1.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με δύο χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα που απέχουν απόσταση *1*.**

Λύση

Έστω ότι χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου κόκινα (*Κ*) και πράσινα (*Π*). Στη συνέχεια θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο *ΑΒΓ* με μήκος πλευράς *1*. Οι κορυφές του τριγώνου είναι σημεία που απέχουν ανά δύο απόσταση *1*.

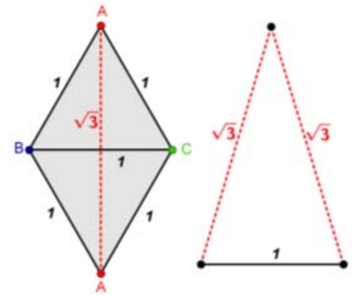
Όλοι οι δυνατοί τρόποι χρωματισμού των κορυφών του τριγώνου είναι: ΚΚΚ, ΚΚΠ, ΚΠΠ, ΠΠΠ.
Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα.

1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με τρία χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα που απέχουν απόσταση *1*.**

Λύση

Υποθέτουμε (με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου που απέχουν απόσταση *1* και έχουν το ίδιο χρώμα.



Θεωρούμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς *1* (με κοινή πλευρά) που δημιουργούν ρόμβο πλευράς *1*. Η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι *1* και η άλλη $\sqrt{3}$.

Από τον τρόπο χρωματισμού (που υποθέσαμε ότι ισχύει), προκύπτει ότι όλα τα σημεία που απέχουν απόσταση $\sqrt{3}$, έχουν το ίδιο χρώμα.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι δύο ίσες πλευρές έχουν μήκος $\sqrt{3}$ και η βάση του έχει μήκος 1, τότε όλες του οι κορυφές θα έχουν το ίδιο χρώμα. Δηλαδή υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία (τα άκρα της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου) που απέχουν απόσταση *1* και έχουν το ίδιο χρώμα (άτοπο).

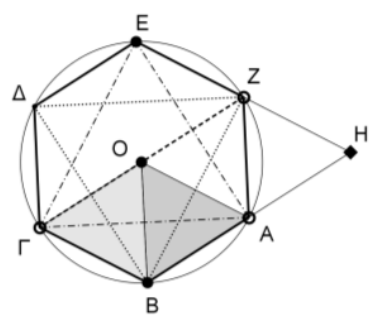
1.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με δύο χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα.**

Λύση

1^{ος} Τρόπος

Έστω ότι τα σημεία του επιπέδου είναι άσπρα ή μαύρα.



Υποθέτουμε (με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι δεν υπάρχουν ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα. Τότε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο του επιπέδου θα έχει δύο κορυφές με διαφορετικό χρώμα.

Θεωρούμε κανονικό εξάγωνο *ΑΒΓΔΕΖ* με κέντρο *Ο* το οποίο θεωρούμε ότι έχει μαύρο χρώμα.

Μία από τις κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου *ΒΔΖ* (έστω η *Β*) πρέπει να είναι μαύρη.

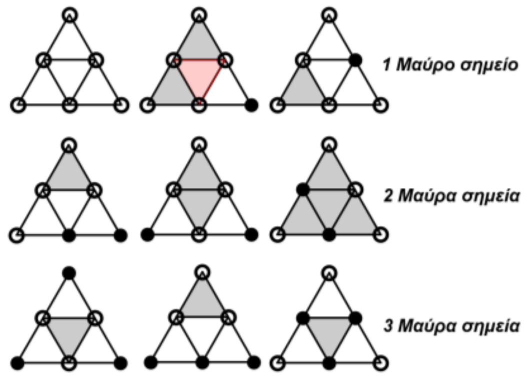
Από τα ισόπλευρα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ συμπεραίνουμε (με βαση την υπόθεση που έχουμε κάνει) ότι τα σημεία *Α,Γ* δεν μπορεί να είναι μαύρα (άρα θα είναι άσπρα).

Από το ισόπλευρο τρίγωνο *ΑΓΕ* (εφόσον *Α,Γ* άσπρα), συμπεραίνουμε ότι το σημείο *Ε* θα είναι μαύρο. Προεκτείνουμε τώρα τις πλευρές *ΑΒ, ΕΖ* και έστω *Η* το σημείο τομής τους.

Τότε ότι χρώμα και να έχει το σημείο *Η*, ένα από τα ισόπλευρα τρίγωνα *ΗΑΖ* και *ΗΕΒ* θα έχει και τις τρείς κορυφές του με ίδιο χρώμα (άτοπο).

2ος Τρόπος

Έστω ότι τα σημεία του επιπέδου είναι άσπρα ή μαύρα.
Οι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, μαζί με τα μέσα των πλευρών του, ορίζουν τέσσερα επί πλέον ισόπλευρα τρίγωνα που το μήκος της πλευράς τους είναι το μισό του μήκους της πλευράς του αρχικού ισόπλευρου τριγώνου.
Οι μισοί τρόποι χρωματισμού των έξι σημείων παρουσιάζονται στο σχήμα. Οι υπόλοιποι τρόποι προκύπτουν από την αντικατάσταση των μαύρων σημείων σε άσπρα και αντίστροφα.



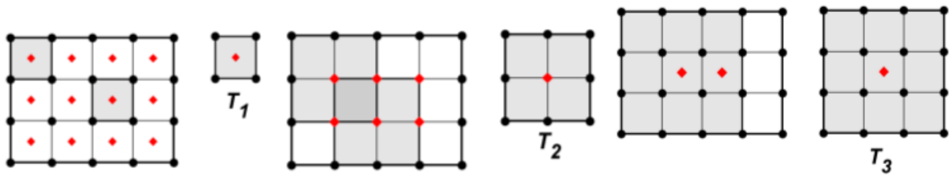
Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι και τα έξι σημεία είναι άσπρα.
Τότε υπάρχουν πέντε ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).
Αν αλλάξουμε το χρώμα σε ένα σημείο, τότε δημιουργούνται (Σχήμα) ένα ή δύο ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).
Αν αλλάξουμε το χρώμα σε δύο σημεία, τότε δημιουργούνται (Σχήμα) ένα ή τρία ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).
Αν αλλάξουμε το χρώμα σε τρία σημεία, τότε δημιουργείται (Σχήμα) ένα ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο) ή ένα ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα (μαύρο).
Όλες οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται στα προηγούμενα (εναλλάσοντας του ρόλους των μαύρων με τα άσπρα σημεία και αντίστροφα).

1.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ **Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $3x4$, το χωρίζουμε με παράλληλες (προς τις πλευρές του) ευθείες σε 12 στοιχειώδη τετράγωνα πλευράς 1. Πόσα συνολικά τετράγωνα δημιουργούνται μετά από αυτό το χωρισμό;**
(θεωρούμε τα τεράγωνα που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού παραλληλογράμμου και οι κορυφές τους είναι σημεία του πλέγματος)

Λύση

Με κορυφές τα σημεία του πλέγματος, μπορούν να δημιουργηθούν τετράγωνα διαστάσεων $1x1$, $2x2$ και $3x3$, που θα τα συμβολίζουμε με T_1, T_2 και T_3 αντίστοιχα.



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι $3 \cdot 4 = 12$ (μετρήστε τα κέντρα των τεραγώνων).

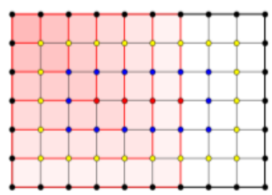
Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $2 \cdot 3 = 6$ (μετρήστε τα κέντρα των τεραγώνων).

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι $2 \cdot 1 = 2$ (μετρήστε τα κέντρα των τεραγώνων).

Άρα το συνολικό πλήθος των τετραγώνων είναι $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 20$.

Παρατήρηση

1. Με ανάλογο τρόπο, αποδείξτε ότι το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται στο παρακάτω $6x9$ πλέγμα, είναι: $6 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 154$.



2. Γενικώτερα αν έχουμε ένα $n \times k$ (με $n > k \geq 1$) πλέγμα, τότε το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται είναι:

$$k \cdot n + (k-1) \cdot (n-1) + (k-2) \cdot (n-2) + \cdots + 2 \cdot (n-k+2) + 1 \cdot (n-k+1)$$

ή

$$1 \cdot (n-k+(1)) + 2 \cdot (n-k+(2)) + \cdots + (k-1) \cdot (n-k+(k-1)) + k \cdot (n-k+(k)) =$$
$$= \frac{k(k+1)(3n-k+1)}{6} .$$

3. Για $n = k$, ο προηγούμενος τύπος γίνεται $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ και εκφράζει το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται στο $n \times n$ τετράγωνο.

1.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

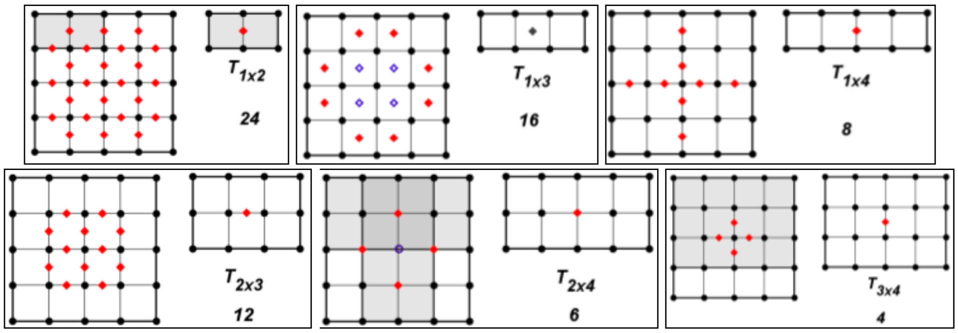
✦ **Τετράγωνο πλευράς μήκους 4, το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε 16 τετράγωνα πλευράς μήκους 1 . Πόσα συνολικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου), ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;**

Λύση

Με κορυφές τα σημεία του πλέγματος, μπορούν να δημιουργηθούν ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων 1×2, 1×3, 1×4, 2×3, 2×4 και 3×4 που θα τα συμβολίζουμε με $T_{1\times 2}$, $T_{1\times 3}$, $T_{1\times 4}$, $T_{2\times 3}$, $T_{2\times 4}$ και $T_{3\times 4}$ αντίστοιχα.

1^{ος} Τρόπος

Ονομάζουμε κέντρο κάθε ορθογωνίου, το σημείο τομής των διαγωνίων του.



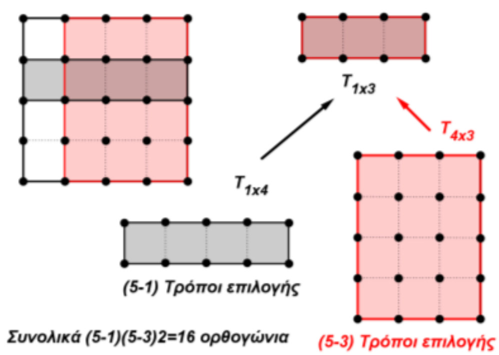
Η καταμέτρηση των ορθογωνίων προκύπτει από τη καταμέτρηση των σημείων που είναι κέντρα των ορθογωνίων.

Για τη καταμέτρηση των ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 3}$ και $T_{2\times 4}$, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημεία που είναι κέντρα δύο ορθογωνίων του αντίστοιχου τύπου.

Προσθέτοντας το πλήθος των ορθογωνίων που δημιουργούνται σε κάθε περίπτωση, βρίσκουμε ότι το πλήθος ορθογωνίων είναι: $24+16+8+12+6+4=70$.

2^{ος} Τρόπος

Έστω k,m ακέραιοι με $1\le k<m\le 4$. Κάθε ορθογώνιο τύπου $T_{k\times m}$ δημιουργείται από τη "τομή" των ορθογωνίων $T_{k\times 4}$ και $T_{4\times m}$.



Για παράδειγμα, το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 3}$ δημιουργείται από τη "τομή" των ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 4}$ και $T_{4\times 3}$. Το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 4}$ μπορεί να επιλεγεί με $(5\text{-}1)=4$ τρόπους. Ταυτόχρονα το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 4}$ μπορεί να επιλεγεί $(5\text{-}3)=2$ τρόπους. Άρα το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 3}$ δημιουργείται με $2\cdot 4=8$ τρόπους. Επειδή όμως το ορθογώνιο τύπου $T_{1\times 4}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε και "κατακόρυφα" (ταυτόχρονα το ορθογώνιο τύπου $T_{4\times 3}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε και "οριζόντια"), το τελικό πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 3}$ διπλασιάζεται.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε το πλήθος όλων των τύπων ορθογωνίων.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 2}$: $(5-1)\cdot(5-2)\cdot 2=4\cdot 3\cdot 2=24$.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 3}$: $(5-1)\cdot(5-3)\cdot 2 = 4\cdot 2\cdot 2 = 16$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{1\times 4}$: $(5-1)\cdot(5-4)\cdot 2 = 4\cdot 1\cdot 2 = 8$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{2\times 3}$: $(5-2)\cdot(5-3)\cdot 2 = 3\cdot 2\cdot 2 = 12$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{2\times 4}$: $(5-2)\cdot(5-4)\cdot 2 = 3\cdot 1\cdot 2 = 6$.
Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{3\times 4}$: $(5-3)\cdot(5-4)\cdot 2 = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$.
Προσθέτοντας το πλήθος των ορθογωνίων που δημιουργούνται, βρίσκουμε ότι το πλήθος ορθογωνίων είναι: $24+16+8+12+6+4=70$.

3ος Τρόπος

Θεωρούμε δύο απέναντι πλευρές του αρχικού τετραγώνου. Σην μία πλευρά υπάρχουν 5 σημεία τα οποία ορίζουν $\binom{5}{2}$ ευθύγραμμα τμήματα. Τα τμήματα αυτά, μαζί με τα ανάλογα τμήματα που βρίσκονται στην απέναντι πλευρά, ορίζουν $\binom{5}{2}$ ορθογώνια. Τα ίδια ακριβώς και ταυτόχρονα συμβαίνουν στο άλλο ζεγάρι απέναντι πλευρών. Έτσι δημιουργούνται $\binom{5}{2}^2 = 100$ "τομές", που είναι τα ζητούμενα ορθογώνια. Οι δημιουργούμενες "τομές" όμως μπορεί να είναι και τετράγωνα. Για να βρούμε λοιπόν το πλήθος των ορθογωνίων, θα πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος των τετραγώνων, που είναι $\frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6} = \frac{4\cdot 5\cdot 9}{6} = 30$.

Παρατηρήσεις

1. Σε τετράγωνο $n\times n$ ορίζονται $(n-k+1)(n-m+1)\cdot 2$ ορθογώνια τύπου $T_{k\times m}$. Όπου k,m,n είναι ακέραιοι με $1\le k<m\le n$.
2. Σε τετράγωνο $n\times n$ ορίζονται $\binom{n+1}{2}^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ορθογώνια.