

# Επαναλήψεις με προβλήματα

Γιώργος Ωραιόπουλος

## 1. Προβλήματα με εξισώσεις

Όταν έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα που δεν μπορούμε ή δυσκολευόμαστε να το λύσουμε με Πρακτική Αριθμητική, θα προσπαθήσουμε να το λύσουμε με εξίσωση δηλαδή να το λύσουμε αλγεβρικά.

Τότε θα πρέπει να μελετήσουμε με προσοχή το πρόβλημα, να ξεχωρίσουμε τα δεδομένα του προβλήματος των οποίων είναι γνωστές οι αριθμητικές τιμές τους, από τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος. Αν οι άγνωστοι είναι δυο, τότε εκφράζουμε τον ένα με τη βοήθεια του άλλου.

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση.

Αν οι άγνωστοι είναι περισσότεροι από ένας θα πρέπει να τους βρούμε.

Επαλήθευση και διερεύνηση της εξίσωσης και του προβλήματος.

Αν η πρωτοβάθμια εξίσωση έχει 1 άγνωστο πρέπει αυτός να επαληθεύει και το πρόβλημα. Αν η εξίσωση είναι αόριστη ή αδύνατη και το πρόβλημα είναι αόριστο ή αδύνατο.

Στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις μπορεί να επαληθεύουν το πρόβλημα και οι δυο λύσεις ή μόνο μία ή καμία.

Στις γραμμικές πρωτοβάθμιες με δύο αγνώστους  $x, y$  έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων. Πρέπει να επιλέξουμε ποιες είναι δεκτές στο πρόβλημα.

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

12 άνδρες και γυναίκες ξόδεψαν σε μια ημερήσια εκδρομή 211€. Πόσοι ήταν οι άνδρες αν ο καθένας ξόδεψε 20€ και πόσες οι γυναίκες αν κάθε μια ξόδεψε 15€;

#### Λύση

Τα γνωστά δεδομένα του προβλήματος είναι το άθροισμα αντρών και γυναικών και τα ποσά που ξόδεψε ο καθένας καθώς και όλα τα έξοδα. Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι δυο ο αριθμός των ανδρών και ο αριθμός των γυναικών. Είναι εύκολη η εκλογή του αγνώστου αφού ξέρουμε το άθροισμα των δυο.

Αν ονομάσουμε  $x$  τον αριθμό των αντρών, ο αριθμός των γυναικών είναι  $12-x$ . Αφού κάθε άνδρας ξόδεψε 20€, για κάθε γυναίκα 15€ οι  $x$  άνδρες ξόδεψαν  $20x$  €, οι  $12-x$  γυναίκες  $15(12-x)$ €. Επειδή όλα τα έξοδα είναι 211€ έχουμε την εξίσωση:

$20x+15(12-x)=211$  την οποία και λύνουμε:

$$\begin{aligned}20x + 15(12 - x) &= 211, \\20x + 15x &= 211 - 180, \\5x &= 31, \quad x = \frac{31}{5}\end{aligned}$$

#### Επαλήθευση της εξίσωσης

$$20 \cdot 6\frac{1}{5} + 15 \left( 12 - 6\frac{1}{5} \right) = 211,$$

$$26\frac{31}{5} + 15 \cdot 5\frac{4}{5} = 211$$

$$4 \cdot 31 + 3 \cdot 29 = 211$$

$$124 + 87 = 211$$

$$211 = 211$$

Η εξίσωση λύθηκε σωστά.

Η λύση όμως δεν είναι δεκτή επειδή έπρεπε οι άνδρες να είναι φυσικός αριθμός και όχι κλάσμα. Άρα το πρόβλημα είναι αδύνατο.

**Μπορείτε να κάνετε μια μικρή διόρθωση στο ποσό 211 για να υπάρξει λύση;**

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

Μια τάξη μαθητών επισκέπτονται ένα Μουσείο στο οποίο πρέπει να πληρώσουν 160€. Επειδή 4 παιδιά δεν είχαν να πληρώσουν, υποχρεώθηκαν οι άλλοι να πληρώσει ο καθένας 2€ παραπάνω. Πόσοι είναι οι μαθητές;

#### Λύση

Γνωστά είναι το άθροισμα των εισιτηρίων για τα 4 παιδιά που δεν πληρώνουν και η αύξηση των 2€ των άλλων παιδιών. Άγνωστος μόνο ο αριθμός των μαθητών έστω  $x$ . Αν πλήρωναν και οι  $x$  μαθητές 160€ ο καθένας θα πλήρωνε  $\frac{160}{x}$  €. Τώρα πληρώνουν  $x-4$  μαθητές και κα-

θένας  $\frac{160}{x-4}$  € που είναι 2€ παραπάνω από το προηγούμενο. Άρα η εξίσωση είναι

$$\frac{160}{x-4} - \frac{160}{x} = 2 \text{ ή}$$

$$160x - 160(x-4) = 2x(x-4) \text{ ή}$$

$$x^2 - 4x - 320 = 0$$

από τον τύπο  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$  έχουμε

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-320)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{1296}}{2}$$

Για να βρούμε την τετραγ. ρίζα αναλύουμε τον αριθμό 1296 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και έχουμε:

1296	2
648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Άρα  $1296 = 2^4 \cdot 3^4$  οπότε

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^4}}{2} = \frac{4 \pm (2^2 \cdot 3^2)}{2} = \frac{4 \pm 36}{2} \setminus -16$$

Μόνο η τιμή  $x = 20$  είναι δεκτή η τιμή  $-16$  αποκλείεται.

### Επαληθεύουμε το πρόβλημα.

Οι μαθητές είναι 20 αφού έπρεπε να πληρώσουν 160€ το εισιτήριο ήταν  $160:20=8€$ . Επειδή πλήρωσαν 16 μαθητές, ο καθένας έδωσε  $\frac{160}{16}=10€$ , δηλαδή 2€ παραπάνω.

### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>

#### Το πρόβλημα του Διόφαντου

«Ημίονος και όνος φέρουσαι σίτον έβαινον...» Η γαϊδούρα έπαθε άγχος από το φορτίο και το μουλάρι λέει, μητέρα μην κλαις, δώσε μου έναν από τους σάκους σου και εγώ

θα έχω διπλάσιους από σένα. Πόσους σάκους είχε αρχικά κάθε ζώο;

### Λύση

Στο πρόβλημα αυτό δεν δίνεται κανένας γνωστός αριθμός εκτός από τη λέξη διπλάσιους, ενώ οι άγνωστοι είναι δυο, οι σάκοι που είχε ο ημίονος, έστω  $x$  και η σάκοι που είχε ο όνος, έστω  $y$ .

Όταν ο ημίονος πάρει 1 σάκο θα έχει  $x+1$  ενώ στον όνο θα μείνουν  $y-1$ .

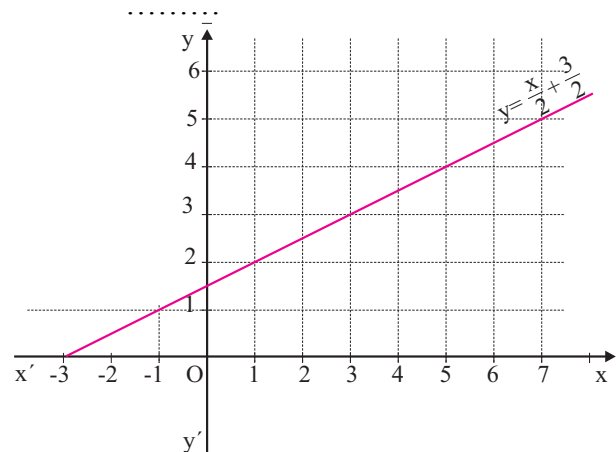
Επειδή τότε οι σάκοι του ημίονου είναι διπλάσιοι από αυτούς του όνου έχουμε την εξίσωση  $x + 1 = 2(y - 1)$  η οποία είναι πρώτου βαθμού με δυο αγνώστους και λέγεται **γραμμική** διότι η γραφική της λύση δίνεται από μια ευθεία γραμμή πάνω στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Αυτή γράφεται  $x + 1 = 2(y - 1)$  ή

$$x + 1 = 2y - 2 \text{ ή } x - 2y + 3 = 0 \text{ ή } y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

Αν

$y=0$	$x=-3$
$y=1$	$x=-1$
$y=2$	$x=1$
$y=3$	$x=3$
$y=4$	$x=5$
$y=5$	$x=7$



Το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις που βρίσκονται στα ζεύγη των συντεταγμένων στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο και επειδή πρέπει να είναι φυσικοί αριθμοί λύσεις του προβλήματος είναι  $x$  οι σάκοι του ημίονου και  $y$  οι σάκοι του όνου  $(x, y)$   $(1,2)$ ,  $(3,3)$ ,  $(5,4)$ ,  $(7,5)$ ...

Αν οι σάκοι και των δυο ζώων μαζί ήταν 9, πόσους σάκους είχε αρχικά ο όνος και πόσους ο ημίονος;

## 2. Προβλήματα με συστήματα

Όταν έχουμε ένα πρόβλημα με δύο αγνώστους, που δεν μπορεί να εκφραστεί ο ένας σαν συνάρτηση του άλλου, θα σχηματίσουμε 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους οι οποίες θα έχουν κοινές λύσεις.

Τις εξισώσεις αυτές θα τις γράψουμε τη μια κάτω από την άλλη, θα εκτελέσουμε τις απαιτούμενες πράξεις και θα τις φέρουμε στη μορφή:  $ax + by = \gamma$ ,  $a'x + b'y = \gamma'$

Όπου τα πρώτα γράμματα του αλφαβήτου είναι γνωστά.

Κατόπιν θα λύσουμε το σύστημα απαλείφοντας τον έναν άγνωστο με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ή της αντικατάστασης, οπότε θα σχηματιστεί μια εξίσωση με έναν άγνωστο του οποίου την τιμή που θα βρούμε λύνοντας την εξίσωση τον αντικαθιστούμε σε μια από τις δυο εξισώσεις του συστήματος για να βρούμε και τον δεύτερο άγνωστο.

Άλλος τρόπος λύσης είναι η γραφική, κάθε εξίσωση παριστάνεται με μια γραμμή ευθεία, που οι συντεταγμένες της τομής των δυο ευθειών είναι η λύση του συστήματος.

Μετά τη λύση θα γίνει διερεύνηση, επαλήθευση στο σύστημα και στο πρόβλημα.

Αν  $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$  το σύστημα έχει **μοναδική λύση**,

Αν  $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$  το σύστημα είναι **αδύνατο**,

αν  $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$  το σύστημα είναι **αόριστο**

### Παράδειγμα 4<sup>ο</sup>

Ένα εργαστήριο κατασκευάζει από το ίδιο ύφασμα, δύο ειδών ενδυμασίες. Για του πρώτου είδους χρειάζεται ύφασμα 4m και χρόνος 2,5 ώρες. Για του δεύτερου είδους, 3m και 2 ώρες. Το εργαστήριο διαθέτει 88m ύφασμα και 57 εργάσιμες ώρες. Πόσες ενδυμασίες ανά κάθε είδος θα γίνουν;

### Λύση

Αν γίνουν x ενδυμασίες του 1<sup>ου</sup> είδους και y του 2<sup>ου</sup>. Για το πρώτο χρειάζεται 4x m και 2,5y ώρες και για το 2<sup>ο</sup> 3x m και 2y ώρες. Άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 88 \\ 2,5x + 2y = 57 \end{cases}$$

Λύνουμε τις δυο εξισώσεις ως προς y  $y = \frac{57 - 2,5x}{2}$ . Την τιμή αυτή αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και έχουμε

$$4x + 3 \frac{57 - 2,5x}{2} = 88 \quad \text{ή}$$

$$8x + 3(57 - 2,5) = 126 \quad \text{ή}$$

$$8x - 7,5x = 176 - 121 \quad \text{ή} \quad 0,5x = 5 \quad \text{και}$$

$$x = \frac{5}{0,5} = \frac{50}{5} = 10, \quad y = \frac{57 - 25 \cdot 10}{2} = 16$$

Ωστε θα γίνουν 10 ενδυμασίες του 1<sup>ου</sup> είδους και 16 του 2<sup>ου</sup>

### Προσπαθήστε να το λύσετε γραφικά

### Προβλήματα

1. Δυο πόλεις A και B απέχουν 240km. Ένα αεροπλάνο ξεκινά από την A πάει στη B και επιστρέφει στην A σε 5 ώρες. Ποια είναι η καθαρή ταχύτητα του αεροπλάνου όταν φυσάει ο άνεμος με κατεύθυνση A προς B με ταχύτητα 20km/ώρα που αυξάνει την ταχύτητα του αεροπλάνου κατά τη μετάβαση και την ελαττώνει κατά την επιστροφή. Ποια η ταχύτητα του αεροπλάνου; (τύπος  $t = \frac{s}{v}$ ).
2. Ένας γεωργός τρέφει κότες και κουνέλια. Αν τα κεφάλια τους είναι 26 και τα πόδια 72, πόσα είναι από κάθε είδος;
3. Στο προηγούμενο πρόβλημα αν οι κότες δεν είναι πάνω από 20 και τα κουνέλια κάτω από 12 ενώ τα πόδια όλων σωστά μετρήθηκαν, πόσα είναι από το κάθε είδος;
4. Σε ορθό τετραγωνικό πρίσμα το άθροισμα των 12 ακμών του είναι 88m και εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας 240m<sup>2</sup>. Να υπολογιστούν οι ακμές του και ο όγκος του.