

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΟΥΣΙΚΗ ΑΡΜΟΝΙΑ

Στέφανος Κεϊσόγλου - Άννα Παπαδάκη

«Μουσική είναι η απόλαυση που νιώθει η ανθρώπινη ψυχή,
όταν μετράει χωρίς να ξέρει πως μετράει»

Gottfried Leibniz

Μαθηματικά και μουσική. Δύο έννοιες που πολλοί πιστεύουν ότι δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους. Είναι όμως όντως έτσι ή η πραγματικότητα είναι άλλη;

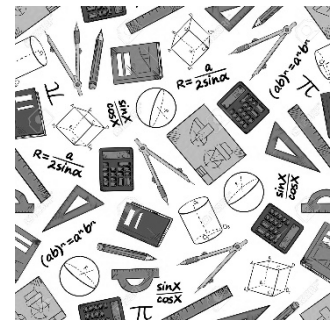
Ας ξεκινήσουμε ψάχνοντας τον τρόπο με τον οποίο ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται και ορίζει τις δύο παραπάνω έννοιες.

Μουσική είναι η **τέχνη** της οργάνωσης των ήχων ώστε να δημιουργήσουμε μία σύνθεση, ένα έργο το οποίο στη συνέχεια θα μπορεί να εκτελεστεί από τους λεγόμενους μουσικούς. Με τον όρο εννοείται επίσης και το σύνολο ήχων από το οποίο απαρτίζεται ένα μουσικό κομμάτι



Η μουσική ως **τέχνη**, έρχεται να καλύψει την ανάγκη του ανθρώπου να εκφράσει με τους ήχους, τις σκέψεις, τα συναισθήματα και τις ψυχικές του καταστάσεις.

Τα **Μαθηματικά** από την άλλη είναι η επιστήμη που μελετά θέματα που αφορούν την ποσότητα (αριθμούς), τη δομή (γεωμετρικά σχήματα), το χώρο, τη μεταβολή, τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας μας. Είναι μια λογική επιστήμη που περιγράφει τις σχέσεις με τύπους ή και αλγόριθμους και ερευνά την αλήθεια τους με αποδεικτική διαδικασία λογικών βημάτων που στηρίζονται σε αξιώματα και θεωρήματα.



Η λογική λοιπόν του να συσχετίσουμε τις δύο αυτές φαινομενικά αντίθετες έννοιες ίσως να μην είναι και τόσο φανερή, όπως και οι μεταξύ τους σχέσεις. Θα κάνουμε λοιπόν μια προσπάθεια να τις συνδέσουμε και να ανακαλύψουμε τις σχέσεις αυτές.

Ο ρυθμός και οι αριθμοί

Η πρώτη μουσική που έφτιαξε το ανθρώπινο είδος, εδώ και 35.000 χρόνια, ήταν σκέτος, απλός ρυθμός.

Αυτό υποστηρίζουν οι ανθρωπολόγοι που μελέτησαν το αρχαιότερο εύρημα των μουσικών συνηθειών του ανθρώπου, οστά από μαμούθ που τα χτυπούσαν ρυθμικά για τις τελετές τους.

Δεν υπήρχε μελωδία με την έννοια που σήμερα γνωρίζουμε. Φαίνεται ότι ο καθαρός ρυθμός συνδεόταν με τον χορό, με την σωματική κίνηση κατά τη διάρκεια των τελετών τους.

Σήμερα συναντάμε ακόμη τον απόηχο αυτής της παράδοσης σε ξύλινα όργανα όπως αυτό που φαίνεται στην διπλανή εικόνα.



Ο ρυθμός είναι το κοινό σύνολο, η κοινή αφετηρία της μουσικής και των Μαθηματικών.

Η πρωταρχική μαθηματική έννοια είναι ο αριθμός, ο φυσικός αριθμός, το 1, 2, 3, 4, 5 κ.λ.π. Πως παράγεται όμως ο αριθμός σαν νοητική λειτουργία; Παράγεται μέσα από την αρίθμηση, δηλαδή

από την ισόχρονη απαγγελία λέξεων της μορφής: ένα – δύο – τρία – τέσσερα κ.λ.π Παρατηρούμε ότι η αρίθμηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από την διατήρηση ενός ρυθμού, ενός μοτίβου.

Η θέση της μουσικής στην αρχαία Ελλάδα.

Κάνοντας μια αναδρομή στην αρχαία Ελλάδα, διαπιστώνουμε ότι η μουσική και τα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένα. Η μουσική ήταν μια επιστήμη πειθαρχημένη αυστηρά μαθηματικά που χειριζόταν αριθμητικές σχέσεις, λόγους και αναλογίες.

Η εκπαίδευση των νέων στηριζόταν στη διδασκαλία της γλώσσας, της αριθμητικής, της μουσικής και της σωματικής άσκησης.



Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στην Αρχαία Ελλάδα ο όρος «μουσική» είχε πλούσιο περιεχόμενο και αναφερόταν σε ένα είδος τέχνης που ήταν συνδυασμός λόγου, μελωδίας και κίνησης. Η αλληλεπίδραση της μουσικής και της ποίησης ήταν τόσο μεγάλη και τόσο ζωντανή για τους Έλληνες, ώστε η εσωτερική συνένωση της τέχνης του ήχου και της ποίησης αποτελεί την ουσιαστική έννοια της μουσικής.

Μουσική αρμονία και μαθηματικά.

Τα Μαθηματικά θα μπορούσαν να θεωρηθούν ένα εργαλείο με το οποίο ποσοτικοποιούμε διάφορα φαινόμενα, δηλαδή μελετάμε τα φαινόμενα ως ποσά. Για παράδειγμα ο χρόνος (μέτρηση, κύκλος), ο χώρος (Γεωμετρία). Το φαινόμενο, ή μάλλον η αίσθηση, της ακοής έχει και αυτό ποσοτικοποιηθεί και μάλιστα έχει ιδιαίτερα μελετηθεί η ακουστική αίσθηση της αρμονίας δύο ηχητικών ερεθισμάτων, ή απλά της αρμονίας.

• Η Πυθαγόρεια άποψη.

Η πρώτη συστηματική αλλά συγχρόνως και καθοριστική προσπάθεια υπαγωγής του φαινομένου της μουσικής σε Μαθηματικές σχέσεις γίνεται από τον Πυθαγόρα.

Λέγεται ότι τη στιγμή που ο Πυθαγόρας περνούσε έξω από ένα Σιδηρουργείο παρατήρησε τους ήχους που προέρχονταν από τα χτυπήματα των σφυριών στο αμόνι. Εκεί, για πρώτη φορά αντιλήφθηκε ότι οι διαφορές του ήχου (αυτό που σήμερα ονομάζουμε συχνότητες του ήχου) εξαρτώνται από τον όγκο των σφυριών και όχι από τη μεταβολή της δύναμης που ασκείται μέσω αυτών πάνω στο παλλόμενο αμόνι. Αφού, λοιπόν, ανέλυσε και μέτρησε προσεκτικά τις διαφορές όγκου και βάρους που τα σφυριά αυτά παρουσίαζαν μεταξύ τους, επέστρεψε στο σπίτι του επιχειρώντας πλέον να προσαρμόσει τα ίδια βάρη στα άκρα τεσσάρων πανομοιότυπων χορδών, στηριγμένων σε μια σταθερή ξύλινη βάση που λειτουργούσε ως ηχείο. Έπειτα, κτυπώντας ανά δύο τις χορδές, είδε ότι η χορδή με τη μεγαλύτερη τάση, σε συνδυασμό με εκείνη που είχε τη μικρότερη τάση απ' όλες, έδινε το ιδιαίτερα ευχάριστο διάστημα της ογδόης.

Δύο βασικά ερωτήματα απασχολούν τους Πυθαγόρειους:

α) Πότε δύο ήχοι (νότες) συνηχούν αρμονικά,



β) Ποια είναι η βαθύτερη αιτία αυτής της αρμονικής συνήχησης.

Ήδη είχε τεθεί ρητά το πρόβλημα της αρμονίας. Ας δούμε όμως αναλυτικά τις αριθμητικές αναλογίες που κατασκεύασε ο Πυθαγόρας.

Τα βάρη που είχε τοποθετήσει ο Πυθαγόρας ήταν ισοδύναμα με 12 και 6 αριθμητικές μονάδες, αντίστοιχα. Επομένως, βρίσκονταν στην αναλογία 2:1. Αμέσως μετά, συνέκρινε την αρχική χορδή των 12 βαρών με μια άλλη, η οποία βρισκόταν ακριβώς δίπλα σε εκείνη των 6, με τάση ισοδύναμη 8 βαρών. Η νέα αυτή συνήχηση (12:8) δεν ήταν άλλη από το σύμφωνο διάστημα της πέμπτης που, στην απλουστευμένη της μορφή, αντιστοιχεί στον αριθμητικό λόγο 3:2. Τέλος, το παιχνίδι των συσχετισμών φαίνεται πως έκλεισε με την εξακρίβωση ότι η χορδή με τη μέγιστη τάση των 12 βαρών, συνδυαζόμενη με μια άλλη των 9 βαρών, παρήγαγε το επίσης σύμφωνο διάστημα της τετάρτης (12:9, δηλαδή 4:3).



Εδώ θα πρέπει να υπογραμμιστεί το γεγονός ότι το βασικό υπολογιστικό εργαλείο της εποχής είναι οι ακέραιοι και τα κλάσματά τους (ρητοί), έτσι οι ερμηνείες των φαινομένων που μελετούσαν θα έπρεπε να δοθούν μέσα στα πλαίσια της Αριθμοθεωρίας των ρητών.

Η αρμονία επιβάλλεται, κατά κάποιον τρόπο, από τους λόγους που προέρχονται από την τετρακτύ δηλαδή από τα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ κλπ.

Το αξιοσημείωτο είναι ότι και οι Κινέζοι φιλόσοφοι της εποχής του Κομφούκιου θεωρούσαν τους μικρούς αριθμούς 1, 2, 3, 4 σαν την ουσία της τελειότητας. Ο Euler, το 1738 επιχειρεί μία νέα εξήγηση για την προέλευση της αρμονίας. Έχουμε, λέει ο Euler, έμφυτη την τάση να αισθανόμαστε ικανοποίηση όταν ανακαλύπτουμε κάποια κανονικότητα ή νόμο. Η απλούστερη, άρα και η ευκολότερα αντιληπτή, κανονικότητα είναι αυτή η οποία στηρίζεται στους λόγους των απλών αριθμών 1, 2, 3, 4. Ο Euler ουσιαστικά συμφωνεί με την Πυθαγόρεια άποψη και την στηρίζει σε μία περισσότερο ρεαλιστική βάση.

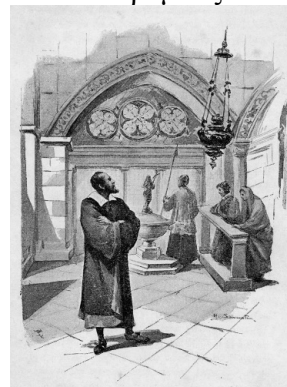
• Σύγχρονες ερμηνείες της αρμονίας.

Η σύγχρονη ερμηνεία της αρμονίας στηρίζεται σε περισσότερο σύνθετα Μαθηματικά εργαλεία και στηρίζεται σε μία διαθεματική συνεργασία των Μαθηματικών με την Φυσική.

Αν θα έπρεπε να ορίσουμε μία αφετηρία για την γέννηση της σύγχρονης επιστήμης αυτή θα ήταν το 1564, το έτος που γεννήθηκε ο Γαλιλαίος. Από τις επιστημονικές του μελέτες αυτή που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το αντικείμενο που μελετάμε είναι οι νόμοι του εκκρεμούς.

Ο Γαλιλαίος στα 18 χρόνια του, καθώς παρατηρούσε μέσα στον καθεδρικό ναό της Πίζας τον πολυέλαιο να αιωρείται και σιγά-σιγά να μειώνεται το πλάτος της ταλάντωσης ενώ ο χρόνος της ταλάντωσης παρέμενε ίδιος. Η παραπέρα μελέτη του φαινομένου αργότερα τον οδήγησε στην ανακάλυψη των νόμων του εκκρεμούς και την κατασκευή ενός οργάνου για την μέτρηση του χρόνου.

Το σημαντικό είναι ότι ο Γαλιλαίος έστρεψε την προσοχή της επιστημονικής έρευνας στη μελέτη των περιοδικών φαινομένων.



Βρισκόμαστε στα μέσα περίπου του 17^{ου} αιώνα. Η μελέτη των παλμικών κινήσεων, ιδιαίτερα δε του εκκρεμούς, οδηγεί στη δημιουργία της μαθηματικής έννοιας των περιοδικών φαινομένων και η ενώ αναπτύσσεται η τριγωνομετρία, ιδιαίτερα δε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

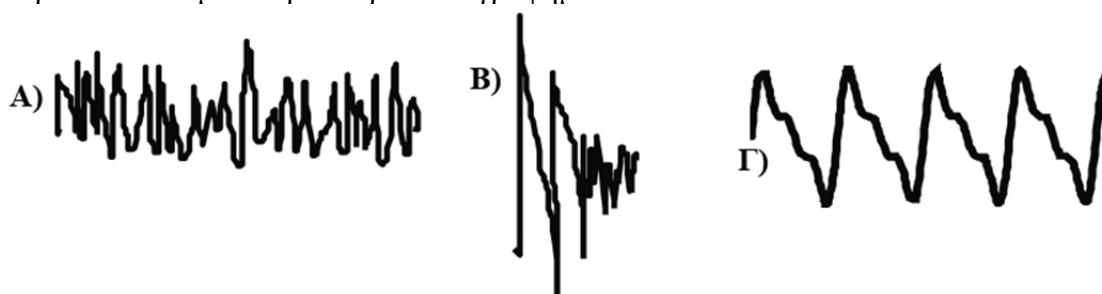
Ιδιαίτερη σημασία στην πορεία προς την ερμηνεία της μουσικής αρμονίας αποτελούν οι έρευνες του Ζαν Μπατίστ Ζοζέφ Φουριέ στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Ο Φουριέ ήταν μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός.



Με βάση τις έρευνες του Φουριέ, αλλά και άλλων σημαντικών μαθηματικών και φυσικών αργότερα, προέκυψε ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα.

Κάθε περιοδικό φαινόμενο, άρα και μία μουσική νότα, μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερες βασικές συναρτήσεις, συναρτήσεις που διδάσκονται στο Λύκειο και ονομάζονται τριγωνομετρικές.

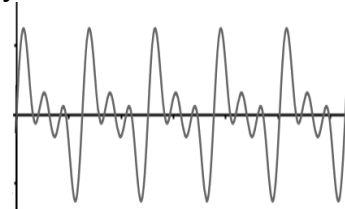
Για να καταλάβουμε τη σημασία του συμπεράσματος αυτού ας δούμε τα παρακάτω γραφήματα: Ο θόρυβος της βροχής, ένας απότομος κρότος (κεραυνός), και μία μουσική νότα παριστάνονται με τα τρία παρακάτω γραφήματα.



Δεν χρειάζεται πολύ προσπάθεια να καταλάβουμε ποιο γράφημα αντιστοιχεί σε κάθε έναν από τους τρεις ήχους που αναφέραμε.

Ας δούμε τώρα πιο προσεκτικά το γράφημα της νότας, δηλαδή το Γ). Το γράφημα αυτό παράγεται από μία νότα που προέρχεται από ένα φλάουτο. Σύμφωνα με τον Φουριέ το γράφημα αυτό μπορεί να αναλυθεί σε άλλες απλούστερες καμπύλες που ονομάζονται αρμονικές. Ας δούμε περισσότερο αναλυτικά την ανάλυση μιας νότας σε αρμονικές.

Στην διπλανή εικόνα έχουμε την παράσταση μιας νότας από ένα φλάουτο. Η παράσταση αυτή αναλύεται σε 3 αρμονικές κάθε μία από τις οποίες προέρχεται από την πρώτη, την βασική αρμονική. Το σημαντικό είναι ότι η δεύτερη και η τρίτη αρμονική έχουν συχνότητες που είναι πολλαπλάσια της συχνότητας της πρώτης, δηλαδή έχουν σχέση 1:2:3.



Παρατηρούμε ότι νότα αναλύεται σε 3 μόνο καμπύλες (αρμονικές) και αυτός ίσως είναι και ο λόγος που ο ήχος του φλάουτου είναι απλός.

Ας δούμε τώρα πως εξηγείται η αίσθηση της αρμονία όταν ακούμε δύο νότες να ακούγονται συγχρόνως. Όταν οι αρμονικές της μίας νότας και οι αρμονικές της άλλης νότας συμπίπτουν σε πολλές περιπτώσεις τότε οι δύο νότες δίνουν την αίσθηση της αρμονίας. Όσο λιγότερο συμπίπτουν οι αρμονικές τους τόσο περισσότερο αυξάνει το αίσθημα της δυσαρμονίας.

Η αρμονία είναι τελικά το κοινό χαρακτηριστικό της μουσικής με τα μαθηματικά. Όπως ακριβώς ο αριθμός προκύπτει από τη διαμάχη αντιθέτων, έτσι και εκείνη συνενώνει τα αντίθετα, τη μουσική και τα μαθηματικά.