Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικά Θέματα Άλγεβρας

Από τον Τιμόθεο Κόρδα –Μαθηματικός στο 2^o ΓΕΛ Πύργου – Ταμία του Παραρτήματος της ΕΜΕ

1. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-\lambda)x-\lambda^3+1$

Να βρείτε τις τιμές του λ για να είναι το P(x).
i. $1^{ου}$ βαθμού ii. Μηδενικού βαθμού
iii. Μηδενικό πολυώνυμο iv. Σταθερό πολυώνυμο

Λύση

i. Το P(x) είναι $1^{ου}$ βαθμού $\Leftrightarrow$
$$\lambda^2-\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\notin\{0,1\}$$

ii. Το P(x) είναι μηδενικού βαθμού $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\lambda^2-\lambda=0\\ -\lambda^3+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\in\{0,1\}\\ \lambda\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow \lambda=0$$

iii. Το P(x) είναι μηδενικό πολυώνυμο $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\lambda^2-\lambda=0\\ -\lambda^3+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \lambda=1$$

iv. Το P(x) είναι σταθερό πολυώνυμο $\Leftrightarrow$
$$\lambda^2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\in\{0,1\}$$

2. Δίνεται το πολυώνυμο
$P(x)=(\lambda^2+\lambda)x^4+(\lambda+1)x^3+3x^2+\mu-1$ το οποίου είναι 3ου βαθμού και έχει παράγοντα το x+1.
i. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ
ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2+3)$
iii. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-1
iv. Να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών και το σταθερό όρο του πολυωνύμου $Q(x)=P(x)+(x-2)^2$

Λύση

i. Το P(x) είναι $3^{ου}$ βαθμού $\Rightarrow$
$$\begin{cases}\lambda^2+\lambda=0\\ \lambda+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda\in\{0,-1\}\\ \lambda\neq -1\end{cases}\Rightarrow \lambda=0$$

Άρα $P(x)=x^3+3x^2+\mu-1$

Το P(x) έχει παράγοντα το x+1 $\Rightarrow$
$P(-1)=0\Rightarrow -1+3+\mu-1=0\Rightarrow \mu=-1$

Άρα $P(x)=x^3+3x^2-2$

ii. Η διαίρεση $P(x):(x^2+3)$ μας δίνει την ταυτότητα $P(x)=(x^2+3)(x+3)-3x-11$

iii. Η διαίρεση $P(x):(x-1)$ μπορεί να γίνει και με το σχήμα Horner.

1	3	0	-2	1
	1	4	4	
1	4	4	2	

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=x^2+4x+4$ και το υπόλοιπο $\upsilon=2$

iv. Το άθροισμα των συντελεστών του Q(x) είναι ίσο με $Q(1)=P(1)+(1-2)^2=2+1=3$ και ο σταθερός του όρος είναι ίσος με $Q(0)=P(0)+(0-2)^2=-2+4=2$

3. Να βρείτε τα Α,Β ώστε να είναι
$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}\quad (1)$$ **για κάθε**
4. $x\in D=R-\{-1,3\}$

Λύση

Έχουμε: $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ οπότε

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}$ για κάθε $x\in D$

$\Leftrightarrow 5x-3=A(x-3)+B(x+1)$ για κάθε $x\in D$

$\Leftrightarrow 5x-3=(A+B)x+B-3A$ για κάθε $x\in D\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A+B-5)x=B-3A+3$ για κάθε $x\in D\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}A+B=5\\ B-3A+3=0\end{cases}\Leftrightarrow A=2, B=3$$

(Διαφορετικά η (1) θα ήταν αδύνατη ή θα ίσχυε για μια μόνο τιμή το x)

Σχόλιο: *Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι δεν έχουμε να κάνουμε με δύο ίσα πολυώνυμα, όπως **κακώς** θεωρούν κάποιοι, αλλά με μία εξίσωση αόριστη. Γενικότερα: Η ως προς x εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει περισσότερες από μια ρίζες $\Leftrightarrow \alpha=\beta=0$. Ομοίως η $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει περισσότερες από δυο ρίζες $\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$ κ.λπ.*

4. Για το πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού P(x) ισχύουν τα εξής: Το άθροισμα των συντελεστών είναι 0, ο σταθερός του όρος είναι 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2+1)$ είναι –x+5

i. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x)
ii. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε το $(x+1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$Q(x)=P(x)+3x^2+\alpha x+\beta$

iii. Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{(\eta\mu\alpha)^{x^3}}{\eta\mu^2\alpha}>(\eta\mu\alpha)^{3x}$ με παράμετρο $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Λύση

i. Επειδή το P(x) είναι $3^{ου}$ βαθμού και ο διαιρέτης x^2+1 είναι $2^{ου}$ βαθμού, το πηλίκο θα είναι $1^{ου}$ βαθμού, δηλαδή της μορφής $\alpha x+\beta$ με $\alpha\neq 0$.

Άρα $P(x)=\left(x^2+1\right)\left(\alpha x+\beta\right)-x+5$, οπότε:

Το άθροισμα των συντελεστών είναι $0\Rightarrow P(1)=0\Rightarrow 2\left(\alpha+\beta\right)=-4\Rightarrow \alpha+\beta=-2$

Ο σταθερός όρος του είναι $2\Rightarrow P(0)=2$ $\Rightarrow \beta+5=2\Rightarrow \beta=-3$, $\alpha=1$. Άρα:

$P(x)=\left(x^2+1\right)\left(x-3\right)-x+5=x^3-3x^2+2$

ii. Έχουμε: $Q(x)=P(x)+3x^2+\alpha x+\beta=$ $x^3-3x^2+3x^2+\alpha x+\beta+2=x^3+\alpha x+\beta+2$. Από τη διαίρεση του Q(x) με $(x+1)^2=x^2+2x+1$ βρίσκουμε: $Q(x)=(x+1)^2(x-2)+(\alpha+3)x+\beta+4$, για κάθε $x\in R$. Οπότε: το $(x+1)^2$ είναι παράγοντας του $Q(x)\Leftrightarrow(\alpha+3)x+\beta+4=0$, για κάθε $x\in R\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+3=0\\ \beta+4=0\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=-3,\ \beta=-4$.

Τότε $Q(x)=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$.

iii. Επειδή $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ θα είναι: $0<\eta\mu\alpha<1$,

οπότε: $\dfrac{(\eta\mu\alpha)^{x^3}}{\eta\mu^2\alpha}>(\eta\mu\alpha)^{3x}\Leftrightarrow(\eta\mu\alpha)^{x^3-2}>(\eta\mu\alpha)^{3x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-2<3x\Leftrightarrow x^3-3x-2<0\Leftrightarrow Q(x)<0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)<0\Leftrightarrow x\neq -1$ και

$x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,2)$

- Παρατηρήστε εξάλλου ότι

$\dfrac{(\eta\mu\alpha)^{x^3}}{\eta\mu^2\alpha}\leq(\eta\mu\alpha)^{3x}\Leftrightarrow x=-1$ ή $x\geq 2\Leftrightarrow x\in[2,+\infty)\cup\{-1\}$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x)=\ln 4+\ln\left(2e^x-1\right)$ και $g(x)=\ln\left(e^{2x}+8\right)$

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f(x) και g(x).

ii. Να βρείτε την μονοτονία της f

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>g(x)$ (1)

iv. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2)$ με το $g(2)$, και το $f(e)$ με το $f(\pi)$

v. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(2\ln x)}<e^{f(\ln x)}+16$ (2)

Λύση

i. Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $2e^x-1>0$. Αλλά: $2e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>-\ln 2$. Η g(x) προφανώς ορίζεται σε όλο το R.

ii. Παρατηρούμε ότι:

$-\ln 2<x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 2e^{x_1}<2e^{x_2}$

$\Rightarrow 2e^{x_1}-1<2e^{x_2}-1\Rightarrow \ln\left(2e^{x_1}-1\right)<\ln\left(2e^{x_2}-1\right)\Rightarrow$

$\ln 4+\ln\left(2e^{x_1}-1\right)<\ln 4+\ln\left(2e^{x_2}-1\right)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι αύξουσα

iii. Η (1) έχει σύνολο ορισμού $D_f\cap D_g=D_f=$ $=(-\ln 2,+\infty)$ και επειδή, οι f(x) και lnx είναι γνησίως αύξουσες θα έχουμε:

$f(x)>g(x)\Leftrightarrow \ln 4+\ln\left(2e^x-1\right)>\ln\left(e^{2x}+8\right)$

$\Leftrightarrow \ln 4\left(2e^x-1\right)>\ln\left(e^{2x}+8\right)\Leftrightarrow 8e^x-4>e^{2x}+8\Leftrightarrow$

$e^{2x}-8e^x+12<0\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}e^x=\alpha\\ \alpha^2-8\alpha+12<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}e^x=\alpha\\ 2<\alpha<6\end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow 2<e^x<6\Leftrightarrow \ln 2<x<\ln 6$

iv. Έχουμε: $2=\ln e^2>\ln 6$, οπότε $f(2)<g(2)$ σύμφωνα με την iii αφού: $f(x)>g(x)\Leftrightarrow \ln 2<x<\ln 6$

Έξάλλου: $e<\pi\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(e)<f(\pi)$

v. Για να ορίζεται η (2) πρέπει και αρκεί

$\begin{cases}x>0\\ \ln x>-\ln 2\quad(\Sigma)\\ 2\ln x>-\ln 2\end{cases}$

Αλλά $(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>\dfrac{1}{2}\\ \ln x>\ln 2^{-\frac{1}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Τότε: $(2)\Leftrightarrow f(2\ln x)=f(\ln x^2)=\ln 4+\ln\left(2e^{\ln x^2}-1\right)$

$=\ln 4\left(2x^2-1\right)$,

$f(\ln x)=\ln 4+\ln\left(2e^{\ln x}-1\right)=\ln 4\left(2x-1\right)$

και $e^{f(2\ln x)}=e^{\ln 4\left(2x^2-1\right)}=8x^2-4$,

$e^{f(\ln x)}=e^{\ln 4\left(2x-1\right)}=8x-4$

Όποτε $(2)\Leftrightarrow 8x^2-4<8x-4+16$

$\Leftrightarrow x^2-x-2<0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)\Leftrightarrow -1<x<2\Leftrightarrow$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<2$.

6. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{2\ln x-1}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της C_f **με τον άξονα x΄x.**

ii. Για ποιες τιμές του x ισχύει η σχέση:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f πρέπει και αρκεί

$$(\Sigma)\begin{cases}x>0\\ 2\ln x-1\neq 0\end{cases}.\ \text{Αλλά } (\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\end{cases}$$

Άρα: $A_f=\left(0,\sqrt{e}\right)\cup\left(\sqrt{e},+\infty\right)$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της C_f με τον x'x επαληθεύουν το σύστημα $\left.\begin{matrix}y=f(x)\\ y=0\end{matrix}\right\}$,

δηλαδή το $\left.\begin{matrix}f(x)=0\\ y=0\end{matrix}\right\}$ Αλλά στο A_f έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\ln x+1}{2\ln x-1}=0\Leftrightarrow 2\ln x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}.\ \text{(δεκτή τιμή)}$$

Το ζητούμενο σημείο λοιπόν είναι το $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},0\right)$

ii. Για να ορίζεται αυτή η σχέση πρέπει και αρκεί εκτός της $x\in A_f$ να ισχύουν και οι σχέσεις, $\dfrac{1}{x}\in A_f$, $f(x)\neq 0$, δηλαδή $x\neq\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ Τελικά

$$x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\sqrt{e}\right)\cup\left(\sqrt{e},+\infty\right)=B$$

Τότε έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2\ln\frac{1}{x}+1}{2\ln\frac{1}{x}+1}=\frac{-2\ln x+1}{-2\ln x-1}=\frac{2\ln x-1}{2\ln x+1}=\frac{1}{f(x)}$$

Άρα η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $x\in B$ και μόνο.

iii Στο B έχουμε: $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3\Leftrightarrow f(x)+2\dfrac{1}{f(x)}=3$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}f(x)=\omega\\ \omega+\dfrac{2}{\omega}=3\end{matrix}\right\}.$$

Στο R* έχουμε:

$$\omega+\frac{2}{\omega}=3\Leftrightarrow\omega^2-3\omega+2=0\Leftrightarrow\omega=1\text{ ή }\omega=2.$$ Για ω=1 έχουμε $f(x)=\omega\Leftrightarrow\dfrac{2\ln x+1}{2\ln x-1}=1$

$\Leftrightarrow 0\ln x=-2$ (αδύνατη εξίσωση)

Για ω=2 έχουμε $f(x)=\omega\Leftrightarrow\dfrac{2\ln x+1}{2\ln x-1}=2$

$$\Leftrightarrow 2\ln x+1=4\ln x-2\Leftrightarrow 2\ln x=3$$

$\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$, δεκτή τιμή αφού ανήκει στο B.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(9^x-3^xe^x\right)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

ii. Να δείξετε ότι f(1) < 0

iii. Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία (ε): y=2x+ln2.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f πρέπει και αρκεί $9^x-3^xe^x>0$

Αλλά $9^x-3^xe^x>0\Leftrightarrow 9^x>3^xe^x\Leftrightarrow$

$$3^x>e^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{e}\right)^x>1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{e}\right)^x>\left(\frac{3}{e}\right)^0\Leftrightarrow x>0$$

Εφόσον $\dfrac{3}{e}>1$. Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

ii. Αρκεί $\ln(9-3e)<\ln 1$, ή $9-3e<1$, ή $8<3e$ που ισχύει αφού $3e>3\cdot 2{,}7=8{,}1>8$

iii. Η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία (ε) $\Leftrightarrow\ln\left(9^x-3^xe^x\right)>2x+\ln 2$

$$\Leftrightarrow\ln\frac{9^x-3^xe^x}{2}>2x\Leftrightarrow\frac{9^x-3^xe^x}{2}>e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 9^x-3^xe^x>2e^{2x}\ (1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{9^x}{3^xe^x}-1>2\cdot\frac{e^{2x}}{3^xe^x}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{e}\right)^x-1>2\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\left(\dfrac{3}{e}\right)^x=\omega\\ \omega-1>\dfrac{2}{\omega}\end{matrix}\right\}\ \text{Αλλά ω>0 οπότε}$$

$$\omega-1>\frac{2}{\omega}\Leftrightarrow\omega^2-\omega-2>0\Leftrightarrow(\omega+1)(\omega-2)>0\Leftrightarrow\omega>2$$

Άρα

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{3}{e}\right)^x>2\Leftrightarrow\ln\left(\frac{3}{e}\right)^x>\ln 2\Leftrightarrow x\cdot\ln\left(\frac{3}{e}\right)>\ln 2$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(\ln 3-1)>\ln 2\Leftrightarrow x>\frac{\ln 2}{\ln 3-1}=x_0,$$

αφού $3>e\Rightarrow\ln 3-1>0$ και $x_0\in A_f$.