

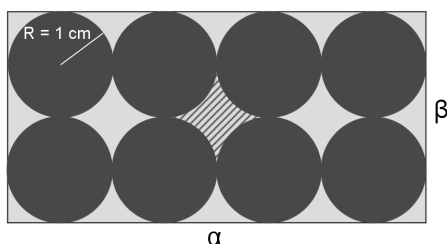
Θέματα προετοιμασίας για τις εισαγωγικές εξετάσεις των Πρότυπων Πειραματικών Λυκείων

Σκαλοχωρίτου Γεωργία, Κουτσκουδής Παναγιώτης, Ματοσιάν Ντικράν
(Καθηγητές του ΠΠΓΛ Μυτιλήνης)

Άσκηση 1

Οι οκτώ ίσοι κύκλοι που δίδονται στο παρακάτω σχήμα, εφάπτονται μεταξύ τους και ταυτόχρονα εφάπτονται στις πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αν η ακτίνα των κύκλων είναι 1 cm, να βρείτε

- τις διαστάσεις α , β του ορθογωνίου
- το εμβαδόν του κάθε κύκλου
- το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του ορθογωνίου και των κύκλων
- να βρεθεί το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής.



Απάντηση:

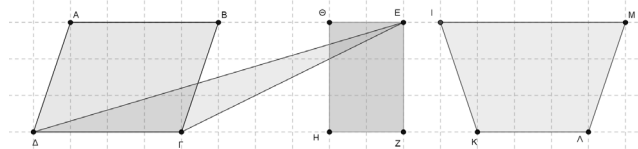
- Η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta=2R=2$ cm. Άρα $\alpha=4\delta=8$ cm και $\beta=2\delta=4$ cm
- $E_k=\pi R^2=\pi \cdot 1^2=\pi$ cm²
- Το ζητούμενο εμβαδόν βρίσκεται αν από το εμβαδόν του ορθογωνίου αφαιρέσω το εμβαδόν των 8 κύκλων. Δηλ $E=E_{\text{ορθ}}-8E_k=32\text{cm}^2-8\pi\text{cm}^2=8(4-\pi)\text{cm}^2$.
- Η ζητούμενη περιοχή απαρτίζεται, λόγω συμμετρίας, από τέσσερα ίσα σχήματα, ίσα με αυτά που εμφανίζονται εκτός των κύκλων στις 4 γωνίες του ορθογωνίου. Η περιοχή που βρίσκεται μεταξύ του ορθογωνίου και των κύκλων απαρτίζεται από 32 τέτοια τμήματα. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι τα $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ του εμβαδού που υπολογίστηκε στο iii. Δηλαδή: $E'=\frac{1}{8}E=\frac{1}{8}(8(4-\pi))=4-\pi$

cm²

Άσκηση 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τέσσερα σχήματα, ένα παραλληλόγραμμο, ένα τρίγωνο, ένα ορθογώνιο και ένα τραπέζιο.

- Ποιος τύπος δίνει το εμβαδόν κάθε ενός από τα παρακάτω σχήματα;
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τεσσάρων σχημάτων, με μονάδα μέτρησης το εμβαδόν του τετραγώνου του πλέγματος. Υπάρχουν σχήματα που να έχουν το ίδιο εμβαδόν (ισεμβαδικά);
- Να δείξετε ότι $GE=3\sqrt{5}$. Πόσο είναι το μήκος του ύψους του τριγώνου ΓΔΕ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΓΕ;



Απάντηση:

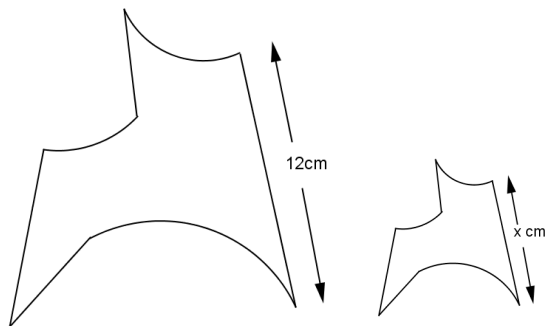
- παραλληλόγραμμο:** (πλευρά) x (αντίστοιχο ύψος)
- τρίγωνο:** $\frac{1}{2}$ x (πλευρά) x (αντίστοιχο ύψος)
- ορθογώνιο:** (μήκος) x (πλάτος)
- τραπέζιο:** $\frac{1}{2}$ x (βάση μεγάλη + βάση μικρή) x (ύψος)
- $(AB\Gamma\Delta) = 4 \cdot 3 = 12$ τμ
 $(\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ τμ
 $(EZH\Theta) = 2 \cdot 3 = 6$ τμ
 $(IK\Lambda M) = \frac{1}{2} \cdot (5+3) \cdot 3 = 12$ τμ
 Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισεμβαδικό με το $IK\Lambda M$ και το $\Gamma\Delta E$ με το $EZH\Theta$.
- Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΖ προκύπτει ότι: $GE^2 = 6^2 + 3^2 = 45$, άρα

$$\begin{aligned} ΓΕ &= \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5} \\ (ΓΔΕ) &= \frac{1}{2} \times (\text{πλευρά}) \times (\text{αντίστοιχο ύψος}), 6 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \upsilon, \text{ άρα } \upsilon = \frac{6 \cdot 2}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Το μικρό σχήμα είναι σμίκρυνση του μεγάλου με κλίμακα 1:3.

- Βρείτε το μήκος της πλευράς x του μικρού σχήματος αν η αντίστοιχη πλευρά στο μεγάλο είναι 12 cm.
- Αν το εμβαδόν του μικρού σχήματος είναι 5 cm^2 , να βρείτε το εμβαδόν του μεγάλου σχήματος.



Απάντηση:

- Λόγω της κλίμακας τα στοιχεία του μικρού σχήματος είναι το $\frac{1}{3}$ των αντίστοιχων στοιχείων

$$\text{του μεγάλου σχήματος, άρα } x = \frac{12}{3} = 4 \text{ cm}$$

- Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους άρα

$$\frac{\text{Εμβ. μικ}}{\text{Εμβ. μεγ}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ άρα: } \frac{5 \text{ Εμβ. μικ}}{\text{Εμβ. μεγ}} = \frac{1}{9}$$

$$\text{άρα } \text{Εμβ. μεγ} = 45 \text{ cm}^2$$

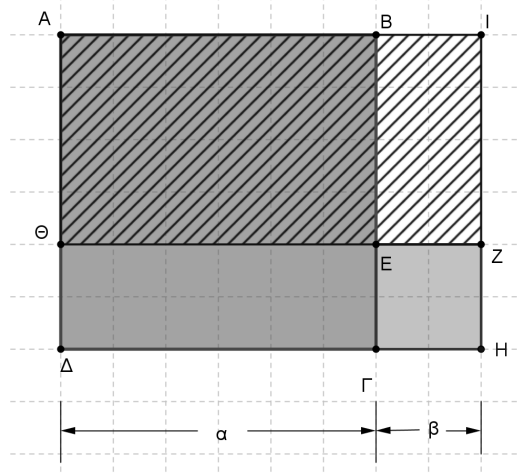
Άσκηση 4

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ (πράσινο) έχει πλευρά a και το ΓΕΖΗ (κόκκινο) έχει πλευρά $\beta < a$ απάντησε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Πόσο είναι το μήκος των ευθ τμημάτων ΑΘ, ΑΙ συναρτήσει των a, β ;
- Ποιο είναι το εμβαδόν του ΑΙΖΘ (μπλε) ορθογωνίου συναρτήσει των a, β ;

- Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις εκφράζει το εμβαδόν του ΑΙΖΘ.

- ☐ $(a+\beta)^2$
- ☐ $(a-\beta)^2$
- ☐ $a^2-\beta^2$
- ☐ $a^2+\beta^2$
- ☐ καμία



- Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο με πλευρά την διαγώνιο ΑΖ του ΑΙΖΘ έχει εμβαδόν διπλάσιο από το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΕΖΗ.

Απάντηση:

- $A\Theta = A\Delta - \Theta\Delta = A\Delta - ZH = a - \beta$
 $AI = AB + BI = AB + GH = a + \beta$
- $(A\Theta \cdot AI) = (a - \beta)(a + \beta) = a^2 - \beta^2$
- Λόγω του (ii) το $a^2 - \beta^2$
- Από Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΙΖ έχω $AZ^2 = AI^2 + IZ^2 = (a + \beta)^2 + (a - \beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2 + a^2 - 2a\beta + \beta^2 = 2(a^2 + \beta^2)$ Άρα το τετράγωνο με πλευρά ΑΖ έχει εμβαδόν AZ^2 που είναι διπλάσιο από το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΕΖΗ αφού $E_{AB\Gamma\Delta} = a^2$ και $E_{\Gamma\epsilon\zeta\eta} = \beta^2$

Άσκηση 5

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} - (\sqrt{5})^2 \text{ και } B = \left[2^0 - \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \right] \left(1^{2013} - \frac{1}{4} \right)^{-1}$$

- Να αποδείξετε ότι $A = 2$ και $B = \frac{1}{3}$.
- Για τις παραπάνω τιμές των A, B να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $2A^3 - 18 \cdot A \cdot B^2$.

Απάντηση:

i. $A = 2\sqrt{2}\sqrt{2} + 3 - 5 = 2 \cdot 2 + 3 - 5 = 2$

$$B = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

ή και

ii. $2A^3 - 18 \cdot A \cdot B^2 = 2A(A^2 - 9B^2) =$
 $= 2A(A - 3B)(A + 3B) = 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) \cdot (2 + 1) = 12$

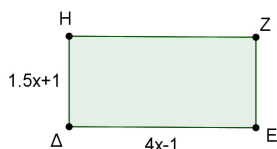
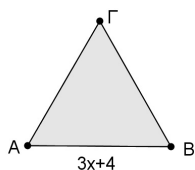
$$2A^3 - 18 \cdot A \cdot B^2 = 2A(A^2 - 9B^2) =$$

$$= 2 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 16 - 4 = 12$$

Άσκηση 6

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά $AB = 3x + 4$ cm και το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $ΔΕ = (4x - 1)$ cm και $ΔΗ = (1,5x + 1)$ cm, όπου x πραγματικός αριθμός.

i. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με $\Pi_{\text{τριγ}} = 9x + 12$ cm και η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi_{\text{ορθ}} = 11x$ cm.



ii. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x το τρίγωνο έχει μεγαλύτερη περίμετρο από την περίμετρο του ορθογώνιου;

Απάντηση:

i. $\Pi_{\text{τριγ}} = 3(3x + 4) = 9x + 12$ cm, $\Pi_{\text{ορθ}} =$
 $2[(1,5x + 1) + (4x - 1)] = 2(1,5x + 1 + 4x - 1) =$
 $= 2 \cdot 5,5x = 11x$ cm

ii. $\Pi_{\text{τριγ}} > \Pi_{\text{ορθ}}$, $9x + 12 > 11x$,
 $11x - 9x < 12$, $2x < 12$, $x < 6$, θα πρέπει
 όμως οι πλευρές των πολυγώνων να είναι
 θετικές, δηλ $3x + 4 > 0$ και $1,5x + 1 > 0$ και $4x -$
 $1 > 0$, άρα $x > \frac{1}{4}$, οπότε τελικά $\frac{1}{4} < x < 6$.

Άσκηση 7

Οι ευθείες ΒΓ και ΔΕ, που βλέπετε στο διπλανό σχήμα έχουν εξισώσεις τις $y = x - 2$

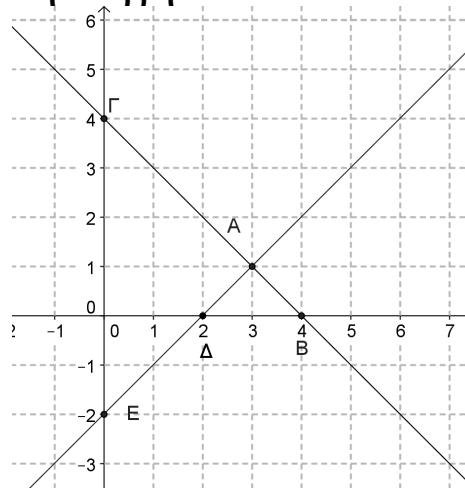
και $y = -x + 4$.

i. Ποια ευθεία από τις παραπάνω έχει εξίσωση την $y = x - 2$;

ii. Σε ποιο σημείο τέμνει η $y = -x + 4$ τον οριζόντιο άξονα xx' ;

iii. Να εκτιμήσετε γεωμετρικά τη λύση του συστήματος $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

iv. Να επαληθεύσετε και αλγεβρικά τη λύση που βρήκατε στο iii.



Απάντηση:

i. Τα σημεία $\Delta(2, 0)$ και $E(0, -2)$ επαληθεύουν την εξίσωση: $0 = 2 - 2$ και $-2 = 0 - 2$. Επομένως η ευθεία ΔΕ έχει εξίσωση $y = x - 2$.

ii. Θα πρέπει $y = 0$, $-x + 4 = 0$, $x = 4$. Άρα η $y = -x + 4$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(4, 0)$.

iii. Οι ευθείες ΒΓ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο $A(3, 1)$. Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι $x = 3$, $y = 1$

iv. 1ος τρόπος:

προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έχουμε: $x - y + x + y = 2 + 4$, $2x = 6$, $x = 3$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του x στην 1^η εξίσωση έχουμε: $3 - y = 2$, $y = 3 - 2 = 1$.

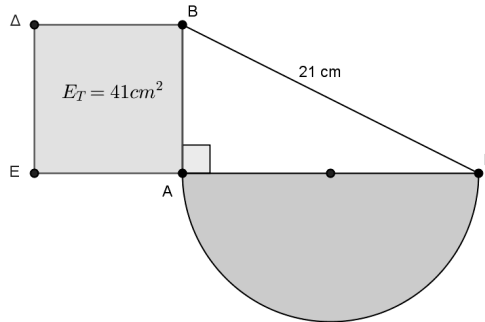
2ος τρόπος (με αντικατάσταση):

$$\begin{cases} x - (4 - x) = 2 \\ y = 4 - x \end{cases}, \begin{cases} x - 4 + x = 2 \\ y = 4 - x \end{cases}, \begin{cases} 2x = 6 \\ y = 4 - x \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 8

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος έχει υποτείνουσα $BΓ = 21$ cm. Το τετράγωνο ΑΒΔΕ έχει εμβαδόν $E_T = 41$ cm².

- i. Να δείξετε ότι το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ του τριγώνου είναι 20 cm
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΓ.

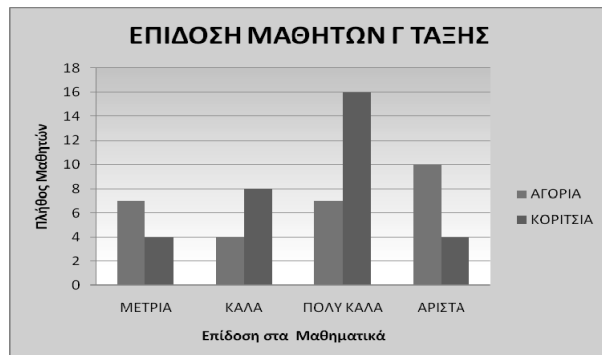


Απάντηση:

- i. $AG^2 = BG^2 - AB^2 = 21^2 - 41 = 441 - 41 = 400$. Άρα $AG = \sqrt{400} = 20$
- ii. $E = \frac{\pi \left(\frac{AG}{2} \right)^2}{2} = \frac{\pi 10^2}{2} = \frac{100\pi}{2} = 50\pi$.

Άσκηση 9

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η επίδοση των μαθητών (αγοριών και κοριτσιών) της τρίτης τάξης ενός Γυμνασίου στα Μαθηματικά.



Αφού μελετήσετε το διάγραμμα, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- i. Επίδοση «Πολύ καλά» είχαν περισσότερα αγόρια ή κορίτσια;
- ii. Πόσα κορίτσια είχαν επίδοση «άριστα»;
- iii. Πόσα ήταν τα αγόρια της τάξης;
- iv. Πόσοι μαθητές είχαν επίδοση «καλά» ή «μέτρια»;
- v. Πόσους μαθητές (αγόρια και κορίτσια) είχε η τάξη;

Απάντηση:

- i. Επίδοση «Πολύ Καλά» έχουν περισσότερα κορίτσια 16 (έναντι 7

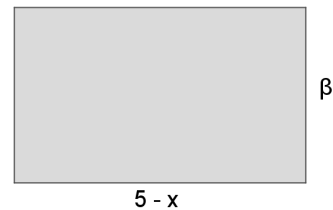
αγοριών).

- ii. «Άριστα» έχουν 4 κορίτσια
- iii. Η τάξη έχει 7 αγόρια που πήραν «μέτρια» και 4 που πήραν «καλά» άλλα 7 που πήραν «πολύ καλά» και 10 που πήραν «άριστα». Σύνολο 28 αγόρια
- iv. «Καλά» 12 μαθητές (8 κορίτσια και 4 αγόρια) και «μέτρια» 11 (4 κορίτσια και 7 αγόρια), άρα τελικά «καλά» ή «μέτρια» είχαν επίδοση 23 μαθητές.
- v. Αγόρια $7+4+7+10=28$ και κορίτσια $4+8+16+4=32$ σύνολο 60 μαθητές.

Άσκηση 10

Το ορθογώνιο στο σχήμα έχει περίμετρο 22cm.

- i. Να εκφράσετε τη διάσταση β του ορθογωνίου σαν συνάρτηση του x.
- ii. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;
- iii. Να υπολογισθούν οι τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με 10cm^2 .
- iv. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού, και για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται;



Απάντηση:

- i. Περίμετρος = 22, $2[(5-x)+\beta]=22$,
 $2(5-x+\beta)=22$,
 $5-x+\beta=11$, $\beta=x+6$.
- ii. Πρέπει οι διαστάσεις του ορθογωνίου να είναι θετικοί αριθμοί, δηλαδή θα πρέπει: $5-x > 0$ και $x+6 > 0$, δηλαδή $x < 5$ και $x > -6$ ή $-6 < x < 5$
- iii. $E=10$, $(5-x)(x+6)=10$,
 $-x^2-x+30=10$, $x^2+x-20=0$, $x=4$
 ή $x=-5$. Και οι δύο τιμές είναι δεκτές.
- iv. Το εμβαδόν E δίνεται από τη σχέση:
 $E=(5-x)(x+6)$, $E=-x^2-x+30$. Το εμβαδόν E είναι συνάρτηση 2^{ου} βαθμού ως προς x. Επειδή $a=-1 < 0$, θα παρουσιάζει μέγιστη τιμή την

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{121}{4(-1)} = \frac{121}{4} \text{ cm}^2, \quad \text{όταν}$$

$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1)} = -\frac{1}{2}, \text{ τιμή η οποία είναι δεκτή.}$$