Μάθημα Θεωρίας Αριθμών
Ε.Μ.Ε

1. Γράφουμε στις σειρά τους διψήφιους αριθμούς από το 19 ως το 80. Ο αριθμός που προκύπτει διαιρείται με 1980;

2. Να εξετασθεί αν έχει λύση η εξίσωση

$$p^2 + q^3 = r^4$$

όταν οι p, q, r είναι πρώτοι αριθμοί.

3. Συμβολίζουμε με $S(n)$ το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακεραίου n. Να βρείτε φυσικούς αριθμούς n, m τέτοιους ώστε

$$n + S(n) = 1980 \text{ και } m + S(m) = 2013.$$

4. Ένα σύνολο A αποτελείται από ακεραίους αριθμούς και έχει ως ελάχιστο στοιχείο το 1 και ως μέγιστο το 100. Κάθε στοιχείο του A, εκτός του 1, είναι ίσο με το άθροισμα δύο (μπορεί και ίσων) αριθμών οι οποίοι ανήκουν στο A. Μεταξύ όλων των συνόλων A που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες να βρεθεί αυτό με το ελάχιστο πλήθος στοιχείων.

5. Να αποδειχθεί ότι ένας φυσικός δεν μπορεί να γράφεται ταυτόχρονα ως γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών αλλά και ως γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών φυσικών.

6. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί που είναι ίσοι με το τετράγωνο του πλήθους των διαιρετών τους.

7. Για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού n ο αριθμός

$$A = 3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$$

είναι σύνθετος;

8. Να λυθεί στους φυσικούς η εξίσωση

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

9. Το γινόμενο n ακεραίων αριθμών είναι ίσο με n ενώ το άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν. Να αποδειχθεί ότι $4 \mid n$.

10. Αν οι x, y είναι διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$A = \frac{(x+y)^2}{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}$$

δεν είναι ακέραιος.

Λύσεις

1. Γράφουμε αρχικά $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Ο δοσμένος αριθμός προφανώς διαιρείται με το 4, αφού το τελευταίο διψήφιό του τμήμα διαιρείται με 4. Επιπλέον διαιρείται με 5. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 9 και το 11 αν το άθροισμα των διψήφιων τμημάτων του διαιρούνται με το 9 και το 11 (εξηγήστε γιατί αρκεί και αυτό;). Έχουμε:

$$19+20+\ldots+80 = (1+2+\ldots+80)-(1+2+\ldots+18) = \frac{80\cdot 81}{2} - \frac{18\cdot 19}{2} = 9\cdot 11\cdot 31.$$

και το ζητούμενο έπεται.

2. Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή

$$q^3 = r^4 - p^2 = (r^2 - p)(r^2 + p).$$

Όμως $r^2 + p > r^2 - p$ οπότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $r^2 - p = q$ και $r^2 + p = q^2$. Τότε η δεύτερη δίνει

  $$p = q^2 - r^2 = (q-r)(q+r),$$

  οπότε αφού $q+r > q-r$ θα έχουμε ότι $q+r = p$ και $q-r = 1$. Η δεύτερη δίνει ότι $q = 3,\ r = 2$ που όμως δίνει άτοπο στην αρχική.

- $r^2 - p = 1$ και $r^2 + p = q^3$. Τότε η πρώτη δίνει

  $$p = (r-1)(r+1)$$

  οπότε $r+1 = p$ και $r-1 = 1$ οπότε $r = 2,\ p = 3$ που πάλι δίνει άτοπο.

3. Θα βρούμε ένα n ώστε να ισχύει το πρώτο και η διαδικασία για το δεύτερο είναι παρόμοια. Το $S(n)$ παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή όταν ο αριθμός έχει όσο το δυνατόν πιο πολλά 9. Επιπλέον $1000 < n < 1980$. Οπότε η μέγιστη τιμή λαμβάνεται ότι $n = 1979$ όπου τότε $S(n) = 26$. Αφού $n + S(n) = 1980$, θα πρέπει $n \geq 1980 - 26 = 1954$. Με δοκιμές τώρα βρίσκουμε ότι $n = 1962$.
Όμοια βρίσκουμε $m = 2010$.

4. Έστω ότι οι δεδομένοι αριθμοί είναι οι

$$k_1 = 1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n = 100.$$

Από τη συνθήκη ότι κάθε αριθμός γράφεται σαν άθροισμα δύο άλλων έχουμε

$$2k_i \geq k_{i+1},$$

από όπου

$$k_i \le 2^{i-1} \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ειδικότερα έχουμε ότι $2^{n-1} \ge 100$ από όπου $n \ge 8$. Αν όμως $n = 8$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι $k_7 = 50$ και $2k_5 = 25$ που είναι άτοπο. Άρα $n \ge 9$. Παράδειγμα σε αυτή την περίπτωση είναι το σύνολο

$$\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 10\}.$$

5. Θέλουμε ουσιαστικά να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$n(n+1) = m(m+1)(m+2)(m+3), \tag{1}$$

είναι αδύνατη στους φυσικούς. Πράγματι γράφουμε

$$m(m+1)(m+2)(m+3) = (m^2+3m)(m^2+3m+2) = (m^2+3m)^2 + 2(m^2+3m),$$

οπότε προσθέτοντας 1 και στα δύο μέλη της (1) παίρνουμε

$$n^2 + n + 1 = (m^2 + 3m + 1)^2.$$

Όμως ο αριθμός $n^2 + n + 1$ δεν είναι ποτέ τέλειο τετράγωνο όταν ο n είναι θετικός ακέραιος αφού

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2.$$

6. Έστω ότι ο αριθμός $n = m^2$ έχει $m > 1$ διαφορετικούς διαιρέτες. Τότε επειδή είναι τέλειο τετράγωνο, το πλήθος των διαιρετών του είναι περιττό, άρα $m = 2k+1$. Τότε όμως ο n είναι περιττός και έχει k διαιρέτες μικρότερους από m. Έπεται ότι ο n έχει διαιρέτη κάθε περιττό μικρότερο του $2k+1$. Οπότε

$$2k - 1 \mid n = (2k+1)^2 = 4 + (2k-1)(2k+3).$$

Έπεται ότι $2k - 1 \mid 4$ άρα $k = 1$ και $n = 9$.

7. Θα θέσουμε για ευκολία

$$3^n = a \text{ και } 2^n = b.$$

Τότε η παράσταση γράφεται

$$\begin{aligned} A &= 3a^2 - 2b^2 - ab \\ &= 2(a-b)(a+b) + a(a-b) \\ &= (a-b)(3a+2b) \\ &= (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1}) \end{aligned}$$

Οπότε ο αριθμός A είναι σύνθετος εκτός της περίπτωσης $n = 1$.

8. Θέλοντας να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Euler πολλαπλασιάζουμε με 27 και αφαιρούμε 1 και από τα δύο μέλη οπότε η εξίσωση γράφεται

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 - 3(3x)(-3y)(-1) = 1642.$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας του Euler η παραπάνω γράφεται ως

$$(3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y) = 2 \cdot 823.$$

Ο όρος της δεύτερης παρένθεσης είναι μεγαλύτερος από αυτόν της πρώτης και επίσης ο πρώτος όρος δεν μπορεί να ισούται με 1, άρα έχουμε

$$3x - 3y - 1 = 2 \ \text{ και } \ 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y = 823.$$

Εύκολα λύνοντας το παραπάνω σύστημα (με αντικατάσταση) βρίσκουμε ότι λύση είναι η $(x, y) = (6, 5)$.

9. Αν όλοι οι αριθμοί είναι περιττοί τότε πρέπει n περιττός (από το γινόμενο), αλλά τότε έχουμε περιττό πλήθος περιττών ίσο με 0, άτοπο.
Αν ακριβώς ένας είναι άρτιος, τότε n άρτιος οπότε οι υπόλοιποι $n-1$ είναι περιττοί και το άθροισμά τους είναι επίσης περιττό γιατί το πλήθος τους, που είναι $n-1$, είναι περιττός. Και πάλι η σχέση με το άθροισμα δίνει άτοπο, άρα $4 \mid n$.

10. Για τον παρονομαστή γράφουμε

$$x^3 + xy^2 - x^2y - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2).$$

Αφού ο A είναι ακέραιος, θα πρέπει

$$x^2 + y^2 \mid (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

Οπότε

$$x^2 + y^2 \mid 2xy.$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

οπότε πρέπει $x = y$, που είναι άτοπο.

Σιλουανός Μπραζιτίκος