Μάθημα Θεωρίας Αριθμών
Ε.Μ.Ε

1. Να αποδειχθεί ότι κάθε θετικός ακέραιος αριθμός $n \geq 6$, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$n = a^2 + b^2 - c^2,$$

όπου οι a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος ο οποίος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα k τέλειων τετραγώνων για κάθε $2 \leq k \leq n$.

3. Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n > 1$ και έναν πρώτο αριθμό p που είναι τέτοιος ώστε

$$n \mid p - 1 \quad \text{και} \quad p \mid n^3 - 1.$$

Να αποδειχθεί ότι ο $4p - 3$ είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι n τέτοιοι ώστε

$$S(3^n) \geq S(3^{n+1}),$$

όπου με $S(a)$ συμβολίζουμε το άθροισμα των ψηφίων του a στη δεκαδική αναπαράσταση.

5. Να αποδειχθεί ότι στο επίπεδο δεν μπορούμε να βρούμε ένα άπειρο σύνολο μη συνευθειακών σημείων ώστε ανά δύο τα σήμεια να έχουν ακέραια απόσταση.

6. Να αποδειχεί ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα αριθμών της μορφής $2^a 3^b$ ώστε κανείς προσθετέος να μην διαιρεί κάποιον άλλο.

7. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n ώστε να υπάρχουν $k \geq 2$ θετικοί ρητοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_k$ που να ικανοποιούν

$$a_1 + \ldots + a_k = a_1 \ldots a_k = n.$$

8. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιες ώστε

$$m^2 + f(n) \mid (f(m))^2 + n,$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$.

9. Να βρεθούν όλες οι 1-1 συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ που είναι τέτοιες ώστε

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

1. Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός που δεν είναι της μορφής $4k+2$ μπορεί να γραφεί στη μορφή xy όπου οι x, y είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί. Οπότε κάθε τέτοιος αριθμός γράφεται στη μορφή

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Παίρνουμε τώρα έναν τυχαίο φυσικό $n \geq 6$. Αν αυτός δεν είναι της μορφής $4k+3$ τότε ο $n-1$ δεν είναι της μορφής $4k+2$ οπότε από τα παραπάνω θα έχουμε ότι θα υπάρχουν x, y που είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί, ώστε

$$n - 1 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

οπότε

$$n = 1 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

που είναι το ζητούμενο.
Αν τώρα ο n είναι της μορφής $4k+3$ τότε ο αριθμός $p - 2^2$ δεν είναι της μορφής $4k+2$ άρα θα υπάρχουν x, y που είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί, ώστε

$$n - 2^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

οπότε

$$n = 2^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

που είναι το ζητούμενο.

2. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Όταν $n = 2$ τότε παίρνουμε επιλέγουμε για παράδειγμα τον αριθμό 25. Αυτός είναι τέλειο τετράγωνο και γράφεται και σαν άθροισμα δύο τετραγώνων αφού

$$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για τον $n-1$ υπάρχει φυσικός x που γράφεται ως άθροισμα $2, 3, \ldots, n-1$ τετραγώνων. Από την άσκηση 1, θα έχουμε ότι ο x γράφεται στη μορφή

$$x = a^2 + b^2 - c^2.$$

Θεωρούμε τον αριθμό

$$A = x + c^2.$$

Τότε αυτός είναι άθροισμα $3, 4, \ldots, n$ τετραγώνων, αλλά επιπλέον $A = a^2 + b^2$ οπότε ολοκληρώνεται η επαγωγή.

3. Έχουμε ότι

$$p \mid n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1).$$

Από την πρώτη σχέση όμως έχουμε ότι $n \leq p - 1$, άρα αναγκαστικά

$$p \mid n^2 + n + 1. \tag{1}$$

Και πάλι από την πρώτη σχέση έχουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k ώστε

$$p = nk + 1.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε ότι

$$nk + 1 \mid n^2 + n + 1.$$

Έπεται ότι

$$nk + 1 \mid kn^2 + kn + k = (kn + 1)(n + 1) - n + k - 1,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$nk + 1 \mid k - n - 1.$$

Όμως είναι εύκολο να δούμε ότι $kn + 1 > k - n - 1$, οπότε αναγκαστικά πρέπει

$$k = n + 1.$$

Τότε

$$4p - 3 = 4n(n + 1) + 1 = (2n + 1)^2,$$

και έχουμε το ζητούμενο.

4. Υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε υπάρχει ένας φυσικός N ώστε για κάθε $n \geq N$, να έχουμε

$$S(3^{n+1}) > S(3^n).$$

Όμως για $n \geq 2$, έχουμε ότι

$$9 \mid S(3^{n+1}) \ \text{ και } \ 9 \mid S(3^n),$$

οπότε

$$S(3^{n+1}) \geq S(3^n) + 9.$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση διαδοχικά παίρνουμε ότι για κάθε $n \geq N$,

$$S(3^{n+1}) \geq S(3^N) + 9(n - N + 1).$$

Το πλήθος των ψηφίων του 3^{n+1} είναι το πολύ

$$\log_{10} 3^{n+1} + 1.$$

Καθένα από αυτά τα ψηφία είναι μικρότερο ή ίσο του 9, άρα

$$S(3^{n+1}) \leq 9\left(\log_{10} 3^{n+1} + 1\right).$$

Οπότε θα έχουμε ότι

$$9\left(\log_{10} 3^{n+1} + 1\right) \geq 9(n - N + 1),$$

ή ισοδύναμα

$$N + \log_{10} 3 \geq n\left(1 - \log_{10} 3\right).$$

Η τελευταία όμως δίνει άτοπο για n αρκετά μεγάλο.

5. Θεωρούμε τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, C από το σύνολο και έστω P άλλο ένα σημείο. Θέτουμε

$$k = \max\{AB, BC\}.$$

Τότε σύμφωνα με τη συνθήκη ο k είναι θετικός ακέραιος και επιπλέον από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|PA - PB| \leq k \ \text{ και } \ |PB - PC| \leq k.$$

Οι παραπάνω απόλυτες τιμές είναι θετικοί ακέραιοι επομένως μπορούν να πάρουν το πολύ $k+1$ τιμές οι καθεμιά. Έπεται ότι το P μπορεί να ανήκει σε $k+1$ υπερβολές που ορίζονται από τα A, B και σε $k+1$ υπερβολές που ορίζονται από τα B, C. Οπότε για το P έχουν ως δυνατές επιλογές τα σημεία τομής αυτών των υπερβολών τα οποία όμως είναι το πολύ $4(k+1)^2$ οπότε δεν μπορεί το σύνολο να έχει άπειρα στοιχεία.

6. Θα δουλέψουμε με ισχυρή επαγωγή στο n. Για $n = 1$ γράφουμε $1 = 2^0 \cdot 3^0$ και για $n = 2$, γράφουμε $2 = 2^1 \cdot 3^0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε ακέραιο μικρότερο του n και θα δείξουμε τον ισχυρισμό για το n.

- Αν n άρτιος τότε ο $n/2$ είναι ακέραιος μικρότερος από τον n άρα γράφεται στη μορφή
$$n/2 = \sum 2^i 3^j,$$
όπου κανείς όρος δεν διαιρεί κάποιον άλλο, οπότε
$$n = \sum 2^{i+1} 3^j,$$
όπου κανείς όρος δεν διαιρεί κάποιον άλλο.
- Αν n περιττός τότε θεωρούμε τον ακέραιο k για τον οποίο ισχύει $3^k \leq n < 3^{n+1}$. Θεωρούμε τον αριθμό $n - 3^k/2$. Αυτός είναι ακέραιος, άρα από την επαγωγική υπόθεση γράφεται στη μορφή
$$n - 3^k/2 = \sum 2^i 3^j,$$
όπου κανείς όρος δεν διαιρεί κάποιον άλλο, οπότε
$$n = \sum 2^{i+1} 3^j + 3^k,$$
όπου κανείς όρος δεν διαιρεί τον άλλο, αφού για τους πρώτους το έχουμε από την επαγωγή και επίσης όλοι πλέον είναι άρτιοι εκτός από τον τελευταίο και $3^k > 3^i$, οπότε η επαγωγή ολοκληρώνεται.

7.

- Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που ο n είναι σύνθετος. Τώρα γράφεται στη μορφή $n = p_1 p_2$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $p_1 + p_2 \leq n$ οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $a_1 = p_1$, $a_2 = p_2$ και οι υπόλοιποι να είναι $(n - p_1 - p_2)$ άσσοι. Στην περίπτωση που $p_1 + p_2 = n$, τότε $n = 4$ όπου παίρνουμε $p_1 = p_2 = 2$.
- Στην περίπτωση που ο n είναι πρώτος, επιλέγουμε
$$a_1 = \frac{n}{2},\ a_2 = 4,\ a_3 = \frac{1}{2}$$
και τα υπόλοιπα a_k ίσα με 1. Οι μόνοι αριθμοί που δεν καλύπτουμε σε αυτή την περίπτωση είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει
$$\frac{n}{2} + 4 + \frac{1}{2} > n \Longrightarrow n < 9.$$
Οπότε μένει να εξετάσουμε ξεχωριστά τους αριθμούς
$$n = 1, 2, 3, 5, 7.$$

- Για $n = 1$, θεωρούμε $a_1 a_2 \dots a_k = 1$. Τότε από την ανισότητα AM-GM, έχουμε

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq k\sqrt[k]{1} > 1$$

  για $k \geq 2$. Επομένως η περίπτωση $n = 1$ είναι αδύνατη.

- Αν $n = 2$, θεωρούμε $a_1 a_2 \dots a_k = 2$. Όμοια με παραπάνω έχουμε

$$a_1 + a_2 + \dots \geq k\sqrt[k]{2} > 2$$

  για $k \geq 2$, οπότε και αυτή η περίπτωση είναι αδύνατη.

- Αν $n = 3$, θεωρούμε $a_1 a_2 \dots a_k = 3$. Όμοια με πριν

$$a_1 + a_2 + \dots \geq k\sqrt[k]{3} > 3.$$

  για $k \geq 2$. Οπότε και αυτή η περίπτωση είναι αδύνατη.

- Αν $n = 5$, τότε δουλεύοντας όμοια με παραπάνω μένει να ελέγξουμε μόνο την περίπτωση $k = 2$. Τότε $a_1 + a_2 = 5$ και $a_1 a_2 = 5$. Αυτό το σύστημα όμως δεν έχει λύσεις άρα και η περίπτωση $n = 5$ είναι αδύνατη.

- Αν $n = 7$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε τους αριθμούς

$$a_1 = \frac{9}{2},\ a_2 = \frac{4}{3},\ a_3 = \frac{7}{6}.$$

Οπότε ο n μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 3 με μόνη εξαίρεση το 5.

8. Θέτουμε αρχικά όπου n και m το 1 και παίρνουμε

$$f(1) + 1 \mid f(1)^2 + 1 = f(1)(f(1) + 1) - f(1) + 1,$$

οπότε

$$f(1) + 1 \mid f(1) - 1 = f(1) + 1 - 2$$

άρα

$$f(1) + 1 \mid 2$$

οπότε $f(1) = 1$. Θέτοντας τώρα όπου m το 1 παίρνουμε

$$1 + f(n) \mid 1 + n$$

από όπου

(2) $$f(n) \leq n.$$

Όμως αν θέσουμε όπου n το 1 παίρνουμε

$$m^2 + 1 \leq f^2(m) + 1$$

από όπου

(3) $$m^2 \leq f^2(m) \Longrightarrow m \leq f(m).$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $f(n) = n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

9. Δείχνουμε πρώτα ότι δεν υπάρχει φυσικός n ώστε $f(n) < n$.
Πράγματι αν κάτι τέτοιο ισχύει τότε από την αρχική παίρνουμε

$$f(f(n)) < \frac{n+n}{2} = n.$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$f^{(k)}(n) < n \tag{4}$$

για κάθε θετικό ακέραιο k, όπου με

$$f^{(k)}(n)$$

συμβολίζουμε την k σύνθεση της f με τον εαυτό της. Έπεται ότι θα υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι $k_1 > k_2$ ώστε

$$f^{(k_1)}(n) = f^{(k_2)}(n).$$

Τότε λόγω του ότι η f είναι 1-1, θα έχουμε

$$f^{(k_1-k_2)}(n) = n,$$

το οποίο όμως είναι άτοπο λόγω της (4). Επομένως

$$f(n) \geq n$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Τότε η αρχική δίνει

$$f(n) \leq f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2},$$

από όπου

$$f(n) \leq n$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Έπεται ότι $f(n) = n$.

Σιλουανός Μπραζιτίκος