



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
31<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα  
"Ο Αρχιμήδης"  
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μικρών τάξεων

**Πρόβλημα 1**

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο BCDE, τέτοιο ώστε:  $BE \perp AM$  και  $BE = \frac{AM}{2}$ . Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

**Πρόβλημα 2**

Έστω  $p$  πρώτος και  $m$  θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια  $(p, m)$  που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m) + p = (m+1)^3.$$

**Πρόβλημα 3**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3 = \frac{z}{y} - \frac{2y}{z}, \quad y^3 = \frac{x}{z} - \frac{2z}{x}, \quad z^3 = \frac{y}{x} - \frac{2x}{y}.$$

**Πρόβλημα 4.**

Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά  
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Καλή επιτυχία!*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
31<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα  
"Ο Αρχιμήδης"  
22 Φεβρουαρίου 2014

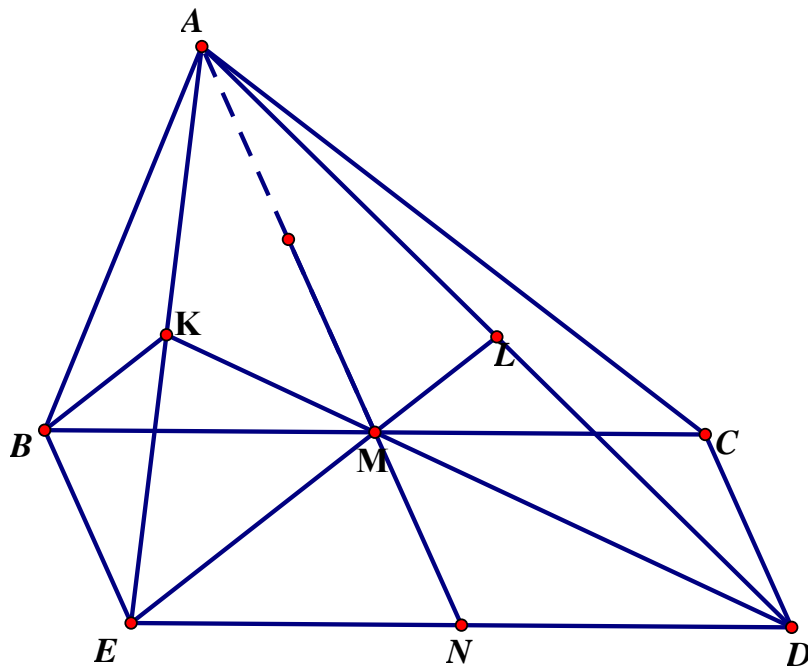
Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο  $ABC$  και έστω  $M$  το μέσο της πλευράς  $BC$ . Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $BCDE$ , τέτοιο ώστε:  $BE \parallel AM$  και  $BE = \frac{AM}{2}$ .  
Να αποδειχθεί ότι η ευθεία  $EM$  περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AD$ .

Λύση

Προεκτείνουμε την  $AM$  μέχρι να τμήσει την  $ED$  στο σημείο  $N$ . Τότε το τετράπλευρο  $BMNE$  είναι παραλληλόγραμμο, οπότε  $EN = BM = MC = ND$ . Άρα το  $N$  είναι το μέσον του  $ED$ . Επιπλέον παρατηρούμε ότι  $\frac{AM}{MN} = 2$  και το  $M$  είναι πάνω στη διάμεσο του τριγώνου  $EAD$ , οπότε το  $M$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $AED$ . Επομένως η ευθεία  $EM$  είναι η ευθεία της διαμέσου του τριγώνου  $AED$  που άγεται από την κορυφή  $E$ , οπότε θα τέμνει την πλευρά  $AD$  στο μέσο της.



Σχήμα 1

## Πρόβλημα 2

Έστω  $p$  πρώτος και  $m$  θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια  $(p, m)$  που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m) + p = (m+1)^3.$$

### Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται

$$p(p+m+1) = (m+1)^3, \quad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι ο πρώτος αριθμός  $p$  είναι διαιρέτης του  $(m+1)^3$ .

Επομένως, αφού  $p$  πρώτος, έπεται ότι  $p \mid (m+1)$ , οπότε θα υπάρχει θετικός ακέραιος  $k$  τέτοιος ώστε  $m+1 = kp$ . Τότε, από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$p(p+kp) = (kp)^3 \Leftrightarrow k+1 = k^3 p \Rightarrow k^3 \mid (k+1) \Rightarrow k \mid (k+1) \Rightarrow k = 1.$$

Άρα είναι  $p = 2$ ,  $m = 1$  και  $(p, m) = (2, 1)$ .

## Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3 = \frac{z}{y} - \frac{2y}{z}, \quad y^3 = \frac{x}{z} - \frac{2z}{x}, \quad z^3 = \frac{y}{x} - \frac{2x}{y}.$$

### Λύση

Για  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , που ικανοποιούν την συνθήκη  $xyz \neq 0$ , το σύστημα γράφεται:

$$x^3 y z = z^2 - 2y^2 \quad (1)$$

$$y^3 z x = x^2 - 2z^2 \quad (2)$$

$$z^3 x y = y^2 - 2x^2 \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz(x^2 + y^2 + z^2) = -(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)(xyz + 1) = 0.$$

Επειδή είναι  $xyz \neq 0$  έχουμε  $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ , οπότε από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι :

$$xyz = -1 \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) στο σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε:

$$x^2 = -z^2 + 2y^2 \quad (5)$$

$$y^2 = -x^2 + 2z^2 \quad (6)$$

$$z^2 = -y^2 + 2x^2 \quad (7)$$

Από τις (5) και (6) λαμβάνουμε  $y^2 = z^2$ , ενώ από τις (6) και (7) λαμβάνουμε  $x^2 = z^2$ , οπότε:

$$x^2 = y^2 = z^2 \Leftrightarrow x = y = \pm z \quad \text{ή} \quad x = -y = \pm z. \quad (8)$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (8) και (4) έχουμε τις λύσεις:

$$(x, y, z) = (-1, -1, -1), (x, y, z) = (1, 1, -1), (x, y, z) = (1, -1, 1), (x, y, z) = (-1, 1, 1).$$

#### **Πρόβλημα 4.**

Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

#### **Λύση**

Το 1 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).

Το 2 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).

Τώρα όλοι οι άρτιοι πρέπει να πάρουν το χρώμα του 2, οπότε οι αριθμοί 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 παίρνουν το χρώμα του 2.

Επίσης όλοι οι αριθμοί που έχουν κοινό διαιρέτη με αυτούς παίρνουν το χρώμα του 2, δηλαδή οι αριθμοί 3,5,7,9,15 παίρνουν το χρώμα του 2.

Οι αριθμοί που απέμειναν (που είναι οι πρώτοι μεγαλύτεροι του 10, δηλαδή οι 11,13,17,19) μπορούν να βαφούν με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).

Επομένως, συνολικά ο χρωματισμός μπορεί να γίνει με  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$  τρόπους. Πρέπει όμως να αφαιρέσουμε και τις δύο περιπτώσεις που τους βάφουμε όλους μαύρους ή όλους άσπρους. Άρα έχουμε συνολικά 62 τρόπους.



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**31<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"**  
**22 Φεβρουαρίου 2014**

**Θέματα μεγάλων τάξεων**

**Πρόβλημα 1**

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα  $P(x)$  με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2),$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Πρόβλημα 2**

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού  $n$  για τις οποίες ο αριθμός  $A = \frac{8n-25}{n+5}$  ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

**Πρόβλημα 3**

Θεωρούμε μια  $n \times n$  σκακίερα, όπου  $n$  άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί  $1, 2, 3, \dots, n^2$ , ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε  $S_1$  το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και  $S_2$  το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί  $n$  που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{39}{64}.$$

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται κύκλος  $c(O, R)$  (με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και δύο σημεία του  $A, B$  τέτοια, ώστε  $R < AB < 2R$ . Ο κύκλος  $c_1(A, r)$  (με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $r$ ,  $0 < r < R$ ), τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$ , στα σημεία  $C$  και  $D$  (το σημείο  $C$  ανήκει στο μικρό τόξο  $AB$ ). Από το σημείο  $B$ , θεωρούμε τις εφαπτόμενες  $BE$  και  $BF$  στον κύκλο  $c_1(A, r)$ , έτσι ώστε από τα σημεία επαφής  $E, F$ , το σημείο  $E$  βρίσκεται εκτός του κύκλου  $c(O, R)$ . Οι ευθείες  $EC$  και  $DF$  τέμνονται στο σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $BCFM$  είναι εγγράψιμο.

*Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες.*

*Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Καλή επιτυχία!*

## Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

### Πρόβλημα 1

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα  $P(x)$  με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2),$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### Λύση

Η δεδομένη ισότητα γράφεται στη μορφή

$$(x-2)(x-4)P(x) = x(x+2)P(x-2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

οπότε, για  $x=0, -2$  και  $4$  προκύπτουν οι ισότητες:  $P(0) = P(-2) = P(2) = 0$ .

Επομένως το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντες τους  $x, x+2$  και  $x-2$ , οπότε έχουμε:

$$P(x) = x(x+2)(x-2)Q(x), \quad (2)$$

όπου το  $Q(x)$  είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.

Λόγω της (2) η σχέση (1) γίνεται:

$$(x-2)(x-4)^2 x(x+2)Q(x) = x(x+2)(x-2)x(x-4)Q(x-2), \quad (3)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Ισοδύναμα, έχουμε

$$x(x+2)(x-2)(x-4)[(x-2)Q(x) - xQ(x-2)] = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Από τη σχέση (4), επειδή το πολυώνυμο  $x(x-2)(x+2)(x-4)$  δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, προκύπτει η ισότητα:

$$(x-2)Q(x) - xQ(x-2) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Από την τελευταία σχέση για  $x=0$  λαμβάνουμε ότι  $Q(0)=0$ , οπότε  $Q(x) = xR(x)$ , όπου  $R(x)$  πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Λόγω της (5) η σχέση (4) γίνεται:

$$\begin{aligned} (x-2)xR(x) - x(x-2)R(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2)[R(x) - R(x-2)] &= 0, \end{aligned}$$

από την οποία, αφού  $x(x-2) \neq 0(x)$ , προκύπτει ότι:

$$R(x) = R(x-2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι  $R(x) = R(x+2k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε το πολυώνυμο  $R(x)$  παίρνει την ίδια τιμή για άπειρες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , για παράδειγμα ισχύει  $c = R(0) = R(2k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Άρα είναι  $R(x) = c$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε

$$P(x) = x(x+2)(x-2)Q(x) = x(x+2)(x-2)xR(x) = cx^2(x^2 - 4).$$

**Πρόβλημα 2**

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού  $n$  για τις οποίες ο αριθμός  $A = \frac{8n-25}{n+5}$  ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

**Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)**

Έστω  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ , με  $(p, q) = 1$  και τέτοιοι ώστε

$$A = \frac{8n-25}{n+5} = \left(\frac{p}{q}\right)^3. \quad (1)$$

Τότε θα είναι και  $(p^3, q^3) = 1$ , ενώ από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$q^3(8n-25) = p^3(n+5), \quad (2)$$

από την οποία έπεται ότι

$$p^3 \mid (8n-25) \text{ και } q^3 \mid (n+5) \Rightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε:}$$

$$8n-25 = kp^3 \text{ και } n+5 = kq^3. \quad (3)$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι  $8n-25 = kp^3$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε τις σχέσεις (3). Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 8(n+5) - (8n-25) &= k(8q^3 - p^3) \\ \Rightarrow k(2q-p)(4q^2 + 2qp + p^2) &= 65. \end{aligned}$$

Επομένως οι αριθμοί  $k$ ,  $2q-p$  και  $4q^2 + 2qp + p^2$  είναι διαιρέτες του 65. Παρατηρούμε όμως ότι  $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \equiv 1 \pmod{3}$  και επιπλέον ισχύει  $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \geq 3$ , οπότε, αφού ο αριθμός  $4q^2 + 2pq + p^2$  είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2 + 2pq + p^2 = 13 \Leftrightarrow 3q^2 + (p+q)^2 = 13,$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $4q^2 + 2qp + p^2 = 13$ ,  $k = \pm 1$ ,  $2q - p = \pm 5$ . Τότε έχουμε:

$$p = 2q \mp 5 \text{ και } 4q^2 + 2q(2q \mp 5) + (2q \mp 5)^2 = 13 \Leftrightarrow p = 2q \mp 5, \quad 2q^2 \mp 5q + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 2q \mp 5, \quad q = \pm 2 \Leftrightarrow p = \mp 1, \quad q = \pm 2. \text{ Τότε και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 = -\frac{1}{8}, \text{ οπότε θα είναι: } \frac{8n-25}{n+5} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 8(8n-25) = -(n+5) \Leftrightarrow n = 3.$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Όπως στον πρώτο τρόπο φθάνουμε στη σχέση (2) και τη λύνουμε ως προς  $n$ , οπότε λαμβάνουμε:

$$n = \frac{5(5q^3 + p^3)}{8q^3 - p^3}. \quad (4)$$

Έστω  $d = (5q^3 + p^3, 8q^3 - p^3)$ . Τότε  $d \mid 5q^3 + p^3 + 8q^3 - p^3 = 13q^3$  και αφού  $(p, q) = 1$  έπεται ότι  $d \mid 13$ . Επομένως

$$\frac{8q^3 - p^3}{d} \mid 5 \Rightarrow (8q^3 - p^3) \mid 5 \cdot 13 \Rightarrow (2q - p)(4q^2 + 2pq + p^2) \mid 65.$$

Παρατηρούμε ότι  $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \equiv 1 \pmod{3}$  και επιπλέον ισχύει  $4q^2 + 2pq + p^2 = 3q^2 + (p+q)^2 \geq 3$ , οπότε, αφού ο αριθμός  $4q^2 + 2pq + p^2$  είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2 + 2pq + p^2 = 13 \Leftrightarrow 3q^2 + (p+q)^2 = 13. \quad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι  $|q| \leq 2$ , οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν  $|q| = 0$  ή  $|q| = 1$ , οπότε  $(p+q)^2 = 13$  ή  $(p+q)^2 = 10$ , αδύνατες με  $p, q \in \mathbb{Z}$ .
- Αν  $|q| = 2$ , τότε  $(p+q)^2 = 1$ , από την οποία προκύπτουν οι λύσεις:

$$(p, q) = (-1, 2) \text{ ή } (p, q) = (1, -2) \text{ ή } (p, q) = (-3, 2) \text{ ή } (p, q) = (3, -2).$$

Επειδή  $(2q-p) \mid 65$ , δεκτές είναι μόνο οι λύσεις  $(p, q) = (-1, 2)$  ή  $(p, q) = (1, -2)$ , από τις οποίες προκύπτει ότι  $n = 3$ .

### Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια  $n \times n$  σκακιέρα, όπου  $n$  άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί  $1, 2, 3, \dots, n^2$ , ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε  $S_1$  το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και  $S_2$  το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί  $n$  που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{39}{64}.$$

### Λύση

Η δεδομένη σχέση είναι ισοδύναμη με την  $S_1 = \frac{39}{103}(S_1 + S_2)$ . Παρατηρούμε ότι :

$$S_1 + S_2 = 1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

Επειδή ο  $S_1$  είναι φυσικός αριθμός, από τις παραπάνω θα έχουμε ότι  $103 \left( \frac{n^2(n^2 + 1)}{2} \right)$ . Όμως ο 103 είναι πρώτος της μορφής  $4k+3$ , οπότε ο 103 δεν

διαιρεί τον  $n^2 + 1$ . Επομένως πρέπει να διαιρεί τον  $n^2$  και αφού είναι πρώτος, πρέπει  $103 \mid n$ . Αφού επιπλέον ο  $n$  είναι άρτιος, θα έχουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 206, δηλαδή πρέπει:  $n = 206k, k \in \mathbb{N}^*$ .

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε πολλαπλάσιο του 206 είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του  $S_1$  είναι:

$$1 + 2 + \dots + \frac{n^2}{2} = \frac{\frac{n^2}{2} \left( \frac{n^2}{2} + 1 \right)}{2} = A,$$

ενώ η μέγιστη τιμή είναι:

$$\left( \frac{n^2}{2} + 1 \right) + \left( \frac{n^2}{2} + 1 \right) + \dots + n^2 = B.$$



Εύκολα ελέγχουμε την ανισότητα,

$$A < S_1 = \frac{39}{103}(S_1 + S_2) < B$$

Τώρα θα πάρουμε το ζητούμενο δείχνοντας ότι το  $S_1$  μπορεί να πάρει κάθε δυνατή τιμή ανάμεσα στα  $A, B$ . Πράγματι, ο αριθμός  $A+1$  μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς  $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-1, \frac{n^2}{2}+1$ . Ο αριθμός  $A+2$  μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς  $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-1, \frac{n^2}{2}+2$ , και ούτω καθεξής. Όταν φτάσουμε στο βήμα όπου χρειάζεται η τοποθέτηση των αριθμών  $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-1, n^2$ , για να πάρουμε τον επόμενο αριθμό ως άθροισμα, θα επιλέξουμε στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς  $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-2, \frac{n^2}{2}, n^2$ , και στον επόμενο τους  $1, 2, \dots, \frac{n^2}{2}-2, \frac{n^2}{2}+1, n^2$ , και ούτω καθεξής. Αυξάνοντας λοιπόν με την παραπάνω διαδικασία το άθροισμα κατά 1, ξεκινώντας από το  $A$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους αριθμούς μέχρι το  $B$ .

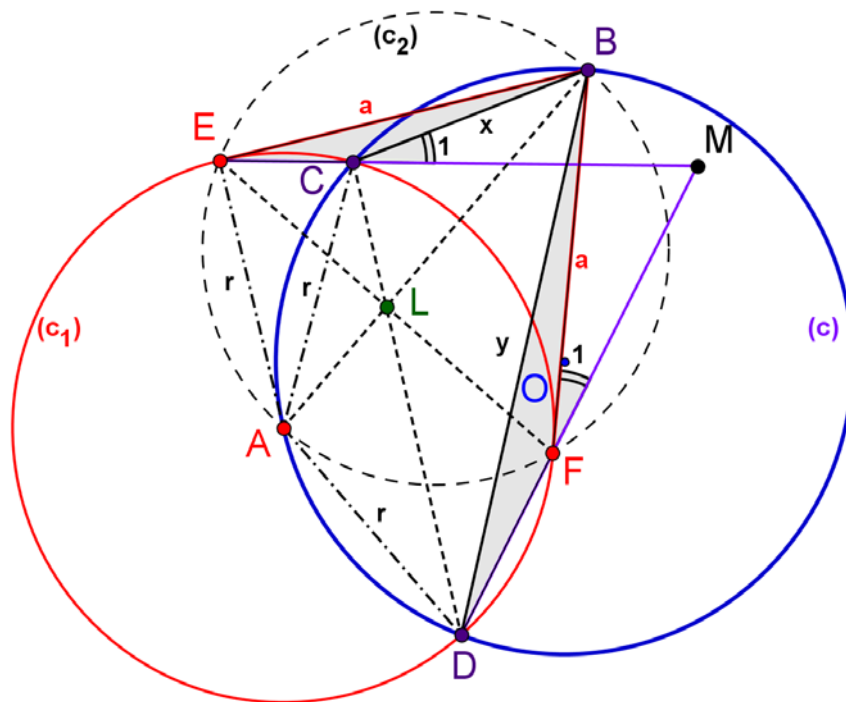
#### Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος  $c(O, R)$  (με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και δύο σημεία του  $A, B$  τέτοια, ώστε  $R < AB < 2R$ . Ο κύκλος  $c_1(A, r)$  (με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $r$ ,  $0 < r < R$ ), τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$ , στα σημεία  $C$  και  $D$  (το σημείο  $C$  ανήκει στο μικρό τόξο  $AB$ ). Από το σημείο  $B$ , θεωρούμε τις εφαπτόμενες  $BE$  και  $BF$  στον κύκλο  $c_1(A, r)$ , έτσι ώστε από τα σημεία επαφής  $E, F$ , το σημείο  $E$  βρίσκεται εκτός του κύκλου  $c(O, R)$ . Οι ευθείες  $EC$  και  $DF$  τέμνονται στο σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $BCFM$  είναι εγγράψιμο.

#### Λύση (1<sup>ος</sup> τρόπος)

Το τετράπλευρο  $AEBF$  είναι εγγράψιμο (διότι οι  $BE$  και  $BF$  είναι εφαπτόμενες, οπότε:  $\hat{AEB} = \hat{AFB} = 90^\circ$ ) και έστω  $c_2$  ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Το τμήμα  $CD$  είναι η κοινή χορδή των κύκλων  $(c)$  και  $(c_1)$ . Το τμήμα  $AB$  είναι η κοινή χορδή των κύκλων  $(c)$  και  $(c_2)$ . Το τμήμα  $EF$  είναι η κοινή χορδή των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$ . Άρα οι τρεις παραπάνω χορδές θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο, έστω  $L$ , των τριών κύκλων.

Η  $AB$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{EBF}$  (διότι  $BE$  και  $BF$  είναι εφαπτόμενες του κύκλου  $c_1(A, r)$ ). Η  $AB$  είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας  $\hat{CBD}$ , γιατί οι γωνίες  $\hat{ABC}$  και  $\hat{ABD}$  είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο  $c(O, R)$  και βαίνουν στα ίσα τόξα  $\widehat{AC}$  και  $\widehat{AD}$ . Άρα οι γωνίες  $\hat{EBC}$  και  $\hat{FBD}$  είναι ίσες.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια της ισότητας  $\hat{EBC} = \hat{FBD}$ , θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα  $BCE$  και  $BFD$  είναι όμοια. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BF}{BD} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Leftrightarrow xy = a^2,$$

όπου θέσαμε (χάρην συντομίας):  $BE = BF = a$ ,  $BC = x$  και  $BD = y$ .

Από την ομοιότητα των τριγώνων  $LCB$  και  $LAD$  έχουμε:

$$\frac{LC}{LA} = \frac{CB}{AD} \Rightarrow \frac{LC}{LA} = \frac{x}{r} \quad (1).$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων  $LCA$  και  $LBD$ , έχουμε:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BD}{CA} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{y}{r} \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{xy}{r^2} \quad (A).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ABE$ , το τμήμα  $AL$  είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, άρα:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{EB^2}{EA^2} = \frac{a^2}{r^2} \quad (B).$$

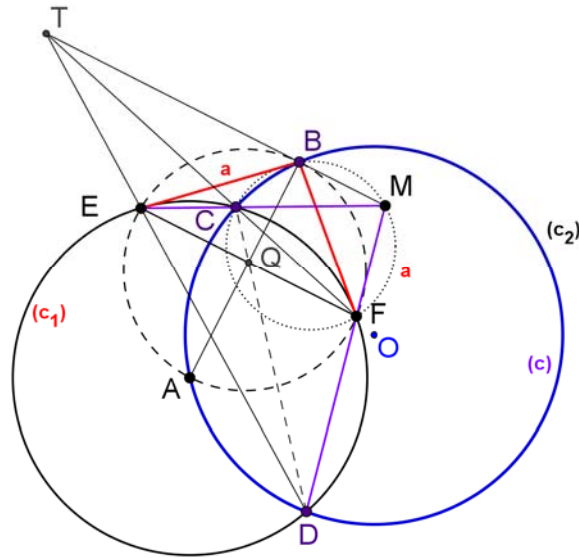
Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε:  $xy = a^2$ .

Άρα τα τρίγωνα  $BCE$  και  $BFD$  είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις γωνίες τους ίσες (μία προς μία). Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων  $BCE$  και  $BFD$ , προκύπτει η ισότητα:  $\hat{C} = \hat{F}$ . Άρα το τετράπλευρο  $BCFM$  είναι εγγράψιμο.

### 2<sup>ος</sup> τρόπος.

Σημειώνουμε με  $Q$  το σημείο τομής των  $EF, CD$ . Από το **θεώρημα Pascal** στο εκφυλισμένο εξάγωνο  $EEDFFC$  παίρνουμε ότι, αν  $T$  είναι το σημείο τομής των

$ED, CF$ , τότε τα σημεία  $T, B, M$  είναι συνευθειακά. Επιπλέον, στο εγγεγραμμένο  $ECFD$ , τα σημεία  $T, M$  είναι τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών και το  $Q$  είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Επομένως η ευθεία  $TM$  είναι η **πολική** του  $Q$ , οπότε η  $AQ$  είναι κάθετη στην πολική (αφού  $A$  κέντρο του κύκλου), οπότε έχουμε ότι  $\hat{A}BT = 90^\circ$ . Έτσι, έπεται ότι  $EF \parallel TM$  αφού  $AB \perp EF$ , οπότε έχουμε ότι  $\hat{B}MC = \hat{M}EF = \hat{C}FB$ , όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης.



Σχήμα 3

#### Παρατήρηση

Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων  $BCE$  και  $BFD$ , προκύπτει επίσης ότι και το τετράπλευρο  $BEDM$  είναι εγγράψιμο.