ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
(Σημειώσεις Προετοιμασίας για Μαθηματικούς Διαγωνισμούς)

Κοντοκώστας Δημήτρης

Περιεχόμενα

Οι βασικές αρχές μέτρησης

Woman lives but in her lord;
Count to ten, and man is bored.
With this the gist and sum of it,
What earthly good can come of it?

"General Review of the Sex Situation" (1937)
Dorothy Parker (1893-1967)
(Αμερικανίδα κριτικός και ευθυμογράφος)

1.1 Η Αρχή της Απαρίθμησης: Πως μετράμε πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε ένα σύνολο;

Εντελώς συνοπτικά, η **Συνδυαστική** είναι ένα κομμάτι των Μαθηματικών που επικεντρώνεται στη "μέτρηση" του πλήθους των αντικειμένων ενός συνόλου. Η Συνδυαστική ασχολείται τόσο με την εξεύρεση χρήσιμων τρόπων μέτρησης, όσο και με την πραγματοποίηση των μετρήσεων καθαυτών.

Για παράδειγμα, αν μπορούμε να μεταβούμε από την Αθήνα στη Κατερίνη με δύο μεταφορικά μέσα (αυτοκίνητο και λεωφορείο), και από την Κατερίνη στη Θεσσαλονίκη με τρία μεταφορικά μέσα (αυτοκίνητο, λεωφορείο και ταξί), μπορεί να αναρωτηθούμε για το πλήθος των τρόπων που υπάρχουν για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη διαμέσου Κατερίνης. Το ερώτημα αυτό εμπίπτει αμέσως στην αρμοδιότητα της Συνδυαστικής. Θα απαντηθεί λίγο πιο κάτω παράγραφο, αλλά αξίζει να σκεφτείτε από τώρα την απάντηση μόνοι σας.

Πως μετράμε λοιπόν π.χ. τα αντικείμενα σε έναν σωρό; Ο απλούστερος τρόπος είναι απλώς να απαριθμήσουμε ένα προς ένα τα αντικείμενα του σωρού. Δείχνουμε δηλαδή κάθε ένα αντικείμενο διαδοχικά και αυξάνουμε κατά ένα το πλήθος των μετρημένων ως εκείνη τη στιγμή αντικειμένων, έως ώτου δείξουμε (και μετρήσουμε) όλα τα αντικείμενα του σωρού ακριβώς από μια φορά το καθένα τους. Αυτή η μέθοδος είναι η απλούστερη δυνατή, αλλά και η βασικότερη όλων. Κάθε άλλη μέθοδος μέτρησης εξαρτάται από αυτή άμεσα ή έμμεσα. Την ονομάζουμε **Αρχή της Απαρίθμησης** και μια σχετικώς αυστηρή μορφή της με το όνομα **Προσθετική Αρχή** δίνεται λίγο πιο κάτω.

Ας συμφωνήσουμε πως στο εξής θα ενδιαφερόμαστε για μετρήσεις σε σωρούς με πεπερασμένο πλήθος ανατικειμένων. Η μαθηματική ορολογία για τους σωρούς είναι **σύνολα**, και για τα αντικείμενα είναι **στοιχεία**. Εμείς θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως και τη μαθηματική ορολογία αλλά και τους ανεπίσημους χαρακτηρισμούς (σωροί, αντικείμενα). Θα υποθέσουμε πως τα πολύ στοιχειώδη για τα σύνολα είναι γνωστά (όπως π.χ. ο συμβολισμός τους, οι πράξεις μεταξύ συνόλων κτλ). Είναι βολικό να συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου S με $|S|$, που μας θυμίζει την απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών. Ο αριθμός $|S|$ ονομάζεται **πληθικότητα** ή **πληθικός αριθμός** του S και για τα πεπερασμένα σύνολα S είναι ένας φυσικός αριθμός. Αν το σύνολο S δεν έχει στοιχεία θα το συμβολίζουμε ως συνήθως $\emptyset$ και τότε φυσικά θα είναι $|S| = |\emptyset| = 0$. Ας σημειώσουμε πως θα συναντήσουμε καταστάσεις όπου ένα σύνολο

S θα **διαμερίζεται** σε πεπερασμένο πλήθος άλλων συνόλων $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Αυτό θα σημαίνει πως ανά δύο τα σύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_n$ δε θα έχουν κοινά στοιχεία (θα είναι δηλαδή **ξένα μεταξύ τους** όπως λέμε αλλιώς) και ταυτόχρονα η ένωσή όλων τους θα είναι το S.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τους βασικότερους τρόπους μέτρησης καθώς και μερικά παραδείγματα εξοικείωσης με αυτούς. Το υλικό αυτό αποτελεί μια σύντομη και ήπια εισαγωγή στις μεθόδους και το περιεχόμενο της Συνδυαστικής. Αλλά δεν θα πρέπει να ξεγελαστείτε. Παρότι ο μέθοδοι θα φανούν μάλλον ταπεινές, στην πραγματικότητα είναι πανίσχυρες, και δίχως πιθανώς να το αντιληφθείτε θα βρεθείτε σε θέση να ασχολείστε με εκπληκτικά ερωτήματα μέτρησης. Οι πιο προχωρημένες μέθοδοι της Συνδυαστικής που αποτελούν αντικείμενο μεταπτυχιακών Σπουδών στα Μαθηματικά βασίζονται στα λίγα που θα παραθέσουμε πιο κάτω.

1.2 Η Προσθετική Αρχή

Η μορφή της Προσθετικής Αρχής που μας ενδιαφέρει να διατυπώσουμε επισήμως, αναφέρεται στη μικρή γενίκευση της Αρχής της Απαρίθμησης όπου υπάρχουν δύο ή περισσότεροι σωροί από διαφρετικά αντικείμενα και θέλουμε να μετρήσουμε συνολικά πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε όλους τους σωρούς:

> **Προσθετική Αρχή**. Αν ένα πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων S διαμερίζεται σε (θυμηθείτε: ξένα μεταξύ τους) υποσύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_n$, τότε το πλήθος των αντικειμένων του S ισούται με το άθροισμα των πληθών των αντικειμένων στα $S_1, S_2, \ldots, S_n$, δηλαδή
> $$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$$

Με την ευκαιρία, εξηγήστε το γιατί θεωρούμε την Προσθετική Αρχή ως γενίκευση του απλού τρόπου απαρίθμησης των αντικειμένων ενός μοναδικού σωρού;

Μερικά παραδείγματα θα μας βοηθήσουν:

Παράδειγμα 1.1 Ένας μαθητής έχει να επιλέξει για κάποιο Σαββατιάτικο απόγευμα μεταξύ της ανάγνωσης ενός από τα τρία σχολικά μαθήματα στα οποία θα εξεταστεί τη Δευτέρα, ή της συμμετοχής του στον καθιερωμένο αγώνα ποδοσφαίρου της γειτονιάς του ή στον αγώνα καλαθοσφαίρισης των συμμαθητών του στην αυλή του σχολείου.

Μας ενδιαφέρει να βρούμε (να μετρήσουμε) το πλήθος των διαφορετικών αντικειμένων απασχόλησης του μαθητή για το συγκεκριμένο Σαββατιάτικο απόγευμα.

Το ερώτημα είναι τόσο απλό που η απάντηση δίνεται αμέσως: 5. Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε την Προσθετική Αρχή επισήμως, θα μπορούσαμε να το κάνουμε κάπως έτσι: τα αντικείμενα απασχόλησης διαμερίζονται στα σχολικά μαθήματα (τα οποία είναι 3) και στις αθλοπαιδιές (οι οποίες είναι 2). Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος είναι $3 + 2 = 5$. □

Ένα μεγάλο πρόβλημα στην προσπάθειά μας να προβούμε σε τέτοιες μετρήσεις προκύπτει από το γεγονός πως δεν έχουμε πάντοτε ξεκάθαρο στο μυαλό μας το τι ακριβώς θέλουμε να μετρήσουμε. Π.χ. στο τελευταίο παράδειγμα μπορεί εύκολα να προκύψει πρόβλημα αν δεν ξεκαθαρίσουμε το τι εννοούμε λέγοντας "αντικείμενο απασχόλησης". Αν λοιπόν θεωρήσουμε πως διαφορετικά αντικείμενα απασχόλησης είναι μονάχα το "διάβασμα" και η "αθλοπαιδιάδα", τότε προφανώς η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι $1 + 1 = 2$.

Το σημείο αυτό είναι αρκετά πιο "λεπτό" από ότι ίσως φαίνεται εδώ. Θα ήταν λοιπόν εξαιρετικά χρήσιμο σε ότι ακολουθεί να ξεκαθαρίζουμε πρώτα στο μυαλό μας το τι ακριβώς επιθυμούμε να μετρήσουμε.

Παράδειγμα 1.2 Μια σακούλα περιέχει 5 καραμέλες και μια άλλη 6 μπισκότα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα γλύκισμα από τις δύο αυτές σακούλες;

Φανερά οι δυνατές επιλογές μας είναι όσες και το πλήθος των αντικειμένων που περιέχουν οι δύο αυτές σακούλες. Δηλαδή σύμφωνα με την προσθετική αρχή κατά $5 + 6 = 11$ τρόπους. □

Ας σκεφτούμε τώρα για το αν αυτό είναι που θέλουμε να μετρήσουμε. Αν δεν ενδιαφερόμαστε να διακρίνουμε τις 5 καραμέλες ως ξεχωριστά αντικείμενα και ομοίως για τα 6 μπισκότα, τότε το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στο αν η επιλογή μας θα είναι καραμέλα ή μπισκότο, δηλαδή τότε έχουμε μόνο $1 + 1 = 2$ επιλογές. Αν πάλι δεν ενδιαφερόμαστε να διακρίνουμε μεταξύ καραμέλας ή μπισκότου και απλώς τα θεωρήσουμε αμφότερα ως "γλύκισμα", τότε ασφαλώς έχουμε μία μοναδική επιλογή!

Θα πρέπει λοιπόν πάντοτε να ξεκαθαρίζουμε το τι ακριβώς επιθυμούμε να μετρήσουμε...

1.3 Η Πολλαπλασιαστική Αρχή

Υπάρχουν διάφορες γενικεύσεις της Προσθετικής Αρχής. Η πλέον ενδιαφέρουσα γενίκευση έχει δικό της όνομά:

> **Πολλαπλασιαστική Αρχή**. Αν $S_1, S_2, \ldots, S_n$ είναι κάποια πεπερασμένα σύνολα αντικειμένων ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε ένα αντικείμενο από *κάθε ένα* σύνολο από τα S_i ισούται με
> $$|S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_n|.$$

Παρατηρήστε πως στη διατύπωση της Πολλαπλασιαστικής Αρχής χρησιμοποιήσαμε τις λέξεις και φράσεις "πλήθος τρόπων", "επιλογή". Αυτή είναι συνηθισμένη ορολογία όταν εκτελούμε μετρήσεις αντικειμένων σε σύνολα. Σύντομα θα μας γίνει συνήθεια. Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης της Αρχής αυτής θα ήταν να δώσουμε όνομα στο σύνολο που περιέχει όλους τους τρόπους επιλογής ενός αντικειμένου από καθένα από τα S_i και να μιλήσουμε για το πλήθος των αντικειμένων αυτού του συνόλου. Δηλαδή στην πραγματικότητα, και η Πολλαπλασιαστική Αρχή αναφέρεται όπως και η Προσθετική στο πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου· όπως ακριβώς θα περιμέναμε από τις γενικές εξαγγελίες στην αρχή των σημειώσεων σχετικά με την έννοια της Συνδυαστικής.

Με την ευκαιρία, με ποια έννοια νομίζετε πως η Πολλαπλασιαστική Αρχή αποτελεί γενίκευση της Προσθετικής;

Ορίστε μια ακόμη διατύπωση της πολλαπλσιαστικής αρχής όταν περιοριζόμαστε σε δύο μόνο σύνολα:

> Αν μια επιλογή μπορεί να γίνει κατά m τρόπους και μια επόμενη επιλογή κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $n \cdot m$ τρόποι με τους οποίους οι επιλογές αυτές μπορούν να γίνουν διαδοχικά.

Διατυπώστε μια γενικότερη μορφή της πολλαπλασιαστικής αρχής με παρόμοιο τρόπο.

Να και μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.3 Αν υπάρχουν δύο μεταφορικά μέσα για να μεταβούμε από την Αθήνα στην Κατερίνη (αυτοκίνητο και λεωφορείο), και τρία μεταφορικά μέσα για να μεταβούμε από την Κατερίνη στη Θεσσαλονίκη (αυτοκίνητο, λεωφορείο και ταξί), πόσοι τρόποι υπάρχουν για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη διαμέσου Κατερίνης;

Θα θεωρήσουμε πως οι τρόποι είναι διαφορετικοί όταν σε κάποιο τμήμα της διαδρομής είτε από την Αθήνα προς την Κατερίνη είτε από την Κατερίνη προς τη Θεσσαλονίκη χρησιμοποιούμε διαφορετικό μεταφορικό μέσο.

Ουσιαστικά μας ζητείται να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα μεταφορικό μέσο για το πρώτο μέρος της διαδρομής και ένα μεταφορικό μέσο για το δεύτερο μέρος της διαδρομής. Γνωρίζουμε πως υπάρχουν 2 επιλογές για το πρώτο μέρος της διαδρομής και 3 επιλογές για το δεύτερο μέρος της. Τότε σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή έχουμε συνολικά $2 \cdot 3 = 6$ διαφορετικές επιλογές για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη διαμέσου Κατερίνης. □

Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να μετρήσουμε το ζητούμενο πλήθος των διαφορετικών τρόπων μετάβασης από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη με μια απλή καταγραφή όλων αυτών των τρόπων:

αυτ/το, αυτ/το	αυτ/το, λεωφορείο	αυτ/το, ταξί
λεωφορείο, αυτ/το	λεωφορείο, λεωφορείο	λεωφορείο, ταξί

Βρίσκουμε λοιπόν πάλι πως οι διαφορετικοί τρόποι είναι 6. Η δύναμη της Πολλαπλασιαστικής Αρχής έγκειται στο γεγονός πως δεν είναι απαραίτητο να καταγράψουμε όλους τους δυνατούς τρόπους έναν προς έναν. Φανταστείτε να ήταν αυτοί συνολικά 10.000! Δε συμφωνείτε πως το να βρούμε το πλήθος των τρόπων δίχως απαραιτήτως να τους καταγράψουμε όλους αποτελεί σαφές πλεονέκτημα; Αν συμφωνείτε, τότε έχετε αντιληφθεί και το λόγο ύπαρξης της Συνδυαστικής!

Αλλά γιατί νομίζετε πως χρησιμοποιήσαμε την Πολλαπλασιαστική Αρχή στο παράδειγμα αντί της Προσθετικής; Θα βοηθήσει ίσως να επαναδιατυπώσουμε την Προσθετική Αρχή με παρόμοια φρασεολογία με αυτή της Πολλαπλσιαστικής, ώστε να αναφέρεται και αυτή σε πλήθος επιλογών που επιθυμούμε να πραγματοποιήσουμε· π.χ. κάπως έτσι:

Προσθετική Αρχή (δεύτερη διατύπωση). Αν $S_1, S_2, \ldots, S_n$ είναι κάποια πεπερασμένα σύνολα αντικειμένων ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε ένα αντικείμενο από *κάποιο* σύνολο από τα S_i ισούται με

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$$

Την Πολλαπλασιαστική αρχή τη χρησιμοποιούμε όταν επιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάθε ένα σύνολο από τα S_i· δηλαδή ένα από το S_1 και ένα από το S_2 κ.ο.κ. και ένα από το S_n. Από την άλλη, την Προσθετική Αρχή τη χρησιμοποιούμε όταν πιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάποιο σύνολο από τα S_i· δηλαδή ένα από το S_1 ή ένα από το S_2 κ.ο.κ. ή ένα από το S_n. Αντιλαμβάνεστε τώρα το λόγο που στο Παράδειγμα 1.3 χρησιμοποιούμε την Πολλαπλασιαστική Αρχή αντί της Προσθετικής;

Ας σημειώσουμε επίσης πως και στις δύο αρχές είναι σημαντικό να θεωρούμε τα σύνολα S_i ξένα μεταξύ τους, ώστε επιλέγοντας ένα αντικείμενο (στοιχείο) σε κάποιο από αυτά, να μην σημαίνει τούτο πως επιλέξαμε ταυτόχρονα και κάποιο στοιχείο ενός από τα υπόλοιπα σύνολα! Π.χ. στο Παράδειγμα 1.3, αν S_1 και S_2 είναι τα σύνολα των μεταφορικών μέσων μετάβασης από την Αθήνα στη Νάουσα και από τη Νάουσα στη Θεσσαλονίκη αντιστοίχως τότε $S_1 = \{$αυτοκίνητο, λεωφορείο$\}$, $S_2 = \{$αυτοκίνητο, λεωφορείο, ταξί$\}$. Επιλέγοντας το αυτοκίνητο του S_1 για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Νάουσα, ασφαλώς δεν σημαίνει πως έχουμε επιλέξει ταυτόχρονα και το αυτοκίνητο του S_2 για τη μετάβαση από τη Νάουσα στη Θεσσαλονίκη! Το ότι συμβολίσαμε ως "αυτοκίνητο" ένα στοιχείο τόσο του S_1 όσο και του S_2 είναι προφανώς κακή επιλογή μας. Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει πολύ καλύτερο συμβολισμό για τα στοιχεία των S_1, S_2 ώστε να γίνεται φανερό πως επιλέγοντας ένα στοιχείο του S_1 για το πρώτο τμήμα της διαδρομής μας αυτό δεν επιβάλει την επιλογή ενός συγκεκριμένου στοιχείου του S_2 για το δεύτερο τμήμα της. Τέτοιες λεπτομέρειες γίνονται συχνά αιτία λάθος υπολογισμών. Πρέπει λοιπόν να δείχνετε τη δέουσα προσοχή.

Παράδειγμα 1.4 Μια κοπέλα ετοιμάζεται για τη βραδυνή της έξοδο. Έχει να επιλέξει μεταξύ 6 ζευγαριών παπουτσιών για τα παπούτσια που θα φορέσει. Επίσης, έχει να επιλέξει μεταξύ 7 φορεμάτων για τη φούστα της, 12 μπλουζών, 3 ζευγαριών σκουλαρικιών, 2 ρολογιών, 4 αλυσίδων λαιμού και 12 σετ εσωρούχων.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ντυθεί η κοπέλα για τη βραδυνή της έξοδο;

Ασφαλώς θα θεωρήσουμε πως η κοπέλα θα επιλέξει 1 φούστα, 1 μπλούζα, 1 ζευγάρι σκουλαρίκια κτλ. Και θα θεωρήσουμε πως δύο ενδυμασίες είναι διαφορετικές όταν μία τουλάχιστον από τις επιμέρους επιλογές είναι διαφορετικές.

Για τη ζητούμενη απάντηση θα χρησιμοποιήσουμε φυσικά την Πολλαπλασιαστική Αρχή (βλέπετε το γιατί;) που μας δίνει $6 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12 = 725.740$ διαφορετικούς τρόπους βραδυνής ένδυσης! □

Ας σημειώσουμε πως οι διαδοχικές επιλογές στις οποίες αναφέρεται η Πολλαπλασιαστική αρχή είναι δυνατόν να είναι αλληλοεξαρτόμενες. Αυτό δε φάνηκε στα προηγούμενα Παραδείγματα. Ας δουλέψουμε λοιπόν ένα ακόμη:

Παράδειγμα 1.5 Θέλουμε να τοποθετήσουμε τα τρία παιδιά μιας οικογένειας στη σειρά (από δεξιά προς τα αριστερά) ώστε να τα φωτογραφήσουμε. Αν A, B, Γ τα τρία παιδιά, τότε όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα διατάξουμε στη σειρά είναι οι εξής 6: $(A, B, \Gamma), (A, \Gamma, B), (B, A, \Gamma)$, $(B, \Gamma, A), (\Gamma, A, B), (\Gamma, B, A)$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Θέλουμε να τοποθετήσουμε τα τρία παιδιά σε τρεις θέσεις (αριστερή, μεσαία , δεξιά). Μία οποιαδήποτε τοποθέτηση μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας ένα παιδί για την αριστερή θέση, κατόπιν ένα άλλο παιδί για τη μεσαία θέση και τέλος ένα άλλο παιδί για τη δεξιά θέση. Η πρώτη επιλογή μπορεί να γίνει κατά 3 τρόπους αφού στην αριστερή θέση μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιοδήποτε από τα αδέρφια. Όμως η επόμενη επιλογή για τη μεσαία θέση, μπορεί πλεόν να γίνει κατά 2 μόνο τρόπους αφού το ένα από τα αδέρφια έχει ήδη τοποθετηθεί στην αριστερή θέση. Και τέλος η επόμενη επιλογή για τη δεξιά θέση μπορεί να γίνει κατά 1 μόνο τρόπο αφού δύο από τα αδέρφια έχουν ήδη τοποθετηθεί στην αριστερή και τη μεσαία θέση. Οπότε η (γενικευμένη) πολλαπλασιαστικά αρχή (για τρεις συνεχόμενες επιλογές) μας βεβαιώνει πως οι αυτές οι διαδοχικές επιλογές, δηλαδή οι τοποθετήσεις που μας ενδιαφέρουν, μπορούν να γίνουν κατά $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόπους, όπως ήδη γνωρίζουμε.

Παρατηρήστε πως στο παράδειγμα αυτό, κάθε επόμενη επιλογή (οπότε και το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί) εξαρτάται από τις επιλογές που έχουν ήδη γίνει. Στα επόμενα θα συναντήσουμε συχνά την κατασταση αυτή. □

Την Πολλαπλασιαστική Αρχή θα τη συναντήσουμε ξανά πιο κάτω. Πρώτα όμως αξίζει να δούμε μια ακόμη εκπληκτικά απλή Αρχή μέτρησης με εκπληκτικά αποτελέσματα.

1.4 Η Αρχή της Διπλής Μέτρησης

> **Η Αρχή της Διπλής Μέτρησης**. Μετρώντας τα στοιχεία ενός συνόλου με δύο διαφορετικούς τρόπους, τα αποτελέσματα είναι τα ίδια.

Ένα παράδειγμα θα ρίξει φως στον τρόπο εφαρμογής της Αρχής.

Παράδειγμα 1.6 (Το Λήμμα των χειραψιών) Σε κάθε συγκέντρωση, το πλήθος των ατόμων που χαιρετούν με χειραψία ένα περιττό πλήθος άλλων ατόμων, είναι άρτιο. □

Απόδειξη. Ας είναι $A_1, A_2, \ldots, A_n$ τα άτομα στη συγκέντρωση. Ας συμβολίσουμε με x_i το πλήθος των χειραψιών του τυχαίου A_i. Θέλουμε να δείξουμε πως μεταξύ των x_i υπάρχει άρτιο πλήθος περιττών αριθμών.

Αν οι A_i, A_j αντάλλαξαν χειραψία θα λέμε πως τα διατεταγμένα ζεύγη $(A_i, A_j), (A_j, A_i)$ συναίβησαν. Θα δείξουμε το ζητούμενο μετρώντας με δύο διαφορετικούς τρόπους το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών που συναίβησαν:

1η μέτρηση: Αφού για κάθε άτομο A_i υπάρχουν x_i άλλα άτομα με τα οποία αντάλλαξε χειραψία, υπάρχουν συνολικά $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ διατεταγμένα ζεύγη που συναίβησαν.

2η μέτρηση: Υποθέτοντας πως συνολικά ανταλλάχθηκαν y κανονικές χειραψίες (δηλαδή μη-διατεταγμένες), ας παρατηρήσουμε πως κάθε μία από αυτές γεννά ακριβώς δύο διατεταγμένα ζεύγη που συναίβησαν (π.χ. μια χειραψία μεταξύ των A_2 και A_3 γεννά τα διατεταγμένα ζεύγη (A_2, A_3) και (A_3, A_2)). Οπότε υπάρχουν ακριβώς $2y$ διατεταγμένα ζεύγη που συναίβησαν. Αυτό αληθεύει ακομη κι όταν $y = 0$.

Αφού σύμφωνα με την Αρχή της Διπλής Μέτρησης τα δύο αποτελέσματα είναι ίδια, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2y.$$

Συνεπώς το άθροισμα των x_i είναι άρτιο. Αυτό σημαίνει πως άρτιο πλήθος από αυτούς είναι περιττοί αριθμοί όπως ζητούσαμε να δείξουμε.

(Αν δε βλέπετε αμέσως το γιατί, συμπεράνετε πρώτα πως όλοι μαζί οι περιττοί x_i πρέπει να έχουν άρτιο άθροισμα, οπότε πράγματι θα πρέπει να υπάρχουν άρτιοι σε πλήθος περιττοί). □

Στην πορεία θα δούμε κι άλλες εφαρμογές της Αρχής της Διπλής Μέτρησης.

1.5 Η Αρχή του Χρωματισμού

Η αρχή αυτή δεν έχει επίσημο κανόνα. Συνίσταται στο να μετράμε το πλήθος κάποιων γεωμετρικών συνήθως αντικειμένων προσδίδοντάς τους καταλλήλως ορισμένα χρώματα. Έτσι στο Παράδειγμα 1.7 που ακολουθεί, χρωματίζουμε με έναν ιδιαίτερο τρόπο τα τετραγωνάκια ενός τετραγωνισμένου πίνακα. Για περισσότερη εξοικείωση με την "Αρχή" του χρωματισμού καλείστε να ασχοληθείτε με τις Ασκήσεις 1.38 - 1.41.

Ας σταθεροποιήσουμε την ορολογία μας τόσο για το Παράδειγμα όσο και για τις Ασκήσεις ονομάζοντας $n \times m$ **τετραγωνισμένο πίνακα** ή στο εξής απλώς **πίνακα**, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων n και m το οποίο διαιρέθηκε σε $n \times m$ ίσα τετράγωνα, τα οποία στο εξής θα ονομάζουμε και **κουτάκια** ή **κουτιά**, με ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Ας ονομάσουμε ιδιαίτερα **ντόμινο** έναν πίνακα 2×1. Στο εξής όποτε ντόμινο και πίνακας αναφέρονται μαζί, θα υποθέτουμε πως τα κουτάκια τους είναι ίσα. Δύο ντόμινο τοποθετημένα στο επίπεδο θα τα ονομάζουμε **επικαλυπτόμενα** ακριβώς όταν έχουν κάποιο κοινό εσωτερικό σημείο. Οπότε αν για παράδειγμα δύο ντόμινο στο επίπεδο μοιράζονται μια πλευρά τους και τίποτε άλλο, αυτά δεν θα είναι επικαλυπτόμενα. Μία τοποθέτηση μη επικαλυπτόμενων ντόμινο επάνω σε έναν πίνακα ώστε να τον καλύπτουν πλήρως δίχως κάποιο μέρος τους να βρίσκεται στο εξωτερικό του πίνακα, την ονομάζουμε **κάλυψη** του πίνακα (από ντόμινο). Την έννοια της κάλυψης τη γενικεύουμε και για κάθε υποσύνολο ενός πίνακα που προκύπτει με αφαίρεση κάποιων κουτιών του (κρατούμε όμως όσα μέρη του συνόρου των κουτιών είναι απαραίτητο ώστε ο κομμένος πίνακας να γίνεται χωρίο με σύνορο κάποιες κλειστές πολυγωνικές γραμμές).

Παράδειγμα 1.7 *Από έναν 8×8 πίνακα αφαιρούμε δύο γωνιακά του κουτάκια που ανήκουν στην ίδια διαγώνιο. Δείξτε πως είναι αδύνατο να καλύψουμε τον κομμένο πίνακα με μη επικαλυπτόμενα ντόμινο.* □

Λύση. Χρωματίζουμε τα 64 κουτάκια του αρχικού πίνακα εναλλλάξ με τα χρώματα άσπρο και μαύρο όπως σε μια σκακιέρα. Οπότε ο πίνακας θα έχει 32 άσπρα και 32 μαύρα κουτάκια.

Παρατηρήστε πως τα δύο γωνιακά κουτάκια οποιασδήποτε διαγωνίου του έχουν το ίδιο χρώμα, άσπρο για τη μια διαγώνιο και μαύρο για την άλλη. Συνεπώς αφαιρώντας τα, ο νέος κομμένος πίνακας θα έχει είτε 30 άσπρα και 32 μαύρα κουτάκια, είτε 32 μαύρα και 30 άσπρα.

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν πως σε αντίθεση με ότι μας ζητείται να αποδείξουμε, πως είναι δυνατό να καλύψουμε τον κομμένο πίνακα με ντόμινο· θα χρειαστούμε φυσικά 31 από αυτά. Ας παρατηρήσουμε όμως πως όπως κι αν τοποθετηθεί το οποιοδήποτε από τα ντόμινο πάνω στον κομμένο πίνακα, θα καλύπτει δύο διαδοχικά κουτάκια του αρχικού, οπότε το ένα κουτάκι του χρωματίζεται άσπρο και το άλλο μαύρο. Δηλαδή τα 31 ντόμινο της κάλυψης του κομμένου πίνακα πρέπει να καλύπτουν συνολικά 31 άσπρα και 31 μαύρα κουτάκια, άτοπο αφού γνωρίζουμε πως ο πίνακας αυτός έχει περίσσεια κουτιών του ενός χρώματος και έλλειμα του άλλου. Οπότε το ζητούμενο ισχύει. □

Άσκηση 1.8 Γενικεύστε το τελευταίο Παράδειγμα. □

1.6 Υποσύνολα και Διωνυμικοί Συντελεστές

Ας αρχίσουμε με ένα Παράδειγμα με τη μορφή Προβλήματος.

Παράδειγμα 1.9 Πόσα υποσύνολα έχει ένα σύνολο n στοιχείων; (Απάντηση: 2^n) □

Λύση. Δημιουργώντας υποσύνολα του δοσμένου συνόλου πρέπει για κάθε ένα από τα n σ-τοιχεία του να κάνουμε την επιλογή αν θα το βάλουμε στο υποσύνολο ή όχι. Για κάθε σ-τοιχείο του δοσμένου έχουμε 2 επιλογές, οπότε η Πολλαπλασιαστική Αρχή μας δίνει συνολικά $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ επιλογές, δηλαδή 2^n υποσύνολα.

Αν θέλετε να το σκεφτείτε πιο αναλυτικά, πείτε πως σε κάθε ένα από τα n στοιχεία a_i του δοσμένου συνόλου προσαρτούμε το σύνολο $S_i = \{\text{ναι, όχι}\}$. Για να δημιουργήσουμε ένα τυχαίο υποσύνολο του δοσμένου συνόλου, πρέπει να κάνουμε μια επιλογή από καθένα από τα S_i και σύμφωνα με την επιλογή αυτή να βάλουμε ή να μην βάλουμε το a_i στο υποσύνολο που δημιουργούμε. Το πλήθος των υποσυνόλων θα ισούται λοιπόν με το πλήθος των επιλογών που μπορούμε να κάνουμε επιλέγοντας ένα στοιχείο από κάθε ένα από τα S_i. Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή, το ζητούμενο πλήθος των δυνατών επιλογών ισούται με $|S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. □

Φυσικά κάθε σύνολο n στοιχείων έχει το ίδιο πλήθος υποσυνόλων, 2^n. Τι αξία δίνετε στην παρατήρηση αυτή;

Ας υπολογίσουμε τώρα το πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων.

Αρχικά παραφράζουμε ελαφρώς το πρόβλημα στο ισοδύναμό του: δεδομένου ενός συνόλου n στοιχείων με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k από αυτά; Σε αυτή τη μορφή το πρόβλημα αναφέρεται σε πλήθος επιλογών, και έχουμε ήδη δει κάποιες Αρχές μέτρησης που αναφέρονται σε πλήθος επιλογών και που μπορεί να μας βοηθήσουν. Πράγματι ας σκεφτούμε ως εξής:

Για το "πρώτο" στοιχείο που επιλέγουμε υπάρχουν φανερά n επιλογές. Οπότε για το "δεύτερο" στοιχείο που επιλέγουμε υπάρχουν μόνο $n-1$ επιλογές, κ.ο.κ., οπότε για το "k-στό" στοιχείο που επιλέγουμε υπάρχουν μόνο $n-(k-1)$ επιλογές. Η Πολλαπλασιαστική Αρχή μας βεβαιώνει πως υπάρχουν συνολικά $n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1)$ επιλογές k στοιχείων μεταξύ των δοσμένων n στοιχείων του αρχικού συνόλου. Όμως θα πρέπει να είμαστε προσεχτικοί. Τις λέξεις "πρώτο" , "δεύτερο" κτλ. τις σημειώσαμε μέσα σε εισαγωγικά αφού στην πραγματικότητα τα στοιχεία του υποσυνόλου που δημιουργούμε δεν διατάσσονται σε "πρώτο" , "δεύτερο" κτλ. Δηλαδή, αν επιλέγαμε τα ίδια k σε πλήθος στοιχεία αλλά με διαφορετική σειρά, θα δημιουργούσαμε και πάλι το ίδιο υποσύνολο του αρχικού. Θα πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε για k στοιχεία με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στη σειρά (να τα διατάξουμε) και κατόπιν να διαιρέσουμε με αυτό τον αριθμό τον $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ ώστε να βρούμε το σωστό πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία που ζητάμε.

Έχουμε λοιπόν (όπως και πριν): Δοδομένων k στοιχείων, τα τοποθετούμε στη σειρά σε k θέσεις, με k επιλογές για το στοιχείο της πρώτης θέσης, οπότε με $k-1$ επιλογές για το στοιχείο της δεύτερης θέσης, κ.ο.κ. με 2 επιλογές για το στοιχείο της προτελευταίας θέσης και με 1 μόνο επιλογή για το στοιχείο της τελευταίας θάσης. Η Πολλαπλασιαστικά Αρχή δίνει λοιπόν πως υπάρχουν $k(k-1)\ldots 2 \cdot 1$ τρόποι για να τοποθετήσουμε k στοιχεία στη σειρά. Οπότε:

Πρόταση 1.10 *Το πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων ισούται με*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

Εδώ είναι $0 \leq k \leq n$ και n, k φυσικοί αριθμοί. □

Για συμβολική ευκολία έχουμε επινοήσει το συμβολισμό $\binom{n}{k}$ για το κλάσμα στην Πρόταση αυτή. Το σύμβολο αυτό το ονομάζουμε **διωνυμικό συντελεστή** για λόγους που θα φανούν λίγο αργότερα, και το διαβάζουμε "**n ανά k**". Επίσης, για τα μεγάλα γινόμενα των διαδοχικών φυσικών στον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος έχουμε επινοήσει το συμβολισμό $1 \cdot 2 \cdots n = n!$ όπου n φυσικός αριθμός. Διαβάζουμε "**n παραγοντικό** ". Για $n = 0$ είναι βολικό να ορίσουμε $0! = 1$. Με τους συμβολισμούς αυτούς η Πρότασή μας γράφεται ως

Πρόταση 1.10 *Το πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων ισούται με*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Δικαιολογήστε την τελευταία ισότητα.

Οι διωνυμικοί συντελεστές έχουν πλήθος ιδιοτήτων και εμφανίζονται πολύ συχνά σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών. Αξίζει λοιπόν να δούμε ορισμένες από τις ιδιότητές τους. Όπως εξάλλου αξίζει να τονίσουμε για μια ακόμη φορά το τι ακριβώς δείχνουν:

> Μεταξύ n αντικειμένων μπορούμε να επιλέξουμε k από αυτά κατά
> $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
> τρόπους. (Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα αντικείμενα δε μας ενδιαφέρει).

Πρόταση 1.11 *Τα ακόλουθα αληθεύουν:*

1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2.
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

3.
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

5.
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

□

Απόδειξη. Για την απόδειξη τέτοιου είδους σχέσων υπάρχουν σχεδόν πάντοτε δύο τρόποιο απόδειξης. Ο ένας είναι αλγεβρικός με τη χρήση του τύπου που εξ' ορισμού εκφράζει τους διωνυμικούς συντελεστές ως κλάσματα. Ο άλλος είναι με τη χρήση του γεγονότος πως οι διωνυμικοί συντελεστές $\binom{n}{k}$ δίνουν ακριβώς το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων. Εδώ θα ακολουθήσουμε το δεύτερο τρόπο. Μάλιστα συχνά αυτός είναι και ο μόνος πρακτικά δυνατός τρόπος αφού ο αλγεβρικός έχει το μειονέκτημα πως πρέπει να δουλέψουμε με εξαιρετικά μεγάλους τύπους.

1. Το να επιλέξουμε k άτομα μεταξύ n δοσμένων για να τα κρατήσουμε, είναι ακριβώς το ίδιο με το να επιλέξουμε τα υπόλοιπα $n-k$ άτομα ώστε να τα αποβάλλουμε.
2. Ας μετρήσουμε πόσες ομάδες k ατόμων μπορούμε να δημιουργήσουμε επιλέγοντας μεταξύ n δοσμένων ατόμων, στις οποίες ομάδες έχουμε επιλέξει και έναν αρχηγό. Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους.

   1η μέτρηση: Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ δυνατές ομάδες k ατόμων μεταξύ των n δοσμένων, και για κάθε ομάδα υπάρχουν k δυνατές επιλογές αρχηγού. Οπότε η Πολλαπλασιαστική Αρχή δίνει $\binom{n}{k} \times k$ ομάδες k ατόμων με αρχηγό.

   2η μέτρηση: Επιλέγουμε πρώτα τον αρχηγό. Αυτό γίνεται φυσικά με n τρόπους. Τώρα για οποιονδήποτε επιλεγμένο αρχηγό, θέλουμε να δημιουργήσουμε μια ομάδα με k άτομα που τον περιέχει ως αρχηγό. Θα πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε άλλα $k-1$ άτομα από τα εναπομείναντα $n-1$. Αυτό γίνεται $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους. Οπότε η Πολλαπλασιαστική Αρχή δίνει $n\binom{n-1}{k-1}$ ομάδες k ατόμων με αρχηγό.

   Σύμφωνα με την Αρχή της Διπλής Μέτρησης τα αποτελέσματα των δύο μετρήσεων είναι τα ίδια οπότε προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

3. Μεταξύ $n+1$ δοσμένων ατόμων υπάρχουν $\binom{n+1}{k}$ τρόποι για να επιλέξουμε μια ομάδα με k από αυτούς.

   Θα ξαναμετρήσουμε το πλήθος των τρόπων, αφού πρώτα ονομάσουμε ένα συγκεκριμένο από τα άτομα ως αρχηγό. Για να επιλέξουμε λοιπόν k από τα δοσμένα $n+1$ άτομα, μπορούμε είτε να έχουμε επιλέξει και τον αρχηγό, είτε όχι. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν $\binom{n}{k-1}$ τρόποι αφού ουσιαστικά ζητάμε να επιλέξουμε τους υπόλοιπους $k-1$ της ομάδας από τους εναπομείναντες $(n+1)-1=n$ εκτός του αρχηγού. Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι αφού ουσιαστικά ζητάμε να επιλέξουμε όλους τους k της ομάδας από τους εναπομείναντες $(n+1)-1=n$ εκτός του αρχηγού. οπότε συνολικά υπάρχουν (Προσθετική Αρχή) $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$ τρόποι για να επιλέξουμε μια ομάδα k ατόμων από τα δοσμένα $n+1$.

   Το ζητούμενο τώρα προκύπτει εξαιτίας της Αρχής της Διπλής Μέτρησης.
4. Στο Παράδειγμα 1.9 είδαμε πως υπάρχουν 2^n υποσύνολα ενός συνόλου n στοιχείων.

   Όμως ένα υποσύνολο του συνόλου αυτού θα έχει είτε 0, είτε 1, ..., είτε n στοιχεία, και στην Πρόταση 1.10 είδαμε πως υπάρχουν αντιστοίχως $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ τέτοια υποσύνολα. Οπότε (Προσθετική Αρχή) υπάρχουν $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$ υποσύνολα του αρχικού συνόλου.

   Άρα λοιπόν (Αρχή Διπλής Μέτρησης) ισχύει η ζητούμενη ισότητα.
5. Ας μετρήσουμε με δύο τρόπους το πλήθος των ομάδων με n άτομα που μπορούμε να επιλέξουμε από ένα σύνολο $2n$ ατόμων εκ των οποίων οι n είναι άντρες και n γυναίκες.

   1η μέτρηση: Κατά τα γνωστά υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ επιλογές.

   2η μέτρηση: Η ομάδα των n ατόμων θα περιέχει k άντρες και $n-k$ γυναίκες για κάποιο $k=0,1,\ldots,n$. Τους k άντρες τους επιλέγουμε μεταξύ των n δοσμένων αντρών κατά $\binom{n}{k}$ τρόπους και ομοίως τις $n-k$ γυναίκες τις επιλέγουμε μεταξύ των n δοσμένων γυναικών κατά $\binom{n}{n-k}$ τρόπους που σύμφωνα με το 1 της τρέχουσας Πρότασης ισοούται με $\binom{n}{k}$. Οπότε σύμφωνα με την Πολλαπλασιστική Αρχή υπάρχουν $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}=\binom{n}{k}^2$ επιλογές n ατόμων με k άντρες και $n-k$ γυναίκες μεταξύ των $2n$ δοσμένων. Οπότε υπάρχουν (Προσθετική Αρχή) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$ επιλογές n ατόμων μεταξύ των $2n$ δοσμένων.

   Τώρα η Αρχή της Διπλής Μέτρησης μας δίνει το ζητούμενο. □

1.7 Το Θεώρημα του Νεύτωνα και το τρίγωνο του Pascal

Διώνυμο είναι ένα πολυώνυμο $ax+b$ με δύο όρους, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και x μεταβλητή. Εδώ θα ασχοληθούμε με την ειδική μορφή $x+1$ του διωνύμου και συγκεκριμένα με φυσικές δυνάμεις αυτού: $(x+1)^n, \ n \in \mathbb{N}$.

Η Πρόταση που ακολουθεί συνδέει τους διωνυμικούς συντελεστές με το ... διώνυμο και φέρει το όνομα του Νεύτωνα.

Πρόταση 1.12 ***(Διωνυμικό Θεώρημα ή Θεώρημα του Νεύτωνα)*** *Ο συντελεστής της δύναμης x^k στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(x+1)^n$ είναι ο $\binom{n}{k}$, δηλαδή*

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{k}\binom{n}{k}x^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n. \tag{1.1}$$

Εδώ είναι $x\in\mathbb{R}$, $0\le k\le n$ και $n,k\in\mathbb{N}$. □

Απόδειξη. Το πολυώνυμο $(x+1)^n=\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n \text{ παράγοντες}}$ αναπτύσσεται (α) επιλέγοντας είτε τον όρο x είτε τον όρο 1 από κάθε έναν από τους n παράγοντες (β) πολλαπλασιάζοντας τους επιλεγμένους όρους και (γ) προσθέτοντας όλα αυτά τα γινόμενα.

Με τα βήματα (α) και (β) προκύπτουν όροι της μορφής $1\cdot x^k$. Μάλιστα για συγκεκριμένο k, ο όρος $1\cdot x^k$ προκύπτει όταν στο βήμα (α) επιλεγεί ο όρος x σε ακριβώς k από τους παράγοντες

$x+1$. Όμως οι παράγοντες $x+1$ είναι n σε πλήθος. Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε τον x σε k από αυτούς κατά $\binom{n}{k}$ τρόπους.

Τότε με το βήμα (γ) ο συντελεστής που προκύπτει για το x^k ισούται με $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\binom{n}{k} \text{ παράγοντες}} = \binom{n}{k}$

□

Μια άλλη συχνή μορφή του Θεωρήματος του Διωνύμου στη βιβλιογραφία, αναφέρεται στις δυνάμεις του πολυωνύμου $x+y$ των 2 μεταβλητών x και y και είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 1.13 *Για $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n$ και $n, k \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n.$$

□

Ακολουθεί ένα παράδειγμα χρήσης του Διωνυμικού Θεωρήματος.

Παράδειγμα 1.14 Για κάθε σύνολο n στοιχείων, υπάρχουν 2^{n-1} υποσύνολα με άρτια πληθικότητα και 2^{n-1} υποσύνολα με περιττή πληθικότητα. □

Απόδειξη. Θέτοντας $x=-1$ στην εξίσωση 1.1 παίρνουμε:

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \Rightarrow$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} (-1)^n \Rightarrow$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

Όμως εξαιτίας της Πρότασης 1.10 το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας δίνει το πλήθος των υποσυνόλων άρτιας πληθικότητας ενός οποιουδήποτε συνόλου n στοιχείων, ενώ το δεξί μέλος δίνει το πλήθος των υποσυνόλων του περιττής αρτιότητας. Οπότε το Παράδειγμα 1.9 δίνει πως το καθένα από αυτά τα δύο ίσα πλήθη υποσυνόλων είναι ίσα με $2^n/2 = 2^{n-1}$ όπως ζητείται. □

Οι διωνυμικοί συντελεστές για τις δυνάμεις $(x+1)^1, (x+1)^2, (x+1)^3, \ldots$ γράφονται συνοπτικά με τη μορφή ενός άπειρα εκτεινομενου τριγώνου ως εξής:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1 \\
\iddots&&&&&&&&\vdots&&&&&&&&\ddots
\end{array}$$

Το τρίγωνο αυτό ονομάζεται τρίγωνο του Pascal παρότι ήταν γνωστό πριν το χρησιμοποιήσει ο Pascal για πρώτη φορά. Αυτό που οπωσδήποτε πρέπει να παρατηρήσουμε στο τρίγωνο είναι πως κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται στην προηγούμενη γραμμή δεξιά και αριστερά του. Η ισότητα αυτή είναι ακριβώς το περιεχόμενο της ιδιότητας 3 της Πρότασης 1.11 που δείξαμε νωρίτερα.

Το τρίγωνο αυτό μας δίνει την ευκαιρία να εξερευνήσουμε πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών, αρκεί να επιδείξουμε υπομονή και παρατηρητικότητα. Αθροίστε για παράδειγμα τους αριθμούς σε οποιαδήποτε γραμμή. Τι παρατηρείτε;

1.8 Επιλογές : διατάξεις και συνδυασμοί

Συχνά επιθυμούμε να απαντήσουμε στο ακόλουθο ερώτημα:

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα μεταξύ n δοσμένων αντικειμένων;

Φυσικά είναι $0 \leq k \leq n$ με n, k φυσικούς αριθμούς. Το ερώτημα το συναντήσαμε ξανά στην παράγραφο 1.6 και η απάντηση που δώσαμε ήταν: με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Όμως στην απάντηση αυτή δεν μας ενδιέφερε η σειρά με την οποία επιλέγαμε τα αντικείμενα. Φυσικά τα πράγματα αλλάζουν αν μας ενδιαφέρει και η σειρά επιλογής. Για παράδειγμα αν είναι να επιλέξουμε 3 μαθητές από μια τάξη 10 μαθητών χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, τότε μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την επιλογή μας κατά $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$ τρόπους. Αν όμως θέλουμε να ονομάσουμε τον πρώτο που επιλέγουμε ως πρόεδρο της τάξης, τον δεύτερο ως γραμματέα και τον τρίτο ως ταμία, τότε προφανώς μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των τριών μαθητών. Καθώς οποιαδήποτε τριάδα επιλεγμένων μαθητών μπορούμε να τη διατάξουμε κατά $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόπους (γιατί;), συμπεραίνουμε πως υπάρχουν $120 \cdot 6 = 720$ τρόποι επιλογής τριών μαθητών από τους δέκα της τάξης ώστε να τους ονομάσουμε πρόεδρο, γραμματέα και ταμία.

Φυσικά υποπτευόμαστε πως θα πρέπει να υπάρχει γενικός τύπος για τούτο το είδος των επιλογών. Πράγματι υπάρχει και δίνεται πιο κάτω στην Πρόταση 1.16.

Όμως πιο πριν αξίζει να παρατηρήσουμε πως υπάρχουν και άλλοι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα μεταξύ n δοσμένων. Πραγματικά, αν για παράδειγμα θέλουμε να επιλέξουμε 3 χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων, ένα φύλλο τη φορά ώστε μετά από κάθε επιλογή φύλλου να το επανατοποθετούμε στην τράπουλα, τότε προφανώς δεν μπορεί να έχουμε μόνο $\binom{52}{3}$ επιλογές σαν να επρόκειτο για απλή επιλογή τριών διαφορετικών φύλλων της τράπουλας! Αν μάλιστα μας ενδιαφέρει και η σειρά εμφάνισης των τριών φύλλων τότε προφανώς έχουμε μπροστά μας ένα νέο πρόβλημα. Τους τρόπους επιλογής του τελευταίου προβλήματος τους ονομάζουμε **επιλογές με επανάληψη**.

Για να καθορίσουμε την ορολογία ας ανακεφαλαιώσουμε:

Ορισμός 1.15 *Όταν επιλέγουμε k αντικείμενα από n δοσμένα διακεκριμένα, μπορεί να μην ενδιαφερόμαστε για τη σειρά της επιλογής τους, οπότε μιλάμε για **πλήθος συνδυασμών**, μπορεί όμως και να ενδιαφερόμαστε για τη σειρά επιλογής τους, οπότε μιλάμε για **πλήθος διατάξεων**. Αν μάλιστα σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις επιθυμούμε να μπορεί το κάθε αντικείμενο να επιλεγεί επανειλημμένα έως και το μέγιστο πλήθος φορών k, μιλάμε για **πλήθος επαναληπτικών συνδυασμών** και **επαναληπτικών διατάξεων** αντιστοίχως. Στην περίπτωση των απλών διατάξεων, όταν το πλήθος k των αντικειμένων που επιλέγουμε ισούται με το πλήθος n των δοσμένων αντικειμένων, μιλάμε για **πλήθος μεταθέσεων**.*

Πρόταση 1.16 *Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων διακεκριμένων αντικειμένων ισούται με:*

	Συνδυασμοί (Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά)	Διατάξεις (Μας ενδιαφέρει η σειρά)
Χωρίς επαναλήψεις	$\binom{n}{k}$	$n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$
Με επαναλήψεις	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Στην πρώτη γραμμή είναι $0 \leq k \leq n$ με $n, k \in \mathbb{N}$. Στη δεύτερη γραμμή όμως είναι $n, k \in \mathbb{N}$. □

Απόδειξη. Τα αποτελέσματα της δεύτερης στήλης τα παρέχει αμέσως η Πολλαπλασιαστική Αρχή (εξηγήστε εκτενέστερα). Το πρώτο αποτέλεσμα της πρώτης στήλης είναι το περιεχόμενο της Πρότασης 1.10. Το δεύτερο αποτέλεσμα της δεύτερης στήλης προκύπτει π.χ. άμεσα από την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα πρόταση που ακολουθεί. □

Πρόταση 1.17 1. Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων με επανάληψη μεταξύ n δοσμένων διακεκριμένων όταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά της επιλογής τους, ισούται με το πλήθος των διατεταγμένων n-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ από φυσικούς (δηλαδή μη αρνητικούς ακέραιους) x_i για τους οποίους $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

2. Το πλήθος των διατεταγμένων n-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ από φυσικούς (δηλαδή μη αρνητικούς ακέραιους) x_i για τους οποίους $x_1+x_2+\ldots+x_n = k$ ισούται με $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ □

Απόδειξη. 1. Έστω πως δίνονται n σε πλήθος αντικείμενα με τα ονόματα $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο δείχνοντας πως υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία των επιλογών k αντικειμένων με επανάληψη μεταξύ των n δοσμένων όπου δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, με τις διατεταγμένες n-άδες $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. Πραγματικά:

Θεωρώντας μια επιλογή με επανάληψη k αντικειμένων από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και δίχως να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους, ας ονομάσουμε $x_1, x_2, \ldots, x_n$ το πλήθος των εμφανίσεων των $A_1, A_2, \ldots, A_n$ αντιστοίχως στην επιλογή αυτή. Τότε φυσικά είναι x_i μη αρνητικοί ακέραιοι και $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. Δηλαδή μια επιλογή k αντικειμένων από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ παράγει τη μοναδική διατεταγμένη n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μη αρνητικών αριθμών x_i με $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

Αντιστρόφως η διατεταγμένη n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ των μη αρνητικών αριθμών x_i με $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ παράγει μια μοναδική επίλογή k αντικειμένων από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ως εξής: επιλέγουμε x_1 φορές το A_1, επιλέγουμε x_2 φορές το A_2, …, επιλέγουμε x_n φορές το A_n.

2. Ας θεωρήσουμε $n + k - 1$ θέσεις στη σειρά και ας τοποθετήσουμε σε $n - 1$ από αυτές από μία μπάλα. Υπάρχουν ασφαλώς $\binom{n+k-1}{n-1}$ τέτοιες τοποθετήσεις μπαλών.

Μπορούμε όμως να μετρήσουμε το πλήθος των τοποθετήσεων των μπαλών και με άλλο τρόπο:

Καθορίζουμε μια κατεύθυνση από τη μία ακριανή θέση ως την άλλη και για μια οποιαδήποτε τοποθέτηση μετακινούμαστε κατά την κατεύθυνση αυτή και ονομάζουμε x_1 το πλήθος των άδειων θέσεων πριν την πρώτη μπάλα, x_2 το πλήθος των άδειων θέσεων μετά την πρώτη μπάλα και πριν τη δεύτερη, …, x_{n-1} το πλήθος των άδειων θέσεων μετά την $(n-2)$-στή μπάλα και πριν την $(n-1)$-στή μπάλα και x_n το πλήθος των άδειων θέσεων μετά την n-στή μπάλα. Φυσικά οι x_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (n + k - 1) - (n - 1) = k$. Δηλαδή μια τοποθέτηση μπαλών παράγει μια n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (n + k - 1) - (n - 1) = k$. Αλλά και αντίστροφα, μία τέτοια n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (n + k - 1) - (n - 1) = k$ παράγει μια τοποθέτηση μπαλών ως εξής: Κινούμενοι κατά την επιλεγμένη κατεύθυνση μετρούμε x_1 θέσεις τις οποίες αφήνουμε κενές, κατόπιν τοποθετούμε στην επόμενη θέση μία μπάλα, μετά μετρούμε x_2 θέσεις τις οποίες αφήνουμε κενές, κατόπιν τοποθετούμε στην επόμενη θέση μία μπάλα, κ.ο.κ. Αφού το πλήθος των κενών θέσεων ισούται με $x_1+x_2+\cdots+x_n = (n+k-1)-(n-1) = k$ και το πλήθος των θέσεων στις οποίες αφήσαμε από μία μπάλα ισούται με $n - 1$, συνολικά καλύψαμε από την αρχή έως το τέλος $k + (n - 1)$ θέσεις δηλαδή όσο το δοσμένο πλήθος των θέσεων. Οπότε το πλήθος των τοποθετήσεων των μπαλών ισούται με το πλήθος των n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (n + k - 1) - (n - 1) = k$

Τότε όμως (Αρχή της Διπλής Μέτρησης) το πλήθος των n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (n + k - 1) - (n - 1) = k$ ισούται με

$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ όπως ζητούσαμε (εξηγήστε την τελευταία ισότητα). □

Τα είδη επιλογών στα οποία αναφερθήκαμε, μπορούμε συχνά να τα σκεφτόμαστε και με άλλους πιο βολικούς τρόπους. Για παράδειγμα, πορούμε να σκεφτόμαστε πως τοποθετούμε μπάλες σε κουτιά. Έτσι:

- Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου δε μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *ίδιων* μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει *μία το πολύ* μπάλα. Αυτό το πλήθος ισούται με $\binom{n}{k}$.
- Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *διαφορετικών* (ή αν θέλετε αριθμημένων από το 1 ως το k) μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει *μία το πολύ* μπάλα. Αυτό το πλήθος ισούται με $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$.
- Το πλήθος των επαναληπτικών επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου δε μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *ίδιων* μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει *όσες μπάλες θέλουμε*. Αυτό το πλήθος ισούται με $\binom{n+k-1}{k}$.
- Το πλήθος των επαναληπτικών επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *διαφορετικών* (ή αν θέλετε αριθμημένων από το 1 ως το k) μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει όσες μπάλες θέλουμε. Αυτό το πλήθος ισούται με n^k.

Στην ξένη βιβλιογραφία συνηθίζονται οι συμβολισμοί $C(n,k) = \binom{n}{k}$ και $P(n,k) = n(n-1)\dots(n-(k-1))$ από τις λέξεις Combination και Permutation που σημαίνουν Συνδυασμός και Μετάθεση αντιστοίχως.

Μερικά παραδείγματα θα μας βοηθήσουν να αφομοιώσουμε καλύτερα τους τύπους.

Παράδειγμα 1.18 Επάνω σε δύο παράλληλες ευθείες βρίσκονται 10 και 8 σημεία αντιστοίχως. Για τα τμήματα που έχουν το ένα τους άκρο στην μια ευθεία και το άλλο στην άλλη να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων τομής τους που βρίσκονται στο εσωτερικό τους όταν γνωρίζετε πως δεν υπάρχουν τρία τέτοια τμήματα με κοινό εσωτερικό σημείο. (Η παραλληλία των ευθειών δεν είναι πραγματικά απαραίτητη). □

Λύση. Για κάθε επιλογή ενός ζεύγος σημείων στην πρώτη ευθεία και ενός ζεύγος σημείων στη δεύτερη, μετράμε ακριβώς ένα από τα ζητούμενα σημεία τομής (δικαιολογήστε εκτενέστερα).

Μπορούμε να επιλέξουμε 2 σημεία από τα 10 δοσμένα της πρώτης ευθείας κατά $\binom{10}{2}$ τρόπους και ομοίως μπορούμε να επιλέξουμε 2 σημεία από τα 8 δοσμένα της δεύτερης κατά $\binom{8}{2}$ τρόπους. Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε δύο σημεία στην πρώτη και δύο σημεία στηδεύτερη κατά (Πολλαπλασιαστική Αρχή) $\binom{10}{2}\binom{8}{2} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = 2520$ τρόπους.

Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος σημείων τομής ισούται με 2520. □

Παράδειγμα 1.19 Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν στους οποίους όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά; □

Λύση. Θέλουμε να τοποθετήσουμε στη σειρά (να διατάξουμε) 4 από τα 10 ψηφία $1, 2, 3, \dots, 9$ ώστε το 0 να μην εμφανίζεται στην πρώτη θέση.

Τα 10 ψηφία τα διατάσσουμε σε 4 θέσεις κατά (απλές διατάξεις 4 αντικειμένων από 10 δοσμένα) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ τρόπους.

Για να επιλεγεί το 0 στην πρώτη θέση θα πρέπει στις υπόλοιπες 3 θέσεις να επιλεγούν μονάχα τα 9 ψηφία $1, 2, \dots, 9$ και αυτό ομοίως μπορεί να συμβεί κατά $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ τρόπους.

Οπότε υπάρχουν $5040 - 504 = 4536$ αριθμοί με τα ζητούμενα χαρακτηριστικά.

Να λύσετε το Πρόβλημα πιο γρήγορα με χρήση Πολλαπλασιαστικής Αρχής. □

Παράδειγμα 1.20 Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα παίρνουμε όταν ρίχνουμε ταυτόχρονα τρία ζάρια; □

Λύση. Με την ταυτόχρονη ρίψη των τριών ζαριών παίρνουμε τρεις φυσικούς αριθμούς, ο καθένας τους από 1 έως 6. Καθώς δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά (οπότε μιλάμε για συνδυασμούς) με την οποία παίρνουμε τους αριθμούς αυτούς, αλλά και επειδή ο καθένας από τους $1, 2, \ldots, 6$ μπορεί να εμφανιστεί επανειλημμένα, ψάχνουμε ουσιαστικά για το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών 3 αντικειμένων από 6 δοσμένα. Δηλαδή το πλήθος ισούται με $\binom{6+3-1}{3} = \cdots = 56$. □

1.9 Η Αρχή της Εισαγωγής - Εξαγωγής

Στην §1.2 αναφερθήκαμε στο πασίγνωστο γεγονός πως το πλήθος των στοιχείων της ένωσης S των ξένων ανά δύο συνόλων $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ισούται με το άθροισμα των πληθών όλων των S_i. Δηλαδή

$$|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_n|$$

Εδώ θα αναφερθούμε σε έναν τύπο που δίνει το πλήθος των στοιχείων της ένωσης S των συνόλων $S_1, S_2, \ldots, S_n$, όπου τα S_i δεν είναι απαραιτήτως ξένα ανά δύο.

Για παράδειγμα αν δίνονται δύο μόνο σύνολα S_1 και S_2, τότε είτε με παραδείγματα, είτε με ελαφρώς πιο οργανωμένη αυστηρή σχέση, δεν θα έχουμε δυσκολίες να διαπιστώσουμε πως το $S_1 \cup S_2$ έχει τόσα στοιχεία όσα το άθροισμα των $|S_1|$ και $|S_2|$ αφαιρώντας όμως το πλήθος των στοιχείων που μετρήσαμε δύο φορές, δηλαδή των κοινών στοιχείων των δύο συνόλων. Με άλλα λόγια:

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

Η **Αρχή της Εισαγωγής-Εξαγωγής** ή **του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού** γενικεύει τον τελευταίο τύπο ως εξής:

Πρόταση 1.21 *(**Αρχή Εισαγωγής-Εξαγωγής**) Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *(1η μορφή) Αν $S_1, S_2, \ldots, S_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε*

$$\begin{aligned}|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n| = \; & \sum_{1 \le i \le n} |S_i| \\ & - \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| \\ & + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |S_i \cap S_j \cap S_k| \\ & \vdots \\ & (-1)^{n+1} \sum |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|.\end{aligned}$$

2. *(2η μορφή) Για ένα πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων και n δοσμένες ιδιότητες $1, 2, \ldots, n$, ας είναι $N(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ το πλήθος αυτών που ικανοποιούν τουλάχιστον τις ιδιότητες $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Τότε το πλήθος των αντικειμένων με μία τουλάχιστον από τις ιδιότητες ισούται με*

$$\begin{aligned}& \sum_{1 \le i \le n} N(i) \\ & - \sum_{1 \le i < j \le n} N(i,j) \\ & + \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(i,j,k) \\ & \vdots \\ & (-1)^{n+1} \sum N(1, 2, \ldots, n)\end{aligned}$$

3. *(3η μορφή) Έστω $S_1, S_2, \ldots, S_n$ μια συλλογή υποσυνόλων ενός συνόλου S. Τότε το πλήθος των στοιχείων του S που δεν ανήκει σε κανένα από τα S_i ισούται με*

$$\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}|A_I|$$

όπου

$$A_I = \bigcap_{i\in I} A_i \quad \textit{και} \ \ A_\emptyset = S.$$

Όλες οι μορφές είναι ισοδύναμες. Τα αθροίσματα με περισσότερους από έναν δείκτες στις δύο πρώτες μορφές αναφέρονται σε διακεκριμένους μεταξύ τους τέτοιους δείκτες. □

Για παράδειγμα, για τρία σύνολα S_1, S_2, S_3 η πρώτη μορφή της Εισαγωγής-Εξαγωγής βεβαιώνει πως

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_2 \cap S_3| - |S_3 \cap S_1| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|.$$

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των μορφών δεν είναι δύσκολη και αφήνεται ως Άσκηση. Θα δείξουμε την αλήθεια της 1ης μορφής:

Το αριστερό μέρος του τύπου δηλώνει το πλήθος των στοιχείων στη μεγάλη ένωση $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ όλων των συνόλων. Το δεξί μέλος προσθέτει ή αφαιρεί πληθικούς αριθμούς, οπότε δηλώνει κάθε ένα στοιχείο της μεγάλης ένωσης κάμποσες φορές και αφαιρεί την ύπαρξή του κάμποσες φορές ανάλογα με το σε ποια σύνολα από αυτά του δεξιού μέλους ανήκει το στοιχείο και με το αν ο πληθικός αριθμός του συνόλου πολλαπλασιάζεται με το $+1$ ή το -1.

Αν λοιπόν καταφέρουμε να αποδείξουμε πως μετρώντας στο δεξί μέλος την ύπαρξη καθενός στοιχείου της μεγάλης ένωσης αυτό συνολικά μετριέται ακριβώς 1 φορά, θα έχουμε την ποθητή ισότητα.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα τυχαίο στοιχείο x της μεγάλης ένωσης και ας υποθέσουμε πως ανήκει σε ακριβώς r $(1 \le r \le n)$ από τα υποσύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Το x ανήκει σε r σύνολα της πρώτης γραμής, οπότε μετριέται $+r$ φορές.

Το x ανήκει σε $\binom{r}{2}$ σύνολα της δεύτερης γραμμής, οπότε μετριέται $-\binom{r}{2}$ φορές.

Το x ανήκει σε $\binom{r}{3}$ σύνολα της δεύτερης γραμμής, οπότε μετριέται $+\binom{r}{3}$ φορές.

Κ.ο.κ.

Το x ανήκει σε $\binom{r}{r}$ σύνολα της δεύτερης γραμμής, οπότε το x μετριέται $(-1)^{r-1}\binom{r}{r}$ φορές.

Το x δεν ανήκει σε κανένα σύνολο των γραμμών $r+1, r+2, \ldots, n$ οπότε σε αυτές μετριέται 0 φορές.

Οπότε το συνολικό πλήθος των φορών τις οποίες μετριέται το x σε όλες τις γραμμές του δεξιού μέλους ισούται με

$$\begin{aligned}
& +r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r} + 0 \\
= \quad & \binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r} \\
= \quad & 1 - \left[\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^{r}\binom{r}{r}\right] \\
= \quad & 1 - (1-1)^r \\
= \quad & 1.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.22 Ένας πωλητής πρόκειται για κάθε μια από τις 7 ημέρες της επόμενης εβδομάδας να επισκεπτεί ακριβώς έναν από τους τέσσερις Θεσσαλικούς νομούς για την προώθηση των πωλήσεών του. Ο πωλητής επιθυμεί να επισκεπτεί και τους τέσσερις νομούς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να προγραμματίσει το πρόγραμμα των επισκέψεών του για την εβδομάδα αυτή; □

Λύση. Σκοπεύουμε να υπολογίσουμε το πλήθος του συνόλου όλων των προγραμμάτων καθώς και το πλήθος του συνόλου των ανεπιθύμητων προγραμμάτων, οπότε η ζητούμενη απάντηση θα είναι η διαφορά του δεύτερου πλήθους από το πρώτο. Ανεπιθύμητο πρόγραμμα είναι φυσικά ένα πρόγραμμα στο οποίο δεν προβλέπεται επίσκεψη σε έναν τουλάχιστον από τους τέσσερις νομούς.

Για το πλήθος του συνόλου όλων των προγραμμάτων ο υπολογισμός είναι απλός: $4^7 = 16.384$, αφού για κάθε μια από τις 7 ημέρες έχουμε 4 δυνατές επιλογές για την επίσκεψη σε κάποιο νομό (Πολλαπλασιαστική Αρχή). (Δικαιολογήστε και με χρήση επαναληπτικών διατάξεων).

Ας ονομάσουμε τώρα S_1, S_2, S_3, S_4 τα σύνολα των εβδομαδιαίων προγραμμάτων του πωλητή στα οποία δεν περιλαμβάνεται επίσκεψη στα Τρίκαλα, την Καρδίτσα, τη Λάρισα ή τη Μαγνησία αντιστοίχως. Τότε $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ είναι το σύνολο όλων των προγραμμάτων στα οποία δεν πραγματοποιείται επίσκεψη σε έναν τουλάχιστον νομό· πρόκειται δηλαδή για το σύνολο των ανεπιθύμητων προγραμμάτων του πωλητή. Ζητούμε να υπολογίσουμε το πλήθος του συνόλου αυτού. Η Αρχή Εισαγωγής-Εξαγωγής δίνει:

$$\begin{aligned}
|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| &= |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| \\
&\quad -|S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_1 \cap S_4| - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_4| - |S_3 \cap S_4| \\
&\quad +|S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_4| \\
&\quad -|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|
\end{aligned}$$

Όμως είναι:

$$\begin{aligned}
&|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4| = 3^7 \\
&|S_1 \cap S_2| = |S_1 \cap S_3| = |S_1 \cap S_4| = |S_2 \cap S_3| = |S_2 \cap S_4| = |S_3 \cap S_4| = 2^7 \\
&|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = |S_1 \cap S_2 \cap S_4| = |S_1 \cap S_3 \cap S_4| = |S_2 \cap S_3 \cap S_4| = 1^7 \\
&|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| = 0^7
\end{aligned}$$

Πράγματι, π.χ. για το $|S_1|$ παρατηρήστε πως αυτό εκφράζει το πλήθος των προγραμμάτων για τις 7 ημέρες της εβδομάδας, στα οποία δεν περιλαμβάνεται καμία επίσκεψη στα Τρίκαλα, που σημαίνει πως οι επισκέψεις κάθε ημέρας έχουν 3 δυνατές επιλογές στους εναπομείναντες νομούς· οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει από την Πολλαπλασιαστική Αρχή, ή αν προτιμάτε, με χρήση των επαναληπτικών διατάξεων.

Συνεπώς $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4 - 0 = 7.984$.

Οπότε το ζητούμενο πλήθος των προγραμμάτων είναι $16.384 - 7.984 = 8.400$. □

1.10 Η Αρχή του Dirichlet ή της περιστεροφωλιάς

1.10.1 Λίγη Θεωρία

Η **Αρχή του Dirichlet ή της Περιστεροφωλιάς** εκφράζει την προφανή παρατήρηση πως αν σε κάθε μια από n φωλιές περιστεριών καταμετρηθεί ένα το πολύ περιστέρι, τότε συνολικά σε όλες τις φωλιές καταμετρήθηκαν n το πολύ περιστέρια. Συνεπώς

> αν γνωρίζουμε πως σε κάποια μέτρηση στις n φωλιές καταμετρήθηκαν συνολικά $n+1$ και πλέον περιστέρια, είναι σίγουρο πως θα υπάρχει φωλιά με περισσότερα από 1 περιστέρια, δηλαδή τουλάχιστον 2 περιστέρια.

Ο συλλογισμός αυτός, επίσης ονομάζεται Αρχή της περιστεροφωλιάς. Βέβαια, είναι δυνατό να υπάρχουν πολλές φωλιές 2 τουλάχιστον περιστέρια, ή και να υπάρχουν φωλιές με κανένα περιστέρι, αλλά με μόνο δεδομένο τη συνολική μέτρηση των περιστεριών, μας είναι αδύνατο να αποφανθούμε σε τέτοιο βαθμό λεπτομέρειας σχετικά με το τι συμβαίνει μέσα στις περιστεροφωλιές.

Συχνά στα βιβλία, η Αρχή του Dirichlet διατυπώνεται πιο αυστηρά κάπως έτσι:

> αν n αντικείμενα τοποθετήθηκαν σε m δοχεία και $n > m$, τότε υπάρχει δοχείο όπου τοποθετήθηκαν τουλάχιστον 2 αντικείμενα.

Υπάρχουν και διατυπώσεις της που χρησιμοποιούν τη γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων. (Δώστε μια τέτοια διατύπωση). Επίσης εμφανίζεται και με άλλα ονόματα όπως "**η Αρχή των συρταριών**" ή "**η Αρχή των παπουτσιών**" κ.α. Στη Ρωσία τα περιστέρια αντικαθίστανται με κουνέλια. Μια Γεωμετρική εκδοχή της Αρχής του Dirichlet είναι η ακόλουθη:

> Έστω F επίπεδο χωρίο (π.χ. πολυγωνική περιοχή) που περιέχει τα επίπεδα χωρία $F_1, F_2, \cdots, F_n$. Αν το άθροισμα των εμβαδών των F_i ισούται ή υπερβαίνει το εμβαδόν του F, τότε δύο τουλάχιστον από τα χωρία έχουν κοινό εσωτερικό σημείο.

Τώρα μπορείτε να σκεφτείτε από μόνοι σας κάποιες άλλες Γεωμετρικές εκδοχές της που αναφέρονται π.χ. σε ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μια ευθεία ή τόξα ενός κύκλου κτλ.

Ο Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune, έζησε τον 19^0 αιώνα και υπήρξε μαθητής του περίφημου Gauss. Ο πατέρας του καταγόταν από τη Βελγική πόλη Richelet, του Dueren της Βεστφαλίας που τότε αποτελούσε μέρος της Γαλλικής αυτοκρατορίας. Έτσι απέκτησε και το όνομα με το οποίο τον γνωρίζουμε: "Le jeune de Richelet", δηλαδή "ο νεαρός από το Richelet=Dirichlet". Συνοπτικά: ο Dirichlet ήταν Γερμανός στην καταγωγή... Δεν ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την ομώνυμη Αρχή στις εργασίες του, αλλά όπως συχνά συμβαίνει στα μαθηματικά, το όνομά του κάποτε συνδέθηκε με την Αρχή και από τότε κόλλησε...

Η Αρχή του Dirichlet φαίνεται και είναι όντως απλή. Οι συνέπειες της όμως είναι πολύ ενδιαφέρουσες και συχνά καθόλου απλές. Στο μυαλό μας μπορούμε να την έχουμε ως έναν τρόπο "χονδρικής" αποτίμησης του περιεχομένου κάποιας φωλιάς με δεδομένο το συνολικό περιεχόμενο όλων των φωλιών. Αν η κατάσταση αυτή σας θυμίζει τη μέση τιμή της Στατιστικής, δεν θα έχετε άδικο. Η Αρχή της περιστεροφωλιάς προσεγγίζει ακριβώς το "μέσο περιεχόμενο" κάθε φωλιάς, φράσοντάς το "από κάτω" για μια τουλάχιστον φωλιά. Αυτό φαίνεται καλύτερα όταν γενικεύουμε την Αρχή αυτή με τον απλούστερο δυνατό τρόπο ως εξής:

Αν σε κάθε μια από τις n φωλιές καταμετρηθούν το πολύ k περιστέρια (k κάποιος δοσμένος φυσικός) τότε προφανώς συνολικά σε όλες τις φωλιές καταμετρήθηκαν το πολύ $n \cdot k$ περιστέρια, με αποτέλεσμα:

> Αν σε κάποια συνολική καταμέτρηση των περιστεριών σε όλες τις n φωλιές αυτά βρεθούν τουλάχιστον $n \cdot k + 1$ σε πλήθος, τότε συμπεραίνουμε πως θα υπάρχει κάποια (τουλάχιστον μία) φωλιά με τουλάχιστον $k + 1$ περιστέρια.

Η τελευταία παρατήρηση-Πρόταση ονομάζεται **Γενικευμένη Αρχή του Dirichlet** ή της περιστεροφωλιάς. Στην πραγματικότητα αποτελεί μια εναλλακτική και ισοδύναμη διατύπωση της απλής Αρχής του Dirichlet, με την οποία ξεκινήσαμε το δοκίμιο αυτό.

Φυσικά και η ακόλουθη "οριακή" εκδοχή της Γενικευμένης Αρχής, είναι ομοίως ορθή:

> Αν σε κάποια συνολική καταμέτρηση των περιστεριών σε όλες τις n φωλιές αυτά βρεθούν τουλάχιστον $n \cdot k$ σε πλήθος, τότε συμπεραίνουμε πως θα υπάρχει κάποια (τουλάχιστον μία) φωλιά με τουλάχιστον k περιστέρια.

Να μια ακόμη "γενικευμένη" μορφή:

> Αν k αντικείμενα τοποθετηθούν σε n δοχεία τότε υπάρχει δοχείο με τουλάχιστον $\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + 1$ αντικείμενα.

Εδώ $\lfloor x \rfloor$ υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του x. Ορίστε μία ακόμη παραλλαγή της Αρχής:

> Αν $x_1, x_2, \cdots, x_n$ είναι μη μηδενικοί φυσικοί και στις φωλιές $1, 2, \cdots, n$ τοποθετήθηκαν συνολικά $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n + 1$ περιστέρια, τότε υπάρχει φωλιά i στην οποία τοποθετήθηκαν τουλάχιστον x_i περιστέρια.

Υπάρχουν κι άλλες ενδιαφέρουσες γενικεύσεις της Αρχής, ορισμένες εκ των οποίων έχουν τόσο βαθιά αποτελέσματα που μελετώνται αυτόνομα ως ξεχωριστά κομμάτια μαθηματικών όπως π.χ. το Θεώρημα και οι αριθμοί του Ramsey. Δεν θα επεκταθούμε όμως.

Η Αρχή του Dirichlet, "μετράει" λοιπόν το "διακριτό" (πεπερασμένο πλήθος) περιεχόμενο κάποιων δοχείων (φωλιών κτλ). Είναι φυσιολογικό λοιπόν να θεωρείται ως αντικείμενο μελέτης της Συνδυαστικής που ούτε λίγο ούτε πολύ ασχολείται ακριβώς με τη μέτρηση αντικειμένων σε δοχεία... Όταν οι μετρήσεις σχετίζονται με γεωμετρικά "αντικείμενα", λέμε πως βρισκόμαστε στο χώρο της Συνδυαστικής Γεωμετρίας. Ελπίζουμε πως οι εφαρμογές της Αρχής Dirichlet που ακολουθούν θα σας προσφέρουν μια γεύση της δύναμής της.

Πρώτα, ασχοληθείτε με μια τελευταία ερώτηση: είναι αναγκαίο οι φωλιές στις οποίες αναφέρεται η αρχή του Diriclet να είναι διακεκριμένες ή μήπως όχι·

1.10.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.23 Επιλέγουμε 51 αριθμούς μεταξύ των φυσικών $1, 2, \cdots, 100$. Δείξτε πως μεταξύ των επιλεγέντων υπάρχουν δύο πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή δεν έχουν κοινό διαιρέτη κάποιον πρώτο αριθμό). □

Λύση. Ίσως να θυμόσαστε πως μεταξύ των δοσμένων φυσικών $1, 2, \cdots, 100$ υπάρχουν κάποια πολύ χαρακτηριστικά ζευγάρια πρώτων μεταξύ τους αριθμών, συγκεκριμένα τα $(1, 2), (2, 3), \cdots$, $(99, 100)$. (Γιατί οι δύο αριθμοί σε κάθε ζευγάρι από αυτά είναι πρώτοι μεταξύ τους·).

Τα ζευγάρια αυτά είναι 50 σε πλήθος και μπορούν να θεωρηθούν σαν οι φωλιές των περιστεριών, ενώ οι 51 αριθμοί που επιλέγουμε σαν τα περιστέρια που πρέπει να τοποθετηθούνε το καθένα τους σε μια φωλιά, αυτή που περιέχει τον αριθμό στο ζευγάρι του ονόματός της. Π.χ. αν έχει επιλεγεί ο 5 σαν ένας από τους 51 αριθμούς, τότε τον τοποθετούμε στη φωλιά $(4, 5)$. Όμως έχουμε επιλέξει 51 αριθμούς και πρέπει να τους τοποθετήσουμε σε 50 φωλιές. Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, υπάρχουν δύο από τους επιλεγμένους αριθμούς που τοποθετήθηκαν στην ίδια φωλιά, οπότε είναι και πρώτοι μεταξύ τους όπως μας ζητήθηκε να δείξουμε.

Η ιδέα για τη δημιουργία των συγκεκριμένων "φωλιών" της λύσης, δεν είναι αυτόματη. Μπορεί ίσως να προκύψει μετά από λίγη σκέψη για το πόσο "στριμωγμένοι" είναι οι 51 επιλεγμένοι αριθμοί. Είναι τόσοι πολλοί που δεν γίνεται δύο οποιοιδήποτε διαδοχικοί να αφήνουν μεταξύ τους πάντοτε ένα κενό τουλάχιστον ενός αριθμού! Όμως τότε υπάρχουν διπλανοί διαδοχικοί από τους επιλεγμένους, άρα και πρώτοι μεταξύ τους... □

Στο εξής θα προτιμήσουμε τη χρήση των "δοχείων" αντί των "φωλιών".

Παράδειγμα 1.24 (**Paul Erdős**) Επιλέγουμε 51 αριθμούς μεταξύ των φυσικών $1, 2, \cdots, 100$. Δείξτε πως μεταξύ των επιλεγέντων υπάρχουν δύο τέτοιοι ώστε ο ένας να διαιρεί τον άλλον. □

Λύση. Η διαιρετότητα ενός φυσικού αριθμού από έναν άλλον παραπέμπει άμεσα στην ανάλυση των αριθμών αυτών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για το πρόβλημά μας, δε χρειαζόμαστε την πλήρη ανάλυση καθενός από τους 51 δοσμένους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, παρά αρκεί να τους αναλύσουμε στη μορφή $2^n k$ για κάποιον φυσικό εκθέτη $n \geq 0$ και κάποιον περιττό φυσικό k. Μία πολλά υποσχόμενη αναγωγή του προβλήματος σε ένα άλλο απλούστερο, είναι να δείξουμε πως υπάρχουν δύο από τους 51 που αναλύονται ως $2^n k$ και $2^m k$ αντιστοίχως, διότι τότε προφανώς το ζητούμενο αληθεύει (αν $n < m$ τότε ο $2^n k$ διαιρεί τον $2^m k$). Η ύπαρξη δύο τέτοιων αριθμών μεταξύ των 51 είναι όντως γεγονός και μπορεί να αποδειχθεί π.χ. ως εξής:

Διαμερίζουμε όλους τους φυσικούς $1, 2, \ldots, 100$ στις ακόλουθες 50 ομάδες (δοχεία) αριθμών:

Ομάδα $1 : 2^0 \cdot 1,\ 2^1 \cdot 1,\ 2^2 \cdot 1, \cdots$

Ομάδα $2 : 2^0 \cdot 3,\ 2^1 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3, \cdots$

Ομάδα $3 : 2^0 \cdot 5,\ 2^1 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 5, \cdots$

$\vdots$

Ομάδα $50 : 2^0 \cdot 99$

Η Αρχή του Dirichlet μας εγγυάται πως όποιοι κι αν είναι οι 51 αριθμοί που επιλέξαμε μεταξύ των $1, 2, \ldots, 100$, υπάρχουν δύο από αυτούς που τοποθετούνται στην ίδια ομάδα από τις 50 που δημιουργήσαμε, όπως ζητούσαμε. □

Είναι φανερό πως οι αριθμοί 100 και 51 της εκφώνησης του προηγούμενου Προβλήματος είναι βολικοί για το επιχείρημα της απόδειξης, αλλά όχι και απαραίτητα μοναδικοί. Δώστε γενικεύσεις του Προβλήματος.

Παράδειγμα 1.25 (61ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός Μαθηματικών, Θαλής, Γ' Γυμνασίου, Νοέμ. 2000) Σε μια Βαλκανική Συνάντηση Νέων συμμετείχαν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 13 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλλου. □

Λύση. $199 = 9 \cdot 22 + 1$ οπότε η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως υπάρχει χώρα με $22 + 1 = 23$ παιδιά στην αποστολή της.

Τα παιδιά της χώρας αυτής είναι είτε αγόρια είτε κορίτσια (δύο δοχεία) και $23 = 2 \cdot 12 + 1$, οπότε και πάλι η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως για τη χώρα $12 + 1 = 13$ παιδιά είναι είτε όλα τους αγόρια είτε όλα τους κορίτσια. □

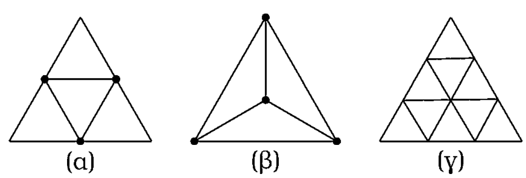
Παράδειγμα 1.26 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 3.

i. Στο εσωτερικό ή τις πλευρές του τριγώνου τοποθετούμε 5 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του $\frac{3}{2}$.

ii. Στο εσωτερικό ή τις πλευρές του τριγώνου τοποθετούμε 4 σημεία. Δείξτε πως δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν δύο σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του $\dfrac{3}{2}$.

iii. Στο εσωτερικό ή τις πλευρές του τριγώνου τοποθετούμε 10 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του 1. □

Λύση. i. Ας παρατηρήσουμε πως $\dfrac{3}{2}$ είναι το μισό μήκος των πλευρών του ισοπλεύρου, δηλαδή το μήκος των τμημάτων που ενώνουν τα μέσα δύο οποιονδήποτε πλευρών του. Τα τμήματα αυτά διαμερίζουν το δοθέν ισόπλευρο σε 4 μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\dfrac{3}{2}$ το καθένα (Σχήμα 1α).



Σχήμα 1: Διαμέριση ισόπλευρου τριγώνου σε μικρότερα κομμάτια

Ας παρατηρήσουμε επίσης πως σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο η μεγαλύτερη απόσταση δύο οποιονδήποτε σημείων των πλευρών ή του εσωτερικού του είναι αυτή δύο κορυφών του δηλαδή το μήκος της πλευράς του (γιατί;).

Οι δύο προηγούμενες παρατηρήσεις μας οδηγούν τώρα στην εξής "εύκολη" λύση:

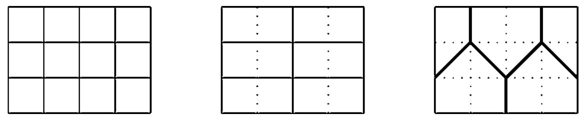
Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, αφού 5 σημεία πρέπει να τοποθετηθούν στα 4 μικρά ισόπλευρα τρίγωνα, θα υπάρχουν 2 (τουλάχιστον) από αυτά που θα τοποθετηθούν στο ίδιο μικρό ισόπλευρο τρίγωνο. Όμως τότε η απόσταση μεταξύ τους είναι το πολύ όσο και η πλευρά του ισόπλευρου, δηλαδή $\dfrac{3}{2}$ ο.ε.δ.

ii. Αν τα σημεία τοποθετηθούν στις τρεις κορυφές του ισόπλευρου και στο κέντρο βάρους του (ή κοντά του) (Σχήμα 1β), τότε ανά δύο οι αποστάσεις μεταξύ των βουλών υπερβαίνουν τα $\dfrac{3}{2}$ (αποδείξτε το).

iii. Διαμερίστε το δοθέν ισόπλευρο σε 9 μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα όπως στο Σχήμα 1γ και επαναλάβετε το σκεπτικό της λύσης στο ερώτημα i. □

Με την ευκαιρία αποδείξτε την ακόλουθη Γεωμετρική Πρόταση:

Πρόταση 1.27 *Η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων επάνω ή στο εσωτερικό οποιουδήποτε επίπεδου πολυγώνου (κυρτού ή μη-κυρτού) επιτυγχάνεται για δύο από τις κορυφές του. (Προβείτε σε παρατηρήσεις, γενικεύσετε, παράγετε άλλες προτάσεις).* □



Σχήμα 2: Διαμέριση ορθογωνίου 3×4 σε μικρότερα κομμάτια

Παράδειγμα 1.28 Στο εσωτερικό ή την περίμετρο (περίγραμμα) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων 3x4 τοποθετούμε

i. 13 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτές με απόσταση το πολύ 1.

ii. 7 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτές με απόσταση το πολύ $\sqrt{5}$.

iii. 6 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτές με απόσταση το πολύ $\sqrt{5}$. □

Λύση. Ακολουθήστε το σκεπτικό του προηγούμενου Παραδείγματος διαμερίζοντας για κάθε ερώτημα το ορθογώνιο στο κατάλληλο πλήθος σωστών "δοχείων". Μία σκέψη για τα δοχεία για την κάθε περίπτωση δίνεται στο Σχήμα 2. □

Παράδειγμα 1.29 (11η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων, Ιούνιος 2007, Βουλγαρία). Δίνονται 50 σημεία στο επίπεδο ανά τρία μη συνευθειακά. Καθένα από τα αυτά τα σημεία χρωματίζεται με ένα από τέσσερα δοσμένα χρώματα. Αποδείξτε πως υπάρχει χρώμα και 130 σκαληνά τρίγωνα με κορυφές του χρώματος αυτού. □

Λύση. Σκέψη στο πρόχειρο: Αν το ζητούμενο αληθεύει για ένα από τα τέσσερα δοσμένα χρώματα που χρωματίζει έστω n σημεία, τότε θα αληθεύει και για οποιοδήποτε άλλο χρώμα που χρωματίζει περισσότερα από n σημεία, αφού για κανένα από αυτά τα χρώματα δεν έχουμε κάποιες ιδιαίτερες πληροφορίες. Ωθούμαστε λοιπόν να περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στο χρώμα που χρωμάτισε τις περισσότερες κορυφές, ώστε η πιθανότητα εύρεσης αρκετών σκαληνών τριγώνων με αυτό το χρώμα να αυξάνει. Φυσικά δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε ακριβώς πόσες κορυφές χρωματίζει αυτό το χρώμα, αλλά χρησιμοποιώντας την Αρχή του Dirchlet μπορούμε να είμαστε σίγουροι για τη χαμηλότερη τιμή του πλήθους των κορυφών που χρωματίζει. Να γνωρίζουμε δηλαδή ποια είναι η χειρότερη δυνατή περίπτωση στην οποία και πάλι το ζητούμενο ισχύει. Οφείλουμε φυσικά να δείξουμε πως στην περίπτωση αυτή πράγματι ισχύει. Συνεπώς:

Σκέψη στο καθαρό: Αφού $50 = 4 \cdot 12 + 2 \geq 4 \cdot 12 + 1$, σύμφωνα με τη γενικευμένη Αρχή του Dirichlet, υπάρχει χρώμα μεταξύ των 4 δοσμένων που χρωματίζει τουλάχιστον $12 + 1 = 13$ από τα 50 δοσμένα σημεία.

Για να τελειώσουμε, απομένει να αποδείξουμε πως οποιαδήποτε 13 σημεία $A_1, A_2, \cdots, A_{13}$ του επιπέδου, ανά τρία μη συνευθειακά, ορίζουν τουλάχιστον 130 σκαληνά τρίγωνα.

Πρώτα, ας παρατηρήσουμε πως καθώς τα A_i δεν είναι συνευθειακά, 3 οποιαδήποτε από αυτά ορίζουν ένα τρίγωνο. Οπότε το πλήθος όλων των τριγώνων (σκαληνών και μη) που ορίζονται από τα 13 σημεία A_i ισούται με

$$\binom{13}{3} = \frac{13!}{3! \cdot (13-3)!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286.$$

Για να υπολογίσουμε πόσα τουλάχιστον από αυτά τα 286 τρίγωνα είναι σκαληνά, αρκεί να υπολογίσουμε πόσα το πολύ από αυτά είναι ισοσκελή:

Σταθεροποιώντας δύο από τα A_i, έστω τα A_1, A_2, τότε μεταξύ των τριγώνων με δύο κορυφές τις A_1, A_2 και τρίτη κορυφή κάποιο άλλο από τα A_i, υπάρχουν 2 το πολύ που είναι ισοσκελή με βάση το A_1A_2: αν υπήρχαν 3 ή περισσότερα, τότε όλες οι κορυφές αυτών των ισοσκελών θα βρισκότανε πάνω στη μεσοκάθετη του A_1A_2, δηλαδή θα υπήρχαν 3 ή περισσότερα συνευθειακά μεταξύ των A_i, άτοπο.

Το ίδιο συμβαίνει οποιαδήποτε 2 τυχαία σημεία κι αν σταθεροποιήσουμε μεταξύ των A_i. Αφού 2 τυχαία σημεία από τα A_i επιλέγονται κατά $\binom{13}{3}$ τρόπους, θα υπάρχουν το πολύ

$$2 \cdot \binom{13}{3} = 2 \cdot \frac{13!}{2! \cdot (13-2)!} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2!} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 2 \cdot 78 = 156$$

ισοσκελή τρίγωνα με κορυφές στα A_i. Μάλιστα στο πλήθος αυτό είναι δυνατό κάποιο τρίγωνο να μετρήθηκε 3 φορές (αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο), αλλά το γεγονός αυτό δεν αλλάζει την ακόλουθη σκέψη:

Αφού υπάρχουν 286 τρίγωνα με κορυφές τα A_i και το πολύ 156 από αυτά είναι ισοσκελή, θα υπάρχουν $286 - 156 = 130$ που είναι σκαληνά, ο.ε.δ. □

Παράδειγμα 1.30 Επιλέγουμε 10 αριθμούς μεταξύ των φυσικών $1, 2, \ldots, 100$. Δείξτε πως υπάρχουν δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόλου των επιλεγμένων αριθμών, με το ίδιο άθροισμα στοιχείων. □

Λύση. Ας ονομάσουμε S το σύνολο των 10 επιλεγμένων αριθμών. Θέλουμε να εκφράσουμε σκέψεις για τα μη κενά υποσύνολα του S, και συγκεκριμένα για κάθε τέτοιο υποσύνολο A μας ενδιαφέρει το άθροισμα των στοιχείων του Σ_A. Καθώς θέλουμε να συγκρίνουμε δύο τέτοια αθροίσματα (και να τα δείξουμε ίσα), καλό θα ήταν να έχουμε μια ιδέα για το πόσο μεγάλα ή μικρά είναι αυτά. Τετριμμένα: $1 \leq \Sigma_A \leq 91 + 92 + \cdots + 99 + 100$, δηλαδή $1 \leq \Sigma_A \leq 955$ για κάθε υποσύνολο A του S. Τα αθροίσματα λοιπόν που μας ενδιαφέρουν έχουν σχετικά λίγες δυνατές τιμές (δοχεία): τους φυσικούς $1, 2, \cdots, 955$ που είναι 955 σε πλήθος.

Επικαλούμενοι την Αρχή του Dirichlet, θα έχουμε λοιπόν σχεδόν λύσει το Πρόβλημα αν είμαστε τυχεροί και διαπιστώσουμε πως υπάρχουν περισσότερα από 955 μη κενά υποσύνολα του S. Αυτό όντως αληθεύει, αφού μια κλασσική άσκηση στη Συνδυαστική βεβαιώνει για το σύνολο S με 10 στοιχεία, υπάρχουν $2^{10} = 1028$ υποσύνολα, οπότε 1027 μη κενά υποσύνολα.

Σύμφωνα λοιπόν την Αρχή του Dirichlet γνωρίζουμε πλέον πως υπάρχουν δύο διακεκριμένα (διαφορετικά μεταξύ τους) μη κενά υποσύνολα του S, έστω A και B με $\Sigma_A = \Sigma_B$. Η Άσκηση όμως ζητάει τα A και B να είναι και ξένα μεταξύ τους. Αυτό δεν αποτελεί Πρόβλημα, αφού αν τα A και B που έχουμε στα χέρια μας δεν είναι ξένα μεταξύ τους, αρκεί να αποβάλλουμε από το καθένα τα κοινά τους στοιχεία. Τότε προκύπτουν δύο υποσύνολα A' και B' του S που είναι ξένα μεταξύ τους και φυσικά έχουν το ίδιο άθροισμα στοιχείων (βλέπετε το γιατί;). Υπάρχει και πάλι όμως μια μικρή λεπτομέρεια. Πρέπει να σιγουρευτούμε πως κανένα από τα A', B' δεν είναι το κενό σύνολο! Αυτό είναι όμως προφανές: αν κάποιο από τα A', B' είναι το κενό, έστω το A', τότε το A θα πρέπει να είναι υποσύνολο του B. Αφού όμως $\Sigma_A = \Sigma_B$, θα πρέπει τα A και B να είναι το ίδιο σύνολο, άτοπο (τα A και B είναι διακεκριμένα σύνολα). □

Παράδειγμα 1.31 (61ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός Μαθηματικών, Θαλής, Γ' Λυκείου, Νοέμ. 2000) Σε μία κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών[1] υπάρχουν 2 τουλάχιστον παιδιά με το ίδιο ύψος. Να αποδείξετε πως υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα που είναι του ίδιο φύλλου και έχουν το ίδιο ύψος. □

Λύση. $577 = 64 \cdot 9 + 1$ οπότε η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως υπάρχει χώρα, έστω A, με τουλάχιστον $64 + 1 = 65$ παιδιά.

$65 = 2 \cdot 32 + 1$ οπότε η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως για τη χώρα A υπάρχουν $32 + 1 = 33$ παιδιά του ίδιου φύλλου.

Ας ονομάσουμε $1, 2, \cdots, 33$ τα παιδιά και ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως είναι $\upsilon_1 \leq \upsilon_2 \leq \cdots \leq \upsilon_{33}$ τα αντίστοιχα ύψη τους. Θα δείξουμε πως μεταξύ των υ_i υπάρχουν 5 με διακεκριμένους δείκτες που είναι ίσα ως αριθμοί, οπότε θα έχουμε τελειώσει.

[1] Εδώ εννοείται (αν και η παρατήρηση δε θα μας χρειαστεί): παιδιών όχι αναγκαστικά της ίδιας χώρας.

Ας παρατηρήσουμε πως ουσιαστικά ψάχνουμε να δείξουμε πως υπάρχουν παιδιά $i < j$ με το ίδιο ύψος $v_i = v_j$ και με $j - i \geq 4$. Τότε όλα τα παιδιά k με $i \leq k \leq j$ έχουν το ίδιο ύψος $v_i = v_j$ και είναι τουλάχιστον 5 σε πλήθος.

Ας "χωρίσουμε νοητά" λοιπόν τα 33 ύψη σε $5-$άδες (λαμβάνοντας υπόψη τα άκρα) θεωρώντας την $9-$άδα των παιδιών με ύψη $v_1, v_5, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}, v_{25}, v_{29}, v_{33}$. Σύμφωνα με την υπόθεση του Προβλήματος, υπάρχουν δύο παιδιά σε αυτή την $9-$ άδα που έχουν το ίδιο ύψος. Δηλαδή δύο από τους αριθμούς $v_1, v_5, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}, v_{25}, v_{29}, v_{33}$ είναι ίσοι μεταξύ τους, έστω οι v_i, v_j με $j > i$. Είναι όμως φανερά $j - i \geq 4$, οπότε τελειώσαμε. □

Παράδειγμα 1.32 Δίνονται 9 σημεία του χώρου το καθένα τους με ακέραιες συντεταγμένες. Δείξτε πως υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο από τα δοσμένα σημεία που περιέχει και άλλο σημείο με ακέραιες συντεταγμένες (όχι αναγκαστικά κάποιο από τα δοσμένα). □

Λύση. Το να ψάχνουμε πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα για σημεία με ακέραιες συντεταγμένες δεν είναι συνηθισμένη υπόθεση. Αφού όμως τα άκρα των τμημάτων που μας ενδιαφέρουν έχουν ακέραιες συντεταγμένες, μπορούμε να θεωρήσουμε χαρακτηριστικά σημεία των τμημάτων, και εκφράζοντας τις συντεταγμένες τους συναρτήσει αυτών των άκρων κατά τα γνωστά, να ελέγξουμε αν και αυτά τα σημεία έχουν τέτοιες συντεταγμένες όπως ζητείται. Το χαρακτηριστικότερο σημείο ενός τμήματος, πέραν των άκρων είναι φυσικά το μέσον του. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να δείξουμε πως υπάρχει τμήμα με άκρα δύο από τα δοσμένα σημεία, το μέσον του οποίου έχει ακέραιες συντεταγμένες.

Αν $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο από τα δοσμένα σημεία, τότε το μέσον του τμήματος AB είναι το σημείο $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$. Καθώς τα $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$ είναι ακέραιοι αριθμοί, οι συντεταγμένες του M θα είναι επίσης ακέραιοι ακριβώς στην περίπτωση που τα x_1, x_2 έχουν την ίδια αρτιότητα (και τα δύο άρτιοι ή και τα δύο περιττοί) και ομοίως τα y_1, y_2 και ομοίως τα z_1, z_2. Θα έχουμε δείξει λοιπόν το ζητούμενο αν καταφέρουμε να δείξουμε πως μεταξύ των δοσμένων σημείων υπάρχουν δύο των οποίων οι αντίστοιχες συντεταγμένες έχουν την ίδια αρτιότητα (δηλαδή είναι και οι δύο είτε άρτιοι είτε περιττοί ακέραιοι)

Ας παρατηρήσουμε πως καθώς ένας τυχαίος ακέραιος έχει 2 επιλογές ως προς την αρτιότητά του (είναι είτε άρτιος είτε περιττός), μια τριάδα ακεραίων (όπως οι συντεταγμένες των δοσμένων σημείων) έχουν $2^3 = 8$ επιλογές ως προς την αρτιότητα που παρουσιάζουν· π.χ. (άρτ, περ, περ) ή (άρτ, αρτ, περ) κτλ. Όμως τα δοσμένα σημεία είναι 9 σε πλήθος. Αφού $9 > 8$, σύμφωνα με την Αρχ ή του Dirichlet υπάρχουν δύο σημεία μεταξύ των δοσμένων, οι τριάδες των συντεταγμένων των οποίων παρουσιάζουν την ίδια αρτιότητα (δηλαδή οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους παρουσιάζουν την ίδια αρτιότητα) ο.ε.δ. □

Στο Παράδειγμα που ακολουθεί, μονάχα το πρώτο ερώτημα θα επιλυθεί με χρήση της Αρχής του Dirichlet. Τα υπόλοιπα δύο συνοδευτικά ερωτήματα παρουσιάζονται ως παραπλήσια "στο πνεύμα" του περιεχομένου τους.

Παράδειγμα 1.33 i. Έστω A, B δύο σημεία του επιπέδου και έστω S το σύνολο των σημείων του επιπέδου για τα οποία οι αποστάσεις από τα A και B είναι φυσικοί αριθμοί. Δείξτε πως υπάρχουν δύο σημεία του S με διαφορά αποστάσεων από τα A και B (κατά απόλυτο τιμή) ίδια.

ii. (**Erdos-Anning**) Έστω S ένα απειροσύνολο σημείων του επιπέδου με την ιδιότητα πως οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί. Δείξτε τότε πως τα σημεία του S είναι συνευθειακά.

iii. Δείξτε πως για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$ υπάρχει ένα σύνολο S n μη συνευθειακών σημείων του επιπέδου, με την ιδιότητα πως οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί. □

Λύση. i. Εξαιτίας της τριγωνικής ανισότητας έχουμε πως για το τυχαίο σημείο M του S ισχύει $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right| \leq \overline{AB}$. Όμως ο αριθμός $\overline{AB}$ είναι σταθερός και ο $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right|$ είναι φυσικός. Δηλαδή ο φυσικός αριθμός $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right|$ έχει το πολύ $\left\lfloor \overline{AB} \right\rfloor$ δυνατές τιμές (δοχεία), όπου θυμηθείτε πως $\lfloor x \rfloor$ υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του x. Αν δείξουμε πως υπάρχουν περισσότερα από $\left\lfloor \overline{AB} \right\rfloor$ σε πλήθος σημεία στο S, τότε η Αρχή του Dirichlet θα μας δώσει το ζητούμενο.

Πραγματικά, στο S υπάρχουν άπειρα σε πλήθος σημεία. Το κάθε σημείο του S περιγράφεται ως τομή δύο κύκλων με κέντρα τα A και B και φυσικούς αριθμούς n, m αντιστοίχως, ώστε $|n-m| \leq \left\lfloor \overline{AB} \right\rfloor \leq n+m$. Φυσικά υπάρχουν άπειροι τέτοιοι κύκλοι οπότε και σημεία στο S (αρκεί π.χ. να επιλέξουμε φυσικούς n, m ίσους μεταξύ τους και μεγαλύτερους του $\left\lfloor \overline{AB} \right\rfloor$.

ii. Ας υποθέσουμε πως υπάρχουν τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, C του S.

Αφού το S έχει άπειρα σημεία, υπάρχουν δύο ευθείες από τις AB, BC, CA των οποίων η ένωση δε φιλοξενεί άπειρα από τα σημεία του S (ένα είδος γενίκευσης της Αρχής του Dirichlet. Αποδείξτε τον ισχυρισμό αυστηρά) π.χ. οι AB και AC. Ας είναι S' το σύνολο όλων των σημείων του S που δεν ανήκουν ούτε στην ευθεία AB ούτε στην ευθεία AC (Σχήμα 3α). Σημειώστε πως το S' είναι απειροσύνολο.

Αν M είναι τυχαίο σημείο του S', τότε εξαιτίας της τριγωνικής ανισότητας έχουμε $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right| < \overline{AB}$ όπου το γνήσιο της ανισότητας δικαιολογείται από το γεγονός πως το σημείο M δεν ανήκει στην ευθεία AB. Άρα ο φυσικός αριθμός $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right|$ μπορεί να αποκτήσει μονάχα μία από τις $\overline{AB}$ σε πλήθος τιμές (θυμηθείτε ο $\overline{AB}$ είναι φυσικός) $0, 1, 2, \cdots, \overline{AB}-1$. Συνεπώς το M ανήκει είτε στη μεσοκάθετο c_0 του τμήματος AB (αν $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right| = 0$ είτε σε μια από τις παραβολές c_i για $i = 1, 2, \cdots, \overline{AB}-1$ που ορίζονται ως το σύνολο των σημείων με διαφορά αποστάσεων από τα A και B ίση με i. (Η c_i για $i = 1, 2, \cdots, \overline{AB}-1$ είναι όντως παραβολή και όχι η ευθεία AB, αφού $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right| < \overline{AB}$.

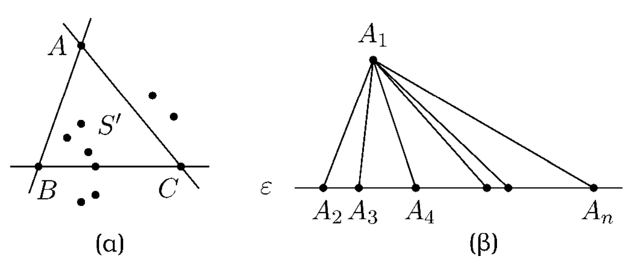
Ομοίως δείχνουμε πως το τυχαίο σημείο M του S' βρίσκεται είτε πάνω στη μεσοκάθετο c^0 του τμήματος AC, είτε πάνω σε μια από τις παραβολές c^i για $i = 1, 2, \cdots, \overline{AC}$ που ορίζονται ως το σύνολο των σημείων με διαφορά αποστάσεων από τα A και C ίση με i.

Συνεπώς το τυχαίο σημείο M του S' είναι κοινό σημείο κάποιας c_i με κάποια c^j. Όμως οι c_i είναι πεπερασμένες σε πλήθος όπως είναι και οι c^j. Μάλιστα καμία c_i δεν ταυτίζεται με κάποια c^j (εδώ δεν θα πρέπει να έχετε δυσκολία...). Συνεπώς το συνολικό πλήθος τομών που μπορεί να έχουν όλες οι c_i με όλες τις c^j είναι πεπερασμένο (βρείτε πόσα το πολύ κοινά σημεία έχει μια c_i με μια c^j. Άρα και το S' πρέπει να έχει πεπερασμένα σε πλήθος σημεία, άτοπο.

Οπότε η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη, και τα σημεία του S οφείλουν να είναι συνευθειακά.

Με την ευκαιρία, παρατηρήστε πως το γνήσιο της ανισότητας $\left|\overline{MA} - \overline{MB}\right| < \overline{AB}$ δεν ήταν πράγματι καθοριστικό στην παραπάνω απόδειξη. Μπορείτε να εντοπίσετε την πιο καθοριστική σκέψη στην απόδειξη;

iii. Για κάθε φυσικό n , θα κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύνολο $S = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.



Σχήμα 3: (α) Υπάρχουν άπειρα σημεία του S έξω από τις AB, AC. (β) Προσπαθώντας να τοποθετήσουμε n σημεία των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί.

Σκοπός μας είναι να "κρατηθούμε" όσο πιο κοντά γίνεται στην ευθεία, ώστε να "ελέγχουμε" την κατασκευή όσον το δυνατόν περισσότερο. Μια πρώτη προσπάθεια που καθώς θα φανεί στην πορεία μπορεί να ολοκληρωθεί επιτυχώς, είναι να τοποθετήσουμε τα $A_2, A_3, \cdots, A_n$ σε μια ευθεία (ε) (Σχήμα 3β) και το A_1 εκτός της (ε) πάνω στην κάθετη στην (ε) στο σημείο A_2. Δίνοντας στις αποστάσεις $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$ και $\overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$ τιμές φυσικούς αριθμούς, έχουμε σχεδόν το ζητούμενο. Όμως δεν υπάρχουν εγγυήσεις πως και τα μήκη $\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \cdots, \overline{A_1A_n}$ είναι επίσης φυσικοί όπως μας ζητείται. Συνεπώς, τα $\overline{A_1A_2}$ και $\overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$ θα πρέπει να αποκτήσουν όχι απλώς τιμές κάποιους φυσικούς, αλλά κάποιους φυσικούς "ειδικής" μορφής. Ας δούμε λοιπόν τι ακριβώς θέλουμε. Θέλουμε:

ο $\overline{A_1A_3} = \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2}$ να είναι φυσικός

ο $\overline{A_1A_4} = \sqrt{\overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_4}^2}$ να είναι φυσικός

$\vdots$

ο $\overline{A_1A_n} = \sqrt{\overline{A_1A_n}^2 + \overline{A_2A_n}^2}$ να είναι φυσικός

Το ζήτημα θα πρέπει να μας θυμίζει πλέον τις Πυθαγόρειες τριάδες (τριάδες φυσικών της μορφής $\left(a^2+b^2, \left|a^2-b^2\right|, 4a^2b^2\right)$ με a, b φυσικούς που μπορούν να είναι πλευρές ορθογωνίων τριγώνων). Δανειζόμενοι από την ομοιότητα αυτή, επιλέγουμε το $\overline{A_1A_2}$ ώστε $\overline{A_1A_2} = 2ab$ για κάποιους φυσικούς a, b. Τότε αν για παράδειγμα επιλέξουμε να είναι $\overline{A_2A_3} = \left|a^2-b^2\right|$, θα έχουμε και

$\overline{A_1A_3} = \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2} = \sqrt{(2ab)^2 + \left|a^2-b^2\right|^2} = a^2+b^2$ που είναι ακέραιος!

Οπότε μια εξαιρετικά βολική επιλογή για το $\overline{A_1A_2}$ θα είναι μια φυσική τιμή c που μπορεί να αναλυθεί ως $c = 2a_ib_i$ με τουλάχιστον $n-2$ τρόπους, δηλαδή για τουλάχιστον $n-2$ ζευγάρια φυσικών a_i, b_i $i = 3, 4, \cdots, n$ με π.χ. $a_i \leq b_i$. Τότε επιλέγοντας και $A_2A_i = \left|a_i^2 - b_i^2\right|$ για κάθε $i = 3, 4, \cdots, n$ θα έχουμε και $\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \cdots, \overline{A_1A_n}$ φυσικοί και θα έχουμε τελειώσει. (Μπορείτε να δείτε σε τι μας χρησιμεύει ο περιορισμός $a_i \leq b_i$;)

Τέτοια φυσική τιμή c πράγματι υπάρχει! Για παράδειγμα, για $c = 2^{2n+1}$ έχουμε $c = 2 \cdot 2^1 \cdot 2^{2n-1} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2n-2} = \cdots = 2 \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{2n-(n-2)}$.

Μια πρόκληση για εσάς: για την πιο πάνω τιμή του c, αντιπροσωπεύει άραγε το Σχήμα 3β την πραγματική διάταξη των σημείων $A_3, A_4, \cdots, A_n$ πάνω στην ευθεία (ε); □

Στο Παράδειγμα 1.6 συναντήσαμε ένα μικρό αποτέλεσμα σχετικά με χειραψίες. Ορίστε ένα ακόμη:

Παράδειγμα 1.34 (**Το Πρόβλημα των χειραψιών**) Δείξτε πως μεταξύ 6 οποιονδήποτε ανθρώπων, υπάρχουν 3 που γνωρίζονται μεταξύ τους ανά δύο, είτε υπάρχουν 3 που δε γνωρίζονται μεταξύ τους ανά δύο. □

Λύση. Το Πρόβλημα αυτό είναι ένα από τα γνωστότερα της Συνδυαστικής, και σε μια άλλη διατύπωσή του που δικαιολογεί και το όνομά του ως το "Πρόβλημα των χειραψιών" διατυπώνεται ως: σε κάθε πάρτι, μεταξύ οποιονδήποτε 6 παρισταμένων υπάρχουν 3 που ανά δύο αντάλλαξαν χειραψία, είτε υπάρχουν 3 που ανά δύο δεν αντάλλαξαν χειραψία. Μάλιστα αυτή η διατύπωση ενδείκνυται περισσότερο από αυτή της εκφώνησης, καθώς το να ανταλλάξουν δύο άτομα χειραψία θεωρείται πιο εύκολα ως αμοιβαία σχέση, ενώ το να γνωρίζονται δύο άτομα έχει κάποιες δυσκολίες ως προς την αμοιβαιότητά της: φανταστείτε π.χ. την περίπτωση να συναντήσουμε στην ομάδα των 6 ατόμων κάποιον που γνωρίζουμε και αυτός να κάνει πως δεν μας ξέρει...!

Θέλουμε το συμπέρασμά μας να αναφέρεται σε σχέσεις 2 ατόμων κάθε φορά: "γνωρίζονται" ή "δεν γνωρίζο- νται" (ή και "αντάλλαξαν χειραψία" ή "δεν αντάλλαξαν χειραψία"). Ο προσφιλής τρόπος για να παραστήσουμε τέτοια δεδομένα πιο γραφικά (ώστε να υποβοηθηθούμε στην "τακτοποίησή" τους) είναι να δανειστούμε τεχνικές από τη Θεωρία Γραφημάτων και να φανταστούμε τους 6 ανθρώπους ως σημεία στο επίπεδο και τη σχέση μεταξύ δύο οποιονδήποτε από αυτούς (γνωρίζονται ή όχι) ως το τμήμα μεταξύ των σημείων που τους παριστάνουν, με ένα χρώμα π.χ. κόκκινο αν οι δύο άνθρωποι γνωρίζονται, και με ένα άλλο χρώμα π.χ. πράσινο αν αυτοί δεν γνωρίζονται. Δεν βλάπτει τη γενικότητα να θεωρήσουμε πως τα σημεία τοποθετήθηκαν ανά τρία μη συνευθειακά. Τότε η Άσκηση επαναδιατυπώνεται ως:

Δίνονται 6 σημεία στο επίπεδο, ανά 3 μη συνευθειακά. Τα τμήματα με άκρα τα σημεία αυτά βάφονται είτε κόκκινα είτε πράσινα. Δείξτε πως υπάρχει τρίγωνο όλες ο πλευρές του οποίου έχουν το ίδιο χρώμα (είναι όπως λέμε "μονοχρωματικό").

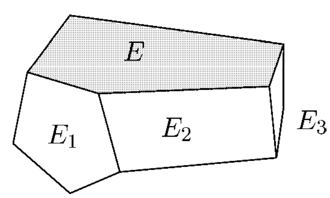
Ας θεωρήσουμε ένα σημείο A και τα 5 ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το A με τα 5 υπόλοιπα από τα δοσμένα σημεία. Αφού κάθε ένα από αυτά τα τμήματα έχει ένα από 2 χρώματα (δοχεία), και όλα τα τμήματα είναι $5 = 2 \cdot 2 + 1$, σύμφωνα με τη (γενικευμένη) Αρχή του Dirichlet θα υπάρχουν $2 + 1 = 3$ από αυτά με το ίδιο χρώμα, έστω πράσινο. Τα άκρα των 3 αυτών τμημάτων ορίζουν ένα τρίγωνο που είτε είναι μονοχρωματικό (είτε πράσινο είτε κόκκινο), είτε όχι. Στη δεύτερη περίπτωση, θα υπάρχει πράσινη πλευρά του. Αυτή, μαζί με τα δύο τμήματα που ενώνουν το A με τα άκρα της, αποτελούν ένα μονοχρωματικό (πράσινο) τρίγωνο. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει το ζητούμενο. □

Σχετικά με χειραψίες δείτε και την Άσκηση 1.77.

Παράδειγμα 1.35 Δείξτε πως σε κάθε πολύεδρο υπάρχουν δύο τουλάχιστον έδρες με το ίδιο πλήθος πλευρών. □

Λύση. Έστω E μία έδρα με το μεγαλύτερο πλήθος ακμών και έστω n το πλήθος αυτό. Κάθε ακμή της E είναι ακμή μιας ακόμη έδρας του πολυέδρου (Σχήμα 4), και μάλιστα σε διαφορετικές ακμές της E αντιστοιχούν διαφορετικές τέτοιες νέες έδρες (βλέπετε το λόγο;). Έστω $E_1, E_2, \cdots, E_n$ οι νέες αυτές έδρες.

Ας παρατηρήσουμε πως για το πλήθος x_i των ακμών της κάθε έδρας E_i ισχύει προφανώς $3 \leq x_i \leq n$. Οπότε οι n σε πλήθος ακέραιοι x_i μπορούν να επιλεγούν μεταξύ των $n-2$ φυσικών τιμών $\{3, 4, \ldots, n\}$. Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, δύο από τα x_i είναι ίσα, ο.ε.δ. □



Σχήμα 4: Κάθε ακμή της E είναι ακμή ακριβώς μιας ακόμη έδρας του πολυέδρου.

Παράδειγμα 1.36 (**Το Πρόβλημα του σκακιστή**). Κάποιος σκακιστής θέλει να προγραμματίσει παιχνίδια προπόνησης για μια περίοδο 77 συνεχόμενων ημερών έτσι ώστε κάθε μέρα να παίζει ένα τουλάχιστον παιχνίδι, αλλά συνολικά να μην παίξει περισσότερα από 132 παιχνίδια ώστε να μην κουραστεί. Δείξτε πως σε κάθε τέτοιο πρόγραμμα προπόνησης υπάρχει μια περίοδος διαδοχικών ημερών κατά τη διάρκεια της οποίας ο σκακιστής θα παίξει ακριβώς 21 παιχνίδια. □

Λύση. Η ακόλουθη προκαταρκτική σκέψη για το τι ακριβώς ψάχνουμε θα μας βοηθήσει να δώσουμε και μια πλήρη δικαιολόγηση της ορθότητας του ισχυρισμού.

Αν ο σκακιστής έχει παίξει μέχρι και την k ημέρα x_k παιχνίδια ($k = 1, 2, \cdots, 77$), τότε πρέπει να δείξουμε πως υπάρχουν ημέρες i και $j > i$ ώστε $x_j - x_i = 21$. Ισοδυνάμως θέλουμε να δείξουμε πως υπάρχουν $i, j \in \{1, 2, \cdots, 77\}$ ώστε $x_j = x_i + 21$. Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε πως κάποιος από τους αριθμούς $x_1, x_2, \cdots, x_{77}$ ισούται με κάποιον από τους αριθμούς $x_1 + 21,\ x_2 + 21,\ \cdots,\ x_{77} + 21$.

Πραγματικά, ας παρατηρήσουμε πως τόσο οι $x_1, x_2, \cdots, x_{77}$, όσο και οι $x_1 + 21,\ x_2 + 21,\ \cdots,\ x_{77} + 21$ είναι φυσικοί αριθμοί, και πως για καθέναν από αυτούς, έστω y, ισχύει $1 \leq y \leq 132 + 21 = 153$. Δηλαδή οι αριθμοί αυτοί έχουν 153 δυνατές τιμές (δοχεία), αλλά είναι όλοι μαζί συνολικά $77 + 77 = 154$ σε πλήθος. Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, υπάρχουν δύο από αυτούς που "μπαίνουν στο ίδιο δοχείο", δηλαδή έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή είναι ίσοι μεταξύ τους.

Όμως για οποιουσδήποτε διακεκριμένους δείκτες i, j, είναι αδύνατο να έχουμε $x_i = x_j$ αφού ο σκακιστής παίζει κάθε μέρα τουλάχιστον ένα παιχνίδι, και ομοίως είναι αδύνατο να έχουμε $x_i+21=x_j+21$. Συνεπώς οι δύο αριθμοί μεταξύ των $x_1,x_2,\cdots,x_{77},\ x_1+21,\ x_2+21,\ \cdots,\ x_{77}+21$ που είναι ίσοι σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet θα πρέπει να ανήκουν ο ένας στους $x_1,x_2,\cdots,x_{77}$ και ο άλλος στους $x_1+21,\ x_2+21,\ \cdots,\ x_{77}+21$. Δηλαδή υπάρχουν δείκτες i,j ώστε $x_j=x_i+21$ που είναι και το ζητούμενο.

Εκ των υστέρων και δίχως να προσθέτει τίποτε στη λύση, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως οι τελευταίοι δείκτες i,j ικανοποιούν απαραιτήτως την αναμενόμενη σχέση $j>i$. □

Τέλος ας παρουσιάσουμε την εφαρμογή της Αρχής του Dirichlet από τον ίδιο τον Dirichlet , που ήταν και η αιτία να πάρει η Αρχή το όνομα της. Στο Πρόβλημα αυτό ο Dirichlet επιδιώκει να αποδείξει πως οποιοσδήποτε άρρητος αριθμός έχει"καλές" ρητές προσεγγίσεις.

Παράδειγμα 1.37 (**Dirichlet**) Έστω a άρρητος. Τότε υπάρχουν άπειροι διαφορετικοί ρητοί $\frac{p}{q}$ με $q>0$ για τους οποίους $\left|a-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$. □

Λύση. Θα δείξουμε πως για κάθε μη μηδενικό φυσικό n υπάρχει ρητός $\frac{p}{q}$ με $0<q<n$ τέτοιος ώστε
$$\left|a-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{nq} \tag{1.2}$$
Η σχέση (1.2) είναι αρκετή για να προκύψει το ζητούμενο. Πραγματικά:

Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο μη μηδενικό φυσικό q_0. Τότε εξαιτίας της (1.2) έχουμε πως υπάρχει ρητός $\frac{p_0}{q_0}$ με $0<q_0<q$ ώστε $\left|a-\frac{p_0}{q_0}\right|<\frac{1}{q_0q}$ οπότε και $\left|a-\frac{p_0}{q_0}\right|<\frac{1}{q_0^2}$. Επίσης, αφού ο a είναι άρρητος, θα έχουμε $a\neq\frac{p_0}{q_0}$ οπότε υπάρχει φυσικός n_1 ώστε $\left|a-\frac{p_0}{q_0}\right|>\frac{1}{n_1}$ (βλέπετε το γιατί;), και ονομάζουμε τη σχέση αυτή (*). Τότε από τη σχέση 1.2 και πάλι, θα υπάρχει ρητός $\frac{p_1}{q_1}$ με $0<q_1<n_1$ τέτοιος ώστε $\left|a-\frac{p_1}{q_1}\right|<\frac{1}{n_1q_1}$ οπότε και $\left|a-\frac{p_1}{q_1}\right|<\frac{1}{q_1^2}$. Μάλιστα ο ρητός $\frac{p_1}{q_1}$ είναι διαφορετικός του ρητού $\frac{p_0}{q_0}$ και πιο "κοντά" στον a αφού $\left|a-\frac{p_1}{q_1}\right|<\frac{1}{n_1q_1}\leq\frac{1}{n_1}<\left|a-\frac{p_0}{q_0}\right|$, όπου η τελευταία ανίσωση είναι η σχέση (*). Το έως τώρα σκεπτικό μπορεί α επαναληφθεί επ'άπειρον παράγοντας όλο και πιο κοντινούς στον a ρητούς $\frac{p_k}{q_k}, k\in\mathbb{N}$ (οπότε άπειρους σε πλήθος και διαφορετικούς μεταξύ τους) με την ιδιότητα $0<q_k<n$ και $\left|a-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{nq_k}$, οπότε και $\left|a-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k^2}$ όπως ζητείται.

Απομένει να αποδείξουμε την ισχύ της σχέσης (1.2).

Ας σταθεροποιήσουμε λοιπόν κάποιον μη μηδενικό φυσικό n. Ας θεωρήσουμε τα δεκαδικά μέρη $\langle 1\cdot a\rangle,\langle 2\cdot a\rangle,\cdots,\big\langle(n+1)\cdot a\big\rangle$ των $n+1$ σε πλήθος αριθμών $1\cdot a,\ 2\cdot a,\ \cdots,\ (n+1)\cdot a$. Όλα αυτά τα δεκαδικά μέρη ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$. Διαμερίζοντας το διάστημα $[0,1]$ στα n ίσα υποδιαστήματα (δοχεία) $\left[0,\frac{1}{n}\right],\ \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{n},1\right]$, έχουμε εξαιτίας της Αρχής του... Dirichlet, πως δύο από τα δεκαδικά μέρη, έστω τα $\langle i\cdot a\rangle,\langle j\cdot a\rangle$ (με $i<j$), ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα. Τότε όμως τα δύο αυτά δεκαδικά αυτά μέρη απέχουν μεταξύ τους το πολύ όσο και το μήκος του υποδιαστήματος, δηλαδή $\frac{1}{n}$. Οπότε $\big|\langle j\cdot a\rangle-\langle i\cdot a\rangle\big|<\frac{1}{n}$ ή με άλλα λόγια $\Big|\big(j\cdot a-\lfloor j\cdot a\rfloor\big)-\big(i\cdot a-\lfloor i\cdot a\rfloor\big)\Big|<\frac{1}{n}$. Αυτή η τελευταία σχέση γράφεται $\Big|(j-i)a-\big(\lfloor i\cdot a\rfloor-\lfloor j\cdot a\rfloor\big)\Big|<\frac{1}{n}$ και ισοδυνάμως $\left|a-\frac{\lfloor i\cdot a\rfloor-\lfloor j\cdot a\rfloor}{j-i}\right|<\frac{1}{n(j-i)}$. Θέτοντας $p=\lfloor i\cdot a\rfloor-\lfloor j\cdot a\rfloor$ και $q=j-i$ έχουμε το ζητούμενο, αφού οι p,q είναι ακέραιοι με τον q να ικανοποιεί τη σχέση $0<q<n$ και τον ρητό $\frac{p}{q}$ να ικανοποιεί τη σχέση $\left|a-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{nq}$ όπως ζητείται. □

1.11 Ασκήσεις Κεφαλαίου

Η Αρχή του Χρωματισμού

Άσκηση 1.38 Δείξτε πως ένας $n \times n$ πίνακας (για εξήγηση της έννοιας δείτε §1.5) μπορεί να καλυφθεί με μη επικαλυπτόμενα ντόμινο, αν και μόνο αν ο n είναι άρτιος. □

Άσκηση 1.39 Δίνεται ένας 6×6 πίνακας με μια κάλυψή του από ντόμινο. Δείξτε πως υπάρχει ευθεία γραμμή που τον διαχωρίζει σε δύο μικρότερους πίνακες ώστε όλα τα ντόμινο της κάλυψής του να ανήκουν εξολοκλήρου είτε στον έναν είτε στον άλλο από τους μικρότερους πίνακες.

Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο και για 8×8 πίνακες. □

Άσκηση 1.40 Διατυπώστε συνθήκες (ικανές, αναγκαίες είτε και τα δύο) ώστε ένας $n \times n$ πίνακας από τον οποίο αφαιρέσαμε δύο κουτάκια του να μπορεί να καλυφθεί από ντόμινο.

Άσκηση 1.41 (12η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων, Αλβανία 2008) Αρχικά όλα τα κουτάκια ενός 4×4 πίνακα βάφονται άσπρα. Δυο κουτάκια του πίνακα ονομάζονται γειτονικά αν έχουν μια κοινή πλευρά. Μία κίνηση αποτελείται από την επιλογή ενός κουτιού και την αλλαγή του χρώματός του καθώς και τον χρωμάτων των γειτονικών του από άσπρο σε μαύρο ή από μαύρο σε άσπρο. Μετά από ακριβώς n κινήσεις όλα τα κουτιά γίνονται μαύρα. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του n. □

Υποσύνολα και διωνυμικοί συντελεστές

Άσκηση 1.42 Δώστε μια ακόμα λύση του Παραδείγματος 1.9 ακολουθώντας το εξής σκεπτικό:

Αν $x(n)$ το πλήθος των υποσυνόλων ενός τυχαίου συνόλου n στοιχείων, τότε μεταξύ των $x(n)$ και $x(n+1)$ ισχύει η σχέση $x(n+1) = 2x(n)$ που προκύπτει ως εξής:

Αν π.χ. $A = \{a_1, \cdots a_n, a_{n+1}\}$ ένα σύνολο $n+1$ στοιχείων και ονομάσουμε $B = \{a_1, \cdots a_n\}$ που είναι ένα σύνολο με n στοιχεία, τότε όλα τα υποσύνολα του A τα δημιουργούμε από τα υποσύνολα του B επεκτείνοντάς τα με έναν από τους εξής δύο τρόπους: είτε βάζοντας σε αυτά και το στοιχείο a_{n+1} είτε όχι. Οπότε πράγματι $x(n+1) = 2x(n)$.

Συνεχίστε στον υπολογισμό του πλήθους x_n με τη βοήθεια της **αναδρομικής** όπως λέγεται σχέσης $x(n+1) = 2x(n)$, αφού πρώτα δείξετε πως $x(0) = 1$. Αποδείξτε την Πρόταση 1.11 αλγεβρικά με χρήση του τύπου που εκφράζει τους διωνυμικούς συντελεστές ως κλάσματα. □

Άσκηση 1.43 Αποδείξτε την Πρόταση 1.12 επαγωγικά. □

Άσκηση 1.44 Αποδείξτε τα ακόλουθα:

1. $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{l}\binom{n-\ell}{k-\ell}$
2. $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ □

Το Θεώρημα του Νεύτωνα και το τρίγωνο του Pascal

Άσκηση 1.45 Αν S ένα σύνολο με n στοιχεία όπου ο n είναι πολλαπλάσιο του 8, να δείξετε πως το πλήθος των υποσυνόλων του S με πληθικότητα πολλαπλάσιο του 4 ισούται με $2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}$.
□

Επιλογές : Διατάξεις και Συνδυασμοί

Άσκηση 1.46 Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 20 παιδιά μιας τάξης στη μπροστινή σειρά των 30 καθισμάτων ενός θεάτρου; □

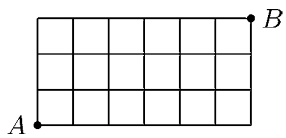
Άσκηση 1.47 Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης "μουστοκούλουρο " υπάρχουν; □

Άσκηση 1.48 Πόσοι 10-ψήφιοι αριθμοί δημιουργούνται χρησιμοποιώντας όλα τα ακόλουθα 10 ψηφία $2, 2, 2, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8$; □

Άσκηση 1.49 Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 3 από τις 7 ημέρες της εβδομάδας για να διεξάγουμε ένα τουρνουά σκάκι τριών παρτίδων, αν δεν επιτρέπεται να παίζονται περισσότερες από μία παρτίδες την ημέρα; □

Άσκηση 1.50 Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 3 από τις 7 ημέρες της εβδομάδας για να διεξάγουμε ένα τουρνουά σκάκι τριών παρτίδων, αν επιτρέπεται να παίζονται περισσότερες από μια παρτίδες την ημέρα; □

Άσκηση 1.51 Στο διάγραμμα του Σχήματος 5 επιθυμούμε να μεταβούμε από το σημείο A στο σημείο B μετακινούμενοι κατά μήκος των γραμμών και πραγματοποιώντας όσον το δυνατόν συντομότερη διαδρομή γίνεται. Πόσες τέτοιες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν; □



Σχήμα 5: Συντομότερες διαδρομές στην πόλη

Άσκηση 1.52 Πόσες λύσεις υπάρχουν της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ με k, n θετικούς ακεραίους, όταν:
(α) οι x_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.
(β) οι x_i είναι θετικοί ακέραιοι.
Η κάθε λύση $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ θεωρείται ως διατεταγμένη $k-$άδα. Έτσι π.χ. οι λύσεις $(1, 3, 4)$ και $(1, 4, 3)$ της $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ θεωρούνται διαφορετικές. □

Άσκηση 1.53 Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων τομής των διαγωνίων στο εσωτερικό ενός κυρτού 10-γώνου, όταν γνωρίζετε πως δεν υπάρχουν τρεις διαγώνιες που διέρχονται από το ίδιο σημείο. □

Άσκηση 1.54 Να υπολογίσετε το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία διαμερίζονται οι διαγώνιοι ενός κυρτού 10-γώνου από τα σημεία τομής τους, όταν γνωρίζετε πως δεν υπάρχουν τρεις διαγώνιες που διέρχονται από το ίδιο σημείο. □

Άσκηση 1.55 Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορεί να μοιράσει ο Αϊ-Βασίλης 3 κόκκινες μπάλες 2 πράσινες και 4 άσπρες στα 9 παιδιά μιας οικογένειας όταν το κάθε παιδί είναι να πάρει μία ακριβώς μπάλα. □

Άσκηση 1.56 Έχουμε επανειλημμένα μιλήσει για "πλήθος μεταθέσεων", αλλά δεν εξηγήσαμε τι εννοούμε με τον όρο "μετάθεση". **Μετάθεση** λοιπόν ενός πεπερασμένου συνόλου S είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση του S στον εαυτό του. Τότε η απεικόνιση αυτή θα είναι και επί.

Συχνά στην πράξη αντί να αναφερόμαστε στις μεταθέσεις ενός συνόλου S ως συναρτήσεις, προτιμούμε να τις παριστάνουμε ως τοποθετήσεις των στοιχείων του S σε μια σειρά. Π.χ. για το σύνολο $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, οι ακόλουθες τοποθετήσεις στη σειρά των στοιχείων του θεωρούνται ως μεταθέσεις του:

$2, 1, 3, 4, 5, 6 \qquad 1, 3, 4, 5, 6, 2 \qquad 2, 3, 1, 4, 5, 6 \qquad 6, 3, 4, 5, 1, 2.$

Αν θελήσουμε να εργαστούμε στη γλώσσα των απεικονίσεων, η πρώτη από αυτές τις μεταθέσεις παριστάνει την απεικόνιση που αντιστοιχεί το 1 στο 2, το 2 στο 1 και κάθε άλλο στοιχείο του S το αντιστοιχεί στον εαυτό του.

Με παρόμοιο τρόπο παριστάνουμε αν επιθυμούμε και τις διατάξεις (απλές ή επαναληπτικές) k στοιχείων ενός συνόλου S n στοιχείων ως τοποθετήσεις k από τα στοιχεία του S σε μια σειρά.

Δείξτε πως το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου n στοιχείων ισούται με $n!$. □

Άσκηση 1.57 Μία μετάθεση p του συνόλου $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ για την οποία $p(i) \neq i$, για όλα τα i ονομάζεται **διατάραξη**. Δείξτε πως το πλήθος των διαταράξεων ισούται με

$$n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

□

Η Αρχή Εισαγωγής - Εξαγωγής

Άσκηση 1.58 Εντοπίστε που βρίσκεται το λάθος στον ακόλουθο τρόπο επίλυσης του Παραδείγματος 1.22:

Δημιουργούμε όλα τα καλά προγράμματα για τον πωλητή ως εξής: (α) τοποθετούμε τους 4 νομούς σε 4 από τις 7 ημέρες της εβδομάδας και κατόπιν (β) στις υπόλοιπες τρεις ημέρες τοποθετούμε οποιονδήποτε από τους 4 νομούς.

Αν το (α) πραγματοποιείται με x_1 τρόπους και το (β) με x_2 τρόπους, τότε η πολλαπλασιαστική αρχή δίνει $x_1 \cdot x_2$ τρόπους για τα καλά προγράμματα.

Είναι $x_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$, αφού επιλέγοντας τις 4 από τις 7 ημέρες μας ενδιαφέρει και να τις ονομάσουμε (διατάξουμε ως) Τ,Κ,Λ,Μ. (Η φυσική χρονολογική διάταξη των ημερών δεν μας ενδιαφέρει στο σημείο αυτό). Εναλλακτικά, σε κάθε επιλογή μας, υπάρχουν 7 ημέρες-θέσεις για τα Τρίκαλα, οπότε 6 θέσεις για την Καρδίτσα, οπότε 5 για τη Λάρισα, οπότε 4 θέσεις για τη Μαγνησία, και η Πολλαπλασιαστική Αρχή δίνει $x_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ δυνατές επιλογές.

Και $x_2 = 4^3 = 64$ αφού για κάθε μια από τις υπόλοιπες ημέρες έχουμε 4 δυνατές επιλογές (Πολλαπλασιαστική Αρχή). Εναλλακτικά, οποιοσδήποτε από τους 4 νομούς μπορεί να επιλεγεί επαναληπτικά για τις υπόλοιπες 3 ημέρες.

Οπότε το πλήθος των καλών προγραμμάτων είναι $x_1 \cdot x_2 = 840 \cdot 64 = 53760$. □

Άσκηση 1.59 Στο φετινό Θερινό Σχολείο υπάρχουν 500 μαθητές. 300 μαθητές δήλωσαν πως θα παρακολουθήσουν Συνδυαστική, 250 θα παρακολουθήσουν Θεωρία Αριθμών και 120 και τα δύο αυτά μαθήματα. Οι μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά φέτος στο σχολείο είναι 80. Από αυτούς 50 θα παρακολουθήσουν Συνδυαστική, 60 Θεωρία Αριθμών και 35 και τα δύο μαθήματα. Την τελευταία μέρα του Σχολείου θα πραγματοποιηθεί αγώνας ποδοσφαίρου της τοπικής ομάδας στον οποίο θα παρευρεθούν μόνο οι παλιότεροι μαθητές του Σχολείου που δεν δήλωσαν πως θα παρακολουθήσουν Συνδυαστική ή Θεωρία Αριθμών. Πόσοι είναι οι μαθητές που θα παρευρεθούν στον αγώνα ποδοσφαίρου; □

Άσκηση 1.60 Πόσοι φυσικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 1000 (συμπεριλαμβανομένων αυτών) δε διαιρούνται με κανένα από τους πρώτους $2, 3, 5$; Με τους πρώτους $2, 3, 5, 7$; Ίδιο ερώτημα για τους φυσικούς μεταξύ του 1 και του 10000. Διακρίνετε κάποιο μοτίβο για την εύρεση του πλήθους των πρώτων έως και κάποιον αριθμό;

Υπόδειξη: Θα σας φανεί μάλλον χρήσιμο να γνωρίζετε πως το πλήθος των φυσικών μεταξύ του 1 και του n (συμπεριλαμβανωμένων και των άκρων) που διαιρούνται με τον πρώτο p ισούται με $\left[\frac{n}{p}\right]$, όπου $[x]$ υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του x. □

Η Αρχή του Dirichlet

Άσκηση 1.61 Υιοθετώντας λογικές υποθέσεις για την ανθρώπινη τριχοφυΐα και τον παγκόσμιο πληθυσμό αποδείξτε πως υπάρχουν πολλοί άνθρωποι με το ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι τους. □

Άσκηση 1.62 Γενικεύστε το πρόβλημα του σκακιστή. □

Άσκηση 1.63 Δείξτε πως σε κάθε ακολουθία από $n^2 + 1$ διακεκριμένους αριθμούς (όπου n κάποιος φυσικός), υπάρχει μια αύξουσα υπακουλουθία από $n + 1$ αριθμούς, είτε υπάρχει μια φθίνουσα υπακολουθία από $n + 1$ αριθμούς. (Γενικεύσετε. Δείτε και την επόμενη Άσκηση). Δείξτε πως σε οποιαδήποτε ακολουθία διακεκριμένων αριθμών με $n \cdot m + 1$ τουλάχιστον όρους (όπου m, n φυσικοί διάφοροι του 0), υπάρχει κάποια φθίνουσα υπακολουθία $m+1$ όρων, είτε υπάρχει κάποια αύξουσα υπακολουθία $n+1$ όρων.

Δείξτε πως για κατάλληλα επιλεγμένους όρους για τη δοσμένη ακολουθία, είναι δυνατό να υπάρχουν ταυτόχρονα δυο τέτοιες υπακολουθίες της. Δείξτε επίσης πως είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότερες από μια υπακολουθίες της του κάθε είδους. □

Άσκηση 1.64 Δείξτε πως μεταξύ n δοσμένων ακεραίων, υπάρχουν πάντοτε ορισμένοι με άθροισμα πολλαπλάσιο του n. (Οι δοσμένοι ακέραιοι δεν είναι απαραιτήτως διακεκριμένοι). □

Άσκηση 1.65 Δείξτε πως σε ένα σύνολο $n+1$ ακεραίων πάντοτε υπάρχουν δύο η διαφορά των οποίων είναι πολλαπλάσιο του n. □

Άσκηση 1.66 Δείξτε πως μεταξύ n συνεχόμενων ακεραίων αριθμών, υπάρχει κάποιος που διαιρείται από το n. Υπάρχει μήπως και δεύτερος; □

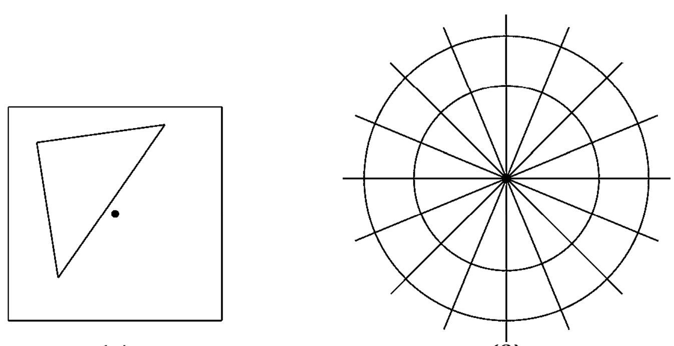
Άσκηση 1.67 Ένα τρίγωνο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τετραγώνου πλευράς 1, χωρίς να περιέχει στο εσωτερικό του το κέντρο του τετραγώνου (Σχήμα 6α). Δείξτε πως υπάρχει πλευρά του τριγώνου με μήκος μικρότερο του 1. □

Παρεμπιπτόντως, ασχοληθείτε και με το ακόλουθο Γεωμετρικό Πρόβλημα:

Άσκηση 1.68 Ένα τρίγωνο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τετραγώνου πλευράς 1. Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να έχει το τρίγωνο (Σχήμα 6α); □

Άσκηση 1.69 Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου πλευράς 8 δίνονται 65 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτά με απόσταση μεταξύ τους μικρότερη ή ίση του $\sqrt{2}$. □

Άσκηση 1.70 Στο εσωτερικό τετραγώνου πλευράς 1 δίνονται 9 σημεία. Δείξτε πως υπάρχει τρίγωνο με κορυφές στα δοσμένα σημεία και εμβαδόν μικρότερο ή ίσο του $\frac{1}{8}$. □



(α) (β)

Σχήμα 6: (α) Τρίγωνο σε τετράγωνο πλευράς 1. (β) Μερικές από τις ευθείες που διαιρούν τους ομοκεντρους κύκλους σε 100 ίσους κυκλικούς τομείς.

Άσκηση 1.71 Κάθε μια από 9 δοσμένες ευθείες τέμνει κάποιο ζεύγος απέναντι πλευρών δοσμένου τετραγώνου και διαιρεί το τετράγωνο σε δύο τετράπλευρα με λόγω εμβαδών μεγάλου προς μικρό ίσο με $3:4$. Δείξτε ότι μεταξύ των δοσμένων ευθειών υπάρχουν τουλάχιστον 3 συντρέχουσες.

Μπορούμε άραγε να έχουμε λόγο εμβαδών διαφορετικό του $3:4$; Είναι η υπόθεση πως κάθε ευθεία τέμνει απέναντι και όχι διαδοχικές πλευρές απαραίτητη; □

Άσκηση 1.72 Οι περιφέρειες δύο ομόκεντρων κύκλων διαιρούνται οι καθεμιά τους σε 100 ίσα τόξα με 100 ευθείες $(\varepsilon_1), \cdots, (\varepsilon_{100})$ διερχόμενες από το κοινό τους κέντρο (Σχήμα 6β). 50 από τα τόξα του εσωτερικού κύκλου βάφονται κόκκινα και 50 πράσινα, ενώ το κάθε τόξο του εξωτερικού βάφεται τυχαία είτε κόκκινο είτε πράσινο. Δείξτε πως είναι δυνατόν να ευθυγραμμίσουμε τα τόξα των δύο κύκλων περιστρέφοντας τον εξωτερικό γύρω από το κέντρο του, ώστε τουλάχιστον 50 ζευγάρια ευθυγραμμισμένων τόξων στους δύο κύκλους να έχουν το ίδιο χρώμα.

Οι δύο επόμενες Ασκήσεις αναφέρονται σε κόμβους κιγκλίδας. Η **κιγκλίδα** δείχνει σαν το μιλιμετρέ χαρτί ή το δικτυωτό σχήμα που προκύπτει π.χ. από τις οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που διέρχονται από τα ακέραια σημεία των αξόνων. Τα σημεία τομής των ευθειών τα ονομάζουμε **κόμβους** της κιγκλίδας. □

Άσκηση 1.73 Οι κόμβοι μιας κιγκλίδας βάφονται ο καθένας με ένα από 2 χρώματα. Δείξτε πως υπάρχει ορθογώνιο με κορυφές όμοια χρωματισμένους κόμβους. □

Άσκηση 1.74 Οι κόμβοι μιας κιγκλίδας βάφονται ο καθένας με ένα από 3 χρώματα. Δείξτε πως υπάρχει ισοσκελές τρίγωνο με κορυφές όμοια χρωματισμένους κόμβους. □

Επαναδιατυπώστε τις δύο τελευταίες Ασκήσεις χωρίς τη βοήθεια της κιγκλίδας.

Άσκηση 1.75 Δείξτε πως σε κάθε κυρτό $2n-$γωνο υπάρχει διαγώνιος που δεν είναι παράλληλη σε καμία πλευρά του πολυγώνου.

Για το επόμενο Πρόβλημα θα χρειαστούμε την έννοια του κανονικού πολυγώνου και του κέντρου του. **Κανονικό**, ονομάζεται κάθε $n-$γωνο που έχει όλες τις γωνίες του ίσες και όλες του τις πλευρές ίσες. Τέτοια πολύγωνα π.χ. είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα και τα τετράγωνα. Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, το κέντρο του οποίου ονομάζεται **κέντρο του πολυγώνου**. Ειδικά για τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο πλήθος κορυφών, το κέντρο τους αποτελεί και κέντρο συμμετρίας τους. □

Άσκηση 1.76 Δείξτε πως αν από κάποιο εσωτερικό σημείο κανονικού $2n-$γώνου διέρχονται n διαγώνιες, τότε το σημείο αυτό είναι το κέντρο του πολυγώνου. □

Άσκηση 1.77 Δείξτε πως σε οποιοδήποτε πάρτι, υπάρχουν 2 άτομα που αντάλλαξαν με τους υπόλοιπους στο πάρτι το ίδιο πλήθος χειραψιών.

(Εννοείται πως υποθέτουμε τουλάχιστον δύο άτομα στο πάρτι, αλλιώς δεν πρόκειται για πάρτι! Φυσικά δεν υποθέτουμε πως είναι αναγκαίο κάποιος ή και όλοι να έχουν οπωσδήποτε ανταλλάξει χειραψίες με άλλους! Ισχύει το ζητούμενο αν επιτρέπεται κανείς να ανταλλάξει περισσότερες από μία χειραψίες με κάποιον άλλον; Ισχύει το συμπέρασμα αν υποθέσουμε άπειρα άτομα στο πάρτι; Δικό μας το πάρτι, υποθέτουμε ότι θέλουμε λοιπόν...!) □

Άσκηση 1.78 (Ιαπωνική Μαθηματική Ολυμπιάδα 1991) Δείξτε πως σε κάθε $16-$ ψήφιο φυσικό υπάρχει μια σειρά από ένα ή περισσότερα διαδοχικά ψηφία του τέτοια ώστε το γινόμενο αυτών των ψηφίων να είναι τέλειο τετράγωνο. □

Άσκηση 1.79 Δείξτε πως μεταξύ οποιονδήποτε 9 διακεκριμένων πραγματικών αριθμών, υπάρχουν 2, έστω οι α και β ώστε να ισχύει:

$$0 < \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} < \sqrt{2} - 1$$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τριγωνομετρικό τύπο $\varepsilon\phi(x-y) = \frac{\varepsilon\phi(x)-\varepsilon\phi(y)}{1+\varepsilon\phi(x)\varepsilon\phi(y)}$ και το γεγονός πως $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.) □

Άσκηση 1.80 Δείξτε πως το δεκαδικό ανάπτυγμα κάθε ρητού αριθμού οφείλει να είναι περιοδικό από κάποια θέση και έπειτα. □