# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

**Αργύρης Φελλούρης**
**Αν. Καθηγητής ΕΜΠ**

## Εισαγωγή

*Η εργασία αυτή έχει στόχο να αποτελέσει βοήθημα των μαθητών που συμμετέχουν στις Ελληνικές και στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Πρόκειται για μία εισαγωγή στη θεωρία πολυωνύμων, η οποία σύντομα θα εμπλουτιστεί με περισσότερες λυμένες ασκήσεις από διαγωνισμούς και θα συμπληρωθεί με τα πολυώνυμα πολλών μεταβλητών και τα σχετικά με την εύρεση των νιοστών ριζών μιγαδικών αριθμών.*

Από την Ανάλυση ξέρουμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \,, a_i \in \mathbb{R} \text{ ή } a_i \in \mathbb{C},\ i = 0,1,\ldots,n\,,$$

όπου $x$ είναι μία μεταβλητή που μπορεί να πάρει πραγματικές ή μιγαδικές τιμές. Στην Άλγεβρα το $x$ μπορεί να παίζει το ρόλο μεταβλητής ή να είναι μία *απροσδιόριστη* (*indeterminate*), δηλαδή ένα σύμβολο που μας επιτρέπει να θεωρούμε εκφράσεις της μορφής

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,\ a_i \in \mathrm{K}, i = 0,1,2,\ldots$$

όπου $\mathrm{K}$ είναι σώμα και συνήθως $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{Q}$, που λέγονται **πολυώνυμα**. Οι αριθμοί $a_i$ είναι οι **συντελεστές** του πολυωνύμου.

**Ορισμός 1. Το πολυώνυμο** $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ **είναι βαθμού** $k$**, αν ισχύει** $a_k \neq 0$ **και** $a_n = 0$ **για κάθε** $n > k$. **Γράφουμε** $\deg f(x) = k$ **ή βαθμός** $f(x) = k$ **.**

**Ορισμός 2. Για τα πολυώνυμα**

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad \textbf{και} \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots b_m x^m + \ldots, \qquad \textbf{(1)}$$

**όπου** $a_i, b_i \in \mathrm{K}$**, με** $a_n \neq 0, a_{n+i} = 0$ και $b_m \neq 0, b_{m+i} = 0,\ i = 1,2,3,\ldots$ **η ισότητα πολυωνύμων ορίζεται ως εξής:**

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow n = m \text{ και } a_i = b_i \textbf{ για κάθε } i = 0,1,2,\ldots,n\,.$$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μεταβλητής $x$ με συντελεστές στο σώμα Κ, έστω

$$\mathrm{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... : a_i \in \mathrm{K}, i = 0,1,2,...\},$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις της **πρόσθεσης** και του **πολλαπλασιασμού**

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n + ...$$

$$f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + ...,$$

όπου $f(x)$, $g(x)$ είναι τα πολυώνυμα (1) του ορισμού 2 γίνεται **αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.** Το πολυώνυμο $f(x) = a_0$, με $a_0 \neq 0$, λέγεται σταθερό πολυώνυμο και έχει βαθμό 0. Η **μονάδα** του δακτυλίου $\mathrm{K}[x]$ είναι το σταθερό πολυώνυμο $f(x) = 1$. Το **μηδενικό** στοιχείο του δακτυλίου $\mathrm{K}[x]$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο

$$0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ...$$

ή απλούστερα $0(x) = 0.$ Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Αν τα πολυώνυμα $f(x), g(x) \in \mathrm{K}[x]$ είναι μη μηδενικά, τότε ισχύουν:

$$\deg[f(x) + g(x)] \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Οι παραπάνω σχέσεις αληθεύουν και όταν κάποιο από τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, εφόσον ορίσουμε συμβατικά $\deg 0(x) = -\infty.$

Μία από τις πιο βασικές ιδιότητες του δακτυλίου $\mathrm{K}[x]$ είναι ότι δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, δηλαδή δεν υπάρχουν μη μηδενικά πολυώνυμα $g(x), h(x) \in \mathrm{K}[x]$ τέτοια ώστε να ισχύει: $g(x)h(x) = 0(x)$. Αυτό χαρακτηρίζει το δακτύλιο $\mathrm{K}[x]$ ως **ακεραία περιοχή**. Έχουμε σχετικά:

**Θεώρημα 1. (α) Έστω ότι για τα πολυώνυμα $g(x), h(x) \in \mathrm{K}[x]$ ισχύει: $g(x)h(x) = 0(x)$. Τότε έχουμε $g(x) = 0(x)$ ή $h(x) = 0(x)$.**

**(β) Αν για τα πολυώνυμα $g(x), h(x), f(x) \in \mathrm{K}[x]$ με $f(x) \neq 0(x)$ ισχύει:**

$$g(x)f(x) = h(x)f(x),$$

**τότε έχουμε $g(x) = h(x)$ (ιδιότητα διαγραφής).**

**Απόδειξη**

**(α)** Αν είναι $g(x)=0(x)$, τότε ισχύει το ζητούμενο.

Αν είναι $g(x)\neq 0(x)$, τότε θα αποδείξουμε ότι είναι $h(x)=0(x)$. Πράγματι, αν ήταν $h(x)\neq 0(x)$, τότε θα είχαμε για τα δύο μέλη της ισότητας $g(x)h(x)=0(x)$ $\deg g(x)h(x)\geq 0$, ενώ ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου δεν ορίζεται.

**(β)** Έχουμε $g(x)f(x)=h(x)f(x)\Rightarrow\big(g(x)-h(x)\big)f(x)=0(x)$, οπότε, αφού είναι $f(x)\neq 0(x)$, από το (α) προκύπτει ότι: $g(x)=h(x)$. □

Το βασικότερο θεώρημα της θεωρίας πολυωνύμων είναι το εξής:

**Θεώρημα 2. (Θεώρημα αλγοριθμικής διαίρεσης).**
Αν $f(x), g(x)\in \mathrm{K}[x]$ και $g(x)\neq 0$, τότε υπάρχουν **μοναδικά** πολυώνυμα $p(x)$ (**πηλίκο**), $\upsilon(x)$ (**υπόλοιπο**) $\in \mathrm{K}[x]$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$f(x)=g(x)p(x)+\upsilon(x),$$

όπου

$$\upsilon(x)=0 \text{ ή } \deg\upsilon(x)<\deg g(x).$$

(Αν $\upsilon(x)=0$, τότε πολυώνυμο το $g(x)$ **διαιρεί** το $f(x)$ και γράφουμε: $g(x)\,|\,f(x)$.)

**Απόδειξη**

Αν είναι $\deg f(x)<\deg g(x)$, τότε είναι $p(x)=0(x)$ και $\upsilon(x)=g(x)$.

**Ύπαρξη πηλίκου και υπολοίπου.**

Αν είναι $\deg f(x)=n\geq m=\deg g(x)$, τότε ο προσδιορισμός του πηλίκου και του υπολοίπου της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρετέο το πολυώνυμο $f(x)$ και διαιρέτη το πολυώνυμο $g(x)$ γίνεται με τη γνωστή διαδικασία διαίρεσης πολυωνύμων. Αν είναι $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ και $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$, τότε διαιρώντας το μεγιστοβάθμιο όρο του $f(x)$ με το μεγιστοβάθμιο όρο του $g(x)$ λαμβάνουμε το μονώνυμο $p_1(x)=\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ και θέτουμε $\upsilon_1(x)=f(x)-g(x)p_1(x)$. Αν είναι $\upsilon_1(x)=0$ ή $\deg\upsilon_1(x)<\deg g(x)$, τότε ισχύει το ζητούμενο με $p(x)=p_1(x)$ και

$\upsilon(x)=\upsilon_1(x)$. Αν είναι $\deg\upsilon_1(x)\geq\deg g(x)$, τότε συνεχίζουμε όπως προηγουμένως και έστω ότι έχουμε βρει τις σχέσεις

$$f(x)=g(x)p_1(x)+\upsilon_1(x),\ \deg\upsilon_1(x)\geq\deg g(x)$$
$$\upsilon_1(x)=g(x)p_2(x)+\upsilon_2(x),\ \deg\upsilon_2(x)\geq\deg\upsilon_1(x)$$

.........................................................................................

$$\upsilon_k(x)=g(x)p_{k+1}(x)+\upsilon_{k+1}(x),\ \deg\upsilon_{k+1}(x)<\deg\upsilon_1(x)\text{ ή }\upsilon_{k+1}(x)=0.$$

Τότε με διαδοχικές αντικαταστάσεις λαμβάνουμε

$$f(x)=g(x)p(x)+\upsilon(x),\text{ με }\upsilon(x)=0\text{ ή }\deg\upsilon(x)<\deg g(x)$$

όπου $p(x)=p_1(x)+p_2(x)+...+p_k(x)$ και $\upsilon(x)=\upsilon_{k+1}(x)$.

**Μονοσήμαντο.**

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν και τα πολυώνυμα $p'(x)$ και $\upsilon'(x)$ τέτοια ώστε

$$f(x)=g(x)p'(x)+\upsilon'(x),\text{ με }\upsilon'(x)=0\text{ ή }\deg\upsilon'(x)<\deg g(x)=m.$$

Τότε θα έχουμε

$$g(x)p(x)+\upsilon(x)=g(x)p'(x)+\upsilon'(x)$$
$$\Leftrightarrow g(x)\big(p(x)-p'(x)\big)=\upsilon'(x)-\upsilon(x) \qquad (*)$$

Αν είναι $p(x)-p'(x)\neq 0$, δηλαδή $p(x)\neq p'(x)$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\deg\Big[g(x)\big(p(x)-p'(x)\big)\Big]\geq m\ \text{ και }\ \deg\big[\upsilon'(x)-\upsilon(x)\big]<m,$$

οπότε δεν μπορεί να αληθεύει η ισότητα (*). Άρα πρέπει να ισχύει $p(x)=p'(x)$, οπότε από τη σχέση (*) προκύπτει και η ισότητα $\upsilon(x)=\upsilon'(x)$. □

Για παράδειγμα έχουμε

$$x^4+3x^3+x^2-2x-1=(x^2-1)(x^2+3x+2)+(x+1),$$

όπως προκύπτει από το παρακάτω σχήμα:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+3x^3+x^2-2x-1 & x^2-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4 \qquad +x^2 \qquad\qquad} & x^2+3x+2 \ (\pi\eta\lambda\acute{\iota}\kappa o) \\
\quad +3x^3+2x^2-2x-1 & \\
\quad \underline{-3x^3 \qquad +3x} & \\
\qquad\quad +2x^2+x-1 & \\
\qquad\quad \underline{-2x^2 \quad +2} & \\
\qquad\qquad\qquad x+1(\upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi o) &
\end{array}
$$

Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο $f(x)\in \mathrm{K}\left[x\right]$, όπου υποθέτουμε ότι το $x\in \mathrm{K}$ παίζει το ρόλο μεταβλητής. Αν για $x=\lambda\in \mathrm{K}$ ισχύει $f(\lambda)=0\in \mathrm{K}$, τότε το $\lambda\in \mathrm{K}$ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου $f(x)$. Στην περίπτωση αυτή το πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $x-\lambda$ είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $f(x)$ και γράφουμε $(x-\lambda)\,|\,f(x)$ και ισχύει ότι: $f\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)g\left(x\right)$, $g\left(x\right)\in \mathrm{K}\left[x\right]$.

**Πόρισμα 1. (α) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f\left(x\right)$ με το πολυώνυμο $g\left(x\right)=x-a$ είναι ο αριθμός $\upsilon=f\left(a\right)$.**
**(β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f\left(x\right)$ με το πολυώνυμο $g\left(x\right)=ax+b, a\neq 0,$ είναι ο αριθμός $\upsilon=f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.**

Σύμφωνα με το **θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας**, κάθε πολυώνυμο $f(x)$ με μιγαδικούς συντελεστές, δηλαδή $f(x)\in \mathbb{C}\left[x\right]$, βαθμού $n$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{C}$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ακριβώς $n$ ρίζες στο $\mathbb{C}$. Η εξίσωση $f(x)=0$ λέγεται **πολυωνυμική εξίσωση** και έχει ρίζες αυτές του πολυωνύμου $f(x)$. Έτσι, το πολυώνυμο

$$f(x)=a_n x^n+...+a_1x+a_0\,, a_i\in \mathbb{R} \text{ ή } a_i\in \mathbb{C},\ i=0,1,...,n\ ,$$

μπορεί να γραφεί ως

$$f\left(x\right)=a_n\left(x-\rho_1\right)\left(x-\rho_2\right)\cdots\left(x-\rho_n\right),$$

με $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n\in \mathbb{C}$, όχι υποχρεωτικά διαφορετικές μεταξύ τους.

Επίσης ισχύει ότι:

*Αν τα πολυώνυμα* $(x-\rho_1),(x-\rho_2),...,(x-\rho_n)$, *διαιρούν το πολυώνυμο* $f(x)$ *τότε και το πολυώνυμο* $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$ *διαιρεί το* $f(x)$.

**Ορισμός 3. Μία ρίζα $\rho \in \mathbb{C}$ ενός μη μηδενικού πολυωνύμου $f(x) \in \mathrm{K}[x]$ έχει πολλαπλότητα $k$, αν ισχύουν:**

$$(x-\rho)^k \mid f(x) \text{ και } (x-\rho)^{k+1} \nmid f(x).$$

Εύκολα προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 3. Ο αριθμός $\rho \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k$ ενός μη μηδενικού πολυωνύμου $f(x) \in \mathrm{K}[x]$, αν, και μόνον αν, υπάρχει πολυώνυμο $\phi(x) \in \mathrm{K}[x]$ τέτοιο ώστε:**

$$f(x) = (x-\rho)^k \phi(x) \text{ και } \phi(\rho) \neq 0.$$

Αν το πολυώνυμο $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ ή $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,1,...,n$ έχει διαφορετικές ανά δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k \in \mathbb{C}$, $k \le n$, με πολλαπλότητα $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$$f(x) = a_n (x-\rho_1)^{\lambda_1} (x-\rho_2)^{\lambda_2} \cdots (x-\rho_k)^{\lambda_k}, \text{όπου } \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = n.$$

Αν κάθε πολυωνυμική εξίσωση $f(x) = 0$, όπου $f(x) \in \mathrm{K}[x]$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο σώμα $\mathrm{K}$, τότε το σώμα $\mathrm{K}$ λέγεται **αλγεβρικά κλειστό**. Το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό, ενώ το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αλγεβρικά κλειστό, αφού, για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Δύο σημαντικά αποτέλεσμα της θεωρίας πολυωνύμων είναι τα εξής:

**Θεώρημα 4. Αν ένα πολυώνυμο $f(x) \in \mathrm{K}[x]$ με $\deg f = n$ έχει $n+1$ διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες, τότε $f(x) = 0$, δηλαδή το πολυώνυμο $f(x)$ ισούται με το μηδενικό πολυώνυμο.**

**Θεώρημα 5. Αν δύο πολυώνυμα $f(x), g(x) \in K[x]$, βαθμού το πολύ $n$, λαμβάνουν την ίδια αριθμητική τιμή για τουλάχιστον $n+1$ διαφορετικές τιμές του $x$, δηλαδή, αν ισχύει:**

$$f(\alpha_i) = g(\alpha_i), i = 1, 2, ..., m, \text{όπου } m \geq n+1$$

**με $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ διαφορετικές ανά δύο, τότε τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ είναι ίσα.**

Για παράδειγμα το πολυώνυμο

$$f(x) = (x-\alpha)^2(\beta-\gamma) + (x-\beta)^2(\gamma-\alpha) + (x-\gamma)^2(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, είναι το μηδενικό πολυώνυμο γιατί είναι δευτέρου βαθμού και μηδενίζεται για τρεις διαφορετικές τιμές του $x$, τις $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Πράγματι, ισχύει ότι

$$f(\alpha) = (\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha) + (\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = 0,$$

και ομοίως προκύπτει ότι $f(\beta) = f(\gamma) = 0$.

## Τύποι Vieta

Αν $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ είναι οι $n$ ρίζες του πολυωνύμου

$$f(x) = a_n x^n + .... + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2, ..., n, a_n \neq 0,$$

τότε ισχύουν οι σχέσεις (τύποι Vieta):

$$\Sigma_1 = \rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\Sigma_2 = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + ... + \rho_1\rho_n + ... + \rho_{n-1}\rho_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

.......................................................................

$$\Sigma_\nu = \rho_1\rho_2 ... \rho_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν από την ισότητα των πολυωνύμων

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + .... + a_1 x + a_0 \\ &= a_n \left( x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \right),\ a_n \neq 0, \text{ και} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n) \\ &= \alpha_n \left[ x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Sigma_n \right]. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα.** Δίνεται το πολυώνυμο

$$f(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2 x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + ... + a_1 x + a_0 .$$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν το $f(x)$ να έχει όλες τις ρίζες του στο $\mathbb{R}$.

**Λύση.** Υποθέτουμε ότι όλες οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ του $f(x)$ είναι όλες στο $\mathbb{R}$. Τότε, σύμφωνα με τους τύπους του Vieta, θα έχουμε:

$$\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n = -2n \text{ και } \sum_{1 \le i < j \le n} \rho_i \rho_j = 2n^2 .$$

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{1 \le i < j \le n} \rho_i \rho_j = 2n^2 &= \frac{1}{2}\left[ (\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n)^2 - (\rho_1^2 + \rho_2^2 + ... + \rho_n^2) \right] \\ &\le \frac{1}{2}\left[ (\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n)^2 - \frac{1}{n}(\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n)^2 \right] \\ &= \frac{n-1}{2n}(\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n)^2 = 2n(n-1) = 2n^2 - 2n, \end{aligned}$$

που είναι άτοπο.

## Πολυώνυμα με συντελεστές στα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$.

Αν ένα πολυώνυμο έχει **πραγματικούς συντελεστές** και επιπλέον έχει μία μιγαδική ρίζα, τότε έχει ρίζα και την συζυγή της με τη ίδια μάλιστα πολλαπλότητα. Έχουμε σχετικά.

**Θεώρημα 6.** *Αν το πολυώνυμο*

$$f(x) = a_n x^n + .... + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,...,n, a_n \neq 0,$$

*με **πραγματικούς συντελεστές**, έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό* $\rho = a + bi, b \neq 0,$ *τότε έχει ρίζα και τον συζυγή μιγαδικό* $\overline{\rho} = a - bi.$

**Απόδειξη**

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων του συζυγούς μιγαδικού αριθμού. Πράγματι, έχουμε

$$f(a+bi) = a_n(a+bi)^n + .... + a_1(a+bi) + a_0 = 0, a_j \in \mathbb{R}, j = 0,1,2,...,n, a_n \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow \overline{f(a+bi)} = a_n\overline{(a+bi)}^n + ... + a_1\overline{(a+bi)} + a_0$$

(αφού $a_j \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{a_j} = a_j, j = 0,1,2,...,n$)

$$\Leftrightarrow f\left(\overline{a+bi}\right) = a_n\left(\overline{a+bi}\right)^n + ... + a_1\left(\overline{a+bi}\right) + a_0 = 0,$$

$$\Leftrightarrow f(a-bi) = a_n(a-bi)^n + ... + a_1(a-bi) + a_0 = 0$$

δηλαδή ο αριθμός $\overline{\rho} = a - bi$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$. □

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 6 είναι τα παρακάτω πορίσματα:

**Πόρισμα 1.** *Αν το πολυώνυμο*

$$f(x) = a_n x^n + .... + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,...,n, a_n \neq 0,$$

*με* ***πραγματικούς συντελεστές****, έχει ρίζα πολλαπλότητας* $k \leq n$ *τον μιγαδικό αριθμό* $\rho = a + bi, b \neq 0,$ *τότε έχει ρίζα, επίσης με πολλαπλότητα* $k$ *και τον συζυγή μιγαδικό* $\overline{\rho} = a - bi.$

**Πόρισμα 2**. *Το* ***πλήθος των μιγαδικών ριζών*** *του πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές είναι* ***άρτιος αριθμός****.*

**Πόρισμα 3**. *Κάθε πολυώνυμο* ***περιττού βαθμού*** *με* ***πραγματικούς συντελεστές*** *έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.*

**Απόδειξη**

Η απόδειξη για τα πορίσματα 2 και 3 είναι προφανής. Για το Πόρισμα 1 έχουμε:

Αν το πολυώνυμο $f(x) = a_n x^n + .... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,$ με πραγματικούς συντελεστές, έχει ρίζα πολλαπλότητας $k \leq n$ τον μιγαδικό αριθμό $\rho = a + bi, b \neq 0,$ τότε θα ισχύει ότι θα έχει ρίζα και το συζυγή του $a - bi,$ οπότε θα έχουμε (αφού ο $\rho$ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k$ του $f(x)$) :

$$f(x) = (x-\rho)(x-\overline{\rho})g_1(x) \text{ με } g_1(\rho) = 0.$$

Στη συνέχεια με το ίδιο σκεπτικό προκύπτουν:

$$g_1(x) = (x-\rho)(x-\overline{\rho})g_2(x) \text{ με } g_2(\rho) = 0$$

$$g_2(x) = (x-\rho)(x-\overline{\rho})g_3(x) \text{ με } g_3(\rho) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_{k-1}(x)=(x-\rho)(x-\bar{\rho})g_k(x) \text{ με } g_k(\rho)=0$$

$$g_k(x)=(x-\rho)(x-\bar{\rho})g_{k+1}(x) \text{ με } g_{k+1}(\rho)\neq 0.$$

Επιπλέον ισχύει ότι $g_{k+1}(\bar{\rho})\neq 0$, αφού, αν ήταν $g_{k+1}(\bar{\rho})=0$, τότε το πολυώνυμο $g_{k+1}(x)$ θα είχε ως ρίζα και το συζυγή του $\bar{\rho}$, δηλαδή το $\rho$, οπότε θα ίσχυε $g_{k+1}(\rho)=0$, άτοπο. □

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε πολυώνυμα με **ρητούς συντελεστές**. Έχουμε σχετικά.

**Θεώρημα 7.** *Αν το πολυώνυμο*

$$f(x)=a_nx^n+\ldots.+a_1x+a_0,\, a_i\in\mathbb{Q}, i=0,1,2,\ldots,n, a_n\neq 0,$$

*με **ρητούς συντελεστές**, δηλαδή* $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, *έχει ρίζα τον άρρητο αριθμό* $x=a+\sqrt{b}, b>0,$ *και* $\sqrt{b}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, *τότε έχει ρίζα και τον συζυγή του* $a-\sqrt{b}$.

**Απόδειξη**

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της αλγοριθμικής διαίρεσης για το πολυώνυμο $f(x)$ με το πολυώνυμο $\varphi(x)=\left(x-a-\sqrt{b}\right)\left(x-a+\sqrt{b}\right)=(x-a)^2-b$, οπότε έχουμε

$$f(x)=\varphi(x)\pi(x)+\gamma x+\delta, \qquad (1)$$

όπου $\pi(x), \gamma x+\delta\in\mathbb{Q}[x]$. Για $x=a+\sqrt{b}$ η σχέση (1) δίνει:

$$f\left(a+\sqrt{b}\right)=\gamma\left(a+\sqrt{b}\right)+\delta=0\Rightarrow(\gamma a+\delta)+\gamma\sqrt{b}=0$$

$$\Rightarrow \gamma a+\delta=0 \text{ και } \gamma=0\Rightarrow\gamma=\delta=0,$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$f(x)=\varphi(x)\pi(x)=\left(x-a-\sqrt{b}\right)\left(x-a+\sqrt{b}\right)\pi(x). \qquad (2)$$

Από τη (2) προκύπτει ότι και ο αριθμός $a-\sqrt{b}$ είναι ρίζα του $f(x)$. □

**Σημείωση**

Αξίζει να σημειωθεί ότι και στο θεώρημα 6 μπορεί να δοθεί ανάλογη απόδειξη με την απόδειξη του παρόντος θεωρήματος 7.

Επίσης, και στην περίπτωση αυτή ισχύουν ανάλογα πορίσματα, όπως στην περίπτωση πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές.

**Πόρισμα 1.** *Αν το πολυώνυμο*

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{Q}, i = 0,1,2,\dots,n, a_n \neq 0,$$

*με **ρητούς συντελεστές**, έχει ρίζα πολλαπλότητας* $k \leq n$ *τον **ρητό αριθμό*** $z = a + \sqrt{b}, b > 0,$ *και* $\sqrt{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, *τότε έχει ρίζα πολλαπλότητας* $k$ *και τον συζυγή μιγαδικό* $z = a - \sqrt{b}$.

**Πόρισμα 2.** *Το **πλήθος των άρρητων ριζών** του πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές είναι **άρτιος** αριθμός.*

**Πόρισμα 3.** *Κάθε πολυώνυμο **περιττού βαθμού** με ρητούς συντελεστές έχει μία τουλάχιστον ρητή ρίζα.*

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ανάγωγα πολυώνυμα, αλλά και με πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές.

**Ορισμός 4.** *Ένα πολυώνυμο* $f(x) \in \mathrm{K}[x]$ *λέγεται **ανάγωγο**, αν δεν υπάρχουν πολυώνυμα* $g(x)$ *και* $h(x)$, *βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με 1, τέτοια ώστε να ισχύει* $f(x) = g(x)h(x)$.

**Ορισμός 5.** *Αν κάθε πολυωνυμική εξίσωση* $f(x) = 0$, *όπου* $f(x) \in \mathrm{K}[x]$, *με* $\deg f(x) \geq 1$ *έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο σώμα* $\mathrm{K}$, *τότε το σώμα* $\mathrm{K}$ *λέγεται **αλγεβρικά κλειστό**.*

Το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι **αλγεβρικά κλειστό**, ενώ το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αλγεβρικά κλειστό, αφού, για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 8.** *Έστω* $\mathrm{K}$ *ένα σώμα* ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{Q}$). *Τότε στο δακτύλιο* $\mathrm{K}[x]$ *ισχύουν:*

**(α)** *τα γραμμικά πολυώνυμα* $ax + b$, $a \neq 0$ *είναι ανάγωγα.*

**(β)** *τα γραμμικά πολυώνυμα* $ax+b,\ a \neq 0$ *είναι* ***τα μοναδικά ανάγωγα*** *στο* $\mathrm{K}[x]$, *αν, και μόνον αν, κάθε εξίσωση θετικού βαθμού με συντελεστές στο σώμα* $\mathrm{K}$*, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο* $\mathrm{K}$*, δηλαδή, αν το K είναι* ***αλγεβρικά κλειστό****.*

**Απόδειξη**

**(α)** Αν ίσχυε ότι $ax+b = g(x)h(x), a \neq 0, \deg g(x) \geq 1, \deg h(x) \geq 1,$ τότε το δεύτερο μέλος θα είχε βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2, ενώ το πρώτο μέλος έχει βαθμό 1, άτοπο. Άρα το $ax+b,\ a \neq 0$ είναι ανάγωγο.

**(β)** Ας υποθέσουμε ότι κάθε ανάγωγο πολυώνυμο στο $\mathrm{K}[x]$ είναι γραμμικό. Επομένως κάθε πολυώνυμο $f(x) \in \mathrm{K}[x]$ έχει έναν τουλάχιστον γραμμικό παράγοντα της μορφής $ax+b,\ a \neq 0$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον τη ρίζα $x = -\dfrac{b}{a}$, δηλαδή το K είναι αλγεβρικά κλειστό.

**Αντίστροφα**, έστω ότι κάθε εξίσωση θετικού βαθμού με συντελεστές στο σώμα $\mathrm{K}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathrm{K}$. Έστω $p(x)$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο και $\rho \in \mathrm{K}$ μία ρίζα του. Τότε από το θεώρημα αλγοριθμικής διαίρεσης θα ισχύει ότι

$$p(x) = (x-\rho)q(x), \text{ όπου } q(x) \in \mathrm{K}[x].$$

Επειδή το πολυώνυμο $p(x)$ είναι ανάγωγο, πρέπει $q(x) = c \in \mathrm{K},\ c \neq 0$, (σταθερό πολυώνυμο), οπότε $p(x) = (x-\rho)c = cx - c\rho,$ ανάγωγο. □

**Παρατηρήσεις**

- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει για το $\mathbb{C}$ (αλγεβρικά κλειστό σώμα), όπου κάθε πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων .
- Στην περίπτωση παραγοντοποίησης πολυωνύμων του $\mathbb{R}[x]$ έχουμε, σύμφωνα με το θεώρημα 5, παράγοντες γραμμικούς της μορφής $x-\rho$ και τετραγωνικούς της μορφής $x^2+bx+c$ με $b^2-4c<0$.
- Για πολυώνυμα του $\mathbb{Q}[x]$ η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική. Υπάρχουν ανάγωγα πολυώνυμα όλων των βαθμών, αλλά και για ένα δεδομένο πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές δεν είναι πάντοτε εύκολο να βρεθούν οι παράγοντές του. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Με πολλαπλασιασμό του $f(x)$ επί το ΕΚΠ, έστω $\lambda$, των παρανομαστών των συντελεστών

του λαμβάνουμε ένα πολυώνυμο $\lambda f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, δηλαδή με ακέραιους συντελεστές. Είναι εύκολο να δούμε ότι δεν χάνουμε κάτι, αν ασχοληθούμε μόνο με πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές. Αυτό προκύπτει από το λήμμα του Gauss που ακολουθεί. Θυμίζουμε ότι ένα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ λέγεται **πρωτεύον** (primitive), αν οι συντελεστές του έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το γινόμενο δύο πρωτευόντων πολυωνύμων $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ και $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ είναι επίσης πρωτεύον πολυώνυμο. Ισοδύναμα έχουμε το θεώρημα που ακολουθεί.

**Λήμμα του Gauss.** Αν ένα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ παραγοντοποιείται πάνω στο $\mathbb{Q}$, τότε αυτό παραγοντοποιείται και πάνω στο $\mathbb{Z}$.

**Απόδειξη**

Έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_n x^n + .... + a_1 x + a_0 = g(x)h(x) \in \mathbb{Z}[x], a_n \neq 0$, όπου τα πολυώνυμα $g(x)$ και $h(x)$ έχουν ρητούς συντελεστές και είναι μη σταθερά πολυώνυμα. Αν $b$ και $c$ είναι τα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των συντελεστών των $g(x)$ και $h(x)$, αντίστοιχα, τότε τα πολυώνυμα $bg(x)$ και $ch(x)$ έχουν ακέραιους συντελεστές και από την ισότητα $bcf(x) = bg(x) \cdot ch(x)$ προκύπτει μία παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $bcf(x)$ πάνω στο $\mathbb{Z}$. Με βάση αυτή την παραγοντοποίηση θα κατασκευάσουμε μία παραγοντοποίηση του $f(x)$ πάνω στο $\mathbb{Z}$.

Υποθέτουμε ότι $bg(x) = b_k x^k + ... + b_1 x + b_0$ και $ch(x) = c_m x^m + ... + c_1 x + c_0$. Αν $p$ είναι τυχόν πρώτος διαιρέτης του $b$. Τότε όλοι οι συντελεστές του $f(x)$ διαιρούνται με το $p$. Έστω τώρα $i$ τέτοιο ώστε $p | b_0$, $p | b_1, ..., p | b_{i-1}$, ενώ $p \nmid b_i$. Τότε $b | a_i := b_0 c_i + ... + b_i c_0 \equiv b_i c_0 \pmod{p}$, οπότε προκύπτει ότι $p | c_0$. Επίσης έχουμε ότι $p | a_{i+1} := b_0 c_{i+1} + ... + b_i c_1 + b_{i+1} c_0 \equiv b_i c_1 \pmod{p}$, οπότε $p | c_1$. Με την ίδια διαδικασία αποδεικνύουμε ότι $p | c_j$, για κάθε $j$.

Επομένως, το πολυώνυμο $\dfrac{c}{p}h(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές, οπότε μέχρι τώρα έχουμε πετύχει μία παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $\dfrac{bc}{p}f(x)$ πάνω στο $\mathbb{Z}$. Συνεχίζοντας ομοίως με άλλες τιμές του πρώτου αριθμού $p$ καταλήγουμε σε μία παραγοντοποίηση του $f(x)$ πάνω στο $\mathbb{Z}$. □

**Θεώρημα 9.** *Αν το πολυώνυμο*

$$f(x)=a_n x^n+....+a_1x+a_0,\ a_i\in\mathbb{Z}, i=0,1,2,...,n, a_n\neq 0,$$

*με **ακέραιους συντελεστές**, δηλαδή $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, έχει ρίζα τον **ρητό αριθμό** $\dfrac{\kappa}{\lambda}\neq 0$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}^*, \lambda\in\mathbb{N}^*, (\kappa,\lambda)=1$, τότε $\kappa|a_0$ και $\lambda|a_n$.*

*Ειδικότερα, αν το πολυώνυμο $f(x)=a_nx^n+....+a_1x+a_0, a_i\in\mathbb{Z}, i=0,1,2,...,n,$ $a_n\neq 0$, με **ακέραιους συντελεστές** έχει ρίζα τον **ακέραιο** $\kappa$, τότε ο $\kappa$ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου.*

**Απόδειξη**

Έχουμε

$$f\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)=a_n\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{n-1}....+a_1\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)+a_0=0$$

$$\Leftrightarrow a_n\kappa^n+a_{n-1}\kappa^{n-1}\lambda+...+a_1\kappa\lambda^{n-1}+a_0=0.$$

$$\Leftrightarrow a_0=-\left(a_n\kappa^n+a_{n-1}\kappa^{n-1}\lambda+...+a_1\kappa\lambda^{n-1}\right)\equiv 0(\operatorname{mod}\kappa),$$

οπότε πράγματι ισχύει ότι ο $\kappa$ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου.

Ομοίως ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)=0\Leftrightarrow a_n\kappa^n+a_{n-1}\kappa^{n-1}\lambda+...+a_1\kappa\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n=0.$$

$$\Leftrightarrow a_n\kappa^n=-\left(a_{n-1}\kappa^n\lambda+...+a_1\kappa\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n\right)$$

$$\Rightarrow \lambda|a_n\kappa^n\Rightarrow\lambda|a_n, \text{ αφού } (\kappa,\lambda)=1.$$

Ειδικότερα, αν $\lambda=1$, τότε προκύπτει πάλι ως αναγκαία συνθήκη (αλλά όχι ικανή) ότι $\kappa$ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του πολυωνύμου $f(x)$. □

Με το προηγούμενο θεώρημα είναι δυνατόν σε κάποια βήματα να βρούμε όλες τις ρητές ρίζες ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Όμως έχουμε και την περίπτωση του πολυωνύμου $x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$ το οποίο είναι μη ανάγωγο χωρίς να έχει γραμμικούς παράγοντες. Γενικά δεν υπάρχει απλή αναγκαία και ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει ότι ένα πολυώνυμο του $\mathbb{Q}[x]$ ότι είναι ανάγωγο. Με τη μέθοδο των δοκιμών μπορούμε να βρούμε κάποιους παράγοντες, όμως αυτό δεν οδηγεί στην εύρεση πιθανών μη τετριμμένων παραγόντων. Στην κατάσταση αυτή χρήσιμο είναι το θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 10. (Κριτήριο του Eisenstein)**
*Έστω* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$.
*Αν υπάρχει πρώτος ακέραιος $p$ τέτοιος ώστε:*
*(i)* (i) $p\nmid a_n$, (ii) $p\mid a_i$, για κάθε $i=0,1,2,...,n-1$ *και* (iii) $p^2\nmid a_0$,
*τότε το πολυώνυμο $f(x)$ είναι ανάγωγο πάνω στο $\mathbb{Q}$.*

**Απόδειξη**
Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ δεν είναι ανάγωγο πάνω στο $\mathbb{Q}$, άρα και πάνω στο $\mathbb{Z}$. Έστω ότι $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0=g(x)h(x)$, όπου $g(x)$ και $h(x)$ πολυώνυμα θετικού βαθμού με ακέραιους συντελεστές, έστω

$$g(x)=b_rx^r+...+b_1x+b_0, h(x)=c_sx^s+...+c_1x+c_0,\ r+s=n=\deg f(x),\ r,s>0.$$

Από την ισότητα $f(x)=g(x)h(x)$ προκύπτουν οι ισότητες:

$$a_0=b_0c_0,\ a_n=b_rc_s \text{ και } a_i=b_ic_0+b_{i-1}c_1+...+b_0c_i.$$

Επειδή ο πρώτος $p$ είναι διαιρέτης του $a_0$, ενώ ο $p^2$ δεν διαιρεί το $a_0$, από την ισότητα $a_0=b_0c_0$ έπεται ότι μόνον ένας από τους $b_0,c_0$ διαιρείται με τον $p$, έστω

$$p\mid b_0 \text{ και } p\nmid c_0.$$

Επιπλέον, από την ισότητα $a_n=b_rc_s$ και την υπόθεση ότι $p\nmid a_n$, έπεται ότι $p\nmid b_r$ και $p\nmid c_s$. Επομένως ο σταθερός όρος του $g(x)$ διαιρείται με τον $p$ και δεν διαιρείται με τον $p$ ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του. Υποθέτουμε ότι $b_i$ είναι συντελεστής που δεν διαιρείται με τον $p$ με το μικρότερο δυνατό δείκτη $i$, οπότε $i>0$. Τότε από την ισότητα $a_i=b_ic_0+b_{i-1}c_1+...+b_0c_i$ με αναγωγή modulo $p$, διαπιστώνουμε ότι $b_ic_0\equiv 0(\bmod p)$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $p\nmid b_i$ και $p\nmid c_0$.

**Παράδειγμα 1.** Το πολυώνυμο $f(x)=x^3-4$ είναι ανάγωγο πάνω στο $\mathbb{Q}$, αφού για $x=y+1$ έχουμε $f(y)=(y+1)^3-4=y^3+3y^2+3y-3$, το οποίο, σύμφωνα με το κριτήριο του Eisenstein είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}$, όπως φαίνεται για $p=3$.

**Παράδειγμα 2.** Αν $p$ πρώτος, τότε το πολυώνυμο $f(x)=1+x+...+x^{p-1}$ είναι ανάγωγο πάνω στο $\mathbb{Q}$. Πράγματι, αρκεί να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο

$$f(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{x}=x^{p-1}+\binom{p}{p-1}x^{p-2}+...+\binom{p}{2}x+p$$

είναι ανάγωγο. Αυτό ισχύει γιατί για τον πρώτο ακέραιο $p$ και το πολυώνυμο $f(x+1)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Eisenstein.

## Μέγιστος κοινός διαιρέτης πολυωνύμων

Θεωρούμε ένα υποσύνολο $\Sigma=\{f_1(x), f_2(x),..., f_m(x)\}$ του $\mathrm{K}[x]$ που περιέχει και μη μηδενικά πολυώνυμα. Το πολυώνυμο $\delta(x)$ λέγεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των πολυωνύμων του συνόλου $\Sigma$, αν ισχύουν:

**(i)** ***το $\delta(x)$ διαιρεί όλα τα πολυώνυμα του συνόλου $\Sigma$ και***

**(ii)** ***το $\delta(x)$ διαιρείται από κάθε πολυώνυμο, που επίσης διαιρεί όλα τα πολυώνυμα του συνόλου $\Sigma$.***

**(iii)** ***ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $\delta(x)$ ισούται με 1***.

**Παρατήρηση.** *Η απαίτηση **(iii)** στον προηγούμενο ορισμό τίθεται με σκοπό να προσδιορίζεται ο μέγιστος κοινός διαιρέτης πολυωνύμων μονοσήμαντα. Αυτό γιατί, αν $\delta(x)$ είναι ένα πολυώνυμο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις (i) και (ii), τότε τις ικανοποιεί και το πολυώνυμο $c\delta(x)$, $c\in\mathrm{K}$.*

Για την εύρεση του ΜΚΔ πολυωνύμων σημαντικό ρόλο παίζει το επόμενο θεώρημα που οδηγεί στον Ευκλείδειο αλγόριθμο πολυωνύμων.

**Θεώρημα 11. Αν** $\upsilon_1(x)$ και $\upsilon_2(x)$ **είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολυωνύμων** $f_1(x)$ και $f_2(x)$**, αντίστοιχα, με διαιρέτη το πολυώνυμο** $\delta(x)\neq 0$**, τότε ισχύει η ισοδυναμία:**

$$\delta(x)\big|f_1(x)-f_2(x)\Leftrightarrow \upsilon_1(x)=\upsilon_2(x)$$

**Απόδειξη**

Ας υποθέσουμε ότι:

$f_1(x)=q_1(x)\delta(x)+\upsilon_1(x)$ και $f_2(x)=q_2(x)\delta(x)+\upsilon_2(x)$ με

$\deg\upsilon_1(x)<\deg\delta(x)$ ή $\upsilon_1(x)=0,$ $\deg\upsilon_2(x)<\deg\delta(x)$ ή $\upsilon_2(x)=0.$

Έστω ότι $\delta(x)\big|f_1(x)-f_2(x)$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f_1(x)-f_2(x)$ με το $\delta(x)$ είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο. Όμως από την ισότητα $f_1(x)-f_2(x)=\big(q_1(x)-q_2(x)\big)\delta(x)+\upsilon_1(x)-\upsilon_2(x)$, λόγω της μοναδικότητας του υπολοίπου και του ότι είναι

$$\deg\left[\upsilon_1(x)-\upsilon_2(x)\right]\leq\max\left\{\deg\upsilon_1(x),\deg\upsilon_2(x)\right\}<\deg\delta(x)$$

έπεται ότι $\upsilon_1(x)-\upsilon_2(x)=0\Leftrightarrow\upsilon_1(x)=\upsilon_2(x)$.

Αντίστροφα, έστω $\upsilon_1(x)=\upsilon_2(x)$. Τότε

$$f_1(x)-f_2(x)=\big(q_1(x)-q_2(x)\big)\delta(x)\Rightarrow\delta(x)\big|f_1(x)-f_2(x).$$ □

**Πόρισμα. Σε κάθε αλγοριθμική διαίρεση** $f(x)=q(x)\delta(x)+\upsilon(x)$ **τα πολυώνυμα** $f(x)$ **και** $\upsilon(x)$ **διαιρούμενα με το διαιρέτη** $\delta(x)$ **δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.**

**Ευκλείδειος αλγόριθμος**

Για την εύρεση του ΜΚΔ δύο πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x)$ εφαρμόζουμε το θεώρημα αλγοριθμικής διαίρεσης για τα πολυώνυμα αυτά και στη συνέχεια διαδοχικά για το ζευγάρι του διαιρέτη και του υπολοίπου κάθε διαίρεσης μέχρι να προκύψει μηδενικό υπόλοιπο. Έστω ότι έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& f(x)=q_1(x)g(x)+\upsilon_1(x),\ \deg\upsilon_1(x)<\deg g(x)\\
& g(x)=q_2(x)\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x),\ \deg\upsilon_2(x)<\deg\upsilon_1(x)\\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
& \upsilon_{k-1}(x)=q_{k+1}(x)\upsilon_k(x)+\upsilon_{k+1}(x),\ \deg\upsilon_{k+1}(x)<\deg\upsilon_k(x)\\
& \upsilon_k(x)=q_2(x)\upsilon_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

Τότε ισχύει ότι: ΜΚΔ ( $f(x)$, $g(x)$) = $\upsilon_{k+1}(x)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι βασικό σχετικά με το μέγιστο κοινό διαιρέτη ενός συνόλου πολυωνύμων.

**Θεώρημα 12. Αν είναι** $\Sigma=\{f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x)\}\subseteq K[x]$**, με όχι όλα τα στοιχεία του μηδενικά, τότε υπάρχει ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων του συνόλου** $\Sigma$ **και γράφεται στη μορφή**

$$\delta(x)=g_1(x)f_1(x)+g_2(x)f_2(x)+\dots+g_m(x)f_m(x),$$

**όπου** $g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x)\in K[x]$**.**

Τα πολυώνυμα $f(x),g(x)\in K[x]$ λέγονται **πρώτα μεταξύ τους** ή **σχετικώς πρώτα (relatively prime),** αν οι μοναδικοί κοινοί διαιρέτες τους είναι οι διαιρέτες του 1. Σύμφωνα με το θεώρημα 12 θα ισχύει

$$\sigma(x)f(x)+\tau(x)g(x)=1,\ \text{όπου}\ \sigma(x),\tau(x)\in K[x].$$

## Βασικές εφαρμογές

**Εφαρμογή 1.** Αν το πολυώνυμο $f(x)$ είναι πρώτο προς καθένα από τα πολυώνυμα $g_1(x)$ και $g_2(x)$, τότε είναι πρώτο και προς το γινόμενο τους .

**Απόδειξη.** Αφού $(f(x),g_1(x))=1$, από το θεώρημα 12 έπεται ότι υπάρχουν πολυώνυμα $a(x)$ και $b(x)$ τέτοια ώστε:

$$f(x)a(x)+g_1(x)b(x)=1\ . \qquad (1)$$

Από την (1) προκύπτει η ισότητα

$$f(x)\left[a(x)g_2(x)\right]+\left[g_1(x)g_2(x)\right]b(x)=g_2(x). \qquad (2)$$

Αν υπήρχε μη σταθερό πολυώνυμο $\delta(x)$ που είναι διαιρέτης των πολυωνύμων $f(x)$ και $g_1(x)g_2(x)$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $\delta(x)|g_2(x)$. Επομένως $\delta(x)|(f(x),g_2(x))=1$, με $\deg\delta(x)\geq 1$, άτοπο.

**Εφαρμογή 2.** Αν το πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεί το γινόμενο $g(x)h(x)$ και είναι πρώτο προς το πολυώνυμο $g(x)$, τότε το $f(x)$ διαιρεί το πολυώνυμο $h(x)$.
**Απόδειξη.** Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω $h(x)=0$. Τότε $f(x)|h(x)$.
- Έστω $h(x)\neq 0$. Τότε, αφού $(f(x),g(x))=1$, θα υπάρχουν πολυώνυμα $a(x)$ και $b(x)$ τέτοια ώστε $f(x)a(x)+g(x)b(x)=1$, από την οποία έπεται ότι: $f(x)\left[a(x)h(x)\right]+\left[g(x)h(x)\right]b(x)=h(x)$. Επειδή το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας διαιρείται με το πολυώνυμο $f(x)$, έπεται ότι $f(x)|h(x)$.

**Εφαρμογή 3.** Αν τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ είναι πρώτα μεταξύ τους και καθένα τους διαιρεί το πολυώνυμο $h(x)$, τότε και το γινόμενό τους διαιρεί το πολυώνυμο $h(x)$.
**Απόδειξη.** Επειδή $f(x)|h(x)$, υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο ώστε $h(x)=f(x)\pi(x)$. Όμως $g(x)|h(x)$, οπότε $g(x)|f(x)\pi(x)$. Επειδή $(f(x),g(x))=1$, από την τελευταία σχέση έπεται ότι $g(x)|\pi(x)$. Άρα υπάρχει πολυώνυμο $\sigma(x)$ τέτοιο ώστε $\pi(x)=g(x)\sigma(x)$. Επομένως έχουμε:

$$h(x)=f(x)g(x)\sigma(x),$$

οπότε $f(x)g(x)|h(x)$.

## Συμπληρώματα στη διαιρετότητα πολυωνύμων

Με βάση το θεώρημα 11 μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το θεώρημα που ακολουθεί.

**Θεώρημα 12.** *Έστω* $\upsilon_1(x),\upsilon_2(x),...,\upsilon_n(x)$ *τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολυωνύμων* $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$, *αντίστοιχα, με διαιρέτη το* $\delta(x)$. *Τότε:*

**(α)** *Το υπόλοιπο της διαίρεσης* $\left[f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\right]:\delta(x)$ *ισούται με*

$$\upsilon(x)=\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+...+\upsilon_n(x).$$

**(β)** *Το υπόλοιπο της διαίρεσης* $\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x)\right]:\delta(x)$ *ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης* $\left[\upsilon_1(x)\upsilon_2(x)\cdot...\cdot\upsilon_n(x)\right]:\delta(x)$.

**(γ)** *Οι διαιρέσεις* $\left[f_i(x)\right]^k:\delta(x)$ και $\left[\upsilon_i(x)\right]^k:\delta(x)$, $\kappa=1,2,...,n$ *δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.*

**Απόδειξη**

**(α)** Από τις υποθέσεις έχουμε:

$$f_i(x)=\delta(x)p_i(x)+\upsilon_i(x),\ i=1,2,...,n, \tag{1}$$

με $\deg\upsilon_i(x)<\deg\delta(x)$ ή $\upsilon_i(x)=0$.

Από τις σχέσεις (1) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)=\delta(x)\left[p_1(x)+p_2(x)+...+p_n(x)\right]+\left[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+...+\upsilon_n(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)=\delta(x)p(x)+\upsilon(x),$$

όπου $\upsilon(x)=\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+...+\upsilon_n(x)$, $p(x)=p_1(x)+p_2(x)+...+p_n(x)$ και

$$\deg\upsilon(x)=\deg\left[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+...+\upsilon_n(x)\right]<\deg\delta(x),$$

οπότε ισχύει το ζητούμενο.

**(β)** Ομοίως από τις σχέσεις (1) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$f_1(x)f_2(x)...f_n(x)=\delta(x)\Pi(x)+\upsilon_1(x)\upsilon_2(x)...\upsilon_n(x),$$

όπου το πολυώνυμο $\delta(x)\Pi(x)$ περιλαμβάνει όλους τους που προκύπτουν από το γινόμενο των (1) κατά μέλη εκτός του όρου $\upsilon_1(x)\upsilon_2(x)\cdot...\cdot\upsilon_n(x)$. Επομένως

$$f_1(x)f_2(x)...f_n(x)-\upsilon_1(x)\upsilon_2(x)...\upsilon_n(x)=\delta(x)\Pi(x),$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 11, ισχύει το ζητούμενο.

**(γ)** Προκύπτει από το ερώτημα (β) αν θεωρήσουμε όλα τα πολυώνυμα $f_i(x)$, $i=1,2,...,n$ ίσα με κάποιο από αυτά. □

**Παράδειγμα**

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^{4k+3}+x^{4l+2}+x^{4m+1}+x^{4n}$, όπου $k,l,m,n$ μη αρνητικοί ακέραιοι, διαιρείται από το πολυώνυμο $g(x)=x^3+x^2+x+1$.

**Λύση**

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του $x^4$ με το πολυώνυμο $g(x)=x^3+x^2+x+1$ είναι 1, έπεται, σύμφωνα με το θεώρημα 12.(γ), ότι οι διαιρέσεις $\left(x^4\right)^k : g(x)$ και $1^k : g(x)$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο. Επομένως και οι διαιρέσεις $\left(x^4\right)^k x^3 : g(x)$ και $1^k \cdot x^3 : g(x)$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, έστω $\upsilon_1(x)$. Σκεπτόμενοι ομοίως συμπεραίνουμε ότι και οι διαιρέσεις $\left(x^4\right)^l x^2 : g(x)$ και $1^l \cdot x^2 : g(x)$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, έστω $\upsilon_2(x)$, και ότι το ίδιο ισχύει για τις διαιρέσεις $\left(x^4\right)^m x : g(x)$ και $1^m \cdot x : g(x)$ με ίδιο υπόλοιπο $\upsilon_3(x)$, αλλά και για τις $\left(x^4\right)^n : g(x)$ και $1^n \cdot : g(x)$ με ίδιο υπόλοιπο $\upsilon_4(x)$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 12 (α), οι διαιρέσεις

$$f(x)=x^{4k+3}+x^{4l+2}+x^{4m+1}+x^{4n}=\left[\left(x^4\right)^k \cdot x^3+\left(x^4\right)^l \cdot x^2+\left(x^4\right)^m \cdot x+\left(x^4\right)^n\right] : g(x)$$

και $\left(1^k \cdot x^3+1^l \cdot x^2+1^m \cdot x+1^n\right)=\left(x^3+x^2+x+1\right)=g(x):g(x)$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο $\upsilon(x)=\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\upsilon_3(x)+\upsilon_4(x)$.

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $g(x):g(x)$ ισούται με 0, τόσο θα είναι και το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x)=x^{4k+3}+x^{4l+2}+x^{4m+1}+x^{4n} : g(x) \Rightarrow g(x) \mid f(x)$.

**Θεώρημα 13.** *Θεωρούμε πολυώνυμο* $f(x)\in \mathrm{K}[x]$, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ *και έστω* $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots,f_{n-1}(x)$ *τα πηλίκα των διαιρέσεων*

$$f(x):(x-a),\ f_1(x):(x-a),\ldots,f_{n-2}(x):(x-a),$$

*αντίστοιχα. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:*

$$(x-a)^n \mid f(x) \Leftrightarrow f(a)=0,\ f_1(a)=0,\ldots,f_{n-2}(a)=0.$$

**Απόδειξη**

**Ευθύ.** Έστω ότι $(x-a)^n \mid f(x)$. Τότε θα υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε

$$f(x)=(x-a)^n\, p(x).$$

Τότε έχουμε

$$f(x)=(x-a)^n\, p(x)=(x-a)\left[(x-a)^{n-1}\, p(x)\right]\Rightarrow f_1(x)=(x-a)^{n-1}\, p(x)$$

$$f_1(x)=(x-a)^{n-1}\, p(x)=(x-a)\left[(x-a)^{n-2}\, p(x)\right]\Rightarrow f_2(x)=(x-a)^{n-2}\, p(x)$$

..........................................................................................................................

$$f_{n-2}(x)=(x-a)^2\, p(x)=(x-a)\left[(x-a)\, p(x)\right]\Rightarrow f_{n-1}(x)=(x-a)\, p(x),$$

οπότε άμεσα προκύπτει ότι: $f(a)=0,\ f_1(a)=0,\dots,f_{n-2}(a)=0$.

**Αντίστροφα,** έστω ότι $f(a)=0,\ f_1(a)=0,\dots,f_{n-2}(a)=0$. Τότε έχουμε

$$f(x)=(x-a)\, f_1(x)$$

$$f_1(x)=(x-a)\, f_2(x)$$

.................................

$$f_{n-1}(x)=(x-a)\, f_n(x)$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει ότι: $f(x)=(x-a)^n\, f_n(x)$.

δηλαδή $(x-a)^n \,|\, f(x)$. □

**Παράδειγμα**

Αν είναι $n\ge 1$, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα

$$f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1 \text{ και } g(x)=x^n-nx+n-1$$

διαιρούνται με το πολυώνυμο $\delta(x)=(x-1)^2$.

**Λύση**

Επειδή είναι $f(1)=n-(n+1)+1=0$, έπεται ότι $(x-1)\,|\,f(x)$. Επειδή

$$f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1=nx^n(x-1)-\left(x^n-1\right)$$

$$=(x-1)\left(nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\dots-x-1\right),$$

έπεται ότι $f(x)=(x-1)\, f_1(x)$, όπου $f_1(x)=nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\dots-x-1$.

Όμως ισχύει $f_1(1)=n-(1^{n-1}+1^{n-2}+\dots+1+1)=0$, οπότε:

$$(x-1)\,|\,f_1(x) \text{ και } \delta(x)=(x-1)^2\,|\,f(x).$$

Ομοίως ισχύει $g(1)=0$ και
$g(x)=x^n-nx+n-1=(x^n-1)-n(x-1)=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1-n)$,
οπότε έχουμε πηλίκο $g_1(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1-n$ και $g_1(1)=0$.

## Υπόλοιπο διαίρεσης πολυωνύμου $f(x)$ με το $x^n-a,\ n\geq 1$

Θεωρούμε πολυώνυμο $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0\in \mathrm{K}[x],\ \mathrm{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, βαθμού $k$. Αν $1\leq n\leq k$ φυσικός αριθμός, τότε το πολυώνυμο $f(x)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x)=x^{n-1}f_{n-1}(x^n)+x^{n-2}f_{n-2}(x^n)+...+xf_1(x^n)+f_0(x^n),$$

όπου $f_i(x^n), i=0,1,...,n-1$ πολυώνυμα μεταβλητής $x^n$. Η παραπάνω γραφή προκύπτει εύκολα, αν χωρίσουμε τους όρους του πολυωνύμου $f(x)$ ως προς το βαθμό τους modulo $n$. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο

$$f(x)=x^5-3x^4+2x^3+x^2-5x+6,$$

για $n=3$, γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x)&=x^5+3x^4+2x^3+x^2-5x+6=(2x^3+6)+(3x^4-5x)+(x^5+x^2)\\ &=x^2(x^3+1)+x(3x^3-5)+(2x^3+6)=x^2f_2(x^3)+xf_1(x^3)+f_0(x^3). \end{aligned}$$

**Θεώρημα 14.** *Έστω το πολυώνυμο*

$$f(x)=x^{n-1}f_{n-1}(x^n)+x^{n-2}f_{n-2}(x^n)+...+xf_1(x^n)+f_0(x^n).$$

*Τότε ισχύουν:*

**(α)** *το υπόλοιπο της διαίρεσης του* $f(x)$ *με το* $x^n-a$ *ισούται με*

$$\upsilon(x)=x^{n-1}f_{n-1}(a)+x^{n-2}f_{n-2}(a)+...+xf_1(a)+f_0(a).$$

**(β)** $(x^n-a)\,|\,f(x)\Leftrightarrow f_{n-1}(a)=f_{n-2}(a)=...=f_1(a)=f_0(a)=0$.

**Απόδειξη**

**(α)** Σύμφωνα με το θεώρημα 12 (α), το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x):(x^n-a)$ θα ισούται με $\upsilon(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\upsilon_i(x)$, όπου $\upsilon_i(x)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $x^if_i(x^n):(x^n-a), i=1,2,...,n-1$. Όμως το υπόλοιπο της διαίρεσης

$f_i\left(x^n\right):\left(x^n-a\right)$, $i=1,2,...,n-1$ ισούται με $f_i\left(a\right)$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης $x^i:\left(x^n-a\right)$, $i=1,2,...,n-1$ ισούται με $x^i$. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα 12 (β) τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $x^i f_i\left(x^n\right):\left(x^n-a\right), i=1,2,...,n-1$ και $x^i f_i\left(a\right):\left(x^n-a\right), i=1,2,...,n-1$ είναι τα ίδια, δηλαδή $x^i f_i\left(a\right)$, $i=1,2,...,n-1$, αφού $\deg x^i f_i\left(a\right)<\deg\left(x^n-a\right)$. Άρα έχουμε

$$\upsilon\left(x\right)=x^{n-1}f_{n-1}\left(a\right)+x^{n-2}f_{n-2}\left(a\right)+...+xf_1\left(a\right)+f_0\left(a\right).$$

□

**(β)** Είναι απλή συνέπεια του ερωτήματος (α).

**Παράδειγμα.**
Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$f\left(x\right)=x^5-3x^4+2x^3+x^2-5x+6$$

με το πολυώνυμο $g\left(x\right)=x^3-1$.

**Λύση.** Το πολυώνυμο $f\left(x\right)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} f\left(x\right)&=x^5+3x^4+2x^3+x^2-5x+6=\left(2x^3+6\right)+\left(3x^4-5x\right)+\left(x^5+x^2\right)\\ &=x^2\left(x^3+1\right)+x\left(3x^3-5\right)+\left(2x^3+6\right)=x^2f_2\left(x^3\right)+xf_1\left(x^3\right)+f_0\left(x^3\right), \end{aligned}$$

οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα 14 (α), θα είναι:

$$\upsilon\left(x\right)=x^2f_2\left(1\right)+xf_1\left(1\right)+f_0\left(1\right)=2x^2-2x+8\,.$$

**Συμπληρώματα για την πολλαπλότητα των ριζών**

Από την Ανάλυση γνωρίζουμε ότι σε μια πολλαπλή ρίζα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης και η παράγωγός της μηδενίζεται. Έτσι και στην Άλγεβρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παραγώγους για τη μελέτη των πολλαπλών ριζών ενός πολυωνύμου. Πρέπει όμως να τις ορίσουμε φορμαλιστικά. Έτσι δοθέντος ενός πολυωνύμου

$$f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0\in\mathrm{K}\left[x\right],\mathrm{K}=\mathbb{R}\text{ ή }\mathbb{C}, \qquad (1)$$

ορίζουμε ως παράγωγο του το πολυώνυμο

$$Df\left(x\right)\text{ ή }f'\left(x\right)=na_nx^{n-1}+\left(n-1\right)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1 \qquad (2).$$

Εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$D:\mathrm{K}\left[x\right]\to\mathrm{K}\left[x\right],\ f\left(x\right)\to Df\left(x\right)=f'\left(x\right)$$

ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $D\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=Df\left(x\right)+Dg\left(x\right)$

2. $D\left(\lambda f\left(x\right)\right)=\lambda Df\left(x\right),\ \lambda\in \mathrm{K}$
3. $D\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=Df\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)Dg\left(x\right)$
4. $D\left(x\right)=1$

Αντίστροφα, οι τέσσερις παραπάνω ιδιότητες προσδιορίζουν πλήρως το πολυώνυμο $Df\left(x\right)$, οπότε αποτελούν και ένα εναλλακτικό τρόπο ορισμού. Είναι εύκολο να αποδείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες1 έως 4, αυτή που ορίζεται από τη σχέση (2).
Όπως έχουμε ήδη δει, αν το πολυώνυμο

$$f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0\in\mathbb{C}\left[x\right],$$

έχει διαφορετικές ανά δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2,...,\rho_k\in\mathbb{C},\ k\le n$, με πολλαπλότητα $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$, αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$$f\left(x\right)=a_n\left(x-\rho_1\right)^{\lambda_1}\left(x-\rho_2\right)^{\lambda_2}\cdots\left(x-\rho_k\right)^{\lambda_k}, \text{όπου } \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k=n.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών περιέχεται στο σώμα των μιγαδικών αριθμών που είναι αλγεβρικά κλειστό και εξασφαλίζει τον προσδιορισμό της παραπάνω παραγοντοποίησης του πολυωνύμου $f\left(x\right)$. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα θεώρημα με το οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε πολλαπλές ρίζες του πολυωνύμου $f\left(x\right)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ χωρίς να χρειαστεί να βγούμε έξω από το $\mathbb{R}$.

**Θεώρημα 15.** *Αν $f\left(x\right)\in\mathbb{R}\left[x\right]$, τότε ο αριθμός $\rho\in\mathbb{C}$ είναι διπλή ρίζα του $f\left(x\right)$, αν, και μόνον αν, ισχύει $f\left(\rho\right)=f'\left(\rho\right)=0$ και $f''\left(\rho\right)\neq 0$.*

**Απόδειξη**
Θυμίζουμε ότι, από τον ορισμό της πολλαπλότητας των ριζών πολυωνύμου, ο αριθμός $\rho\in\mathbb{C}$ είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου $f\left(x\right)$, δηλαδή έχει πολλαπλότητα ίση του 2, αν, και μόνον αν, ισχύει:

$$f\left(x\right)=\left(x-\rho\right)^2\varphi\left(x\right) \text{ και } \varphi\left(\rho\right)\neq 0. \qquad (1)$$

Έστω ότι ο $\rho$ είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου $f\left(x\right)$. Τότε ισχύει η (1) , οπότε θα είναι

$$f'\left(x\right)=2\left(x-\rho\right)\varphi\left(x\right)+\left(x-\rho\right)^2\varphi'\left(x\right)$$

$$f''\left(x\right)=2\varphi\left(x\right)+2\left(x-\rho\right)\varphi'\left(x\right)+2\left(x-\rho\right)\varphi'\left(x\right)+\left(x-\rho\right)^2\varphi''\left(x\right).$$

.

Άρα έχουμε $f(\rho)=f'(\rho)=0$ και $f''(\rho)=2\varphi(\rho)\neq 0$.

**Αντίστροφα**, έστω ότι ισχύουν: $f(\rho)=f'(\rho)=0$ και $f''(\rho)=2\varphi(\rho)\neq 0$.

Από το θεώρημα αλγοριθμικής διαίρεσης προκύπτει:

$$f(x)=(x-\rho)^2\varphi(x)+\upsilon(x), \text{ με } \upsilon(x)=\kappa x+\lambda . \qquad (1)$$

Από την (1) για $x=\rho$ λαμβάνουμε: $f(\rho)=\upsilon(\rho)=\kappa\rho+\lambda=0$.

Με παραγώγιση των δύο μελών της (1) λαμβάνουμε

$$f'(x)=2(x-\rho)\varphi(x)+(x-\rho)^2 p\varphi'(x)+\kappa , \qquad (2)$$

$$f''(x)=2\varphi(x)+2(x-\rho)\varphi'(x)+2(x-\rho)\varphi'(x)+(x-\rho)^2\varphi''(x) \quad (3)$$

οπότε για $x=\rho$ λαμβάνουμε $f'(\rho)=\kappa=0$ και $f''(\rho)=2\varphi(\rho)\neq 0$, οπότε και $\lambda=-\kappa f(\rho)=0,\ \varphi(\rho)\neq 0.$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$f(x)=(x-\rho)^2\varphi(x), \text{ με } \varphi(\rho)\neq 0 , \qquad (4)$$

οπότε ο $\rho$ είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου □

**Παρατήρηση**

Από το προηγούμενο θεώρημα, ενώ φαίνεται ότι για τον προσδιορισμό των τιμών $f(\rho)=0$ πρέπει να γνωρίζουμε τη ρίζα $\rho$, η γνώση του $\rho$ δεν είναι αναγκαία για να προσδιορίσουμε, αν τα πολυώνυμα $f(x)$ και $f'(x)$ έχουν κοινές ρίζες. Αυτό μπορεί να γίνει με την εύρεση του ΜΚΔ των δύο πολυωνύμων με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο.

Για την εύρεση της ακριβούς πολλαπλότητας των ριζών του πολυωνύμου $f(x)$ πρέπει να καταφύγουμε στον τύπο του Taylor, ο οποίος για πολυώνυμα αποδεικνύεται εύκολα, αφού δεν έχουμε να ασχοληθούμε με το υπόλοιπο.

**Θεώρημα 16. (Θεώρημα Taylor για πολυώνυμα)**

*Αν* $f(x)\in \mathrm{K}[x],\ \mathrm{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}, \deg f(x)=n$, *και* $\rho\in\mathrm{K}$, *τότε έχουμε:*

$$f(x)=f(\rho)+\frac{f'(\rho)}{1!}(x-\rho)+\frac{f''(\rho)}{2!}(x-\rho)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\rho)}{n!}(x-\rho)^n .$$

[*Η παράγωγος* $f''(x)$ *ορίζεται ως η παράγωγος του πολυωνύμου* $f'(x)$ *και επαγωγικά ορίζουμε* $f^{(n)}(x):=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ ].

Από το θεώρημα Taylor προκύπτει άμεσα το επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 17.** Ο αριθμός $\rho \in \mathrm{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k$, αν, και μόνον αν, ισχύουν οι ισότητες $f(\rho) = f'(\rho) = \ldots = f^{(k-1)}(\rho) = 0$ και $f^{(k)}(\rho) \neq 0.$

Θυμίζουμε ακόμη ότι μέσω των παραγώγων και των θεωρημάτων του **Bolzano** και του **Rolle**, μπορούμε να εντοπίσουμε διαστήματα που ανήκουν οι πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές.

**Θεώρημα 18. (Θεώρημα του Bolzano)**. Αν $f(x)$ *είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και τα* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ *είναι τέτοια ώστε* $f(\alpha) f(\beta) < 0,$ *τότε υπάρχει* $\gamma \in (\alpha, \beta)$ *τέτοιο ώστε* $f(\gamma) = 0.$

Χρήσιμη είναι ακόμη μία ειδική μορφή του **θεωρήματος μέσης τιμ**ής:

**Θεώρημα 19.** *Δοθέντος πολυωνύμου* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *και* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta,$ *τότε υπάρχει* $\gamma \in (\alpha, \beta)$ *έτσι ώστε:* $f(\beta) = f(\alpha) + (\beta - \alpha) f'(\alpha) + \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{2} f''(\gamma).$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με δύο θεωρήματα που αφορούν τη συμπεριφορά των τιμών ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές σε δύο περιπτώσεις. Κοντά σε ένα πραγματικό αριθμό $a$, αλλά και για πολύ μεγάλες τιμές του $x$. Το τελευταίο είναι σχετικό με το ρόλο που παίζει σε ένα πολυώνυμο ο μεγιστοβάθμιος όρος του.

**Θεώρημα 20.** *Για κάθε πολυώνυμο* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *και για κάθε* $a \in \mathbb{R}$, *υπάρχει σταθερά* $\mathrm{M} > 0$ *τέτοια ώστε να ισχύει η ανισότητα*

$$\left| f(x) - f(a) \right| \leq \mathrm{M} \left| x - a \right|,$$

*για κάθε* $x$ με $\left| x - a \right| \leq 1,$ *δηλαδή για* $x \in [a-1, a+1].$

**Απόδειξη**

Αν είναι $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x],$ τότε για κάθε $x$ με $\left| x - a \right| \leq 1$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right| &= \left|a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + a_1(x-a)\right| \\
&\leq |a_n||x-a|^n + |a_{n-1}||x-a|^{n-1} + \ldots + |a_1||x-a| \\
&\leq \left(|a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1|\right) \cdot |x-a| = \mathrm{M}|x-a|,
\end{aligned}
$$

όπου θέσαμε $\mathrm{M} = |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1|$. Η τελευταία σχέση προκύπτει από τις ανισότητες $|x-a|^k \leq |x-a|$, για $k = 1, 2, 3, \ldots$. □

**Θεώρημα 21.** *Για κάθε πολυώνυμο* $f\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}\left[x\right]$, *υπάρχει σταθερά* $\mathrm{K} > 0$*, τέτοια ώστε*

$$\left|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right| < \left|a_n x^n\right|,$$

*για κάθε* $x$ *με* $|x| > \mathrm{K}$.

**Απόδειξη**
Επειδή ισχύει ότι

$$\left|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right| < |a_{n-1}|\left|x^{n-1}\right| + \ldots + |a_1||x| + |a_0|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$|a_{n-1}||x|^{n-1} + \ldots + |a_1||x| + |a_0| < |a_n||x|^n, \qquad (1)$$

για κάθε $x$ κατάλληλα μεγάλο ή αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$|a_k||x|^k < \frac{1}{n}|a_n||x|^n, \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (2)$$

και για κάθε $x$ με $|x| > \mathrm{K}$, για κατάλληλα μεγάλο Κ. Τότε με πρόσθεση κατά μέλη των $n$ ανισοτήτων που δίνονται από την (2), προκύπτει η (1) και η ζητούμενη ανισότητα. Για να ισχύουν οι ανισότητες (2) αρκεί

$$|x|^{n-k} > \frac{n|a_k|}{|a_n|} \quad \text{ή} \quad |x| > \sqrt[n-k]{\frac{n|a_k|}{|a_n|}}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε τον αριθμό Κ να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\mathrm{K} > \sqrt[n-k]{\frac{n|a_k|}{|a_n|}}, \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

**Πόρισμα.** *Για κάθε πολυώνυμο* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbb{R}[x]$, *υπάρχει σταθερά* $\mathrm{K}>\sqrt[n-k]{\dfrac{n|a_k|}{|a_n|}}$, για κάθε $k=0,1,2,\ldots,n-1$, *τέτοια ώστε:*

**(α)** $|f(x)|>0$, *για κάθε* $x$ *με* $|x|>\mathrm{K}$, *δηλαδή το πολυώνυμο* $f(x)$ *δεν μπορεί να έχει ρίζα με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του K,*

**(β)** *Οι τιμές του πολυωνύμου* $f(x)$, *για κάθε* $x>\mathrm{K}$, έχουν το ίδιο πρόσημο με αυτό του μεγιστοβάθμιου όρου $a_nx^n$.

**Απόδειξη**

**(α)** Το ζητούμενο προκύπτει από τη σχέση

$$|f(x)|=|a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0|\geq|a_nx^n|-|a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0|>0.$$

(β) Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$|a_nx^n|-|a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0|>0, \text{ για } x>\mathrm{K},$$

οπότε το πρόσημο του αθροίσματος $f(x)=a_nx^n+\left(a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)$ συμπίπτει με αυτό του προσθετέου με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. □

Για τον προσδιορισμό ενός διαστήματος στο οποίο ανήκουν οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, έχουμε και το επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 22**. *Έστω το πολυώνυμο* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbb{R}[x], a_n\neq0$ *και* $a:=\max\{|a_0|,|a_1|,\ldots,|a_{n-1}|\}$. *Τότε για κάθε πραγματική ρίζα του* $f(x)$ *ισχύει ότι:*

$$\rho\in\left[-\left(1+\frac{a}{|a_n|}\right),1+\frac{a}{|a_n|}\right].$$

**Απόδειξη**

Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ ρίζα του $f(x)$, τότε

$$f(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0\Rightarrow a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=-a_n\lambda^n$$
$$\Rightarrow|a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0|=|a_n||\lambda^n|.$$

Για κάθε $\lambda>1$ έχουμε

$$\left|a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}\right| \leq |a_0| + |a_1|\lambda + |a_2|\lambda^2 + \ldots + |a_{n-1}|\lambda^{n-1}$$
$$\leq a\left(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{n-1}\right) \leq a\left(\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right) < \frac{a\lambda^n}{\lambda - 1},$$

αφού $\lambda > 1$. Επίσης έχουμε

$$\frac{a\lambda^n}{\lambda-1} < |a_n|\lambda^n,$$

εφόσον ισχύει $a(\lambda-1)^{-1} < |a_n|$, δηλαδή όταν:

$$\lambda > 1 + \frac{a}{|a_n|}. \qquad (1)$$

Επομένως, όταν ισχύει η σχέση (1), κανένα τέτοιο $\lambda$ δεν μπορεί να είναι ρίζα του $f(x)$. Ομοίως, με το πολυώνυμο $f(-x)$ διαπιστώνουμε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ δεν μπορεί να έχει αρνητική ρίζα μικρότερη του $-\left(1+\dfrac{a}{|a_n|}\right)$. □

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα θεώρημα μέσω του οποίου μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα πάνω φράγμα για τον αριθμό των πραγματικών ριζών ενός πολυωνύμου που βρίσκονται μέσα σε ένα δεδομένο διάστημα. Σημειώνουμε, ότι για μία δεδομένη ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ο αριθμός των αλλαγών προσήμου στους όρους της ακολουθίας μας δίνει το πόσες φορές υπάρχει αλλαγή από θετικό όρο σε αρνητικό όρο και αντιστρόφως, αγνοώντας τα μηδενικά. Για παράδειγμα στην ακολουθία $0, 2, -1, 0, -3, 1, 2, -4$ υπάρχουν 3 αλλαγές προσήμου, από το 2 στο -1, από το -3 στο 1 και από το 2 στο -4. Έχουμε:

**Θεώρημα 23.** (**Θεώρημα των Budan – Fourier**) *Έστω το πολυώνυμο*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x], a_n \neq 0.$$

*Έστω επίσης για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ο αριθμός $\delta(\alpha)$ είναι ο αριθμός των αλλαγών προσήμου της ακολουθίας*

$$f(\alpha), f'(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha) \qquad (*)$$

*Τότε ο αριθμός των πραγματικών ριζών του $f(x)$, λαμβανομένων υπόψη και των πολλαπλοτήτων τους, που βρίσκονται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, όπου $\alpha, \beta$ δεν είναι ρίζες του $f(x)$, ισούται το πολύ με τη διαφορά $\delta(\alpha) - \delta(\beta)$. Η ακριβής τιμή του είναι* $\delta(\alpha) - \delta(\beta) - 2r$, όπου $r \geq 0$.

**Πόρισμα. (Κανόνας των Hariot – Descartes)**
*Η εξίσωση*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0,\ a_i \in \mathbb{R},$$

*δεν μπορεί να έχει θετικές ρίζες περισσότερες από τον αριθμό αλλαγών προσήμου στην ακολουθία* $a_0, a_1, ..., a_n$ *και ο αριθμός των θετικών ριζών της διαφέρει από τον αριθμό αλλαγών προσήμου της ακολουθίας αυτής κατά ένα άρτιο θετικό ακέραιο.*

**Παράδειγμα.**
Το πολυώνυμο $f\left(x\right) = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - x^3 + 2x - 2$ έχει 3 αλλαγές προσήμου, αγνοώντας τα μηδενικά, στην ακολουθία των συντελεστών του -2, 2, -1, -3, 4, 1. Επομένως ο αριθμός των θετικών ριζών του είναι το πολύ 3 ή 1.
Παρατηρούμε επίσης ότι το πολυώνυμο $f\left(-x\right) = x^6 - 4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x - 2$ έχει 3 αλλαγές προσήμου στην ακολουθία των συντελεστών του $-2, -2, +1, -3, -4, +1$, οπότε το πολυώνυμο $f\left(-x\right)$ έχει το πολύ 3 ή 1 θετικές ρίζες. Άρα το πολυώνυμο $f\left(x\right)$ έχει το πολύ 3 ή 1 αρνητικές ρίζες.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ που είναι τέτοιοι ώστε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ και για το πολυώνυμο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ισχύει ότι $f(1)=7$.

**2.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού $\mathrm{P}(x)\in\mathbb{R}[x]$ που είναι τέτοια ώστε $\mathrm{P}(x+1)=\mathrm{P}(-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**3**. Να βρεθούν οι αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, αν το πολυώνυμο $f(x)=x^3-8x^2-8\lambda x+\kappa$ έχει ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ με $\rho_1=\rho_2=-\rho_3$.

**4.** Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x):(x-2)(x-3)$, αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρείται με τα πολυώνυμα $x-2$ και $x-3$ δίνει υπόλοιπο 12 και 17, αντίστοιχα.

**5.** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x)$ με το πολυώνυμο $\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι:

**(i)** $\upsilon(x)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}x+\dfrac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}$, αν $\alpha\neq\beta$,

**(ii)** $\upsilon(x)=\dfrac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{2\alpha}x+\dfrac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}$, αν $\beta=-\alpha$,

**(iii)** $\upsilon(x)=f'(\alpha)x+\big(f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)\big)$, αν $\beta=\alpha$.

**6.** Να προσδιορίσετε τους αριθμούς $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$f(x)=x^{\nu+1}+\alpha x+\beta$$

να διαιρείται με το πολυώνυμο $\varphi(x)=(x-1)^2$.

**7.** Το πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρείται με τα πολυώνυμα $x^2+x+1$ και $x^2-x+1$ δίνει υπόλοιπο $x-1$ και $2x+1$, αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το πολυώνυμο $x^4+x^2+1$.

**8.** Να αποδείξετε ότι για κάθε ρίζα $\rho$ του πολυωνύμου

$$f\left(x\right)=ax^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1,\ a\neq 0,$$

ισχύει ότι: $\left|\rho\right|<1+\dfrac{1}{\left|a\right|}$.

**9.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P\left(x\right)\in\mathbb{R}\left[x\right]$, που είναι τέτοια ώστε:

$$P\left(x\right)P\left(2x^2-1\right)=P\left(x^2\right)P\left(2x-1\right),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

**(Νότια Αφρική 2002, the monthly problem set)**

**10.** Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P\left(x\right)$ και $Q\left(x\right)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

$$P\left(x^2\right)+Q\left(x\right)=P\left(x\right)+x^5Q\left(x\right),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**(Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2012)**

**11.** Ένα *μεσογειακό πολυώνυμο* έχει μόνο πραγματικές ρίζες και είναι της μορφής

$$P(x)=x^{10}-20x^9+135x^8+a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

με πραγματικούς συντελεστές $a_0,a_1,\ldots,a_7$. Να προσδιορίσετε τον μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό που μπορεί να είναι ρίζα ενός *μεσογειακού πολυωνύμου*.

**(Μεσογειακή μαθηματική Ολυμπιάδα 2011)**

**12.** Αν οι συντελεστές $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ του πολυωνύμου $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\rho$, να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου και να αποδείξετε ότι:

$$\rho_1^{\nu}+\rho_2^{\nu}+\rho_3^{\nu}\in\mathbb{R},\ \text{για κάθε } \nu\in\mathbb{N}^*.$$

**13.** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα της μορφής

$$f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\quad a_0,a\ ,\ldots,a_n\in\left\{-1,+1\right\},$$

που έχουν όλες τις ρίζες τους πραγματικές.

## ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**1.** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ που είναι τέτοιοι ώστε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και για το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ισχύει ότι $f(1) = 7$.

**Λύση**

Από τη σχέση $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ προκύπτει ότι:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ ή } \alpha = \beta = \gamma . \qquad (1)$$

Επίσης από την ισότητα

$$f(1) = 7 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 6 . \qquad (2)$$

- Αν είναι $\alpha = \beta = \gamma$, τότε από την ισότητα $\alpha = \beta + \gamma = 6 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 2$.
- Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε η ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = 6$ δίνει $0 = 6$, άτοπο.

**2.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού $\mathrm{P}(x) \in \mathbb{R}[x]$ που είναι τέτοια ώστε $\mathrm{P}(x+1) = \mathrm{P}(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Λύση**

Έστω $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, το τυχόν πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Τότε έχουμε

$$\mathrm{P}(x+1) = -\mathrm{P}(-x) \Leftrightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c = -\left[a(-x)^2 + b(-x) + c\right]$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) = -ax^2 + bx - c$$

$$\Leftrightarrow a = -a,\ 2a + b = b,\ a + b + c = -c \Leftrightarrow a = 0, b = -2c, c \in \mathbb{R}.$$

Άρα δεν υπάρχουν πολυώνυμα δευτέρου βαθμού που να ικανοποιούν τη δοθείσα σχέση. Αν τα ζητούμενα πολυώνυμα ήταν βαθμού το πολύ 2, τότε αυτά θα είχαν τη μορφή: $f(x) = -2cx + c, c \in \mathbb{R}$.

**3**. Να βρεθούν οι αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 8x^2 - 8\lambda x + \kappa$ έχει ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ με $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3$.

**Λύση**

Σύμφωνα με τις σχέσεις Vieta έχουμε:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 8,\ \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 = -8\lambda,\ \rho_1\rho_2\rho_3 = -\kappa ,$$

οι οποίες μέσω της υπόθεσης $\rho_1 = \rho_2 = -\rho_3$ γίνονται:

$$\rho_1 = 8,\ -\rho_1^2 = -8\lambda,\ -\rho_1^3 = -\kappa \Leftrightarrow \kappa = 512,\ \lambda = 8.$$

**4.** Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x):(x-2)(x-3)$, αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρείται με τα πολυώνυμα $x-2$ και $x-3$ δίνει υπόλοιπο 12 και 17, αντίστοιχα.

**Λύση**
Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε:

$$f(x) = (x-2)\,p_1(x) + 12 \quad \text{και} \quad f(x) = (x-3)\,p_2(x) + 17.$$

Από αυτές προκύπτουν οι ισότητες : $f(2) = 12$ και $f(3) = 17$, οπότε, αν υποθέσουμε ότι

$$f(x) = (x-2)(x-3)\,p(x) + \kappa x + \lambda$$

τότε λαμβάνουμε:

$$2\kappa + \lambda = f(2) = 12 \quad \text{και} \quad 3\kappa + \lambda = f(3) = 17 \Leftrightarrow \kappa = 5,\ \lambda = 2.$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x):(x-2)(x-3)$ είναι το $\upsilon(x) = 5x + 2$.

**5.** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x)$ με το πολυώνυμο $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ είναι:

**(i)** $\upsilon(x) = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}x + \dfrac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}$, αν $\alpha \neq \beta$,

**(ii)** $\upsilon(x) = \dfrac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{2\alpha}x + \dfrac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}$, αν $\beta = -\alpha$,

**(iii)** $\upsilon(x) = f'(\alpha)x + \big(f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)\big)$, αν $\beta = \alpha$.

**Λύση**
**(i)** Έστω ότι $\alpha \neq \beta$ και

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\varphi(x) + (\kappa x + \lambda), \qquad (1)$$

Από την (1) για $x = \alpha$ και $x = \beta$ προκύπτουν οι ισότητες:

$$\kappa\alpha + \lambda = f(\alpha) \text{ και } \kappa\beta + \lambda = f(\beta) \Leftrightarrow \kappa = \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta},\ \lambda = \frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

**(ii)** Έστω $\beta = -\alpha$. Τότε το ζητούμενο προκύπτει από το (i) με αντικατάσταση του $\beta$ από το $-\alpha$.

**(iii)** Έστω ότι $\alpha=\beta$. Τότε έχουμε

$$f(x)=(x-\alpha)^2\varphi(x)+\kappa x+\lambda, \qquad (2)$$

οπότε με παραγώγιση των δύο μελών προκύπτει η ισότητα

$$f'(x)=2(x-\alpha)\varphi(x)+(x-\alpha)^2\varphi'(x)+\kappa. \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) για $x=\alpha$ προκύπτουν οι ισότητες:

$$\kappa\alpha+\lambda=f(\alpha) \text{ και } f'(\alpha)=\kappa \Leftrightarrow \kappa=f'(\alpha) \text{ και } \lambda=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha).$$

**6.** Να προσδιορίσετε τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$f(x)=x^{\nu+1}+\alpha x+\beta$$

να διαιρείται με το πολυώνυμο $\varphi(x)=(x-1)^2$.

**Λύση (1ος τρόπος)**

Ισχύει ότι: $\varphi(x)=(x-1)^2\,|\,f(x)=x^{\nu+1}+\alpha x+\beta \Leftrightarrow f(1)=0$ και $f_1(1)=0$,

όπου $f_1(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $f(x):(x-1)^2$. Όμως έχουμε

$$f(1)=0\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=0\Leftrightarrow \alpha+\beta=-1, \qquad (1)$$

οπότε το πολυώνυμο $f(x)$ γίνεται

$$\begin{aligned} f(x)&=x^{\nu+1}+\alpha x+\beta=x^{\nu+1}+\alpha x-1-\alpha=x^{\nu+1}-1+\alpha(x-1)\\ &=(x-1)\left(x^{\nu}+x^{\nu-1}+\ldots x+1+\alpha\right), \end{aligned}$$

οπότε θα είναι

$$f_1(x)=x^{\nu}+x^{\nu-1}+\ldots x+1+\alpha.$$

Έτσι η ισότητα $f_1(1)=0$ δίνει τη σχέση:

$$\nu+1+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=-(\nu+1),$$

οπότε από την (1) λαμβάνουμε και $\beta=\nu$.

**(2ος τρόπος)** Σύμφωνα με την άσκηση 5(iii) ή το θεώρημα 17, αρκεί να ισχύουν:
$f(1)=0$ και $f'(1)=0\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=0$ και $(\nu+1)+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=-(\nu+1),\beta=\nu.$

**7.** Το πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρείται με τα πολυώνυμα $x^2+x+1$ και $x^2-x+1$ δίνει υπόλοιπο $x-1$ και $2x+1$, αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το πολυώνυμο $x^4+x^2+1$.

**Λύση**

Παρατηρούμε ότι $x^4+x^2+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. Επιπλέον, από το θεώρημα αλγοριθμικής διαίρεσης έχουμε:

$$f(x)=\left(x^4+x^2+1\right)p(x)+\upsilon(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)p(x)+\upsilon(x), \quad (1)$$

όπου το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι μηδενικό πολυώνυμο ή το πολύ τρίτου βαθμού, δηλαδή

$$\upsilon(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$f(x)-\upsilon(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)p(x),$$

δηλαδή η διαφορά $f(x)-\upsilon(x)$ διαιρείται με τα πολυώνυμα $x^2+x+1$ και $x^2-x+1$. Επομένως, τα πολυώνυμα $f(x)$ και $\upsilon(x)$ διαιρούμενα με καθένα από τα πολυώνυμα $x^2+x+1$ και $x^2-x+1$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, δηλαδή, σύμφωνα με τις υποθέσεις τα $x-1$ και $2x+1$, αντίστοιχα. Άρα έχουμε:

$$\upsilon(x)=\left(x^2+x+1\right)(\kappa x+\lambda)+x-1, \quad (2)$$

$$\upsilon(x)=\left(x^2-x+1\right)(\mu x+\nu)+2x+1. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$\upsilon(x)=\left(x^2+x+1\right)(\kappa x+\lambda)+x-1=\left(x^2-x+1\right)(\mu x+\nu)+2x+1$$

$$\Leftrightarrow \kappa x^3+(\kappa+\lambda)x^2+(\kappa+\lambda+1)x+\lambda-1=\mu x^3+(-\mu+\nu)x^2+(\mu-\nu+2)x+\nu+1$$

$$\Leftrightarrow \kappa=\mu,\ \kappa+\lambda=-\mu+\nu,\ \kappa+\lambda+1=\mu-\nu+2,\ \lambda-1=\nu+1$$

$$\Leftrightarrow \kappa=\mu,\ \mu+\lambda=-\mu+\nu=\mu-\nu+1,\ \lambda=\nu+2$$

$$\Leftrightarrow \kappa=\mu,\ \lambda=-2\mu+\nu=-\nu+1,\ \lambda=\nu+2 \Leftrightarrow \nu=-\frac{1}{2},\lambda=\frac{3}{2},\kappa=\mu=-1.$$

Άρα έχουμε:

$$\upsilon(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(-x+\frac{3}{2}\right)+x-1=-x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}.$$

**8.** Να αποδείξετε ότι για κάθε ρίζα $\rho$ του πολυωνύμου

$$f(x)=ax^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1,\ a\neq 0,$$

ισχύει ότι: $|\rho|<1+\dfrac{1}{|a|}$.

**Λύση**
Άμεση εφαρμογή του θεωρήματος 22.

**9.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, που είναι τέτοια ώστε:

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

**(Νότια Αφρική 2002, the monthly problem set)**

**Λύση**

Έστω $r \in \mathbb{R}$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, όπου $\mathbb{R}[x]$ είναι ο δακτύλιος των πολυωνύμων μεταβλητής $x$ με πραγματικούς συντελεστές. Τότε θα ισχύει:

$$0 = P(r)P(2r^2-1) = P(r^2)P(2r-1),$$

οπότε το $r^2$ ή το $2r-1$ είναι ρίζα του $P(x)$.

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

**(α)** Αν $r>1$, τότε $r^2>r$ και $2r-1>r$ και εργαζόμενοι ομοίως για τη νέα ρίζα ( $r^2$ ή $2r-1$) μπορούμε να κατασκευάσουμε μία άπειρη γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών ριζών του πολυωνύμου $P(x)$, άτοπο. Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματική ρίζα στο $\mathbb{R}$ μεγαλύτερη του 1.

**(β)** Αν $r<-1$, τότε $r^2>1$, οπότε λόγω (α) το $r^2$ δεν μπορεί να είναι ρίζα του $P(x)$. Άρα θα είναι ρίζα του το $2r-1<r$. Εργαζόμενοι ομοίως για τη ρίζα $2r$-1,
μπορούμε να κατασκευάσουμε μία άπειρη γνησίως φθίνουσα ακολουθία πραγματικών ριζών του πολυωνύμου $P(x)$, άτοπο. Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματική ρίζα στο $\mathbb{R}$ μικρότερη του -1.

Άρα όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ ανήκουν στο διάστημα $[-1,1]$. Έστω $r$ η μεγαλύτερη από αυτές.

Αν $r \neq 1$, τότε για $x=\sqrt{\frac{r+1}{2}}$, έχουμε:

$$0 = P(x)P(r) = P\left(\frac{r+1}{2}\right)P\left(2\sqrt{\frac{r+1}{2}}-1\right) \Rightarrow \frac{r+1}{2} \text{ ή } 2\sqrt{\frac{r+1}{2}}-1 \text{ είναι ρίζα του } P(x).$$

Όμως ισχύουν:

$$\frac{r+1}{2} > r \Leftrightarrow r<1, \text{ που ισχύει, και}$$

$$2\sqrt{\frac{r+1}{2}-1} > r \Leftrightarrow \frac{r+1}{2} > \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 < 1, \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως, υπάρχει ρίζα του $P(x)$ μεγαλύτερη του $r$, που είναι άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι, αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει πραγματική ρίζα , τότε αυτή θα είναι η $r=1$.

Άρα έχουμε:

$$P(x) = (x-1)^k Q(x), \text{ με } Q(1) \neq 0.$$

Από τη δεδομένη σχέση προκύπτει:

$$(x-1)^k Q(x)(2x^2-2)^k Q(2x^2-1) = (x^2-1)^k Q(x^2)(2x-2)^k Q(2x-1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$Q(x)Q(2x^2-1) = Q(x^2)Q(2x-1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

δηλαδή το πολυώνυμο $Q(x)$ ικανοποιεί τη δεδομένη σχέση (1).

Εργαζόμενοι όπως και για το πολυώνυμο $P(x)$, λαμβάνουμε ότι, αν το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει πραγματική ρίζα, τότε αυτή θα ισούται με 1, που είναι άτοπο, γιατί $Q(1) \neq 0$. Άρα το πολυώνυμο $Q(x)$ δεν έχει πραγματική ρίζα, οπότε θα ισχύει $Q(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι η σχέση (2) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{Q(2x^2-1)}{Q(x^2)} = \frac{Q(2x-1)}{Q(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε για τη ρητή συνάρτηση $S(x) = \dfrac{Q(2x-1)}{Q(x)}$ ισχύει ότι:

$$S(x^2) = S(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε με αντικατάσταση του $x$ διαδοχικά από το $x^2$ λαμβάνουμε:

$$S(x) = S(x^2) = S(x^4) = \ldots = S\left(x^{2^k}\right), \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } k. \quad (3)$$

Αν υποθέσουμε ότι $a > 1$, είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, τότε από την (3) η ρητή συνάρτηση $S(x) = \dfrac{Q(2x-1)}{Q(x)}$ παίρνει την ίδια σταθερή τιμή $S(a)$ άπειρες φορές, που είναι άτοπο. Επομένως η συνάρτηση $S(x)$ θα είναι σταθερή και αφού $S(1)=\dfrac{Q(2\cdot 1-1)}{Q(1)}=1$, έπεται ότι: $S(x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$Q(x)=Q(2x-1),\ \text{για κάθε}\, x\in\mathbb{R},$$

οπότε το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι σταθερό. Θέτοντας $Q(x)=c$ στη σχέση (2) προκύπτει ότι το $Q(x)$ μπορεί να ισούται με οποιοιδήποτε σταθερά. Έτσι έχουμε τελικά

$$P(x)=c_n(x-1)^n,\ n\in\mathbb{N}, c_n\in\mathbb{R}.$$

**10.** Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

$$P(x^2)+Q(x)=P(x)+x^5Q(x),\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

**(Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα 2012)**

**Λύση**

Η δεδομένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x),\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Το πολυώνυμο του δεύτερου μέλους έχει μεταξύ των ριζών του τις ρίζες πέμπτης τάξεως της μονάδας: $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, όπου $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $\omega^5=1$ και $\omega^6=\omega$, $\omega^8=\omega^3$.

Από την (1) λαμβάνουμε

$$P(\omega)=P(\omega^2), P(\omega^2)=P(\omega^4), P(\omega^3)=P(\omega^6)=P(\omega), P(\omega^4)=P(\omega^8)=P(\omega^3)$$

,

οπότε θα έχουμε

$$P(\omega)=P(\omega^2)=P(\omega^3)=P(\omega^4).$$

Αν $b$ είναι η κοινή τιμή των $P(\omega), P(\omega^2), P(\omega^3)$ και $P(\omega^4)$, τότε το πολυώνυμο $P(x)-b$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, οπότε θα ισχύει:

$$P(x)-b=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)R(x)$$

$$\Leftrightarrow P(x)=(x^4+x^3+x^2+x+1)R(x)+b.$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το πολυώνυμο $R(x)$ και επίσης πρέπει $b\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, πρέπει το πολυώνυμο

$P(x)$ να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού, έπεται ότι το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού. Αν είναι $R(x)=0$, οπότε δεν ορίζεται ο βαθμός του, τότε από την (1) προκύπτει ότι $(x^5-1)Q(x)=0$, από την οποία, δεδομένου ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, έπεται ότι $Q(x)=0$, που είναι μη αποδεκτό. Επομένως το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή σταθερό πολυώνυμο, έστω $R(x)=a\neq 0$. Τότε θα έχουμε

$$P(x)=a\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)+b=a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)+c,$$

όπου $a\in\mathbb{R}^*$, $c=a+b\in\mathbb{R}$.

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται

$$\begin{aligned}
&P\left(x^2\right)-P(x)=\left(x^5-1\right)Q(x)\\
\Leftrightarrow\ & a\left(x^8+x^6+x^4+x^2\right)-a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)\\
\Leftrightarrow\ & a\left(x^8-x^3+x^6-x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)\\
\Leftrightarrow\ & a\left(x^3+x\right)\left(x^5-1\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)\\
\Leftrightarrow\ & \left(x^5-1\right)\left[a\left(x^3+x\right)-Q(x)\right]=0.
\end{aligned}$$

Από την τελευταία ισότητα πολυωνύμων έπεται ότι: $Q(x)=a\left(x^3+x\right)$, $a\in\mathbb{R}^*$.

**2$^{ος}$ τρόπος**

Ο ελάχιστος δυνατός βαθμός του πολυωνύμου του δευτέρου μέλους της (1) είναι 5, ενώ ο βαθμός του πολυωνύμου του πρώτου μέλους είναι άρτιος, οπότε θα έχουμε

$$\min\deg Q(x)=1 \ \text{ και } \min\deg P(x)=3.$$

Αν υποθέσουμε ότι $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$, $a_3\neq 0$, τότε από τη δεδομένη ισότητα πολυωνύμων λαμβάνουμε

$$P\left(x^2\right)-P\left(x\right)=\left(x^5-1\right)Q\left(x\right) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow\left(x^5-1\right)\Big|P\left(x^2\right)-P\left(x\right)=a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow\left(x^5-1\right)\Big|a_3\left(x^6-x^3\right)+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow\left(x^5-1\right)\Big|a_3\left[x\left(x^5-1\right)+\left(x-x^3\right)\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow\left(x^5-1\right)\Big|a_3\left[x\left(x^5-1\right)\right]+a_2x^4-a_3x^3+\left(a_1-a_2\right)x^2+\left(a_3-a_1\right)x.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $a_2x^4-a_3x^3+\left(a_1-a_2\right)x^2+\left(a_3-a_1\right)x=0$, οπότε λαμβάνουμε $a_2=a_3=0,\ a_1-a_2=0,\ a_1-a_3=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$, άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει πολυώνυμο $P\left(x\right)$ τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε να ισχύει η δεδομένη ισότητα. Στη συνέχεια θεωρούμε $P\left(x\right)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, με $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R},a_4\in\mathbb{R}^*$. Εργαζόμενοι, όπως παραπάνω, λαμβάνουμε:

$$P\left(x^2\right)-P\left(x\right)=\left(x^5-1\right)Q\left(x\right) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow\left(x^5-1\right)\Big|P\left(x^2\right)-P\left(x\right)=a_4x^8+a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow\left(x^5-1\right)\Big|a_4\left[\left(x^5-1\right)x^3+x^3\right]+a_3\left[\left(x^5-1\right)x+x\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow\left(x^5-1\right)\Big|\left(x^5-1\right)\left(a_4x^3+a_3x\right)+\left(a_2-a_4\right)x^4+\left(a_4-a_3\right)x^3+\left(a_1-a_2\right)x^2+\left(a_3-a_1\right)x$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$\left(a_2-a_4\right)x^4+\left(a_4-a_3\right)x^3+\left(a_1-a_2\right)x^2+\left(a_3-a_1\right)x=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4\in\mathbb{R}^*,$$

οπότε λαμβάνουμε

$$P\left(x\right)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_4\left(x^4+x^3+x^2+x\right)+a_0,a_4\in\mathbb{R}^*,a_0\in\mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$P\left(x^2\right)-P\left(x\right)=\left(x^5-1\right)\left(a_4x^3+a_4x\right)=\left(x^5-1\right)Q\left(x\right)\Rightarrow Q\left(x\right)=a_4\left(x^3+x\right),$$

$a_4\in\mathbb{R}^*$.

**11.** Ένα *μεσογειακό πολυώνυμο* έχει μόνο πραγματικές ρίζες και είναι της μορφής

$$P(x)=x^{10}-20x^9+135x^8+a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

με πραγματικούς συντελεστές $a_0,a_1,...,a_7$. Να προσδιορίσετε τον μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό που μπορεί να είναι ρίζα ενός *μεσογειακού πολυωνύμου*.

**Λύση**

Θεωρούμε ένα *μεσογειακό πολυώνυμο* πού έχει τις πραγματικές ρίζες $\alpha$ και $x_1, x_2, \ldots, x_9$. Έστω

$$s = \sum_{i=1}^{9} x_i,\ t = \sum_{i=1}^{9} x_i^2 \text{ και } u = \sum_{1 \le i < j \le 9} x_i x_j .$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε ότι

$$s = 20 - \alpha, u = 135 - s\alpha = 135 - 20\alpha + \alpha^2 \text{ και } t = s^2 - 2u = 130 - \alpha^2,$$

οπότε λαμβάνουμε

$$0 \le \sum_{1 \le i < j \le 9} \left(x_i - x_j\right)^2 = 8t - 2u = 10(\alpha + 7)(11 - \alpha).$$

Άρα είναι $\alpha \le 11$. Επειδή για $\alpha = 11$ και $x_1 = x_2 = \ldots = x_9 = 1$ προκύπτει ένα μεσογειακό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-11)(x-1)^9 \\ &= (x-11)\left(x^9 - 9x^8 + 36x^7 - 84x^6 + 126x^5 - 126x^4 + 84x^3 - 36x^2 + 9x - 1\right) \\ &= x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \end{aligned}$$

η απάντηση στο πρόβλημα είναι $\alpha = 11$.

**12.** Αν οι συντελεστές $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ του πολυωνύμου $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\rho$, να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου και να αποδείξετε ότι:

$$\rho_1^\nu + \rho_2^\nu + \rho_3^\nu \in \mathbb{R}, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

**Λύση**

Έστω ότι : $b = a\rho, c = a\rho^2$ και $d = a\rho^3$. Τότε το πολυώνυμο γίνεται:

$$f(x) = ax^3 + a\rho x^2 + a\rho^2 x + a\rho^3 = a\left[x^2(x+\rho) + \rho^2(x+\rho)\right] = a(x+\rho)\left(x^2 + \rho^2\right),$$

οπότε έχει τις ρίζες

$$\rho_1 = -\rho,\ \rho_2 = i\rho,\ \rho_3 = -i\rho.$$

Επομένως έχουμε

$$\rho_1^\nu + \rho_2^\nu + \rho_3^\nu = (-\rho)^\nu + (i\rho)^\nu + (-i\rho)^\nu = \left[(-1)^\nu + \left(1 + (-1)^\nu\right)i^\nu\right]\rho^\nu$$

$$\Rightarrow \rho_1^\nu + \rho_2^\nu + \rho_3^\nu = \left\{\begin{array}{l} 3\rho^\nu, \text{ αν } \nu = 4\kappa, \kappa \in \mathbb{N}^* \\ -\rho^\nu, \text{ αν } \nu = 4\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{N} \\ -\rho^\nu, \text{ αν } \nu = 4\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{N} \\ -\rho^\nu, \text{ αν } \nu = 4\kappa + 3, \kappa \in \mathbb{N} \end{array}\right\}.$$

**13.** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα της μορφής

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\quad a_0,a\ ,\ldots,a_n\in\{-1,+1\},$$

που έχουν όλες τις ρίζες τους πραγματικές.

**Λύση.** Υποθέτουμε ότι όλες οι ρίζες $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ του $f(x)$ είναι όλες στο $\mathbb{R}$. Τότε, σύμφωνα με τους τύπους του Vieta, θα έχουμε:

$$\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\ \text{και}\ \sum_{1\le i<j\le n}\rho_i\rho_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

οπότε, από τις υποθέσεις για τους συντελεστές του $f(x)$, λαμβάνουμε:

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\ldots+\rho_n^2=(\rho_1+\rho_2\ldots+\rho_n)^2-2\left(\sum_{1\le i<j\le n}\rho_i\rho_j\right)=a_{n-1}^2-2a_{n-2}\le 3,\quad (1)$$

$$\rho_1^2\rho_2^2\cdots\rho_n^2=1.\qquad (2)$$

Από την ανισότητα των μέσων προκύπτει ότι:

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\ldots+\rho_n^2\ge n,$$

οπότε θα είναι $n\le 3$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $n=1$, $f(x)=x+1$ ή $f(x)=x-1$.
- Για $n=2$, $f(x)=x^2+x-1$ ή $f(x)=x^2-x-1$.
- Για $n=3$, η σχέση (1) είναι δυνατή, μόνον όταν $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\{-1,+1\}$, οπότε εύκολα λαμβάνουμε τις περιπτώσεις: $f(x)=(x\pm1)(x^2-1)$.

## Ασκήσεις για λύση

**14.** Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^n+4$ είναι ανάγωγο πάνω στο $\mathbb{Z}[x]$, αν, και μόνον αν, ο $n$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

**15.** Έστω $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, όπου $n>1$ ακέραιος. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μη σταθερών πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

**16.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, που είναι τέτοια ώστε:

$$P(x)P(2x^2-1)=P(x^2)P(2x-1), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

**17.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, που είναι τέτοια ώστε:

$$P(x^2)=P(x)P(x+2), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**18.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, που είναι τέτοια ώστε:

$$P(x^2)+P(-x)=P(x^2)+P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**19.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, ελάχιστου δυνατού βαθμού που είναι τέτοια ώστε:

**(α)** ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι 200.

**(β)** ο συντελεστής του ελαχιστοβάθμιου μη μηδενικού όρου είναι 2.

**(γ)** το άθροισμα των συντελεστών του είναι 4.

**(δ)** $P(-1)=0$, $P(2)=6$ και $P(3)=8$.