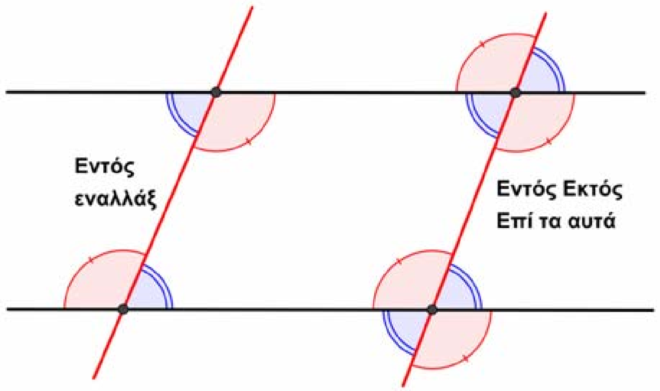
ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ 2012

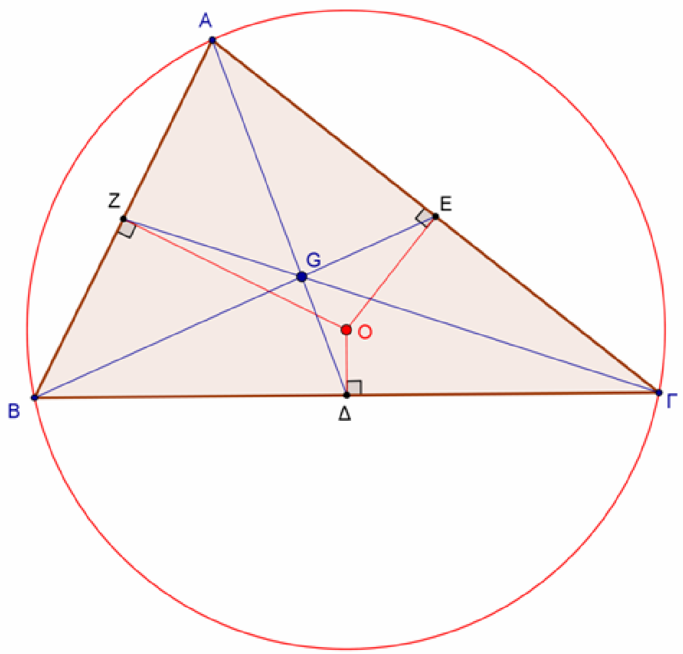
www.mathlab.gr

vag.psychas@gmail.com

Παράλληλες Ευθείες



ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ



Βαρύκεντρο-Περίκεντρο

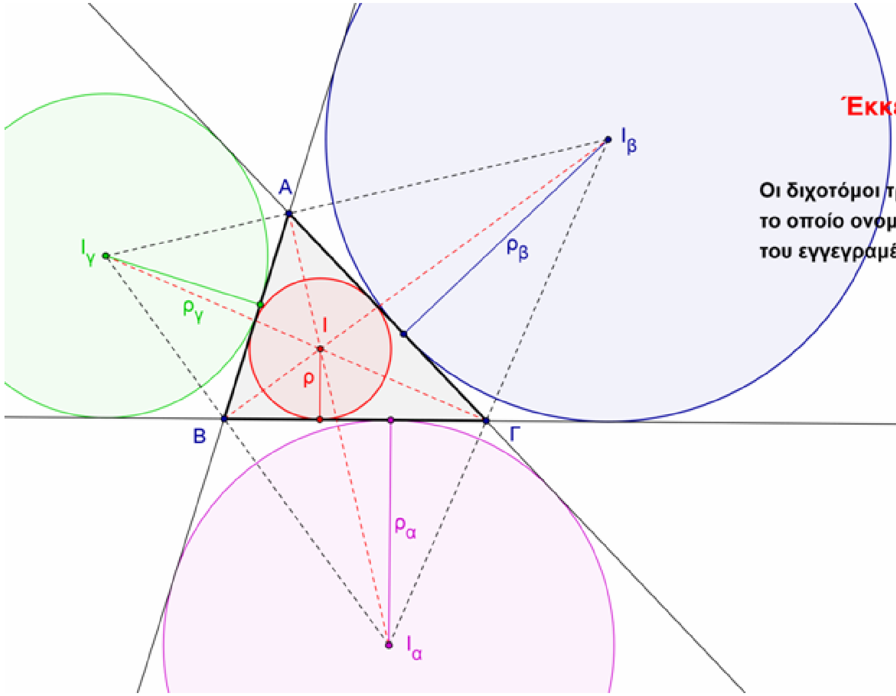
Οι μεσοκάθετοι τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο το οποίο ονομάζουμε περίκεντρο και είναι το κέντρο του περιγεγραμένου στο τρίγωνο κύκλου.

Οι διάμεσοι τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο το οποίο ονομάζουμε βαρύκεντρο και χωρίζει κάθε διάμεσο σε λόγο 2.

$$\frac{GA}{G\Delta}=\frac{GB}{GE}=\frac{G\Gamma}{GZ}=2$$

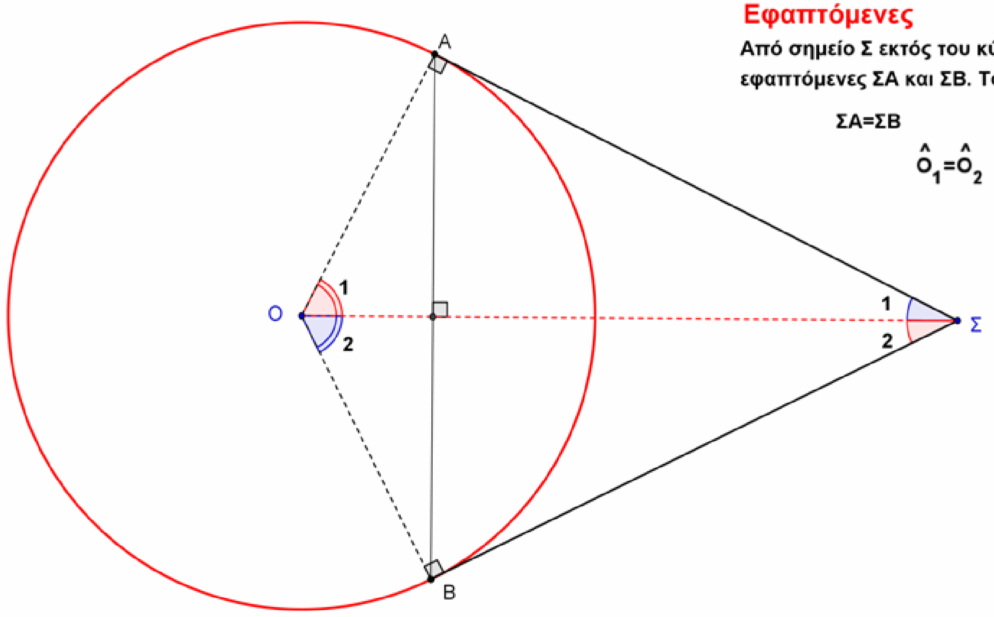
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

Έκκεντρο-Παράκεντρα



Οι διχοτόμοι τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο το οποίο ονομάζουμε έκκεντρο και είναι το κέντρο του εγγεγραμένου στο τρίγωνο κύκλου.

ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ



Εφαπτόμενες

Από σημείο Σ εκτός του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες ΣΑ και ΣΒ. Τότε ισχύουν:

ΣΑ=ΣΒ

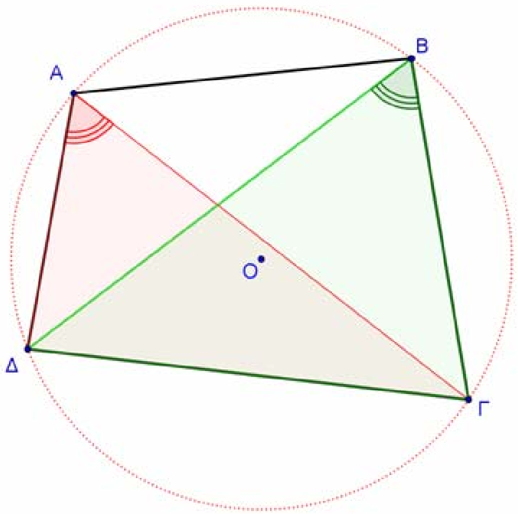
$\hat{O}_1=\hat{O}_2$

$\hat{\Sigma}_1=\hat{\Sigma}_2$

ΑΒ⊥ΟΣ

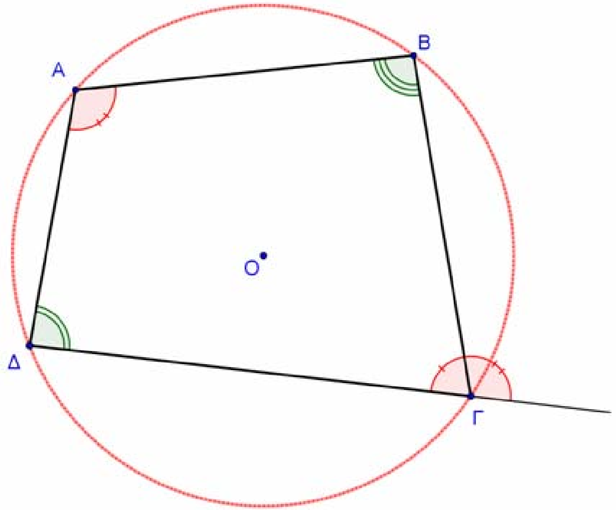
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ (01)



Ενα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο όταν κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες.

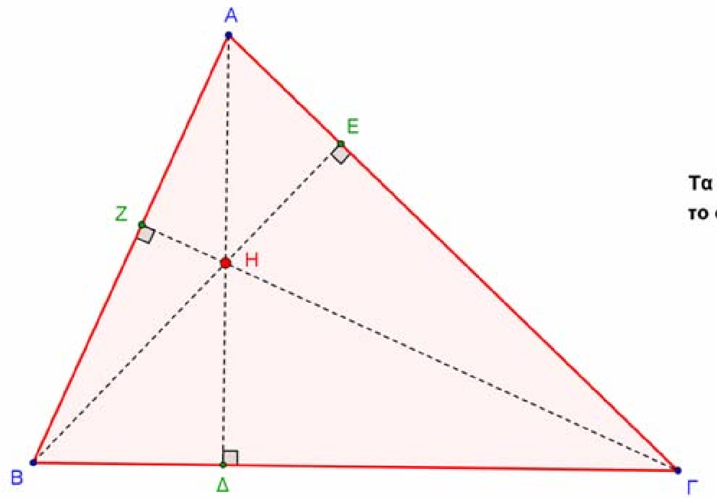
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ



ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ (02)

Ενα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο όταν το άθροισμα των απέναντι γωνιών του είναι 180° ή κάθε γωνία του είναι ίση με την απέναντι εξωτερική.

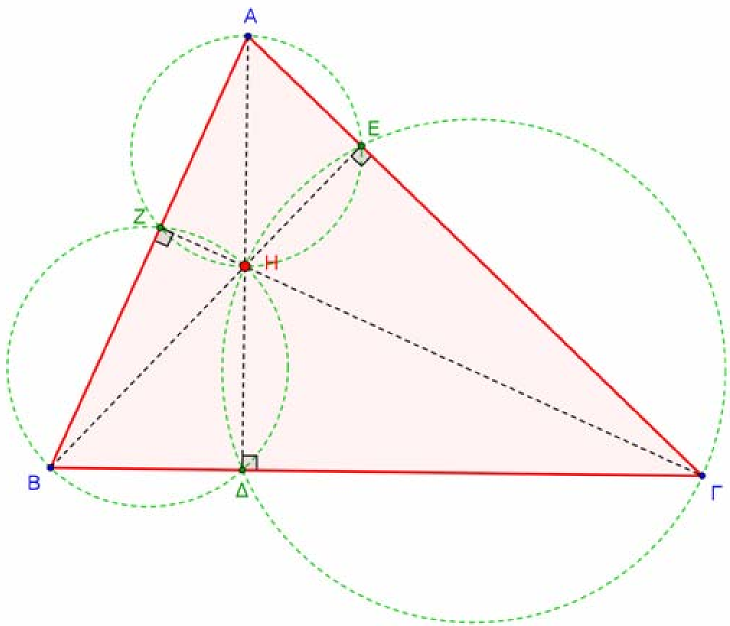
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ



ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ (01)

Τα ύψη τριγώνου, περνάνε από το ίδιο σημείο το οποίο ονομάζουμε Ορθόκεντρο.

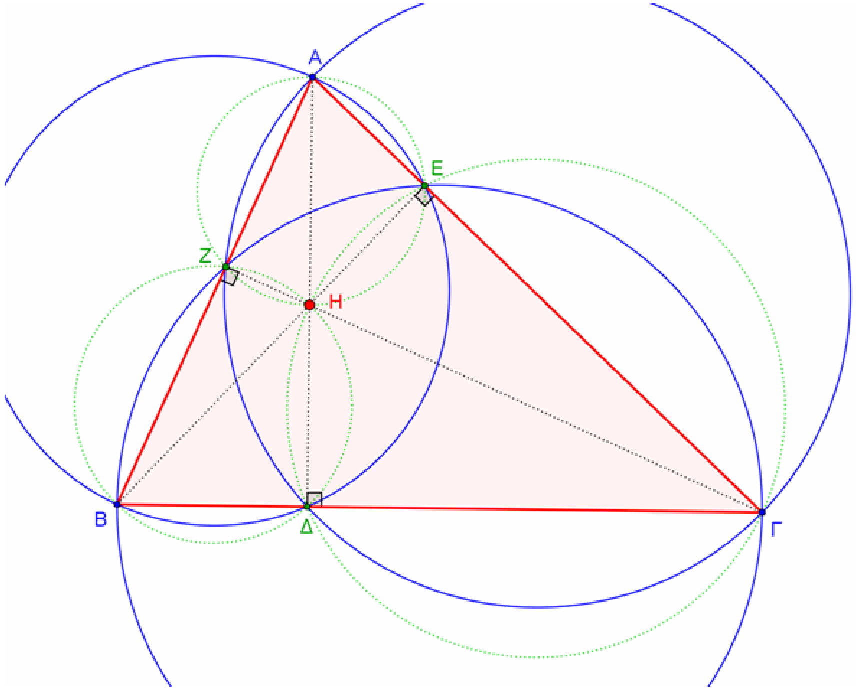
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ



ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ (02)

Τα τετράπλευρα ΑΖΗΕ, ΒΖΗΔ και ΓΔΗΕ είναι εγγράψιμα.

ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

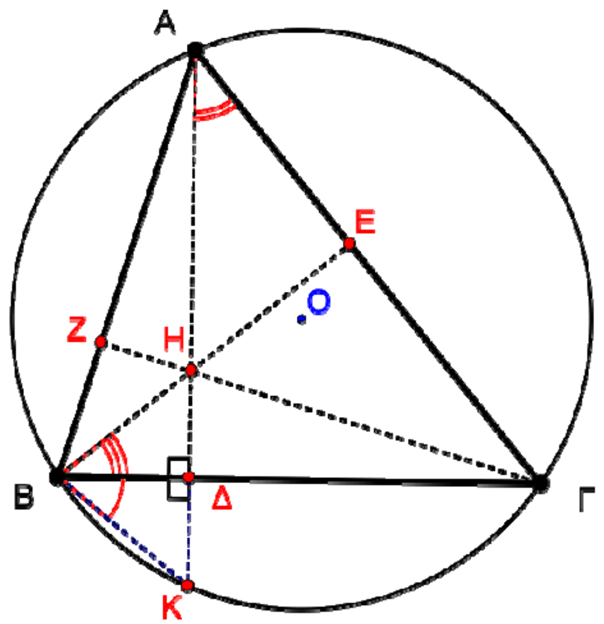


ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ (03)

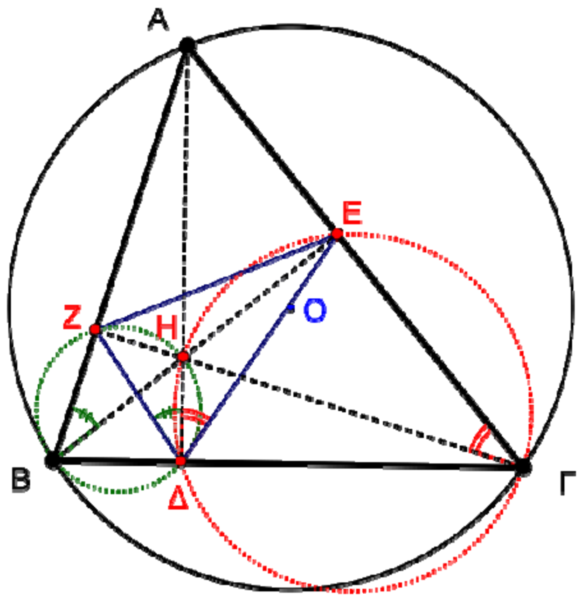
Τα τετράπλευρα ΒΖΕΓ, ΑΖΔΓ και ΑΕΔΖ είναι εγγράψιμα.

ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

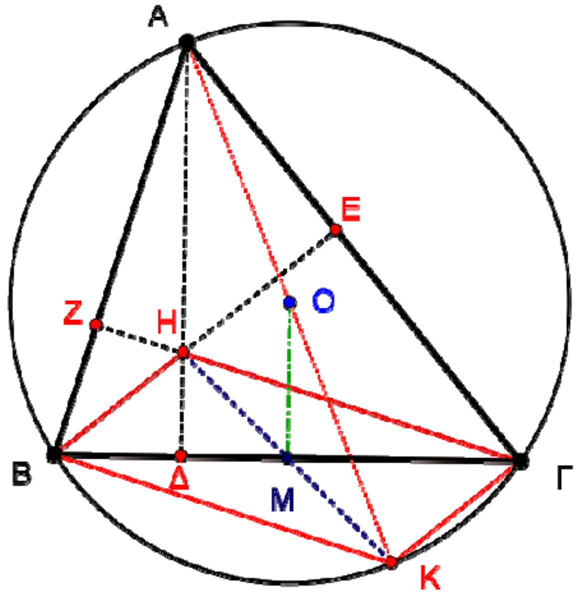
Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου (ως προς τις πλευρές του) βρίσκονται επάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του .

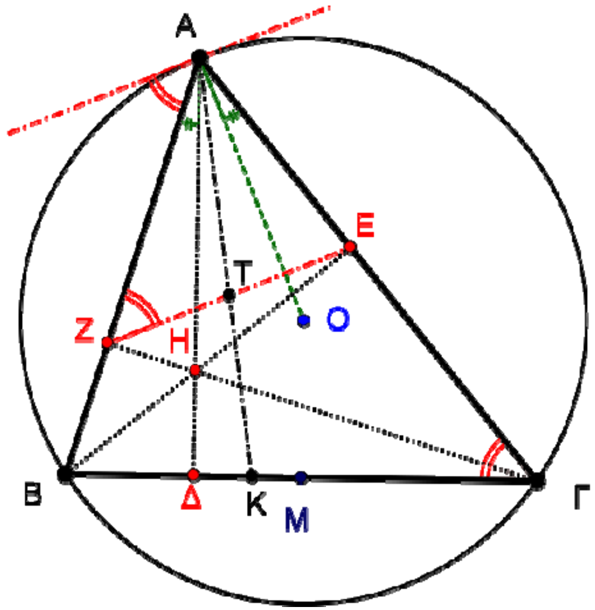


Τα ύψη τριγώνου, διχοτομούν τις γωνίες του ορθικού του .



Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου (ως προς τα μέσα των πλευρών του) βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο κύκλο του.



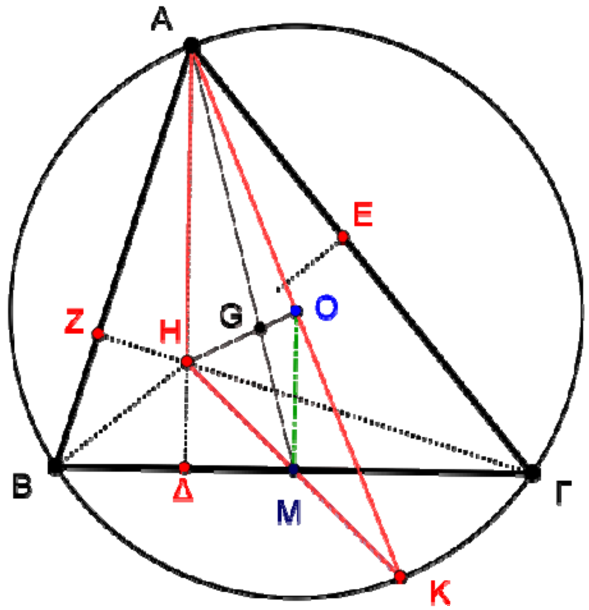


Η ΖΕ είναι αντιπαράλληλος της ΒΓ.

Αν Τ μέσο της ΖΕ τότε η ΑΚ είναι συμμετροδιάμεσος.

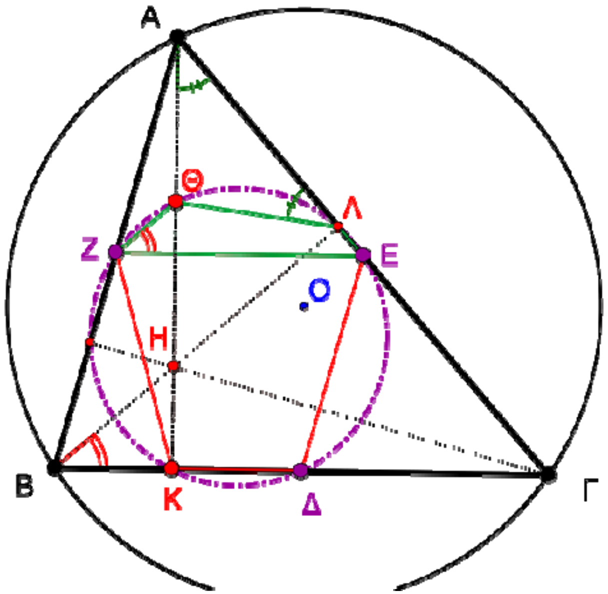
ΑΔ,ΟΑ ισογώνιες συζυγείς.

*Το ορθόκεντρο, το περίκεντρο και το βαρύκεντρο τριγώνου, βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία (ευθεία του **Euler**).*

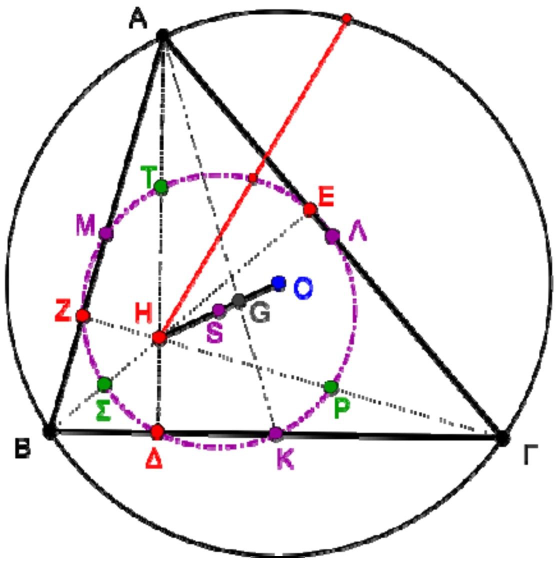


HG=2OG

Τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των αποστάσεων ορθοκέντρου-κορυφών, βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο (κύκλος του Euler).

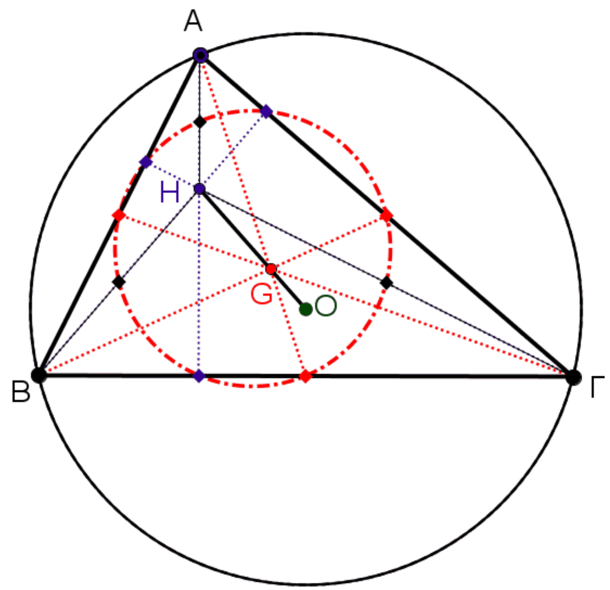


*Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου είναι ομοιόθετος του κύκλου **Euler**.*

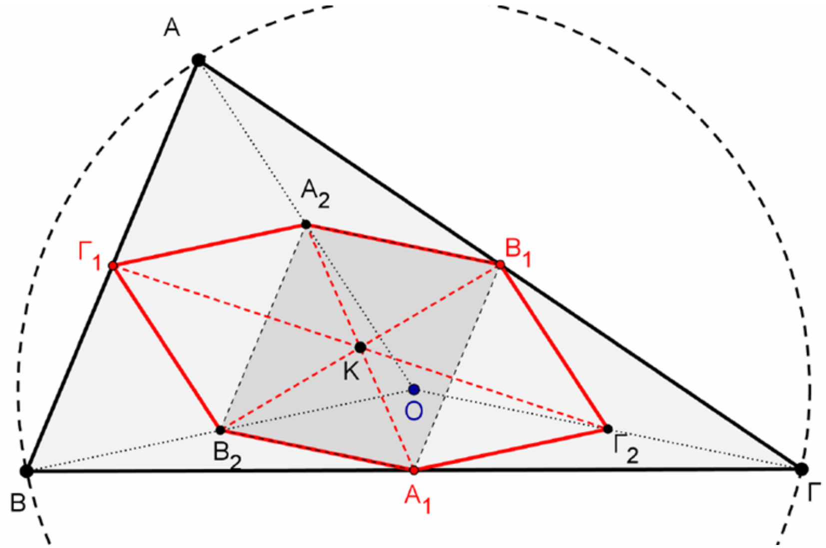


Κέντρο του κύκλου Euler είναι το μέσο του OH.

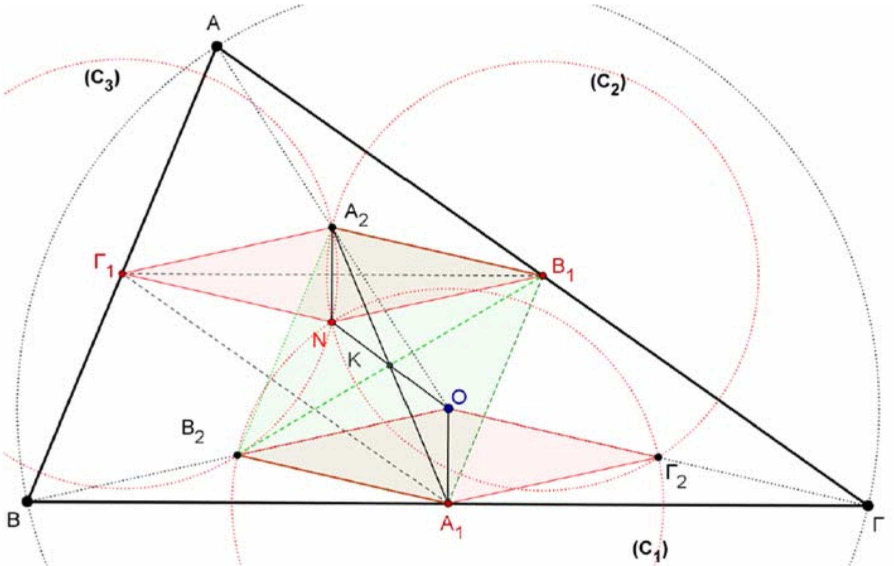
Ακτίνα του κύκλου Euler είναι $R/2$.


A
H
G
O
B
Γ

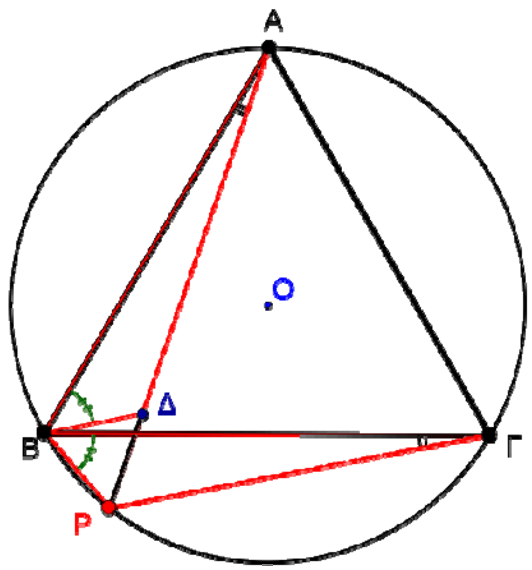
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν A_1,B_1,Γ_1 είναι τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma,A\Gamma,AB$ αντίστοιχα και A_2,B_2,Γ_2 είναι τα μέσα των $OA,OB,O\Gamma$ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι το εξάγωνο $A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του A_1A_2,B_1B_2 και Γ_1,Γ_2 περνάνε από το ίδιο σημείο.



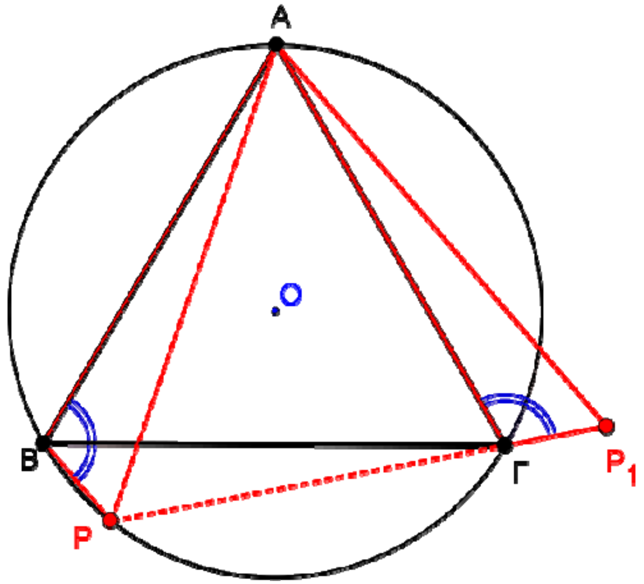
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(A_1, \frac{R}{2})$, $C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξτε ότι οι $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.



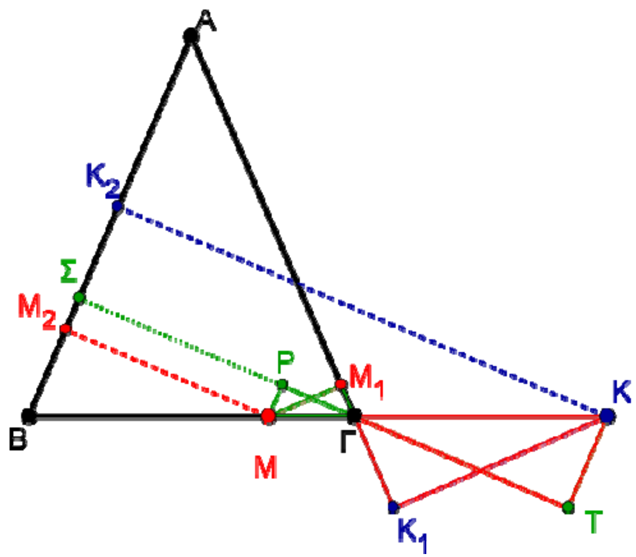
Αν P τυχόν σημείο του τόξου $ΒΓ$ του περιγεγραμμένου κύκλου ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, τότε $PA=PB+PΓ$.



Αν Ρ τυχόν σημείο του τόξου ΒΓ του περιγεγραμμένου κύκλου ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, τότε ΡΑ=ΡΒ+ΡΓ.

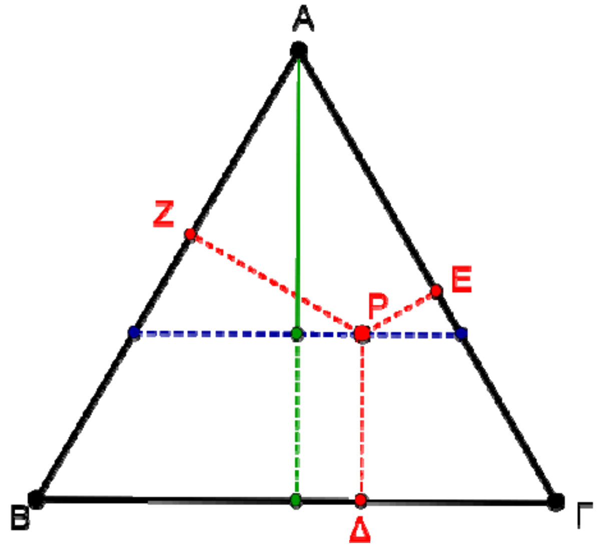


Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ).



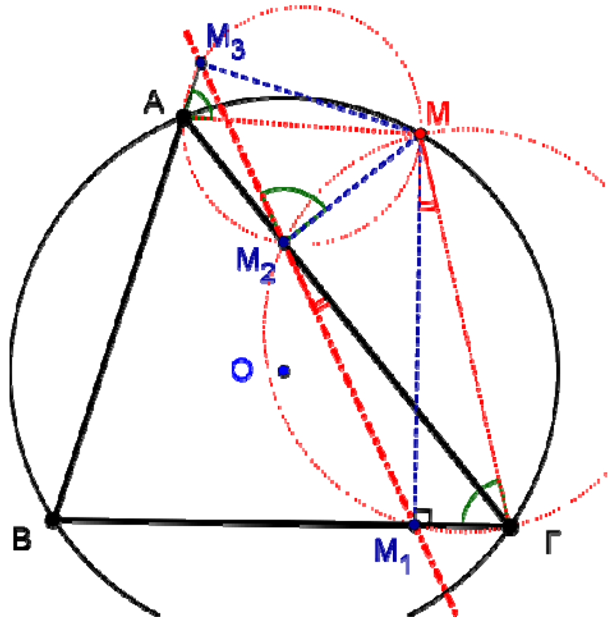
$$MM_1 + MM_2 = KK_2 - KK_1 = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$$

Ισόπλευρο τρίγωνο ***ΑΒΓ .***

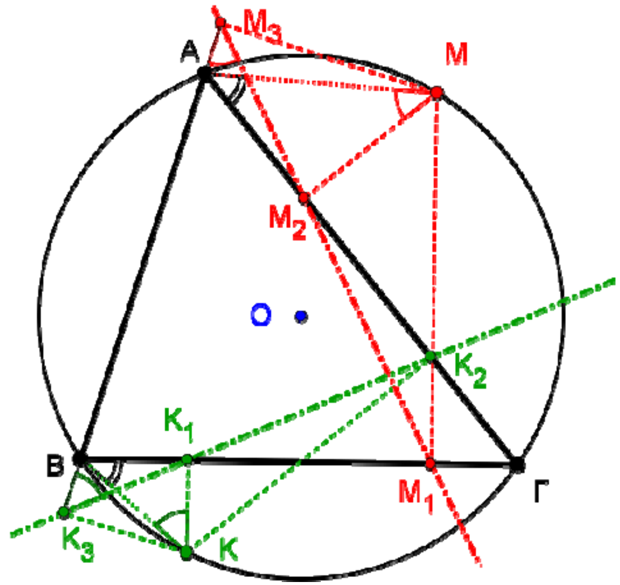


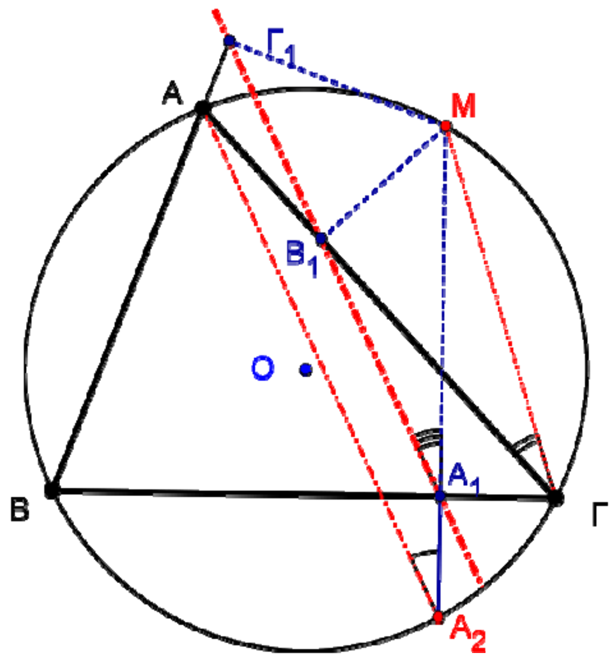
$$P\Delta + PE + PZ = \upsilon_\alpha$$

Οι προβολές σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου στις πλευρές τριγώνου, βρίσκονται σε ευθεία (ευθεία Simson).

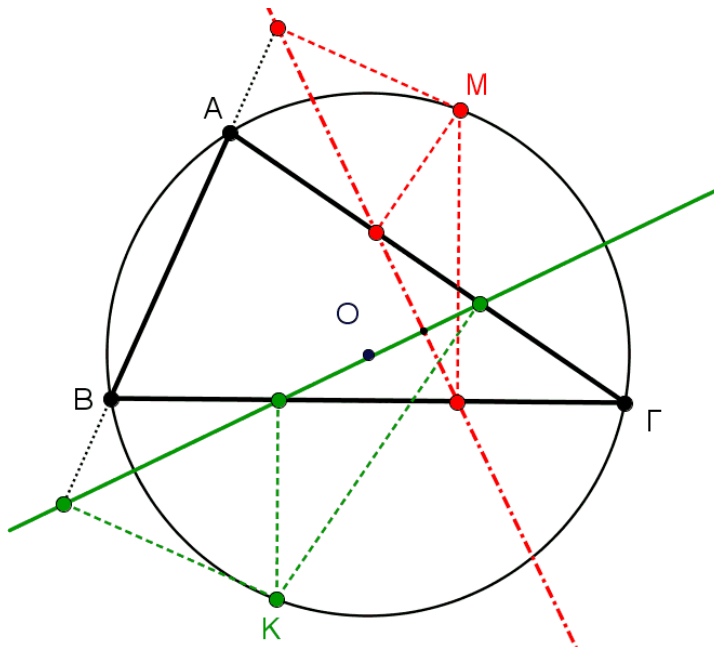


Η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες Simson (που αντιστοιχούν στα σημεία Κ και Μ) ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο ΚΜ.

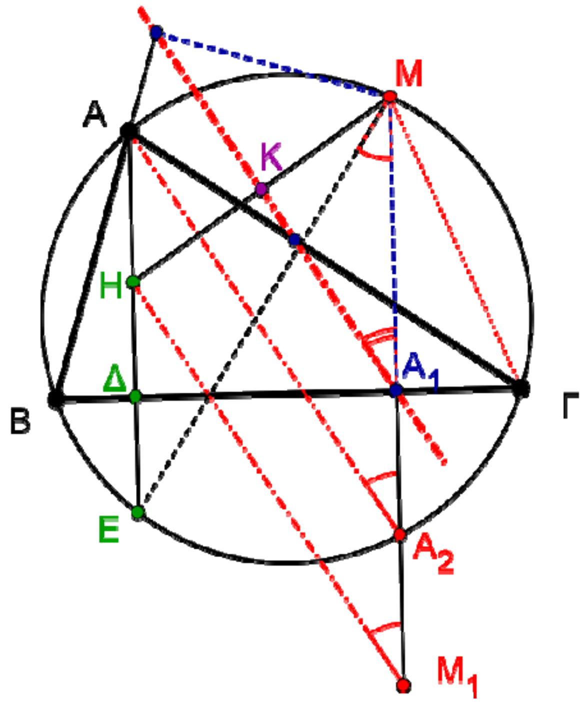




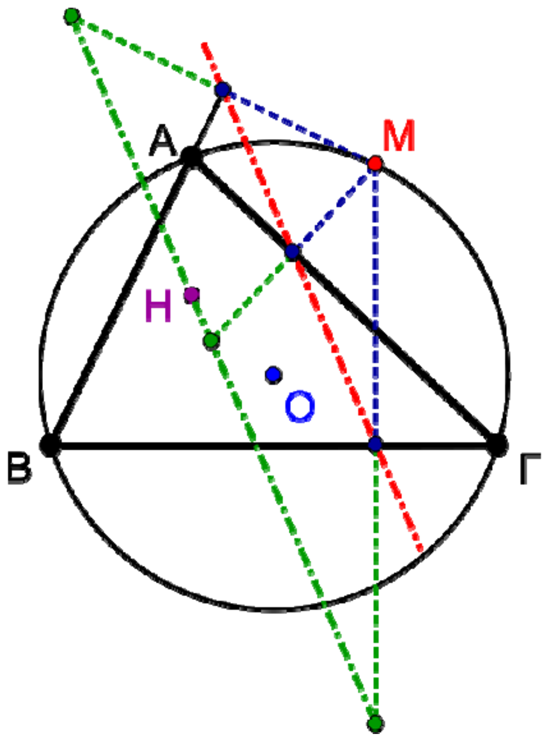
$$AA_2 \;//\; A_1B_1$$



M
Α
Ο
Β
Γ
Κ

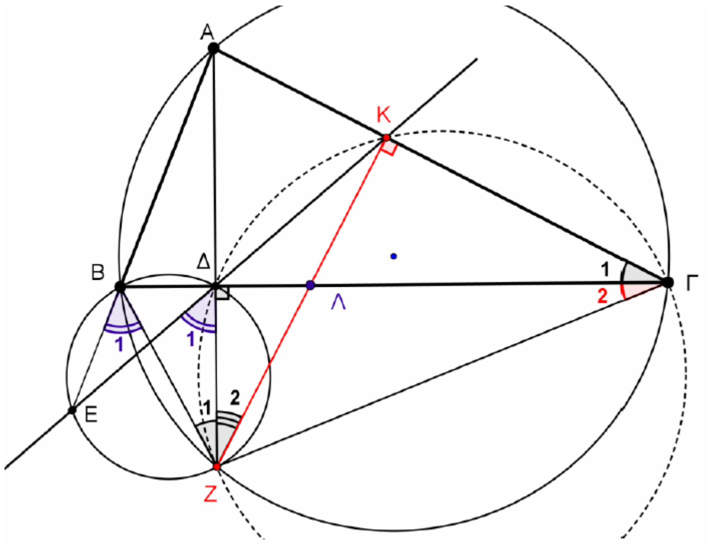


Το μέσο του MH ανήκει στην ευθεία Simson που αντιστοιχεί στο σημείο Μ και τον κύκλο του Euler.

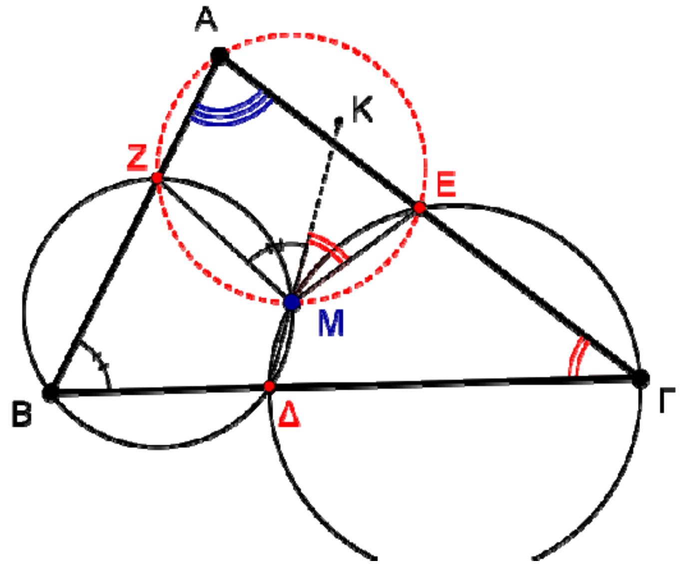


Τα συμμετρικά σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου, ως προς τις πλευρές τριγώνου, βρίσκονται σε ευθεία που περνά από το ορθόκεντρό του.

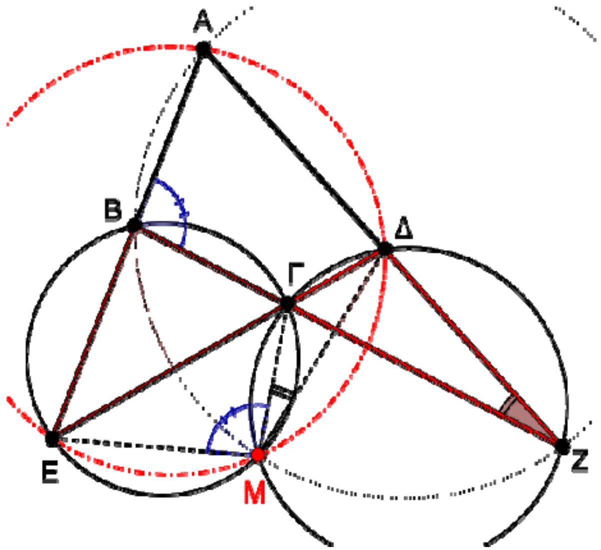
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Το ύψος του $A\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta Z$ τέμνει την AB στο σημείο E. Αν η $E\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο K και η ZK την $B\Gamma$ στο σημείο Λ, αποδείξτε ότι το Δ είναι το μέσο της $B\Lambda$.

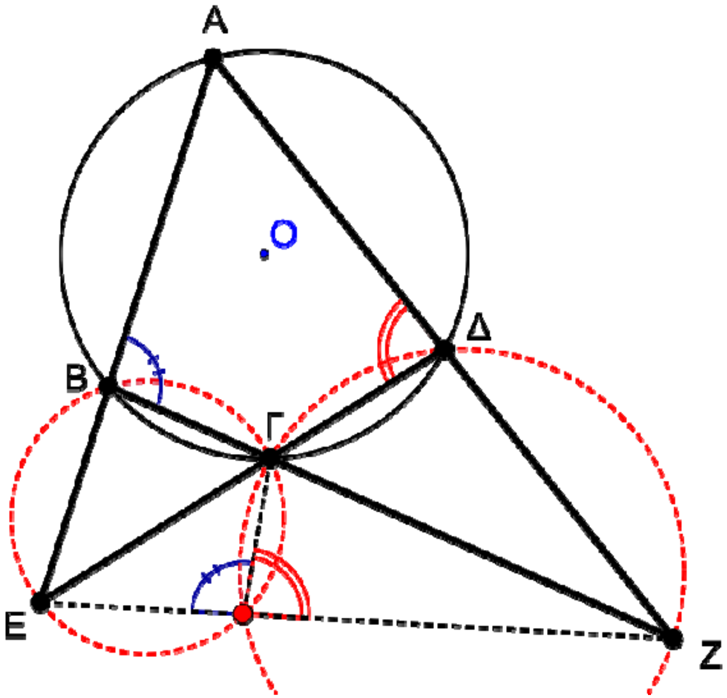


Αν Δ, Ε, Ζ είναι σημεία στις πλευρές τριγώνου, τότε οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΔΖ και ΓΔΕ περνάνε από το ίδιο σημείο (Σημείο Miquel του τριγώνου).



Σε πλήρες τετράπλευρο ΑΒΓΔΕΖ, οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΕ, ΑΒΖ, ΒΓΕ και ΓΔΖ περνάνε από το ίδιο σημείο (Σημείο Miquel του τετραπλεύρου).

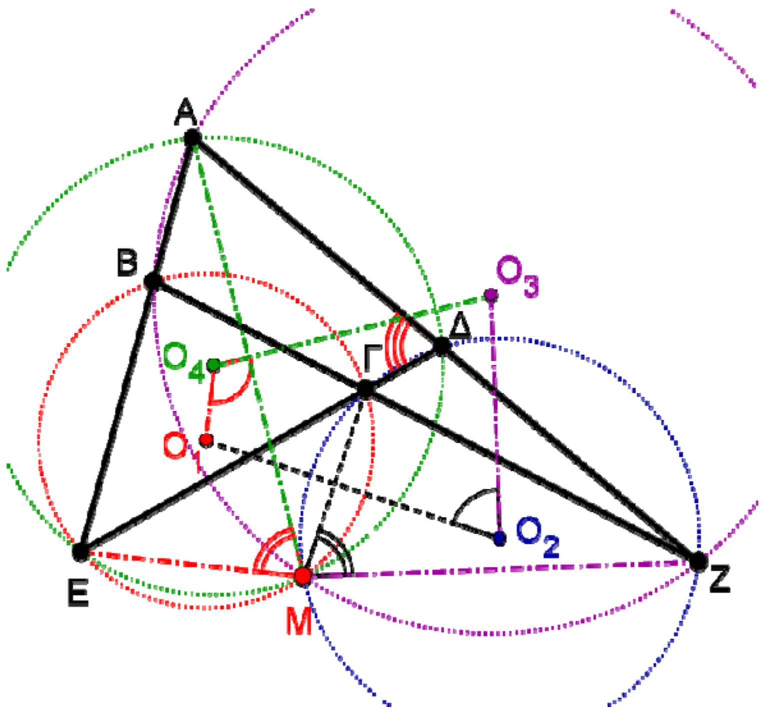




Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, τότε το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου βρίσκεται επάνω στην ΕΖ.

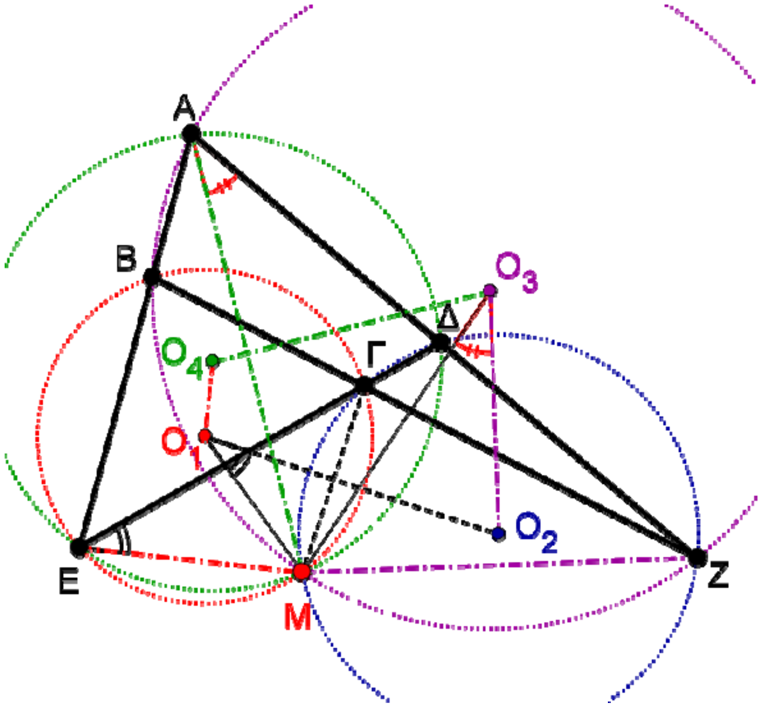
Τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων, είναι ομοκυκλικά με το σημείο Miquel του τετραπλεύρου

.

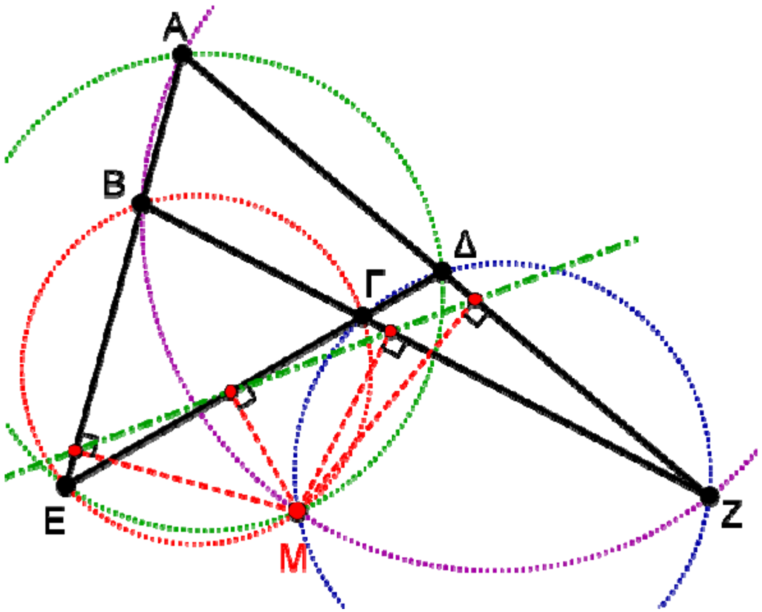


Τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων, είναι ομοκυκλικά με το σημείο Miquel του τετραπλεύρου

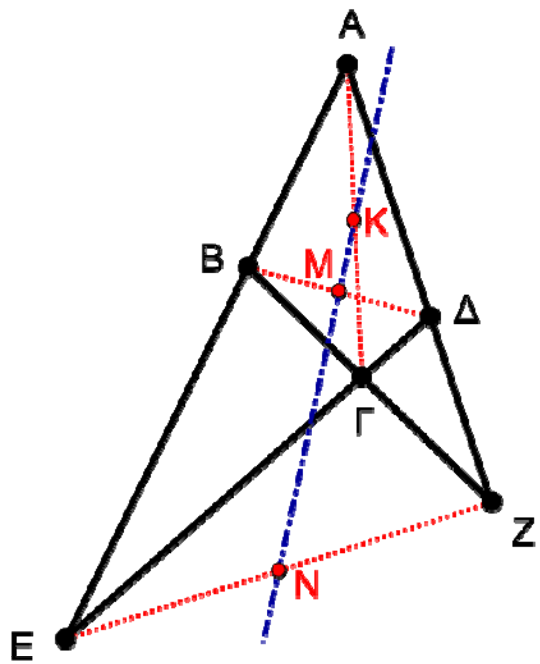
.



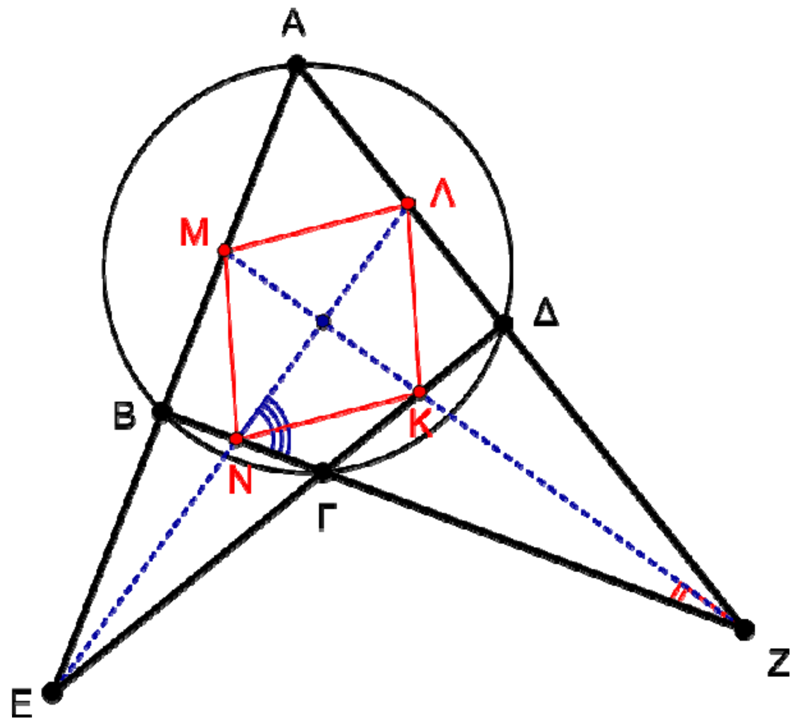
Ευθεία Simson πλήρους τετραπλεύρου.



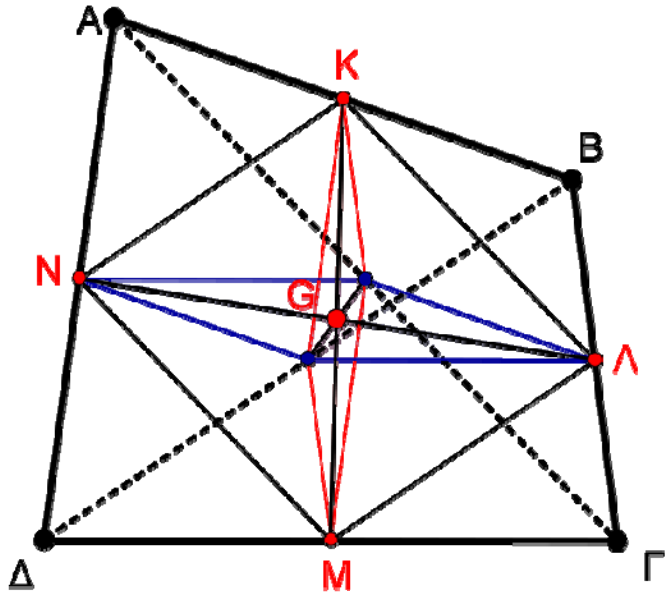
Τα μέσα των διαγωνίων πλήρους τετραπλεύρου είναι συνευθειακά.



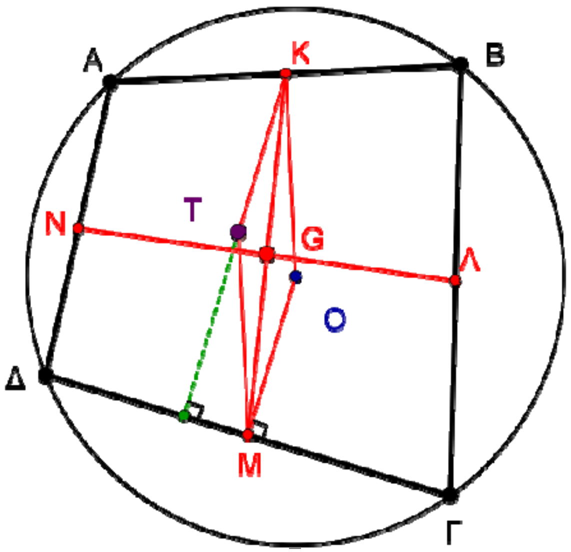
Οι διχοτόμοι . . . δημιουργούν ρόμβο.



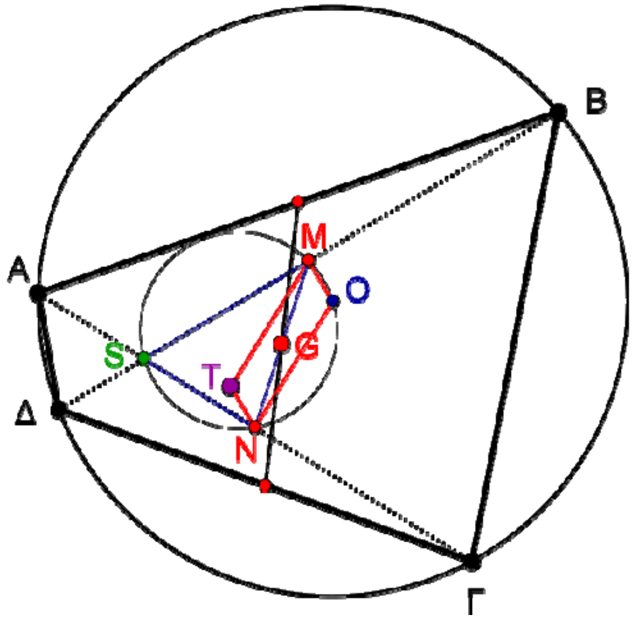
Σημείο των μέσων (βαρύκεντρο τετραπλεύρου).



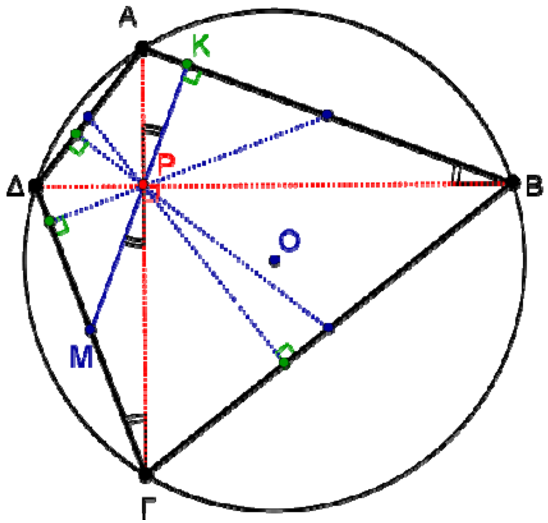
Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο, οι κάθετες από τα μέσα των πλευρών του προς τις απέναντι κορυφές του, περνάνε από το ίδιο σημείο (αντίκεντρο τετραπλεύρου).



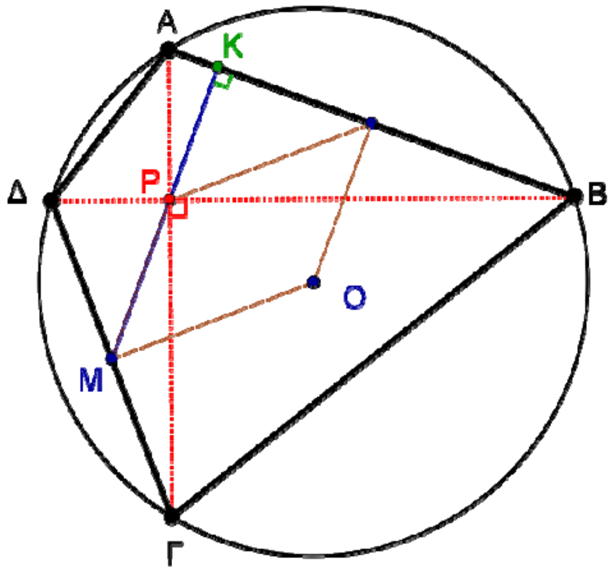
*Το **αντίκεντρο** είναι ορθόκεντρο του τριγώνου* SMN.



*Οι διαγώνιες εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι κάθετες μεταξύ τους και τέμνονται στο σημείο **P**.*
*Η κάθετη από το **P** προς οποιαδήποτε πλευρά του, περνάει από το μέσο της απέναντι πλευράς.*



Το κέντρο Ο απέχει από κάθε πλευρά, το μισό του μήκους της απέναντι πλευράς.



Οι εφαπτόμενες στις κορυφές του τετραπλεύρου ορίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.