδειξη

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}=0 \Leftrightarrow \alpha\delta-\beta\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma.$$

(ii) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\delta}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\delta}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\alpha}.$

Με εναλλαγή των άκρων ή των μέσων όρων η αναλογία δεν μεταβάλλεται. Το ίδιο ισχύει και με αντιστροφή των λόγων.

(iii) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}\pm 1=\dfrac{\gamma}{\delta}\pm 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma\pm\delta}{\delta}.$

(iv) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\dfrac{\gamma}{\gamma\pm\delta}.$

Απόδειξη

$$\frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}\Leftrightarrow \alpha(\gamma\pm\delta)=\gamma(\alpha\pm\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma\pm\alpha\delta=\gamma\alpha\pm\gamma\beta\Leftrightarrow \alpha\delta=\gamma\beta\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

(v) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$.

Απόδειξη

$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ (αντιστροφή λόγων)

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma-\alpha\delta+\beta\gamma-\beta\delta=\alpha\gamma+\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta$$

$$\Leftrightarrow 2\beta\gamma=2\alpha\delta\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

(vi) Αν είναι $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}=...=\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, τότε

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=...=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}=\frac{\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+...+\kappa_\nu\alpha_\nu}{\kappa_1\beta+\kappa_2\beta_2+...+\kappa_\nu\beta_\nu},$$

($\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu\neq 0$, $\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu\neq 0$, $\kappa_1\beta+\kappa_2\beta_2+...+\kappa_\nu\beta_\nu\neq 0$).

Απόδειξη

Αν ονομάσουμε λ τους ν ίσους λόγους, δηλαδή

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=...=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\lambda.$$

Τότε θα έχουμε $\alpha_i=\lambda\beta_i$, για κάθε $i=1,2,...,\nu$ και

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=\lambda\beta_1+\lambda\beta_2+...+\lambda\beta_\nu=\lambda(\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu)$$

$$\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+...+\kappa_\nu\alpha_\nu=\kappa_1\lambda\beta_1+\kappa_2\lambda\beta_2+...+\kappa_\nu\lambda\beta_\nu$$

$$=\lambda(\kappa_1\beta_1+\kappa_2\beta_2+...+\kappa_\nu\beta_\nu)$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}=\frac{\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+...+\kappa_\nu\alpha_\nu}{\kappa_1\beta+\kappa_2\beta_2+...+\kappa_\nu\beta_\nu}=\lambda$$

Παρατήρηση

Η μέθοδος απόδειξης της τελευταίας ιδιότητας χρησιμοποιείται συχνά σε ασκήσεις, στις υποθέσεις των οποίων υπάρχουν μία ή περισσότερες αναλογίες.

4. Ρητά αλγεβρικά κλάσματα

Ρητό αλγεβρικό κλάσμα είναι μία συνάρτηση της μορφής $y = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, όπου τα Α, Β είναι πολυώνυμα μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών. Το παραπάνω ρητό αλγεβρικό κλάσμα έχει έννοια για εκείνες τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ισχύει $\mathrm{B} \neq 0$.

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την απλοποίηση ρητών αλγεβρικών κλασμάτων και με τις διάφορες πράξεις μεταξύ αυτών.

Για την απλοποίηση του ρητού αλγεβρικού κλάσματος $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ παραγοντοποιούμε τους δύο όρους τους και στη συνέχεια τους διαιρούμε με το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους ΜΚΔ(Α, Β), δηλαδή με το γινόμένο των κοινών τους όρων του μέγιστου δυνατού βαθμού. Το ρητό αλγεβρικό κλάσμα $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ δεν απλοποιείται, όταν οι όροι του είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους ή ισοδύναμα ο ΜΚΔ(Α, Β) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο $c \neq 0$.

Με την υπόθεση ότι όλοι οι εμφανιζόμενοι παρανομαστές στα δεδομένα κλάσματα ή στα αποτελέσματα είναι διάφοροι του μηδενός, έχουμε σχετικά με τις πράξεις μεταξύ ρητών αλγεβρικών κλασμάτων:

- $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \pm \frac{\Gamma}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{A} \pm \Gamma}{\mathrm{B}}$,
- $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \pm \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{A}\Delta \pm \mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Delta}$,
- $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{B}\Delta}$,
- $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{B}\Gamma}$.

Η κλασματική παράσταση της μορφής $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$, όπου όροι Χ, Υ είναι τα ρητά αλγεβρικά κλάσματα $\mathrm{X} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $\mathrm{Y} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ λέγεται **σύνθετο κλάσμα**. Σε ένα σύνθετο κλάσμα είναι δυνατόν να ισχύει μία το πολύ από τις ισότητες Β = 1 ή Δ = 1. Τα ρητά αλγεβρικά κλάσματα με Β = 1 = Δ, δηλαδή με Χ = Α, Υ = Γ, τα λέμε **απλά**.

Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό σύμφωνα με το γνωστό κανόνα πολλαπλασιασμού άκρων και μέσων όρων.

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}} = \frac{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}{\frac{\Gamma}{\Delta}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\mathrm{A} \cdot \Delta}{\mathrm{B} \cdot \Gamma}.$$

Παραδείγματα

1. Να απλοποιηθεί το ρητό αλγεβρικό κλάσμα

$$K = \frac{xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)}{xy(a^2-b^2)+ab(x^2-y^2)}.$$

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2) &= xya^2+xyb^2+abx^2+aby^2 \\ &= (xya^2+abx^2)-(xyb^2+aby^2) \\ &= ax(ay+bx)-by(ay+bx) \\ &= (ay+bx)(ax-by). \end{aligned}$$

Ομοίως ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται:

$$\begin{aligned} xy(a^2-b^2)+ab(x^2-y^2) &= xya^2-xyb^2+abx^2-aby^2 \\ &= (xya^2+abx^2)-(xyb^2+aby^2) \\ &= ax(ay+bx)-by(ay+bx) \\ &= (ay+bx)(ax-by). \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$K = \frac{(ay+bx)(ax+by)}{(ay+bx)(ax-by)} = \frac{ax+by}{ax-by},$$

εφόσον $(ay+bx)(ax-by) \neq 0$.

.

2. Να μετατραπεί σε ρητό αλγεβρικό κλάσμα η παράσταση

$$K = \left(\frac{x^2-xy+y^2}{x^3-3xy(x-y)-y^3} \bullet \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\right) : \frac{x+y}{(x-y)^3}.$$

Λύση

Παραγοντοποιούμε όπου είναι δυνατόν τους όρους των κλασμάτων.

$$x^3-3xy(x-y)-y^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 = (x-y)^3,$$

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y),$$

$$x^3+y^3 = (x+y(x^2-xy+y^2).$$

Έτσι έχουμε:

$$K=\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)^3}\bullet\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\bullet\frac{(x-y)^3}{x+y}$$
$$=\frac{(x^2-xy+y^2)(x-y)^4(x+y)}{(x^2-xy+y^2)(x-y)^3(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y},$$

εφόσον για τις μεταβλητές x, y ισχύει $x\pm y\neq 0$.

3. Να μετατραπεί σε απλό το σύνθετο κλάσμα

$$\Sigma=\frac{\left(x-\dfrac{x^2+xy}{x-y}\right)\bullet\left(x-\dfrac{x^2+xy}{x+y}\right)}{xy+\dfrac{xy^3}{x^2-y^2}}.$$

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος γράφεται:

$$A=\frac{x^2-xy-x^2-xy}{x-y}\bullet\frac{x^2+xy-2x^2-xy}{x+y}=\frac{-2xy}{x-y}\bullet\frac{-x^2}{x+y}=\frac{2x^3y}{(x-y)(x+y)}.$$

Ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται:

$$\Pi=\frac{xy(x^2-y^2)+xy^3}{x^2-y^2}=\frac{x^3y}{(x-y)(x+y)},$$

οπότε έχουμε

$$\Sigma=\frac{2x^3y}{(x-y)(x+y)}:\frac{x^3y}{(x-y)(x+y)}=\frac{2x^3y}{(x-y)(x+y)}\bullet\frac{(x-y)(x+y)}{x^3y}=2,$$

εφόσον για τις μεταβλητές x,y και $x\pm y\neq 0$.

5. Μεθοδολογία απόδειξης ταυτοτήτων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με μεθόδους απόδειξης ταυτοτήτων με συνθήκες ή και χωρίς συνθήκες. Τα διάφορα αποδεικτικά προβλήματα μπορούν να ταξινομηθούν στις εξής κατηγορίες:

I.	$\boxed{f=g}$.
	Ισότητα των αλγεβρικών παραστάσεων f και g για όλες τις τιμές των μεταβλητών που ανήκουν στην τομή των πεδίων ορισμού των αλγεβρικών παραστάσεων f και g.

II. $\boxed{f_1 = 0, f_2 = 0, ... f_\nu = 0, \nu \in N^* \Rightarrow g = 0}$

Οι εξισώσεις $f_i = 0, i = 1, 2, ..., \nu, \nu \in N^*$, ***αποτελούν τις συνθήκες ή περιορισμούς του προβλήματος, τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη της ισότητας*** $g = 0$.

III. $\boxed{f = 0 \Rightarrow g_1 = 0 \text{ ή } g_2 = 0 \text{ ή ... ή } g_\nu = 0, \nu \in \mathbb{N}^*.}$

Η εξίσωση $f = 0$ ***αποτελεί τη συνθήκη ή περιορισμό του προβλήματος, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι αληθεύει μία τουλάχιστον από τις ισότητες***

$$g_1 = 0, g_2 = 0, ..., g_\nu = 0.$$

IV. $\boxed{f = 0 \Rightarrow g_1 = 0 \text{ και } g_2 = 0 ... \text{και } g_\nu = 0}$

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε αναλυτικά με κάθε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

I. Απόδειξη ταυτοτήτων: f = g

Σε πολλές ασκήσεις ζητείται να αποδείξουμε την αλήθεια μιας ισότητας της μορφής $f = g$, για όλες τις τιμές των μεταβλητών που ανήκουν στην τομή των πεδίων ορισμού των αλγεβρικών παραστάσεων f και g .

Για την απόδειξη αυτών των ταυτοτήτων χρησιμοποιούμε μία από τις παρακάτω μεθόδους:

(Α) Η ευθεία απόδειξη
(Β) Χρήση της μεταβατικής ιδιότητας
(Γ) Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής.

(Α) Ευθεία απόδειξη

Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ισότητας και με εκτέλεση όλων των δυνατών πράξεων και παραγοντοποιήσεων καταλήγουμε στο άλλο μέλος της ισότητας.

Παραδείγματα

1. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$(x - y)^3 + (x + y)^3 - x^3 + 3x(x - y)(x + y) = x(4x^2 + 3y^2).$$

Απόδειξη ***(1ος τρόπος)***

Με εκτέλεση των πράξεων στο πρώτο μέλος λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&(x - y)^3 + (x + y)^3 - x^3 + 3x(x - y)(x + y)\\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^3 - 3xy^2\\ &= 4x^3 + 3xy^2 = x(4x^2 + 3y^2).\end{aligned}$$

(2^{ος} τρόπος)

Επειδή στο πρώτο μέλος εμφανίζονται τρεις κύβοι και το τριπλάσιο γινόμενο των βάσεων προσπαθούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα των κύβων μετά τις κατάλληλες προσαρμογές. Έτσι έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&(x-y)^3+(x+y)^3-x^3+3x(x-y)(x+y)\\
&=(x-y)^3+(x+y)^3+(-x)^3-3(-x)(x-y)(x+y)\\
&=(x-y+x+y-x)\cdot[(x-y)^2+(x+y)^2+(-x)^2-(x-y)(x+y)-(x+y)(-x)-(-x)(x+y)]\\
&=x(x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2+x^2-x^2+y^2+x^2+xy+x^2-xy)\\
&=x(4x^2+3y^2).
\end{aligned}
$$

2. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$
\begin{aligned}
&(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)\\
&=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2
\end{aligned}
$$

Απόδειξη

Θα εφαρμόσουμε στο πρώτο μέλος την ταυτότητα του Euler

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right],$$

θεωρώντας $\alpha=x^2-yz$, $\beta=y^2-zx$, $\gamma=z^2-xy$.

Έτσι το πρώτο μέλος, έστω Α, γράφεται

$$
\begin{aligned}
A&=\frac{1}{2}(x^2-yz+y^2-zx+z^2-xy)\left[(x^2-yz-y^2+zx)^2+(y^2-zx-z^2+xy)^2+(z^2-xy-x^2+yz)^2\right]\\
&=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\left[(x-y)^2(x+y+z)^2+(y-z)^2(x+y+z)^2+(z-x)^2(x+y+z)^2\right]\\
&=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ (x+y+z)^2\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\\
&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\cdot\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\\
&=(x^3+y^3+z^3-3xyz)\cdot(x^3+y^3+z^3-3xyz)=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.
\end{aligned}
$$

(B) Με χρήση της μεταβατικής ιδιότητας

Με εκτέλεση πράξεων σε κάθε μέλος χωριστά έχουμε

$$f=f_1=\ldots=f_\kappa$$
$$g=g_1=\ldots=g_\nu$$

Στην περίπτωση που προκύψει η ισότητα $f_\kappa=g_\nu:=h$, τότε, μέσω της μεταβατικής ιδιότητας, από τις ισότητες $f=h$ και $g=h$ προκύπτει η ισότητα $f=g$.

Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί με χρήση διαδοχικών ισοδυναμιών, με εκτέλεση αντιστρεπτών πράξεων και στα δύο μέλη, μέχρις ότου προκύψει ισότητα που θα είναι προφανώς αληθής.

Έχουμε δηλαδή : $f = g \Leftrightarrow f_1 = g_1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f_\kappa = g_\kappa$, όπου η διαδικασία τελειώνει εφόσον η αλήθεια της τελευταίας ισότητας είναι φανερή.

Παραδείγματα

1. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$(x^2+y^2+z^2)^2-(xy+yz+zx)^2=(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2.$$

Λύση *(1ος τρόπος)*

Το πρώτο μέλος, έστω Α, γράφεται

$$\begin{aligned} A &= x^4+y^4+z^4+2(xy^2+yz^2+zx^2)-\left[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\right] \\ &= x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2xyz(x+y+z). \end{aligned}$$

Το δεύτερο μέλος, έστω Β, γράφεται

$$\begin{aligned} B &= x^4-2x^2yz+y^2z^2+y^4-2y^2zx+z^2x^2+z^4-2z^2xy+x^2y^2 \\ &= x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2xyz(x+y+z), \end{aligned}$$

δηλαδή προέκυψε η ίδια παράσταση, όπως και για το Α, οπότε λόγω της μεταβατικής ιδιότητας έπεται ότι $A = B$.

2ος τρόπος

Η ταυτότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί και απευθείας με χρήση της ταυτότητας του Lagrange με κατάλληλη διαμόρφωση του πρώτου μέλους.

Έχουμε σχετικά:

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)^2-(xy+yz+zx)^2 \\ &=(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)^2 \\ &=(x^2+y^2+z^2)(z^2+x^2+y^2)-(xz+yx+zy)^2 \\ &=\begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ x & y \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ y & z \end{vmatrix}^2 \\ &=(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2. \end{aligned}$$

.

(Γ) Η μέθοδος της μαθηματικής ή τέλειας επαγωγής

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την απόδειξη ταυτοτήτων και γενικότερα προτασιακών τύπων P(ν), όπου η μεταβλητή ν έχει σύνολο αναφοράς τους θετικούς ακέραιους. Σημειώνουμε ότι με το σύμβολο P(x) συμβολίζουμε μία μαθηματική έκφραση που περιέχει το σύμβολο $x \in E$ και την ονομάζουμε **προτασιακό τύπο της μεταβλητής** x με σύνολο αναφοράς το σύνολο Ε.

Αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με ένα στοιχείο $\alpha \in E$, τότε η μαθηματική έκφραση P(α) που προκύπτει ονομάζεται **λογική πρόταση** ή απλά **πρόταση**, δηλαδή είναι μία μαθηματική έκφραση με αυτοτελές νόημα η οποία χαρακτηρίζεται μόνον ως «αληθής», δηλαδή έχει τιμή αληθείας α ή μόνον ως «**ψευδής**», δηλαδή έχει τιμή αληθείας ψ.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον προτασιακό τύπο

$P(x)$: «ο x είναι περιττός αριθμός, $x \in N^*$»,

τότε η πρόταση

P(3): «ο 3 είναι περιττός αριθμός»,

είναι αληθής (έχει τιμή αληθείας α), ενώ η πρόταση

P(4): «ο 4 είναι περιττός αριθμός»,

είναι ψευδής (έχει τιμή αληθείας ψ).

Η μέθοδος βασίζεται στην αρχή της μαθηματικής επαγωγής που ακολουθεί.

Θεώρημα 1. (Αρχή της μαθηματικής επαγωγής)
Έστω P(ν) είναι ένας προτασιακός τύπος με $\nu \in N^*$, για τον οποίο ισχύουν:
(α) *P(1) αληθής,*
(β) *για κάθε $\kappa \in N^*$, αν $P(\kappa)$ αληθής, τότε και $P(\kappa+1)$ είναι αληθής.*
Τότε ο προτασιακός τύπος P(ν) αληθεύει για κάθε $\nu \in N^*$.

Παρατηρήσεις

(I) Τα βήματα στην εφαρμογή της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής είναι δύο.
(1^o) Πρώτα αποδεικνύουμε ότι αληθεύει ο προτασιακός τύπος για $\nu = 1$.
(2^o) Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu = \kappa \in \mathbb{N}^*$ και αποδεικνύουμε ότι αληθεύει και για $\nu = \kappa + 1$.

.

(II) Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη προτασιακών τύπων P(ν) για $\nu \geq \nu_0$, όπου ν_0 είναι ένας θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύουμε πρώτα ότι αληθεύει ο προτασιακός τύπος για $\nu = \nu_0$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι αληθεύει η πρόταση $P(\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \geq \nu_0$, και αποδεικνύουμε ότι αληθεύει και η πρόταση $P(\kappa+1)$

.

(III) Υπάρχει και δεύτερη μορφή της μαθηματικής τέλειας επαγωγής που ακολουθεί πάλι δύο βήματα και βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.
Έστω ένας προτασιακός τύπος με $\nu \in \mathbb{N}^*$ για τον οποίο ισχύουν:
(α) *οι προτάσεις P(1)και P(2) είναι αληθείς,*
(β) *αν οι προτάσεις $P(\kappa)$ και $P(\kappa+1)$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ με $\kappa > 2$, είναι αληθείς, τότε και η πρόταση είναι αληθής.*
Τότε ο προτασιακός τύπος P(ν) αληθεύει για κάθε $\nu \in N^*$.

(IV) Η παρατήρηση II ισχύει και για τη δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής.

Παραδείγματα

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

(α) $1+2+3+...+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.

(β) $1^2+2^2+3^2+...+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.

(γ) $1^3+2^3+3^3+...+\nu^3=\left[\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$.

(δ) $1\bullet 2+2\bullet 3+...+\nu(\nu+1)=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$.

(ε) $\dfrac{1}{1\bullet 2}+\dfrac{1}{2\bullet 3}+...+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{\nu}{\nu+1}$.

Απόδειξη

(α) Για $\nu=1$ έχουμε την πρόταση $P(1):1=\dfrac{1\bullet 2}{2}\Leftrightarrow 1=1$, αληθής. Έστω ότι αληθεύει η πρόταση $P(\kappa):1+2+3+...+\kappa=\dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}$. Θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και η πρόταση

$$P(\kappa+1):1+2+3+...+\kappa+(\kappa+1)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+1+1)}{2}=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$$

Πράγματι, έχουμε:

$$1+2+3+...+\kappa+(\kappa+1)=(1+2+3+...+\kappa)+(\kappa+1)$$

$$=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}+(\kappa+1)$$

$$=(\kappa+1)\left(\frac{\kappa}{2}+1\right)=\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$$

Άρα, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι

$$1+2+3+...+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

(β-ε) Όλες αποδεικνύονται με τυπική εφαρμογή της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής.

ΙΙ. Απόδειξη ταυτοτήτων κάτω από συνθήκες

$$\boxed{f_1=0, f_2=0, ..., f_\nu=0,\ \nu\in\mathbb{N}^*\Rightarrow g=0}$$

($f_1, f_2, ..., f_\nu, g$ **είναι αλγεβρικές παραστάσεις**)

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τις υποθέσεις

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_\nu = 0,\ \ \nu \in \mathbb{N}^*,$$

που είναι μία ή περισσότερες και ονομάζονται **συνθήκες** ή **περιορισμοί** του προβλήματος. Στηριζόμενοι στις παραπάνω συνθήκες πρέπει να αποδείξου-με την αλήθεια της ισότητας $g = 0$. Οι μέθοδοι απόδειξης που χρησιμοποιούνται εξαρτώνται από τη μορφή των συνθηκών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί συνδυασμός από αυτές. Συνοπτικά μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

Α. Ευθεία απόδειξη (με αντικατάσταση, χρήση παραγοντοποίησης και γνωστών ταυτοτήτων.
Β. Μέθοδος θεώρησης ανεξάρτητων μεταβλητών.
Γ. Μέθοδος διαδοχικών διαφορών.
Δ. Μέθοδος από τη θεωρία γραμμικών συστημάτων.
Ε. Μέθοδος πολυωνύμων.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε και θα δώσουμε παραδείγματα για καθεμία από τις παραπάνω μεθόδους.

Α. Ευθεία απόδειξη

Στην περίπτωση αυτή γίνεται αντικατάσταση των μεταβλητών στη ζητούμενη σχέση και με πράξεις, παραγοντοποιήσεις και χρήση της υπόθεσης και γνωστών ταυτοτήτων στο ένα μέλος, καταλήγουμε στο άλλο μέρος της ζητούμενης ταυτότητας.

Παραδείγματα

1. Αν $\gamma = \alpha + 2$ και $\beta = \alpha - 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 - \gamma^2 + 1}{\alpha^2\beta\gamma - \dfrac{\gamma}{\beta} + \beta\left(\alpha^2 - \dfrac{1}{\beta^2}\right)} = \alpha^2 - 1.$$

Απόδειξη

Με $\gamma = \alpha + 2$ και $\beta = \alpha - 1$ ο αριθμητής του πρώτου μέλους γίνεται

$$\begin{aligned}
\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 - \gamma^2 + 1 &= \alpha^2(\alpha-1)^2(\alpha+2)^2 - \alpha^2(\alpha-1)^2 - (\alpha+2)^2 + 1 \\
&= \alpha^2(\alpha-1)^2\left[(\alpha+2)^2 - 1\right] - \left[(\alpha+2)^2 - 1\right] \\
&= \left[(\alpha+2)^2 - 1\right]\cdot\left[\alpha^2(\alpha-1)^2 - 1\right] \\
&= (\alpha+1)(\alpha+3)\left[\alpha^2(\alpha-1)^2 - 1\right].
\end{aligned}$$

Ομοίως ο παρονομαστής του πρώτου μέλους γίνεται:

$$\alpha^2\beta\gamma - \frac{\gamma}{\beta} + \beta\left(\alpha^2 - \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma - \gamma}{\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2 - 1}{\beta}$$

$$=\frac{\gamma(\alpha^2\beta^2-1)+(\alpha^2\beta^2-1)}{\beta}$$

$$=\frac{(\gamma+1)(\alpha^2\beta^2-1)}{\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+3)\left[\alpha^2\left(\alpha-1\right)^2-1\right)\right]}{\beta}$$

Έτσι το πρώτο μέλος γίνεται

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\gamma^2+1}{\alpha^2\beta\gamma-\frac{\gamma}{\beta}+\beta\left(\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}\right)}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)\left[\alpha^2(\alpha-1)^2-1\right]}{\frac{(\alpha+3)\left[\alpha^2(\alpha-1)^2-1\right]}{\beta}}$$

$$=\beta(\alpha+1)=(\alpha-1)(\alpha+1)=\alpha^2-1$$

2. Αν είναι $x=\frac{\alpha-\beta}{2}$, $y=\frac{\beta-\gamma}{2}$ και $z=\frac{\gamma-\alpha}{2}$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{2\alpha-2\beta-x}{x+\alpha-\beta}+\frac{2\beta-2\gamma-y}{y+\beta-\gamma}+\frac{2\gamma-2\alpha-z}{z+\gamma-\alpha}=3$$

Απόδειξη

Αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x στον πρώτο όρο του πρώτου μέλους λαμβάνουμε

$$\frac{2\alpha-2\beta-x}{x+\alpha-\beta}=\frac{2\alpha-2\beta-\frac{\alpha-\beta}{2}}{\frac{\alpha-\beta}{2}+\alpha-\beta}=\frac{(4\alpha-4\beta-\alpha+\beta)/2}{(\alpha-\beta+2\alpha-2\beta)/2}=\frac{3(\alpha-\beta)}{2(\alpha-\beta)}=1.$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{2\beta-2\gamma-y}{y+\beta-\gamma}=1 \quad \text{και} \quad \frac{2\gamma-2\alpha-z}{z+\gamma-\alpha}=1,$$

από τις οποίες η ζητούμενη ισότητα είναι φανερή.

3. Αν $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$, $x,y\neq 0$ και $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2 \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}^2=0 \quad (\text{από ταυτότητα Lagrange})$$

$$\Rightarrow \alpha y - \beta x = 0 \Rightarrow \frac{\alpha y}{xy} = \frac{\beta x}{xy}, \text{ (αφού } x, y \neq 0\text{)} \Rightarrow \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y}.$$

4. Αν είναι $\alpha+\beta+\gamma=0$ να αποδείξετε ότι

$$(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3=-3\alpha\beta\gamma$$

Απόδειξη

Επειδή ισχύει ότι

$$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3 &= 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\\ &= 3(-\gamma)(-\alpha)(-\beta) \quad \text{(αφού } \alpha+\beta+\gamma=0\text{)}\\ &= -3\alpha\beta\gamma.\end{aligned}$$

5. Αν ισχύει $\alpha=\beta+\gamma$, να αποδείξετε ότι

$$2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4=0$$

Απόδειξη

Με παραγοντοποίηση το πρώτο μέλος της ζητούμενης ισότητας γίνεται:

$$\begin{aligned}&2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4\\ &=-(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2)\\ &=(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) \quad \text{(ταυτότητα De Moirve)}\\ &=0, \text{ (λόγω της υπόθεσης } \beta+\gamma=\alpha.\text{)}\end{aligned}$$

6. Αν είναι $\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}.$$

Απόδειξη

Στην περίπτωση αυτή με πράξεις και παραγοντοποιήσεις στη δοθείσα συνθήκη λαμβάνουμε μία ή περισσότερες απλούστερες συνθήκες με τη βοήθεια των οποίων θα αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα.

Έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\\ &\Leftrightarrow (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta\gamma=0\\ &\Leftrightarrow \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma=0\\ &\Leftrightarrow \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+2\alpha\beta\gamma=0\\ &\Leftrightarrow \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha(\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma)=0\\ &\Leftrightarrow (\beta+\gamma)[\alpha^2+\beta\gamma+\alpha(\beta+\gamma)]=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\beta+\gamma)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=0$$
$$\Leftrightarrow (\beta+\gamma)\left[\alpha(\alpha+\beta)+\gamma(\alpha+\beta)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (\beta+\gamma)(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)=0$$
$$\Leftrightarrow \beta+\gamma=0 \text{ ή } \alpha+\beta=0 \text{ ή } \gamma+\alpha=0.$$

Στη συνέχεια με υπόθεση καθεμία χωριστά από τις παραπάνω συνθήκες θα αποδείξουμε την αλήθεια της ζητούμενης ισότητας.

Αν είναι $\beta+\gamma=0$, τότε $\beta=-\gamma$ και

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{(-\gamma)^3}+\frac{1}{\gamma^3}$$
$$=\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^3}=\frac{1}{\alpha^3}=\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}, \text{ (αφού } \beta+\gamma=0\text{).}$$

Αν είναι $\gamma+\alpha=0$ ή $\alpha+\beta=0$, ομοίως προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

Β. Μέθοδος θεώρησης ανεξάρτητων μεταβλητών

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε στις εξισώσεις των συνθηκών μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές και προσδιορίζουμε τις υπόλοιπες (εξαρτημένες) μεταβλητές συναρτήσει των ανεξάρτητων. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις εξαρτημένες μεταβλητές στη ζητούμενη ισότητα και εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση Α.

Παραδείγματα

1. Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)=4$$

(δηλαδή η παράσταση του πρώτου μέλους είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών α,β,γ).

Απόδειξη

Από την δοθείσα συνθήκη $\alpha\beta\gamma=1$, θεωρώντας διαδοχικά τις δύο από τις μεταβλητές ως ανεξάρτητες λαμβάνουμε

$$\alpha=\frac{1}{\beta\gamma},\quad \beta=\frac{1}{\gamma\alpha},\quad \gamma=\frac{1}{\alpha\beta}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{\alpha}=\beta\gamma,\quad \frac{1}{\beta}=\gamma\alpha,\quad \frac{1}{\gamma}=\alpha\beta.$$

Έτσι το πρώτο μέλος της ζητούμενης ισότητας γίνεται:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= (\alpha+\beta\gamma)^2 + (\beta+\gamma\alpha)^2 + (\gamma+\alpha\beta)^2 - (\alpha+\beta\gamma)(\beta+\gamma\alpha)(\gamma+\alpha\beta)$$
$$= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+6\alpha\beta\gamma+\beta^2\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta\gamma-\beta^2\gamma^2-\gamma^2\alpha^2$$
$$-\alpha^2\beta^2-\alpha^3\beta\gamma-\alpha\beta^3\gamma-\alpha\beta\gamma^3-\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+5\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\beta\gamma)^2$$
$$= \alpha^2+\beta^2\gamma^2+5-(\alpha^2+\beta^2\gamma^2)-1=4,$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών α,β και γ.

Γ. Μέθοδος διαδοχικών διαφορών

Με διαδοχικές αφαιρέσεις κατά μέλη των δεδομένων συνθηκών και με κατάλληλες απλοποιήσεις καταλήγουμε σε απλούστερες σχέσεις και τελικά στη σχέση που ζητάμε να αποδείξουμε.

Παράδειγμα 1.

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, $k \in \mathbb{R}$ και ισχύουν οι ισότητες

$$\mathbf{x^2+y^2+kxy=y^2+z^2+kyz=z^2+x^2+kzx,}$$

να αποδείξετε ότι

(i) $x+y+z=0$

(ii) $x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy$.

Απόδειξη

Θέτουμε

$$x^2+y^2+kxy=A \quad (1)$$
$$y^2+z^2+kyz=A \quad (2)$$
$$z^2+x^2+kzx=A. \quad (3)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$x^2-z^2+ky(x-z)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+z)(x-z)+ky(x-z)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-z)(x+z+ky)=0$$
$$\Rightarrow x+z+ky=0, \quad (4)$$

αφού από την υπόθεση είναι $x-z\neq 0$.

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (3) έχουμε:

$$y^2-z^2+kx(y-z)=0$$
$$\Leftrightarrow (y+z)(y-z)+kx(y-z)=0$$
$$\Leftrightarrow (y-z)(y+z+kx)=0$$
$$\Rightarrow y+z+kx=0, \quad (5)$$

αφού από την υπόθεση είναι $y-z\neq 0$.

Με αφαίρεση κατά μέλή των (4) και (5) έχουμε:

$$x-y+k(y-x)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(1-k)=0 \Rightarrow k=1,$$

αφού από την υπόθεση $x-y\neq 0$. Με $k=1$ από την (4) προκύπτει η ισότητα του ερωτήματος (1)

$$x+y+z=0.$$

Η ισότητα (1) γίνεται

$$\begin{aligned} A &= x^2+y^2+kxy \\ &= z^2-xy \quad [\text{αφού } k=1] \\ &\Leftrightarrow (x-y)(1-k)=0 \Rightarrow k=1, \end{aligned}$$

αφού από την υπόθεση $x-y\neq 0$. Με $k=1$ από την (4) προκύπτει η ισότητα του ερωτήματος (1)

$$x+y+z=0.$$

Η ισότητα (1) γίνεται

$$\begin{aligned} A &= x^2+y^2+kxy \\ &= (x+y)^2-2xy+kxy \\ &= (-z)^2-(2-k)xy \; [\text{αφού } x+y+z=0\,] \\ &= z^2-xy \qquad\qquad [\text{αφού } k=1] \end{aligned}$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$A=y^2-zx=x^2-yz,$$

οπότε τελικά έχουμε

$$x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy.$$

Παράδειγμα 2.

Οι διάφοροι μεταξύ τους και του μηδενός πραγματικοί αριθμοί x, y, z **ικανοποιούν τις σχέσεις**

$$\mathbf{x^3+y^3+\mu(x+y)=y^3+z^3+\mu(y+z)=z^3+x^3+\mu(z+x).}$$

Να αποδείξετε ότι ή παράσταση

$$\mathbf{K=\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\left(\frac{z}{x-y}+\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}\right)}$$

είναι ανεξάρτητη των x, y, z **και** μ**.**

Απόδειξη:

Θέτουμε

$$\begin{aligned} x^3+y^3+\mu(x+y)&=A \;\; (1) \\ y^3+z^3+\mu(y+z)&=A \;\; (2) \\ z^3+x^3+\mu(z+x)&=A \;\; (3) \end{aligned}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε

$$\begin{aligned} & x^3-z^3+\mu(x-z)=0 \\ \Leftrightarrow\; & (x-z)(x^2+xz+z^2)+\mu(x-z)=0 \\ \Leftrightarrow\; & (x-z)(x^2+xz+z^2+\mu)=0 \\ \overset{x-z\neq 0}{\Leftrightarrow}\; & x^2+xz+z^2+\mu=0 \;\; (4) \end{aligned}$$

Ομοίως με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (3) έχουμε

$$y^2+yz+z^2+\mu=0 \ (5)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε

$$\begin{aligned}&x^2-y^2+z(x-y)=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-y)(x+y+z)=0\\ \overset{x-y\neq 0}{\Leftrightarrow}\ &x+y+z=0. \ (6)\end{aligned}$$

Μετά από πράξεις η παράσταση K γίνεται

$$K=3+\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\cdot\frac{z}{x-y}+\left(\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\cdot\frac{x}{y-z}+\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}\right)\cdot\frac{y}{z-x}$$

Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}\right)\cdot\frac{z}{x-y}&=\frac{y^2-zy+zx-x^2}{xy}\cdot\frac{z}{x-y}\\ &=\frac{(y-x)(y+x)-z(y-x)}{xy}\cdot\frac{z}{x-y}\\ &=\frac{(y-x)(y+x-z)}{xy}\cdot\frac{z}{x-y}=\frac{-(y+x-z)z}{xy}\\ &=\frac{2z^2}{xy}, \text{ (αφού } x+y+z=0\text{)}.\end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτουν

$$\left(\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}\right)=\frac{2x^2}{yz}$$

$$\left(\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}\right)\left(\frac{y}{z-x}\right)=\frac{zy^2}{zx}.$$

Έτσι η παράσταση K γίνεται

$$K=3+\frac{2z^2}{xy}+\frac{2x^2}{yz}+\frac{2y^2}{zx}=3+\frac{2\left(x^3+y^3+z^3\right)}{xyz}.$$

Όμως, είναι γνωστή η συνεπαγωγή

$$x+y+z=0\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz,$$

οπότε μέσω αυτής έχουμε ότι $K=9$, δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y, z και μ.

Δ. Μέθοδος από τη θεωρία γραμμικών συστημάτων

Η μεθοδολογία που ακολουθεί αναφέρεται στην περίπτωση που μεταξύ των συνθηκών του προβλήματος υπάρχουν δύο τουλάχιστον γραμμικές εξισώσεις.

(1) Αν οι συνθήκες του προβλήματος περιλαμβάνουν το ομογενές γραμμικό σύστημα τύπου $n\times n$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow AX = 0,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

τότε η συνθήκη ύπαρξης μη μηδενικών λύσεων του συστήματος οδηγεί στη σχέση

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

(2) Στην ειδική περίπτωση που έχουμε μεταξύ των συνθηκών δύο ομογενείς γραμμικές εξισώσεις τριών μεταβλητών

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array}\right\}, (1)$$

που ικανοποιούνται από τριάδες $(x, y, z) \neq (0,0,0)$, τότε με την υπόθεση

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

το σύστημα (1) γίνεται

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

• Όταν είναι $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ και $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$, τότε το σύστημα γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

Στη μορφή αυτή, συμβολίζοντας τους ίσους λόγους με λ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους x, y, z στις υπόλοιπες συνθήκες για την απόδειξη της ζητούμενης σχέσης.

- Όταν είναι $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ ή $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$, τότε προκύπτει $x = 0$ ή $y = 0$ και έτσι έχουμε πιο απλές συνθήκες.

(3) Στην περίπτωση που έχουμε μεταξύ των συνθηκών δύο γραμμικές εξισώσεις δύο μεταβλητών

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

και εφόσον αληθεύει ο περιορισμός $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, τότε τα x, y ορίζονται μονοσήμαντα συναρτήσει των συντελεστών a_i, b_i, c_i, $i = 1,2$. Έχουμε ότι

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (4)$$

ή ισοδύναμα, στην περίπτωση που οι ορίζουσες των αριθμητών είναι μη μηδενικές έχουμε

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

(4) Στην περίπτωση που έχουμε μεταξύ των συνθηκών τρεις γραμμικές εξισώσεις δύο μεταβλητών

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

τότε η **συνθήκη συμβιβαστότητας** (απαλείφουσα) του συστήματος μας δίνει τη σχέση

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

(5) Αν μεταξύ των συνθηκών του προβλήματος υπάρχουν δύο εξισώσεις μιας μεταβλητής

$$\begin{array}{l} \alpha_1x + \beta_1 = 0 \\ \alpha_2x + \beta_2 = 0 \end{array} \qquad (8)$$

που αληθεύουν για $x \neq 0$ και είναι $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, τότε

$$x = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{\beta_2}{\alpha_2},$$

οπότε η συνθήκη συμβιβαστότητας είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Παράδειγμα 1.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,x,y,z$ με $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ αληθεύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned} \alpha x + \gamma y + \beta z = 0 \quad (1) \\ \gamma x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (2) \\ \beta x + \alpha y + \gamma z = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma.$$

Απόδειξη

Το ομογενές γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχει, σύμφωνα με την υπόθεση, και μη μηδενική λύση $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Επομένως θα ισχύει

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \gamma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\beta\gamma - \alpha^2) - \gamma(\gamma^2 - \alpha\beta) + \beta(\gamma\alpha - \beta^2) = 0$$

$$\Rightarrow 3\alpha\beta\gamma - \alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma.$$

Παράδειγμα 2.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,x,y,z$ με $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ αληθεύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned} x = \alpha(y+z) \quad (1) \\ y = \beta(z+x) \quad (2) \\ z = \gamma(x+y) \quad (3) \end{aligned}$$

να αποδείξετε ότι:

(i) $\boldsymbol{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 2\alpha\beta\gamma = 1}$.

(ii) $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{\alpha(1-\beta\gamma)} = \dfrac{y^2}{\beta(1-\alpha\gamma)} = \dfrac{z^2}{\gamma(1-\alpha\beta)}}$,

(εφόσον $\alpha\beta\gamma(1-\alpha\beta)(1-\beta\gamma)(1-\gamma\alpha)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) \neq 0$).

Λύση:

(i) Οι δοθείσες εξισώσεις (1), (2) και (3) αποτελούν ένα ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x-\alpha y-\alpha z=0 \\ \beta x-y+\beta z=0 \\ \gamma x+\gamma y-z=0 \end{array}\right\},\ (\Sigma)$$

το οποίο, από την υπόθεση, έχει και μη μηδενική λύση. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ \beta & -1 & +\beta \\ \gamma & \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1-\beta\gamma+\alpha(-\beta\gamma-\beta)-\alpha(\beta\gamma+\gamma)=0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma+2\alpha\beta\gamma=1$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος (Σ) ως ομογενές γραμμικό σύστημα με δύο εξισώσεις και τρεις αγνώστους λαμβάνουμε

$$\frac{x}{-\alpha(\beta+1)}=\frac{y}{-\alpha(\beta+1)}=\frac{z}{-1+\alpha\beta}=\lambda\neq 0$$

$$\Rightarrow x=-\lambda\alpha(\beta+1),\quad y=-\lambda\alpha(\beta+1),\quad z=\lambda(-1+\alpha\beta).$$

Τότε η τρίτη εξίσωση του (Σ) γίνεται

$$-\lambda\alpha\gamma(\beta+1)-\lambda\alpha\gamma(\beta+1)=\lambda(-1+\alpha\beta)$$

$$\Rightarrow \lambda(\alpha\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\gamma\beta+\alpha\gamma-1+\alpha\beta)=0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2\alpha\beta\gamma=1.$$

(ii) Θέτοντας $z=\gamma(x+y)$ στις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} x=\alpha[y+\gamma(x+y)] \\ y=\beta[\gamma(x+y)+x] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(1-\alpha\gamma)=y(1+\gamma)\alpha \\ x(\gamma+1)\beta=y(1-\beta\gamma) \end{array}\right.$$

Από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^2(1-\alpha)(\gamma+1)\beta=y^2(1+\gamma)(1-\beta\gamma)\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\alpha(1-\beta\gamma)}=\frac{y^2}{\beta(1-\alpha\gamma)}\quad (4)$$

αφού από την υπόθεση είναι $1+\gamma\neq 0$ και $\alpha\beta(1-\beta\gamma)(1-\gamma)\neq 0$.

Εργαζόμενοι ανάλογα, με αντικατάσταση του $x=\alpha(y+z)$ στις (2) και (3) λαμβάνουμε την ισότητα

$$\frac{y^2}{\beta(1-\alpha\gamma)}=\frac{z^2}{\gamma(1-\alpha\beta)}\quad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτουν οι ζητούμενες ισότητες.

Ε. Μέθοδος από τη θεωρία πολυωνύμων

Στο παρόν Κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε μόνο με πολυώνυμα 2^{ου} βαθμού (τριώνυμα) και θα συμπληρώσουμε τις μεθόδους στο Κεφάλαιο των πολυωνύμων που θα ακολουθήσει.

Όταν μεταξύ των συνθηκών του προβλήματος υπάρχει πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

$\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και ικανοποιείται για $x \in \mathbb{R}$, τότε πρέπει

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0.$$

Παράδειγμα 1.

Αν για $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2\beta_1, \beta_2, x \in \mathbb{R}}$ αληθεύει η ισότητα

$$\boldsymbol{\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)x^2 + 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)x + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0}, \quad \textbf{(1)}$$

να αποδείξετε ότι

$$\boldsymbol{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0}.$$

Λύση

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού ως προς x και έχει πραγματικές ρίζες, ο-πότε θα είναι

$$\Delta = 4\left[(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 - \left(\beta_1^2 - \beta_2^2\right)\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\left[\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \geq 0,$$

η οποία αληθεύει μόνον όταν

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0.$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙΙ

$$\boxed{f = 0 \Rightarrow g_1 = 0 \text{ ή } g_2 = 0 \text{ ή } \ldots \text{ ή } g_\nu = 0, \ \nu \in \mathbb{N}^*.}$$

Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να αναλύσουμε το πρώτο μέλος της συνθήκης $f = 0$ σε γινόμενο παραγόντων, μέσα στους οποίους περιέχονται και οι παραστάσεις $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$. Έτσι, αν προκύψει η συνθήκη

$$g_1 g_2 \cdots g_\nu g = 0$$

και εξασφαλίσουμε ότι ισχύει $g \neq 0$, τότε προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις

$$g_1 = 0 \quad \text{ή} \quad g_2 = 0 \quad \text{ή} \ldots \text{ή} \quad g_\nu = 0.$$

Παράδειγμα 1.

Αν για τους αριθμούς $\boldsymbol{x, y, z \in \mathbb{R}}$ ισχύει ότι

$$\boldsymbol{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = 0},$$

να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσοι.

Απόδειξη

Με παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους της ισότητας έχουμε:

$$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2y - x^2z + y^2z - y^2x + z^2(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2y - y^2x) - (x^2z - y^2z) + z^2(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow xy(x-y)-z(x^2-y^2)+z^2(x-y)=0$$
$$\Rightarrow (x-y)\left[xy-z(x+y)+z^2\right]=0$$
$$\Rightarrow (x-y)(xy-zx-zy+z^2)=0$$
$$\Rightarrow (x-y)\left[x(y-z)-z(y-z)\right]=0$$
$$\Rightarrow (x-y)(y-z)(x-z)=0$$
$$\Rightarrow x-y=0 \text{ ή } y-z=0 \text{ ή } x-z=0$$
$$\Rightarrow x=y \text{ ή } y=z \text{ ή } x=z.$$

Παράδειγμα 2.

Αν για τους αριθμούς $x,y,z\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x^3+y^3+z^3=3xyz}$$

να αποδείξετε ότι θα ισχύει

$$\mathbf{x+y+z=0 \quad ή \quad x=y=z.}$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$
$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]=0$$
$$\Rightarrow x+y+z=0 \text{ ή } (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$$
$$\Rightarrow x+y+z=0 \text{ ή } x=y=z,$$

αφού, αν ίσχυε ότι $x-y\neq 0$ ή $y-z\neq 0$ ή $z-x\neq 0$, τότε θα είχαμε

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0.$$

Παράδειγμα 3.

Αν για τους αριθμούς $x,y,z\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x^4yz+y^4zx+z^4xy-x^3y^3-y^3z^3-z^3x^3=0,}$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους x,y,z **είναι μέσος ανάλογος των δύο άλλων, δηλαδή θα είναι**

$$\mathbf{x^2=yz \quad ή \quad y^2=zx \quad ή \quad z^2=xy.}$$

Απόδειξη

Με βάση τους παράγοντες x^2-yz, y^2-zx και z^2-xy που πρέπει να προκύψουν από την παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους της δοθείσας σχέσης έχουμε

$$x^4yz+y^4zx+z^4xy-x^3y^3-y^3z^3-z^3x^3=0$$
$$\Rightarrow xyz^4-z^3x^3-z^3y^3+x^2y^2z^2-x^2y^2z^2+x^4yz+y^4zx-x^3y^3=0$$
$$\Rightarrow z^2(xyz^2-zx^3-zy^3+x^2y^2)-xy(xyz^2-zx^3-zy^3+x^2y^2)=0$$
$$\Rightarrow (xyz^2-zx^3-zy^3+x^2y^2)\cdot(z^2-xy)=0$$

$$\Rightarrow \left[(xyz^2 - zx^3) - (zy^3 - x^2y^2)\right]\cdot(z^2 - xy) = 0$$
$$\Rightarrow \left[zx(yz - x^2) - y^2(yz - x^2)\right]\cdot(z^2 - xy) = 0$$
$$\Rightarrow (yz - x^2)(zx - y^2)(z^2 - xy) = 0$$
$$\Rightarrow yz - x^2 = 0 \text{ ή } zx - y^2 = 0 \text{ ή } z^2xy = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = yz \text{ ή } y^2 = zx \text{ ή } z^2 = xy\,.$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ IV

$$f = 0 \Rightarrow g_1 = 0 \text{ και } g_2 = 0 \ \dots \text{ και } g_\nu = 0\,,\ (\nu \in \mathbb{N}^*)$$

Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να μετατρέψουμε το πρώτο μέλος της συνθήκης $f = 0$ σε άθροισμα τετραγώνων της μορφής $g_1^2 + g_2^2 + ... + g_\nu^2$, οπότε πλέον από την ισότητα

$$g_1^2 + g_2^2 + ... + g_\nu^2 = 0\,, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

προκύπτουν οι ισότητες

$$g_1 = 0 \text{ και } g_2 = 0 \ \dots \text{ και } g_\nu = 0\,.$$

Παράδειγμα 1.
Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0}$$

να αποδείξετε ότι: $\alpha = \beta = \gamma$.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma = 0$$
$$\Rightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha = 0$$
$$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha - \beta = 0 \text{ ή } \beta - \gamma = 0 \text{ ή } \gamma - \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \beta = \gamma \text{ ή } \gamma = \alpha\,,$$

γιατί, αν είναι $\alpha - \beta \neq 0$ ή $\beta - \gamma \neq 0$ ή $\gamma - \alpha \neq 0$, τότε θα είναι

$$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 > 0\,.$$

Παράδειγμα 2.
Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι

$$\mathbf{x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz}\,,$$

να αποδείξετε ότι θα είναι $x = y = z$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler λαμβάνουμε

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow x = y = z,$$

αφού για θετικούς x, y, z θα είναι $x + y + z > 0$, ενώ αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις διαφορές $x - y$, $y - z$, $z - x$ δεν είναι μηδέν, τότε θα έχουμε και $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 > 0$, που είναι άτοπο, γιατί λόγω της (1) πρέπει ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x + y + z$, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ να είναι μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$

(β) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

(γ) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

(δ) x^4+4y^4

(ε) $a^4+3a^2b^2+9b^4$

$(\sigma\tau)$ $(a-1)^3-8+(a+1)^3+6(a^2-1)$

(ζ) $x^2-y^2-2z^2+zx+3yz$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\dfrac{a^3+b^3}{a^4+a^2b^2+b^4}$

(β) $\dfrac{1}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)+\dfrac{3}{(a+b)^4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{6}{(a+b)^5}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

(γ) $\dfrac{1}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a^4}-\dfrac{1}{b^4}\right)+\dfrac{2}{(a+b)^4}\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}\right)+\dfrac{2}{(a+b)^5}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)$

(δ) $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

(ε) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$

3. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2$

(β) $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2=$
$4(a^2+b^2+c^2+d^2)$

(γ) $(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2(ab-bc+dc+ad)^2=$
$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(ab-ad+bc+dc)^2$

(δ) $x^3=\left(x\dfrac{x^3-2y^3}{x^3+y^3}\right)^3+\left(y\dfrac{2x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)^3+y^3$

(ε) $(6x^2-4xy+4y^2)^3=(3x^2+5xy-5y^2)^3+(4x^2-4xy+6y^2)^3+(5x^2-5xy-3y^2)^3$

4. Αν $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq b\neq c\neq a,$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=2\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)$$

5. Αν οι $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ είναι διαφορετικοί ανά δύο και

$$S_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b),}$$

να αποδείξετε ότι :

(α) $S_0=S_1=0$

(β) $S_2=1$

(γ) $S_3=a+b+c$

(δ) $S_4=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

(ε) $S_5=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c+abc$

6. Αν οι $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ είναι διαφορετικοί ανά δύο και

$$T_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

να αποδείξετε ότι :

(α) $S_0=S_1=S_2=0$

(β) $S_3=1$

(γ) $S_4=a+b+c+d.$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$

(β) $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}.$

8. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z ισχύει ότι $xyz=1,$ να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις

$$\mathrm{K}(x,y,z)=\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1},$$

$$\Lambda(x,y,z)=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1},$$

με $xy+x+1\neq 0$, είναι ανεξάρτητες των $x,y,z.$

9. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c ισχύει ότι $a+b+c=0$, να αποδείξετε ότι:

(α) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$

(β) $[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$

10. Αν είναι

$$x=\frac{a-b}{a+b},\ y=\frac{b-c}{b+c},\ z=\frac{c-a}{c+a}$$
$$a,b,c\in\mathbb{R},\ (a+b)(b+c)(c+a)\neq 0,$$

να αποδείξετε ότι

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

11. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c ισχύει ότι $a+b+c=0,$ να αποδείξετε ότι

(α) $a^5+b^5+c^5=\frac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2)$

(β) $(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=\frac{6}{5}(a^5+b^5+c^5)$

(γ) $a^7+b^7+c^7=\frac{7}{10}(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5).$

12. Αν είναι $x_1,x_2,...x_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*$ και $x_1+x_2+....+x_n=\frac{n\tau}{2},$

να αποδείξετε ότι: $(\tau-x_1)^2+(\tau-x_2)^2+...(\tau-x_n)^2=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2.$

13. Αν είναι $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ με $a_i+b_i=1,$ για κάθε $i=1,2,...,n$ και $na=\sum_{i=1}^{n}a_i$, $nb=\sum_{i=1}^{n}b_i$

να αποδείξετε ότι: $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=nab-\sum_{i=1}^{n}(a_i-a)^2.$

14. Αν είναι $ax+by+cz=0$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}\ .$$

15. Θεωρούμε την παράσταση

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

και θέτουμε

$$x=\alpha x_1+\beta y_1,\ y=\gamma x_1+\delta y_1,$$

οπότε αυτή γίνεται

$$A_1x_1^2+2Bx_1y_1+C_1y_1^2\ .$$

Να αποδείξετε ότι

$$B_1^2-A_1C_1=(B^2-AC)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\ .$$

16. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $a_1,a_2,...a_n$ ισχύει ότι

$$n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\ ,$$

να αποδείξετε ότι :

$$a_1=a_2=\ldots=a_n$$

17. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2$$

να αποδείξετε ότι

$$x=y=z\ .$$

18. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c,d με $cd \neq 0$ ισχύει ότι

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\ .$$

19. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c με back $\neq 0$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\ ,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}\ ,$$

όπου n είναι περιττός φυσικός αριθμός.

20. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c με abc $\neq 0$ ισχύει

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

να αποδείξετε ότι δύο από τα τρία κλάσματα του πρώτου μέλους είναι ίσα με 1 και ότι το κλάσμα που απομένει είναι ίσο με -1.

21. Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a,b,c,x,y,z ισχύει ότι

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)}=\frac{cx+az}{y(ax-by+cz)}=\frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}\ ,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}\ .$$

[Όλοι οι παρανομαστές υποτίθεται ότι είναι διάφοροι του μηδενός].

22. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι $x+y+z=0$,
να αποδείξετε ότι:

$$(ax-by)^n+(ay-bz)^n+(az-bx)^n=(ay-bx)^n+(az-by)^n+(ax-bz)^n\ ,$$

για $n=1,2$ και 4.

ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ Ε.Μ.Ε.
ΛΕΠΤΟΚΑΡΥΑ ΠΙΕΡΙΑΣ 2012
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αγγελική Σ. Βλάχου
Μαθηματικός, καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης

Εργασία 1

Ενότητα: Ταυτότητες

Μέρος 1

Να γίνει η σωστή αντιστοίχιση μεταξύ των δυο στηλών. Κάθε στοιχείο της στήλης Α αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ίσο του στοιχείο της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Ταυτότητα	**Ανάπτυγμα ταυτότητας**
Α. $(\alpha+\beta)^2$	1. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma$
Β. $(\alpha-\beta)^3$	2. $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$
Γ. $\alpha^3-\beta^3$	3. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
Δ. $\alpha^2-\beta^2$	4. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
Ε. $\alpha^3+\beta^3$	5. $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
ΣΤ. $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$	6. $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
Ζ. $\alpha^\nu-\beta^\nu$	7. $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$
Η. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$	8. $(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+...+\beta^{\nu-1})$
Θ. $(\alpha+\beta-\gamma)^2$	9. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

Μέρος 2

Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση (Σ) ή τη λανθασμένη απάντηση (Λ) δίπλα στις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν $\chi^2+\psi^2+\omega^2=0$, τότε: $\chi=\psi=\omega=0$
2. $(-\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$
3. $(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$
4. Το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2$ είναι $\alpha^2+\beta^2$
5. Ο αριθμός $3^{2\nu}-1$ είναι πολλαπλάσιο του 8

6. Αν α είναι περιττός αριθμός, τότε το α^2 είναι άρτιος αριθμός

7. $(\alpha-\beta)^3=(\beta-\alpha)^3$

8. Αν ισχύει : $\alpha^2+\beta^2+53=14\alpha+4\beta$, τότε: $\alpha=7, \beta=2$

9. $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha$

10. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε: $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=1$

11. Αν $(\alpha+\dfrac{1}{\alpha})^3=125, \alpha\neq 0$, τότε: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=5$

Μέρος 3

1. Να εκφράσετε ως πολυώνυμο του χ την παράσταση

$$\mathrm{A}=(\chi^3-3\chi^2+1)^2-2\chi(\chi-1)^3\ .$$

2. Αν $\chi+4\psi=8$ και $\chi\psi=3$ να βρεθούν οι τιμές των αριθμών

$$\mathrm{K}=\chi^2+16\psi^2 \text{ και } \Lambda=\chi^3+64\psi^3\ .$$

3. Αν $\chi^2+\psi^2=2\chi-1$ να βρεθούν οι αριθμοί χ,ψ .

4. Αν $\alpha+\beta=3, \alpha^3+\beta^3=9$, να υπολογίσετε τους : $\alpha.\beta$ και $\alpha^2+\beta^2$.

5. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός: 5^6-1 διαιρείται με 24.

6. Αν $\alpha+\beta+\gamma=2, \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4$.

Μέρος 4

1. Αν $\chi+\psi+\omega=1,\ \chi^2+\psi^2+\omega^2=13$ και $\chi^3+\psi^3+\omega^3=19$, να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους χ,ψ,ω είναι μηδέν.

2. Αν για τους χ,ψ,ω ισχύει : $3^{\chi^3+\psi^3}=(\dfrac{27^{\chi\psi}}{3^{\omega^2}})^{\omega}$ και $\chi+\psi+\omega\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\chi=\psi=\omega$.

3. Αν $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3$, τότε ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τους α ,β;

4. Αν $\alpha^2+\beta^2=1$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A}=3\alpha^4-2\alpha^6+3\beta^4-2\beta^6$ είναι ανεξάρτητη των α,β .

5. Αν $\sqrt{3}\chi+\dfrac{1}{\chi}=\sqrt{3}+2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=3\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\ ,\ \mathrm{B}=3\sqrt{3}\chi^3+\frac{1}{\chi^3} \text{ και } \Gamma=9\chi^4+\frac{1}{\chi^4}$$

Εργασία 2

Ενότητα: Παραγοντοποίηση

Μέρος 1

Να γίνει η σωστή αντιστοίχιση μεταξύ των δυο στηλών. Κάθε στοιχείο της στήλης Α αντιστοιχεί σε ένα και μόνο στοιχείο της στήλης Β :

Στήλη Α (Αλγεβρική παράσταση)	Στήλη Β (αντίστοιχο γινόμενο)
Α. $\chi^2 - \frac{16}{25}$	**1.** $(\chi - 7)(\chi + 7)$
Β. $2\chi^2 - 36$	**2.** $(\sqrt{2}\chi + 6)(\sqrt{2}\chi - 6)$
Γ. $\chi^2 - 7$	**3.** $(\chi - \frac{1}{2})^2$
Δ. $27\chi^3 - \frac{1}{64}$	**4.** $(\chi - 1)(\chi - 3)$
Ε. $\chi^2 - \chi + \frac{1}{4}$	**5.** $(3\chi - \frac{1}{4})(9\chi^2 + \frac{3}{4}\chi + \frac{1}{16})$
ΣΤ. $9\chi^2 - \chi + \frac{1}{36}$	**6.** $(\chi - \sqrt{7})(\chi + \sqrt{7})$
Ζ. $\chi^2 - 4\chi + 3$	**7.** $(\chi - \frac{4}{5})(\chi + \frac{4}{5})$
Η. $\chi^2 + 2\chi - 15$	**8.** $(3\chi - \frac{1}{6})^2$
	9. $(\chi + 5)(\chi - 3)$

Μέρος 2

Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση (Σ) ή τη λανθασμένη απάντηση (Λ) δίπλα στις παρακάτω προτάσεις:

1. Ισχύει : $(-\chi + 1)(-\chi - 1) = 1 - \chi^2$
2. Ισχύει : $\chi^2 - 2\chi + 1 = (\chi - 1)^2$
3. Το κλάσμα $\frac{\chi^2 - 5\chi}{\chi^2 - 25}$ είναι ίσο με $\frac{\chi}{\chi + 5}$,εφόσον είναι $\chi \neq 5$
4. Είναι : $\chi^2 + 4 = (\chi + 2)(\chi - 2)$
5. Ισχύει : $3\chi^2 - 6 = 3\chi(\chi + \sqrt{2})(\chi - \sqrt{2})$
6. Ισχύει : $(\chi + 2)(\chi^2 - 2\chi + 4) = \chi^3 - 8$
7. Ισχύει: $\chi(2\chi - 1)(2\chi + 1) = 4\chi^3 - \chi$
8. Ισχύει: $(-\chi + 2)(-\chi - 2) = \chi^2 - 4$

Μέρος 3

1. Να γίνουν γινόμενο οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $4\chi^2 - 8\chi =$

β) $(3\chi - 1)^2 - 9 =$

γ) $4(\chi-1)^2-36=$

δ) $\chi^3-125\chi=$

ε) $(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta=$

στ) $\chi^2-\psi^2+2\psi-1=$

ζ) $\chi^4+4\psi^4=$

η) $\chi^3+\psi^3-\chi^2\psi-\chi\psi^2-\chi-\psi=$

θ) $\chi^2-\psi^2-7\chi+7\psi=$

ι) $\alpha^5+\alpha^4-\alpha-1=$

κ) $\chi^{3\mu}-\chi^{3\kappa}+\chi^{2\mu}-\chi^{2\kappa}=$

λ) $\zeta^6+8=$

μ) $\chi^2-\chi+\frac{1}{4}-\psi^2=$

ν) $\chi^4-11\chi^2\psi^2+\psi^4=$

ξ) $\chi+\sqrt{\chi}-2=$, με $\chi\geq 0$

ο) $\alpha^4+\alpha^2+1=$

Μέρος 4

1) Να απλοποιήσετε τις παρακάτω ρητές παραστάσεις και να γράψετε τους απαραίτητους περιορισμούς ,έτσι ώστε να είναι δυνατή η απλοποίηση:

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}\quad,\ \mathrm{B}=\frac{\alpha^2-\gamma^2+\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+2\alpha\gamma}\quad,$$

$$\Gamma=\frac{\chi^3-4\chi^2+3\chi}{\chi^2-\chi}\quad \text{και}\quad \Delta=\frac{(\chi^4-1)(\chi^2-2\chi)}{(\chi^3-4\chi)(\chi^2-\chi)}.$$

2) Αν $\alpha+\beta-1=\alpha\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ ή $\beta=1$.

3) Αν $\alpha(\beta^2+1)=\beta(\alpha^2+1)$, να αποδείξετε ότι οι α,β είναι ίσοι ή αντίστροφοι.

4) Αν $\chi^2-\psi^2-2\chi-6\psi=8$, να αποδείξετε ότι: $\psi=\chi-4$ ή $\psi=-\chi-2$.

5) Αν $\alpha\chi^2+\alpha\chi+\alpha=\beta\chi^2+\beta\chi+\beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha=\beta$.

6) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$.

7) Αν $(\beta^2-\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\alpha^2-\gamma^2)=4\alpha^2\gamma^2$, με α,β,γ να είναι πλευρές τριγώνου να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

8) Να γίνει γινόμενο παραγόντων η παράσταση: $\chi^5+\chi+1$.

9) Αν ισχύει : $(4\chi-1)^3+27(2-\chi)^3-(5+\chi)^3=0$ να αποδείξετε ότι:

$$\text{ή } \chi=\frac{1}{4},\ \text{ή } \chi=2\ ,\text{ή } \chi=-5.$$