

Στρογγυλό Τραπέζι:
**«Η ισχυροποίηση της παρουσίας των Μαθηματικών
προϋπόθεση για μια αποτελεσματική εκπαίδευση
στη σύγχρονη κοινωνία»**

Σοφία Λαμπροπούλου
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



36^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας
Λάρισα, 1-3 Νοεμβρίου 2019

Τα Μαθηματικά

Τα **Μαθηματικά** είναι η αφηρημένη επιστήμη των αριθμών, της ποσότητας και του χώρου, είτε ως αφηρημένες έννοιες είτε ως εφαρμοσμένες σε άλλες επιστήμες όπως η Φυσική και οι Επιστήμες του μηχανικού.

Oxford Living Dictionaries

«Όποιος επιχειρήσει να μελετήσει τη Φύση χωρίς τη χρήση των Μαθηματικών, θα πρέπει να αρκεστεί σε μια περιορισμένη κατανόηση.»

Richard Feynman
Φυσικός

Ο ρόλος των Μαθηματικών είναι θεμελιώδης

Τα **Μαθηματικά** είναι τρόπος σκέψης. Βασίζονται στην **κοινή λογική** και εξασκούν την **ευφυΐα**, τη **μεθοδική**, **ορθολογική** και **πρακτική σκέψη**, την **κριτική προσέγγιση**, και τη **διατύπωση με σαφήνεια και λιτότητα**. Συμβάλλουν δε στην **ικανότητα λήψης ορθών αποφάσεων**.

Τα **Μαθηματικά** παρέχουν τα **βασικά εργαλεία** σε άλλες επιστήμες και έχουν ποικίλες και θεαματικές εφαρμογές στην **τεχνολογία**, στην **οικονομία** και στη **σύγχρονη πραγματικότητα**.

Από την άλλη η **Γλώσσα** μαθαίνει τον/την μαθητή/τρια να εκφράζει και να επικοινωνεί τις σκέψεις του/της με ακρίβεια, με καλαισθησία και με αρτιότητα. Αυτοί είναι **οι δύο πυλώνες της Παιδείας**.

Τα Μαθηματικά κατά τον αείμνηστο Δάσκαλό μου Μιχαήλ Μάντζαρη (1917 – 1994)

Ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι:

α) Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες καθώς και η μύηση στην μαθηματική αποδεικτική διαδικασία.

β) Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκεντρώσεως, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.

γ) Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών, των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα.

δ) Ο εθισμός των μαθητών στην διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα.

ε) Η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσεως και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους.

Από το Λύκειο στην Ανώτατη Παιδεία (συγκεκριμένα στο ΕΜΠ)

Υπάρχει διαπιστωμένο σοβαρό κενό στις γνώσεις Μαθηματικών.

Το "κενό" στη διδασκαλία των Μαθηματικών ανάμεσα στη δευτεροβάθμια και την τριτοβάθμια εκπαίδευση, ερευνάται παγκοσμίως εδώ και δεκαετίες.

Σε ποια σημεία εντοπίζεται κυρίως;

Τρόποι αντιμετώπισης;

Προβληματισμοί πάνω στην υπάρχουσα κατάσταση & πιθανοί παράγοντες που τη διαμορφώνουν

- Η ύπαρξη ασυνέχειας ανάμεσα στη διδακτέα ύλη του Λυκείου και στην ύλη του Ε.Μ.Π.
- Η αλλαγή στον τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών.
- Η σπουδαιότητα της μαθηματικής αποδεικτικής διαδικασίας και οι μεταβολές στη διδασκαλία της.
- Η αλλαγή της μεθόδου διδασκαλίας, καθώς και των απαιτήσεων προς τον διδασκόμενο.
- Μεταβολές στη δομή του μαθήματος, στο μαθηματικό συμβολισμό, στο είδος και το ρόλο των συγγραμμάτων, στο ρυθμό διδασκαλίας.
- Η αλλαγή του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος, καθώς και του γενικότερου κοινωνικού περιβάλλοντος για το νέο σπουδαστή.

Από το Λύκειο στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο: Έρευνα για το "κενό" στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Ντίνου Μαρία

Επιβλέπων Καθηγητής: Στεφανέας Πέτρος

Επιμέλεια: Παυλοπούλου Καλλιόπη

Αθήνα, Απρίλιος 2015

Κατεύθυνση: οι συμμετέχοντες είχαν ακολουθήσει στο Λύκειο

- Την **τεχνολογική κατεύθυνση** σε ποσοστό **48,7%**
- Τη **θετική κατεύθυνση** σε ποσοστό **49,5%**

Μέσος όρος βαθμού αποφοίτησης Λυκείου: 18,64

Μέσος όρος βαθμολογίας στο πρώτο έτος σπουδών: 6,86

**Μέσος όρος βαθμού πανελληνίων εξετάσεων στα
Μαθηματικά: 17,56**

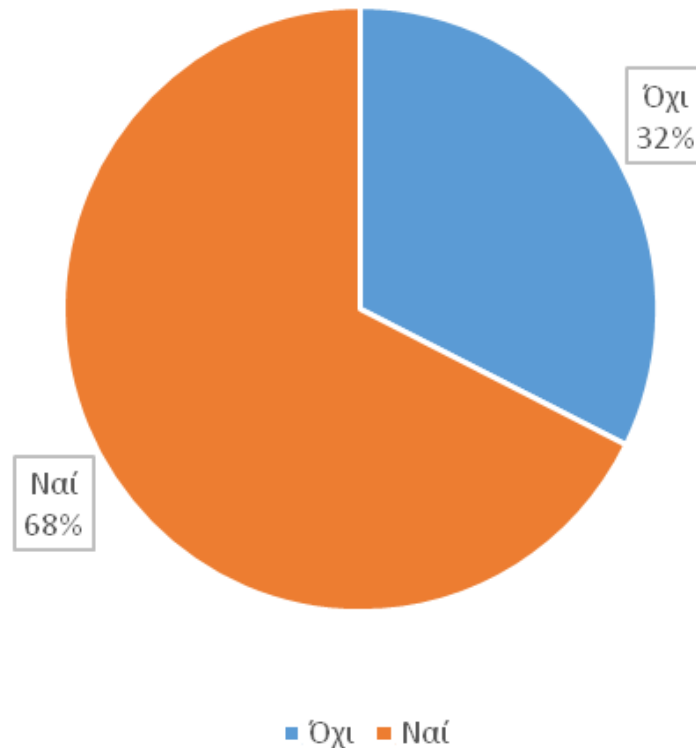
Οι απαντήσεις των δύο επόμενων ερωτήσεων, πώς θα χαρακτήριζαν οι σπουδαστές τα μαθήματα Μαθηματικών στο Λύκειο και πώς στο Ε.Μ.Π., παρατίθενται κατ'αντιπαράθεση:

Βαθμός Δυσκολίας Μαθηματικών Λυκείου	
	Ποσοστό (%)
Πολύ Εύκολα	3.1
Εύκολα	17.9
Μέτριας Δυσκολίας	64.5
Δύσκολα	14.3
Πολύ Δύσκολα	0.3

Βαθμός Δυσκολίας Μαθηματικών Ε.Μ.Π.	
	Ποσοστό (%)
Πολύ Εύκολα	2.8
Εύκολα	5.9
Μέτριας Δυσκολίας	26.8
Δύσκολα	52.6
Πολύ Δύσκολα	12.0

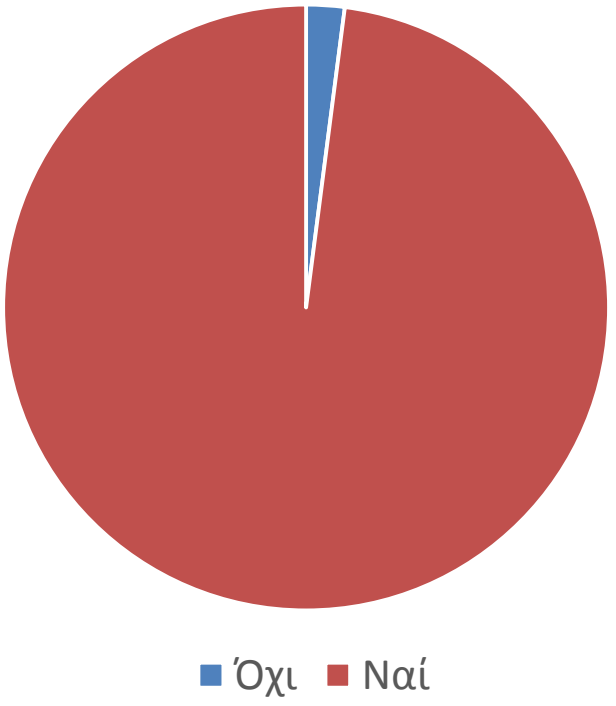
Στην κρίσιμη ερώτηση **αν θεωρούν ότι δημιουργήθηκε κενό γνώσεων από το Λύκειο στο Ε.Μ.Π**, οι σπουδαστές απάντησαν:

Από το Λύκειο στο ΕΜΠ θεωρείτε ότι δημιουργήθηκε κάποιο κενό γνώσεων στα Μαθηματικά το οποίο θα έπρεπε να καλυφθεί;

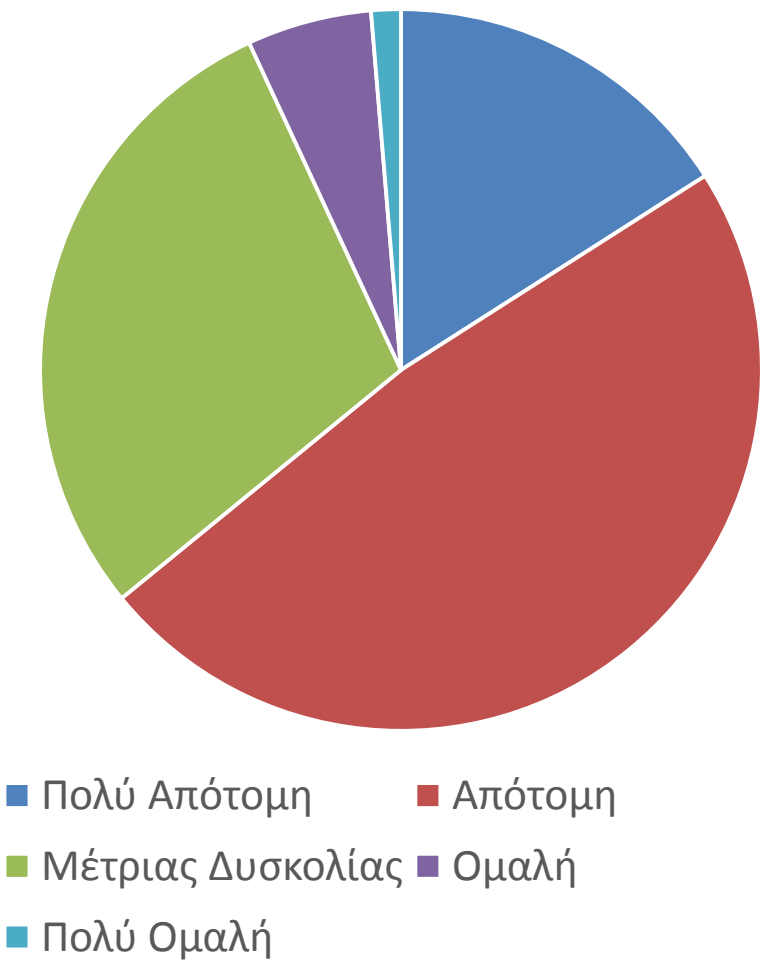


Στις δύο ερωτήσεις που αφορούν στο **ρυθμό διδασκαλίας**, οι απαντήσεις των συμμετεχόντων είχαν ως εξής:

Θεωρείτε ότι ο ρυθμός διδασκαλίας άλλαξε από το Λύκειο στο ΕΜΠ;



Χαρακτηρισμός αλλαγής ρυθμού διδασκαλίας



Διαπιστώσεις Καθηγητών ΕΜΠ

Δώρος Θεοδώρου, Καθηγητής Σχ. Χημικών Μηχανικών

Διδάσκει: *Δομή και Καταστάσεις της Ύλης (το βασικό μάθημα Φυσικοχημείας στη ΣΧΜ)*

«Ο Μηχανικός πρέπει να είναι εξαιρετικά στηριγμένος στα Μαθηματικά.»

Σταύρος Κουρκουλής, Καθηγητής ΣΕΜΦΕ - Κοσμήτορας

Διδάσκει: Μηχανικές (στερεού, παραμορφωσίμου), Αντοχή Υλικών (από το 1^ο εξ.)

- «**Δεν έχουν αίσθηση της τάξης μεγέθους.** Δεν καταλαβαίνουν τι σημαίνει χιλιοστό σε σχέση με νανόμετρο. Δεν καταλαβαίνουν το μέγεθος rad (γωνία), **τι είναι η μοίρα**, αν είναι μικρή ή μεγάλη.
- **Δεν έχουν γεωμετρική εποπτεία**, ιδιαίτερα στο χώρο.
- Έχουν τεράστια αδυναμία έκφρασης. Σύνταξη και ορθογραφία. **Δεν μπορούν να συντάξουν ένα κείμενο.**
- Όταν λύνουν ασκήσεις δεν μπορούν να δώσουν δομή. **Δεν μπορούν να ξεχωρίσουν εύκολα δεδομένα από ζητούμενα.**
- **Δεν μπορούν να μεταφράσουν το λόγο σε μαθηματική σκέψη και λογικό κείμενο.**
- Παλιά μαθαίναμε συνέχεια, ασυνέχεια, παραγωγή κλπ με αποδείξεις. Αυτά μας εισήγαγαν στη μαθηματική σκέψη.»

Ανδρέας Μπουντουβής, Καθηγητής ΣΧΜ – Πρύτανης ΕΜΠ

Διδάσκει: Ρευστομηχανική

- «Δεν γνωρίζουν τους μιγαδικούς αριθμούς.
- Σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων δεν έχουν την αίσθηση τι σημαίνει η κάθε περίπτωση λύσης.
- Υπάρχουν τρομερές ελλείψεις στην κατανόηση των παραγώγων. Το ότι η παράγωγος μετράει έναν ρυθμό μεταβολής δεν το έχουν χωνέψει. Για μεταβολές μεγεθών στο χρόνο δεν πάει το μυαλό τους να χρησιμοποιήσουν την παράγωγο.
- Δεν έχουν κατανοήσει την ουσία και την χρηστικότητα των τύπων.
- Πράγματα που μαθαίνουν, να τα μαθαίνουν με αντίκρουσμα. Όχι μόνο σαν αναπαραγωγή τύπων. Να έχουν χωνέψει τις έννοιες.»

Αντώνης Χαραλαμπίδης, Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

Διδάσκει: *Διαφορικές Εξισώσεις (συνήθεις και μερικές), Μιγαδική Ανάλυση*

«Παρατηρώ ελλείψεις σε:

- **Ακολουθίες, σειρές.**
- **Κατανόηση ορισμού ορίου.**
- **Αλγεβρικές δομές** (τι είναι ομάδα, δακτύλιος, σώμα αριθμών – έστω απλά τους ορισμούς).
- Δεν έχουν εξοικείωση με **πίνακες, ορίζουσες, γραμμικά συστήματα.**
- Στη **Μιγαδική Ανάλυση** παντελής άγνοια.»

Γεώργιος Γκαζέτας, Καθηγητής Σχ. Πολιτικών Μηχανικών

Διδάσκει: *Εδαφομηχανική σε σπουδαστές 9^{ου} εξ.*

«Κάτι που με εξέπληξε:

Τους έδινα πειραματικά δεδομένα για να βρουν μια παραβολή (curve feeding) και διαπίστωσα ότι όλοι κόμπλαραν, και οι καλοί! Τότε το έκανα και σε μικρότερα εξάμηνα και παρατήρησα τα ίδια... χάνονταν σε 2 σελίδες για να πούν ότι κάτι είναι μια ευθεία! Και κάποιοι πολύ καλά μυαλά!

- **Δεν μαθαίνουν να σκέφτονται. Λείπει ο τρόπος σκέψης.**
- **Και στους καλύτερους βλέπω φοβία για τα Μαθηματικά: δώσε μας υπολογιστικό, όχι Μαθηματικά.»**

Γεράσιμος Αθανασούλης, Καθηγητής Σχ. Ναυπηγών Μηχανικών

«Δεν έχουν μνηθεί στην αποδεικτική διαδικασία.»

Ανδρέας Γεωργόπουλος, Καθηγητής Σχ. Τοπογράφων Μηχανικών

Συντονιστής προπτυχιακών σπουδών της Σχολής

«Το μεγαλύτερο πρόβλημά μας είναι η παντελής έλλειψη Γεωμετρίας, Στερεομετρίας και αντίληψης του τρισδιάστατου χώρου.»

Όλα τα παραπάνω βρίσκουν σύμφωνους τους συναδέλφους του Τομέα Μαθηματικών της ΣΕΜΦΕ.

Και κάτι `αρνητικά θετικό': Η ελλειμματική διδασκαλία των Μαθηματικών `βοηθάει' στην αντιμετώπιση του φαινομένου Brain Drain (ποιά brains?).

Συμπερασματικά:

Πρέπει να ισχυροποιηθεί η παρουσία των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης.

Με ποιους τρόπους θα ισχυροποιηθούν τα Μαθηματικά?

Στο σχολείο χρειάζεται εισαγωγή/ενίσχυση σε:

Συνδυαστικά/Διακριτά Μαθηματικά και πολλά για ακολουθίες, **επαγωγή**, αναδρομικότητα, **αριθμοθεωρία**, αλγορίθμους, γραφήματα.

Άλγεβρα/Δομές (σύνολα, ομάδες, εποπτικά/γεωμετρικά παραδείγματα – συμμετρίες, κλπ)

Γεωμετρία (να διδάσκεται και στην 3^η Λυκείου & να εξετάζεται στις Πανελλήνιες, να εξετάζεται στην 2^α Λυκείου), **Στερεομετρία**

Τριγωνομετρία, Μιγαδικοί

Υπολογισμοί

Εψιλοντικοί ορισμοί: συνέχεια, παράγωγος

Πρωτοτυπία, έμπνευση, ανάδραση μεταξύ των διάφορων περιοχών

Αποδείξεις: Οι μαθητές δεν πρέπει να στερούνται την βαθιά ευχαρίστηση να βλέπουν και να κατανοούν **μαθηματικές αποδείξεις**. Οι μαθηματικές αποδείξεις τους γειώνουν με τα θεμέλια της λογικής σκέψης.

Όμως θέλουμε η διαδικασία να είναι ευχάριστη για τους μαθητές.

Είναι δική μας υποχρέωση να τους δείξουμε την ομορφιά του ταξιδιού της κατάκτησης της γνώσης των Μαθηματικών.

Ανάλογα με τη βαθμίδα: με παιχνίδι, με μαθηματικά θεατρικά, τέχνες, κατασκευές, αποδείξεις, ιστορικά και πραγματικές εφαρμογές. Να τους δίνονται πολλές και ενδιαφέρουσες ασκήσεις και πρακτικά προβλήματα για να εξασκούνται και για να έχουν κίνητρο.

Υπάρχουν πολύ καλά τεκμηριωμένες προτάσεις βελτίωσης της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μεταξύ άλλων:

Του Τομέα Μαθηματικών ΣΕΜΦΕ (Α. Φελλούρης κ.α.) (2011)

του **ΙΕΠ** (2017-18 και παλιότερα)

Του Β. Βισκαδουράκη (Ιωνίδειος Σχολή Πειραιά)

Και πολλών άλλων συναδέλφων.

Υπάρχουν εξαιρετικά διεθνή πρότυπα, μεταξύ άλλων:

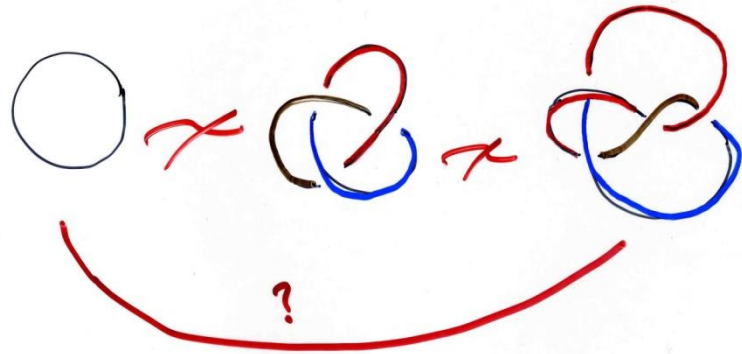
M.F. Oberwolfach (Kinder Akademie)

Independent Univ. Moscow

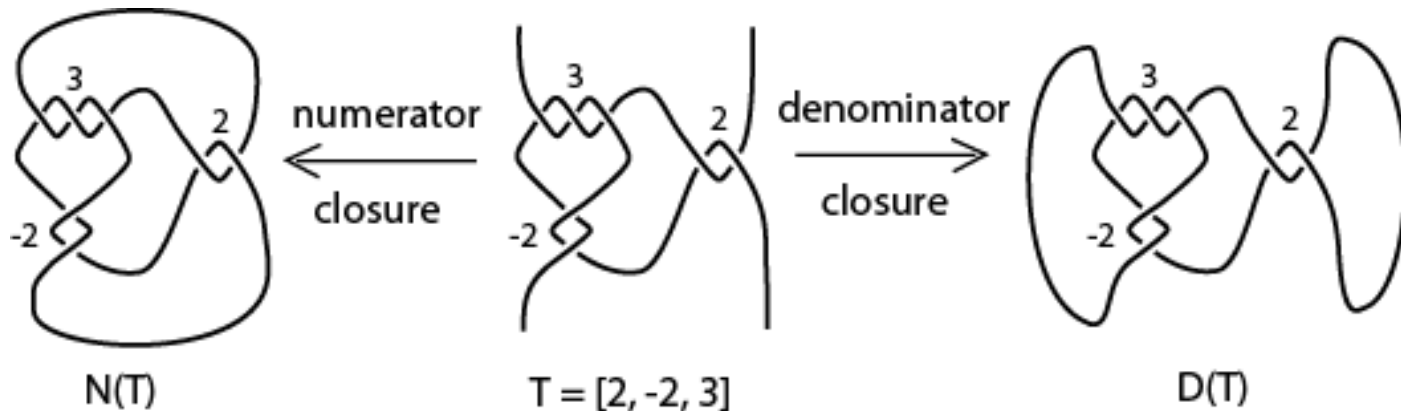
Μερικές ακόμα:

Πρωτότυπα και απτά αντικείμενα διδασκαλίας δίνουν ιδιαίτερα κίνητρα και κεντρίζουν το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.

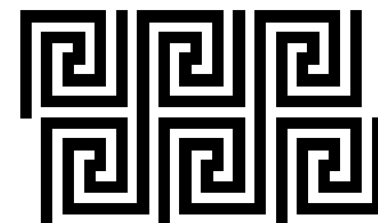
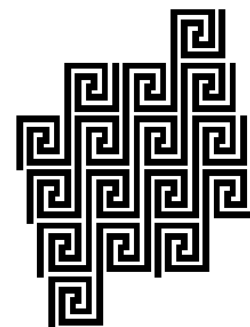
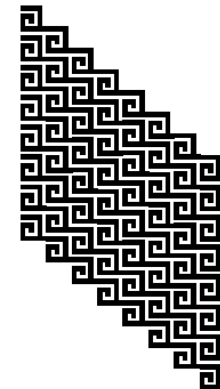
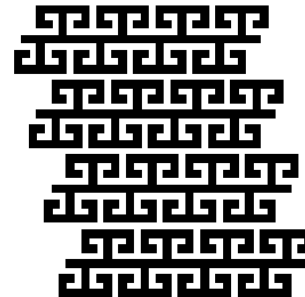
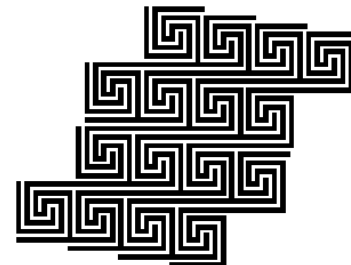
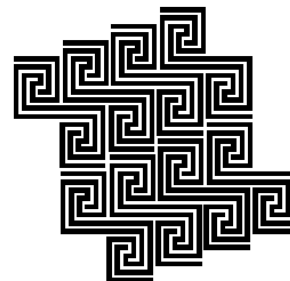
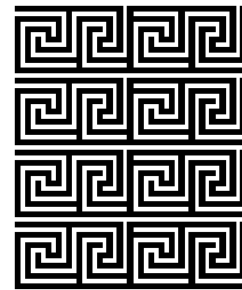
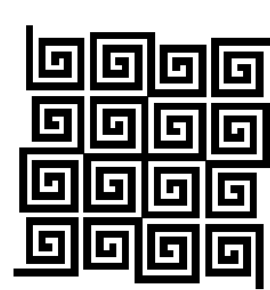
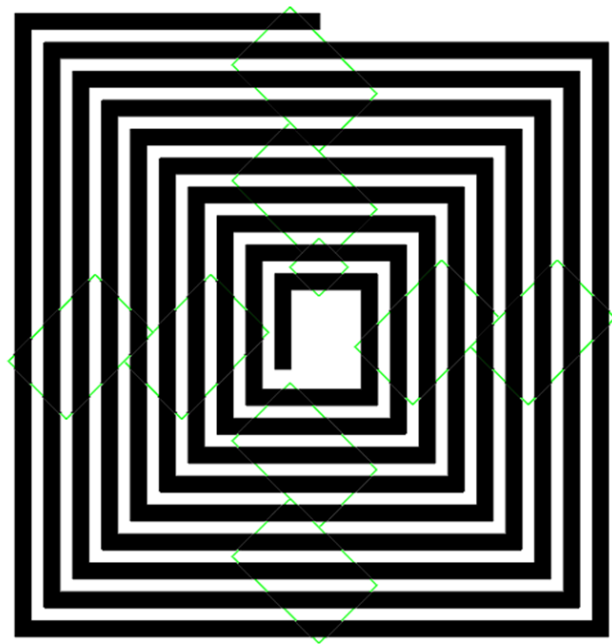
Π.χ. 1) Τριχρωματισιμότητα



Π.χ. 2) Οι ρητοί μέσω συνεχών κλασμάτων και πράξεών τους, εποπτεία με ρητούς κόμπους και εφαρμογές τους στο DNA



Π.χ. 3) Πειραματισμοί με πλακοστρώσεις



Π.χ. 4) Συμμετρίες, πλατωνικά στερεά, κρυσταλλογραφία



Slavik Jablan

VisMath

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath>

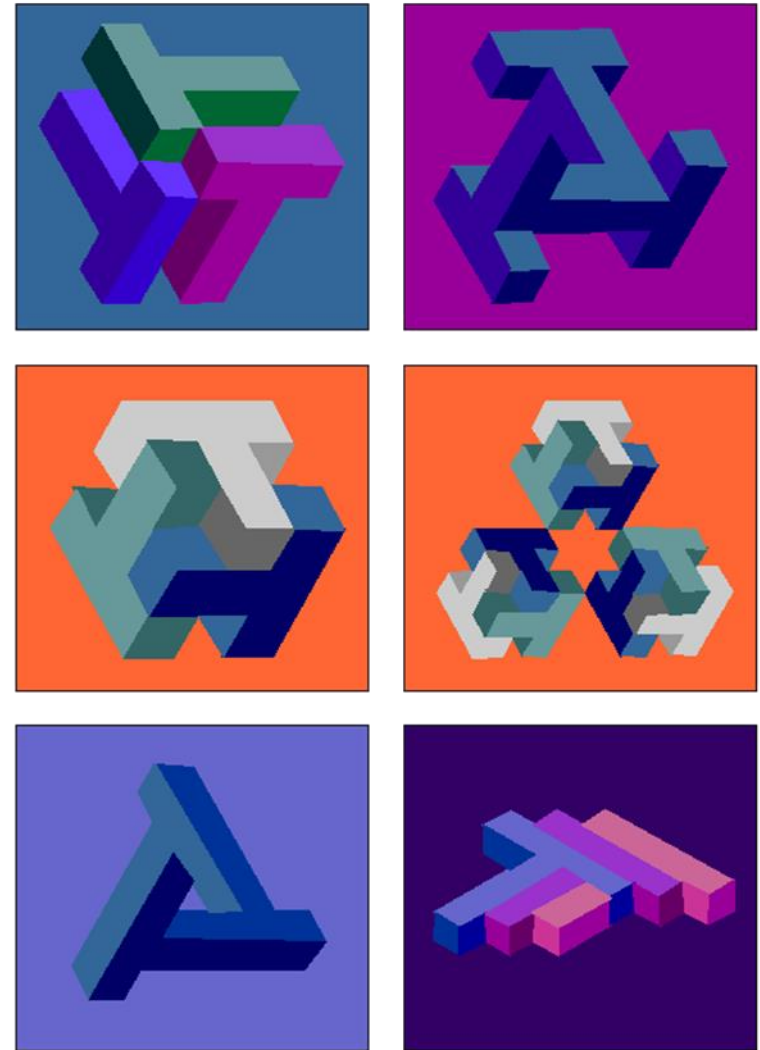
Modularity in Art

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/jablan/d3.htm>

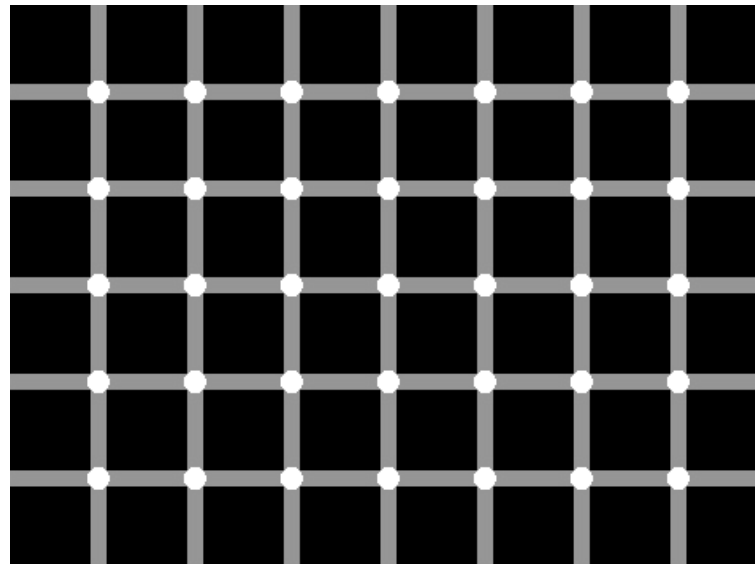
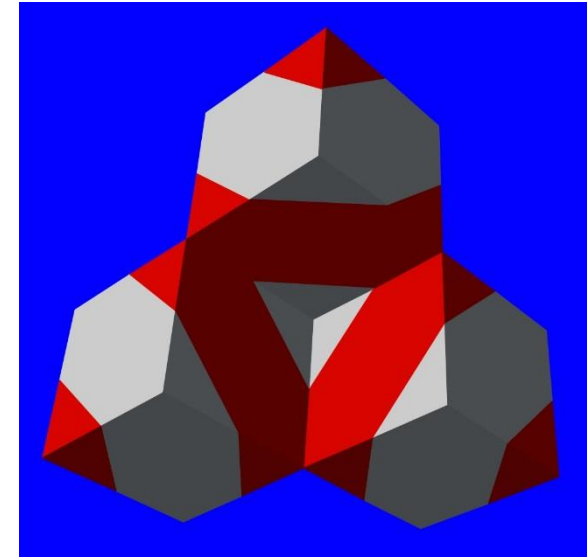
[*SpaceTiles*](#),

[*KnotTiles*](#)

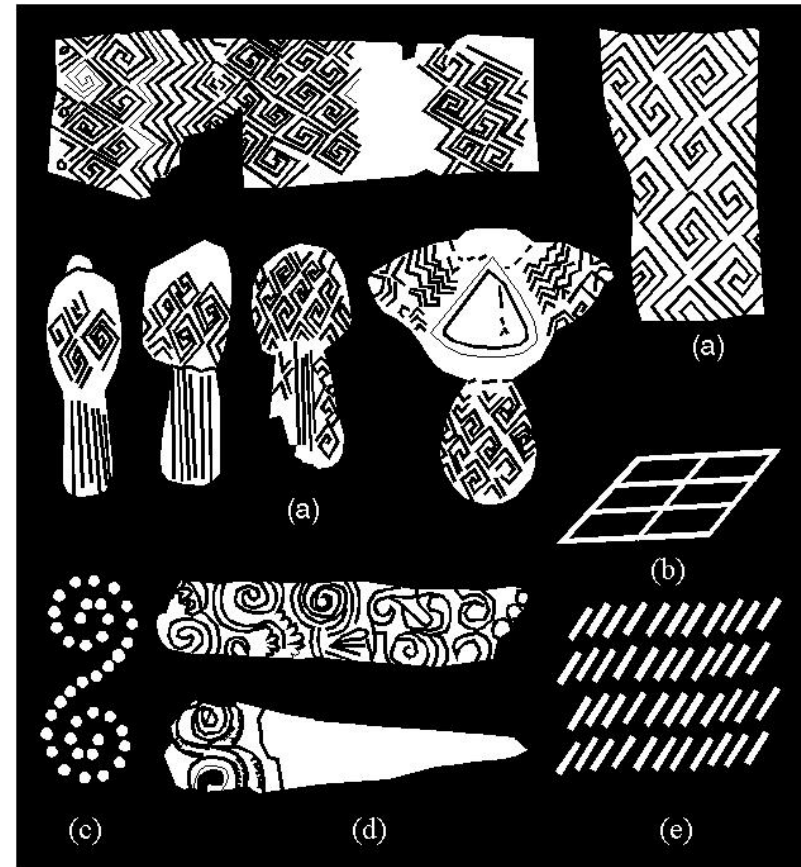
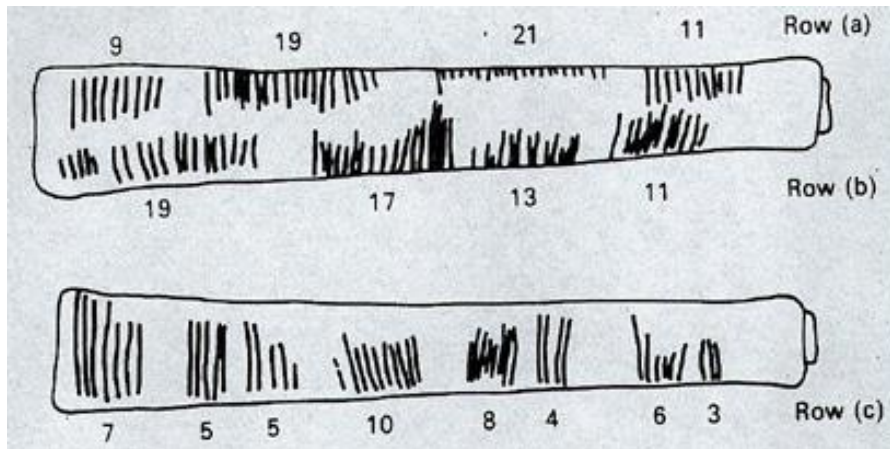
[*OpTiles*](#)



Π.χ. 5) Οπτικές εντυπώσεις με Μαθηματικά

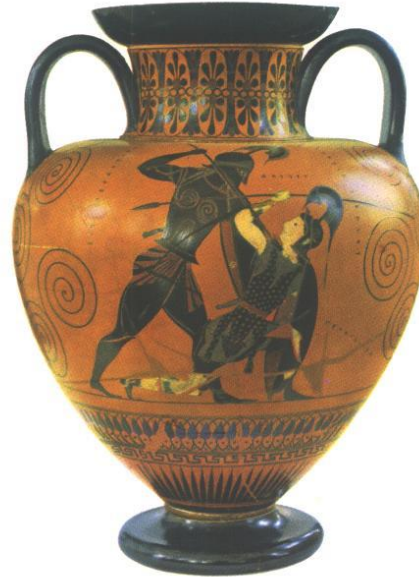
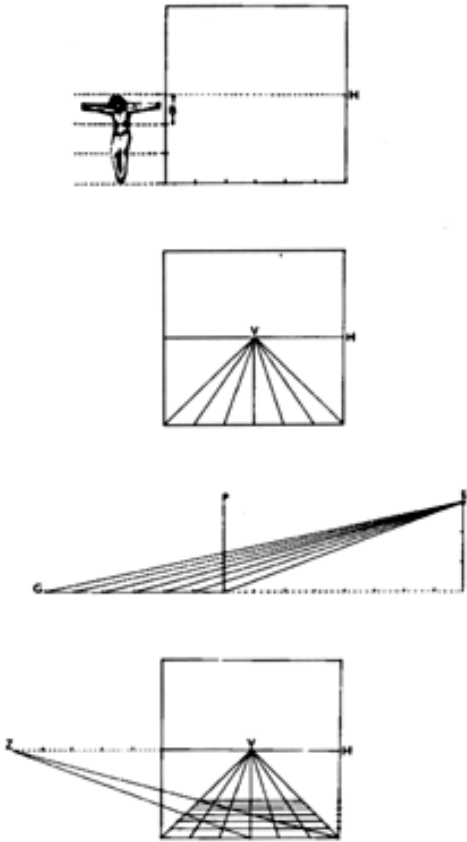


Π.χ. 6) Εθνομαθηματικά



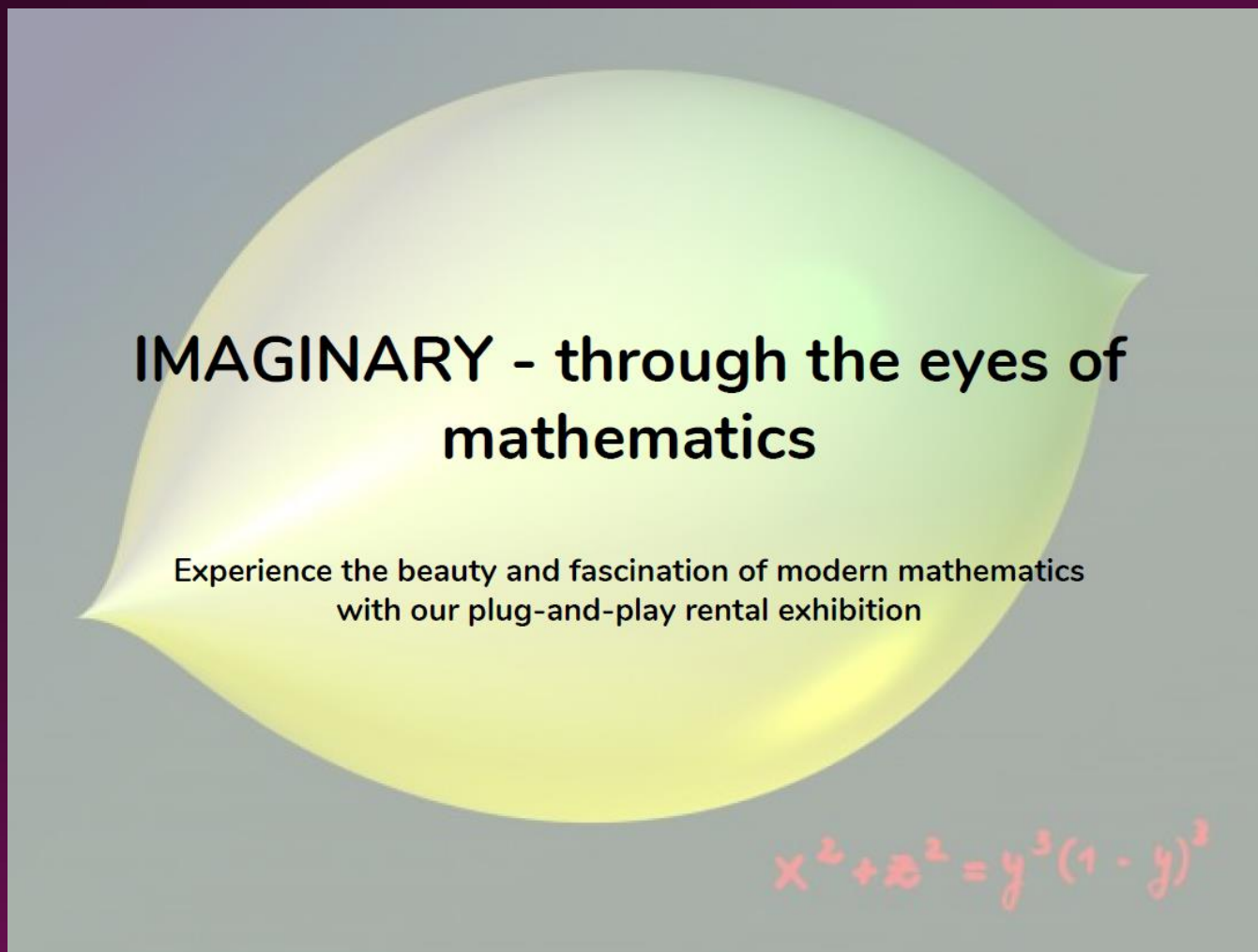
Ishango kost, 20 000 god. p.n.e.

Π.χ. 7) Μελέτη προοπτικών απεικονίσεων



Π.χ. 8) Τα Μαθηματικά στη Μουσική: μετρώντας modulo 12

Π.χ. 9) Μαθαίνοντας με τα προγράμματα του IMAGINARY



Μέσα από τα μάτια των Μαθηματικών

- Το **Imaginary** είναι μια διαδραστική περιφερόμενη έκθεση του Μαθηματικού Ερευνητικού Ινστιτούτου Oberwohlfach



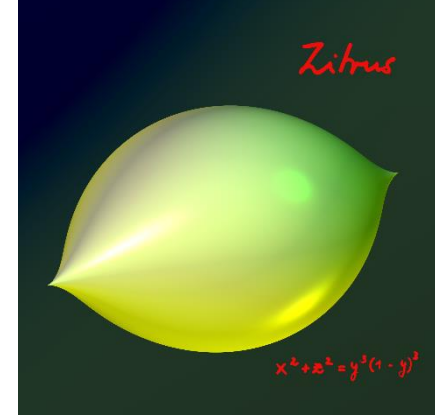
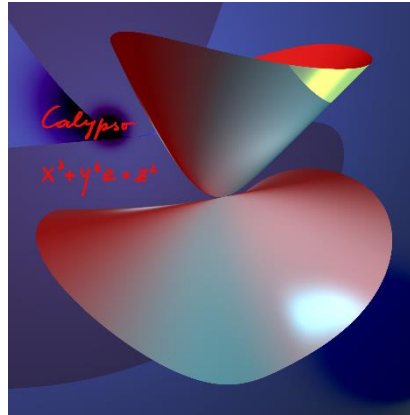
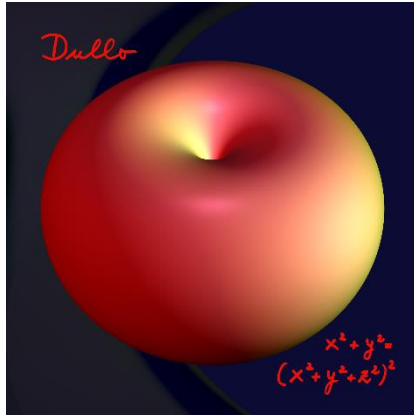
- Δημιουργήθηκε για το Έτος Μαθηματικών 2008 στη Γερμανία
- Σκοπός της είναι να παρουσιάσει απεικονίσεις, διαδραστικά Μαθηματικά και τρισδιάστατα αντικείμενα σε ένα ελκυστικό και κατανοητό πλαίσιο

Διαδραστικά Προγράμματα

- Ένα από τα κύρια προγράμματα της έκθεσης είναι το πρόγραμμα [SURFER](#) που υπολογίζει και παρουσιάζει αλγεβρικές επιφάνειες σε πραγματικό χρόνο. Οι επισκέπτες μπορούν να εισάγουν και να μεταβάλουν πολυωνυμικές εξισώσεις σε τεράστιες οθόνες touchscreen, να μεταβάλουν τις παραμέτρους, να αλλάξουν χρώματα με τα δάχτυλά τους και να σχηματίσουν μαθηματικά αντικείμενα όπως τους αρέσει.

Διευθύνσεις στο διαδίκτυο

- <https://imaginary.org>
- <https://www.mfo.de/>
- <http://10years.imaginary.org/>



Elliptic curves and other square roots

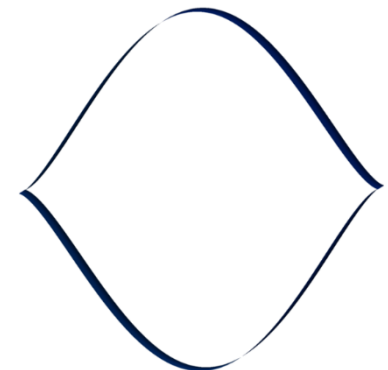
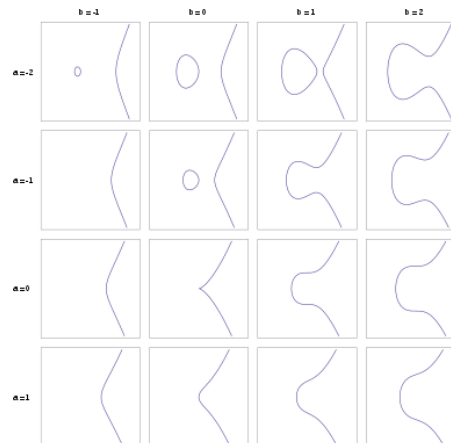
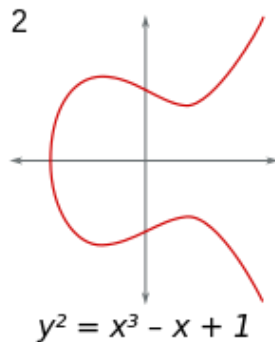
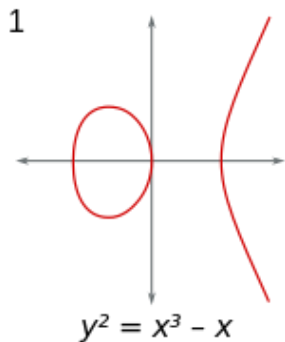
- Square root of a function $f(x)$:
- Equivalent equation:
- **Elliptic curve:**
- **Lemon curve:**

$y = \sqrt{f(x)}$, defined for $f(x) \geq 0$

$$y^2 - f(x) = 0$$

$$y^2 - x^2(x-a) - b = 0$$

$$y^2 + (x-a)^3(x+a)^3 = 0$$



Π.χ. 10) Μαθηματικά Θεατρικά

Όπως:

- **«Η πιο σκοτεινή ώρα του Πυθαγόρα»**

Σενάριο: Colin Adams, Williams College, USA

Μετάφραση: ΣΛ, ΕΜΠ

- **«Μια δύσκολη γέννα»**

Σενάριο: Colin Adams, Williams College, USA

Μετάφραση: Μιχάλης Λουλάκης, ΕΜΠ

- **«Μαθηματική διασκευή της Σταχτοπούτας»**

Σενάριο: Κωνσταντίνα Κουρκουλή, Α2, Β' Αρσάκειο Ψυχικού

(ΌΛΑ ΔΙΑΘΕΣΙΜΑ)

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!