ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Αγγελική Βλάχου – Αργύρης Φελλούρης

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΤΡΙΩΝΥΜΟ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{R}$

1.1. Κάθε πρόταση της μορφής $f(x)=\varphi(x)$, όπου f και φ είναι αλγεβρικές παραστάσεις της μεταβλητής x, ονομάζεται **εξίσωση με άγνωστο το x.**

Για παράδειγμα, αν $f(x)=2x-6$, $\varphi(x)=x+4$, η ισότητα $2x-6=x+4$ είναι εξίσωση με άγνωστο το x.

Υπάρχουν προτάσεις της μορφής $f(x,y)=\varphi(x,y)$, δηλαδή παραστάσεις με δύο μεταβλητές x, y και τότε έχουμε εξίσωση με δύο αγνώστους x, y. Οι εξισώσεις γενικά βρίσκουν εφαρμογές στη λύση πολλών προβλημάτων.

1.2. Εξισώσεις με έναν άγνωστο.

Έστω $f(x)$ ένα πολυώνυμο μεταβλητής x, δηλαδή

$$f(x)=\alpha_\nu\cdot x^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot x^{\nu-1}+...+\alpha_1\cdot x+\alpha_0,$$

με συντελεστές $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},...\alpha_1,\alpha_0$ πραγματικούς αριθμούς. Η ισότητα $f(x)=0$ είναι μία **πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση** με άγνωστο το x. Αν $\alpha_\nu\neq 0$ τότε ο βαθμός ν του πολυωνύμου είναι και ο **βαθμός της εξίσωσης**.

Συνεπώς:

$\alpha x+\beta=0$, με $\alpha\neq 0$,είναι μία αλγεβρική εξίσωση 1ου βαθμού.

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$, είναι μία αλγεβρική εξίσωση 2ου βαθμού.

$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, με $\alpha\neq 0$, είναι μία αλγεβρική εξίσωση 3ου βαθμού

κ.λ.π.

1.3. Στη Σχολική Άλγεβρα συναντάμε εξισώσεις που ανάγονται σε αλγεβρικές, για παράδειγμα:

$8x-3=\sqrt{x-10}$ «*εξίσωση με ριζικό*».

$x-\dfrac{x-2}{3}=x+3-\dfrac{x}{6}$ «*κλασματική εξίσωση*»

$\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0$, *«τριγωνομετρική εξίσωση»*

$3^x=81$ «*εκθετική εξίσωση*»

$2\ell ogx=6$ *«λογαριθμική εξίσωση»*.

Σημείωση: *Οι εξισώσεις που δεν ανάγονται σε αλγεβρικές ονομάζονται «υπερβατικές», για παράδειγμα η εξίσωση :* $\ell ogx=\frac{1}{3}x-1$.

1.4. Μετασχηματισμοί εξισώσεων

Έστω $f(x)=0$ μια εξίσωση (όπου f είναι μία παράσταση του x). Ένας αριθμός ρ θα λέγεται **λύση ή ρίζα** της εξίσωσης $f(x)=0$, αν και μόνο αν, ισχύει $f(\rho)=0$.

Το σύνολο Λ που έχει στοιχεία όλες της λύσεις της εξίσωσης λέγεται **σύνολο λύσεων** της εξίσωσης.

Δύο εξισώσεις $f(x)=0$ και $\varphi(x)=0$ λέμε ότι είναι **ισοδύναμες,** αν και μόνο αν, έχουν τις ίδιες λύσεις.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. **Αν και στα δύο μέλη μιας εξίσωσης προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) την ίδια συνάρτηση, προκύπτει εξίσωση ισοδύναμη με την αρχική, δηλαδή**
$$f(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow f(x)\pm g(x)=\varphi(x)\pm g(x)$$
2. **Αν και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης πολλαπλασιασθούν (ή διαιρεθούν) με τον ίδιο αριθμό, διάφορο του μηδενός προκύπτει ισοδύναμη εξίσωση με την αρχική, δηλαδή**
$$f(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow \lambda f(x)=\lambda\varphi(x),\ \lambda\neq 0\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}f(x)=\frac{1}{\lambda}\varphi(x),\ \lambda\neq 0.$$
3. **Η εξίσωση** $f(x)=0$, όπου $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots f_k(x)$ **είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις:** $f_1(x)=0$ ή $f_2(x)=0$, ή ...ή $f_k(x)=0$**, δηλαδή το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης** $f(x)=0$, όπου $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x)$ **ισούται με την ένωση των συνόλων των λύσεων των εξισώσεων**
$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ \ldots,f_k(x)=0.$$
4. **Η εξίσωση** $f(x)=\varphi(x)$ **δεν είναι γενικά ισοδύναμη με την εξίσωση**
$$f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)\cdot g(x),$$
αφού η τελευταία έχει ως ρίζες και τις ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$**.**

   Πράγματι, έχουμε:
$$f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)\cdot g(x)\Leftrightarrow [f(x)-\varphi(x)]\cdot g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-\varphi(x)=0 \text{ ή } g(x)=0.$$
5. **Αν και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης υψωθούν στην ίδια δύναμη ή τεθούν κάτω από ρίζα ιδίου δείκτη, δεν προκύπτει ισοδύναμη εξίσωση με την αρχική.**

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ (ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)

2.1. Μία εξίσωση ονομάζεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού με άγνωστο x ή γραμμική εξίσωση με άγνωστο x, αν, και μόνο αν, είναι της μορφής $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha\neq 0$.

Ο αριθμός α λέγεται συντελεστής του αγνώστου και το β σταθερός όρος.

Η τιμή του αγνώστου x που επαληθεύει την εξίσωση, λέγεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

Η διαδικασία για την εύρεση της λύσης της εξίσωσης λέγεται **επίλυση** της εξίσωσης.

Εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού	Ρίζες της εξίσωσης
$\alpha\cdot x+\beta=0 \quad \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$	Αν α ≠ 0, υπάρχει **μία μόνο λύση**, η $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
	Αν α = 0 και β ≠ 0 καμία λύση στο $\mathbb{R}$. Η εξίσωση είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.
	Αν α = 0 και β = 0, κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι λύση. Η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=0$ και είναι **αόριστη ή ταυτότητα**.

Μια εξίσωση που δεν είναι γραμμικής μορφής, είναι δυνατόν εφαρμόζοντας τις ιδιότητες να μετασχηματισθεί σε γραμμική και να λυθεί όπως μπορούμε να δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{9(8-x)-10(9-x)-4(x-1)=1-8x}$

Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις ιδιότητες:

$$9(8-x)-10(9-x)-4(x-1)=1-8x$$
$$\Leftrightarrow 72-9x-90+10x-4x+4=1-8x$$
$$\Leftrightarrow -9x+10x-4x+8x=-72+90-4+1 \Leftrightarrow 5x=15 \Leftrightarrow x=3$$

Η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 3.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η εξίσωση : $\mathbf{\dfrac{3x}{2}-8+x=\dfrac{x-10}{2}+2x-3}$

Λύση

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και κάνουμε απαλοιφή των παρονομαστών, πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π.

$$\frac{3x}{2}-8+x=\frac{x-10}{2}+2x-3 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{3x}{2}-2\cdot 8+2\cdot x=2\cdot\frac{x-10}{2}+2\cdot 2x-2\cdot 3 \Leftrightarrow 0x=0,$$

οπότε η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα.

2.2. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παραμετρικές εξισώσεις. Σε αυτήν την κατηγορία ασκήσεων εκτός από τον άγνωστο x, υπάρχουν κι άλλες μεταβλητές (μ, λ, α, β $\in$ R) που λέγονται παράμετροι. Για να λύσουμε μία παραμετρική εξίσωση τη φέρνουμε στη μορφή ax = b και εξετάζουμε τις περιπτώσεις a ≠ 0 και a = 0.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{\mu^2(x-2)-3\mu=x+1}$ με άγνωστο x και μ $\in$ R .

Λύση

$$\mu^2(x-2)-3\mu=x+1 \Leftrightarrow \mu^2x-2\mu^2-3\mu=x+1 \Leftrightarrow \mu^2x-x=2\mu^2+3\mu+1 \Leftrightarrow$$
$$(\mu^2-1)x=2\mu^2+2\mu+\mu+1 \Leftrightarrow (\mu+1)(\mu-1)x=(\mu+1)(2\mu+1) \qquad (1)$$

- Αν $(\mu+1)(\mu-1)\neq 0 \Leftrightarrow \mu+1\neq 0$ και $\mu-1\neq 0 \Leftrightarrow \mu\neq -1$ και $\mu\neq 1$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\frac{(\mu+1)(\mu-1)}{(\mu+1)(\mu-1)}x=\frac{(\mu+1)(2\mu+1)}{(\mu+1)(\mu-1)}\Leftrightarrow x=\frac{2\mu+1}{\mu-1}$$

- Αν $(\mu+1)(\mu-1)=0\Leftrightarrow \mu+1=0$ ή $\mu-1=0 \quad \Leftrightarrow \mu=-1$ ή $\mu=1$ έχουμε:
  Για $\mu=-1$ η εξίσωση (1) γίνεται:
  $(-1+1)(-1-1)x=(-1+1)(-2+1)\Leftrightarrow 0x=0$, (αόριστη ή ταυτότητα).
  Για $\mu=1$ η εξίσωση (1) γίνεται:
  $(1+1)(1-1)x=(1+1)(2+1)\Leftrightarrow 0x=6$, (η εξίσωση είναι αδύνατη).

Παράδειγμα 2
Να λυθεί η εξίσωση $(x+\alpha)^2-(x-\beta)^2=\alpha+\beta$ με άγνωστο x.

Λύση
Έχουμε δύο παραμέτρους α και β.

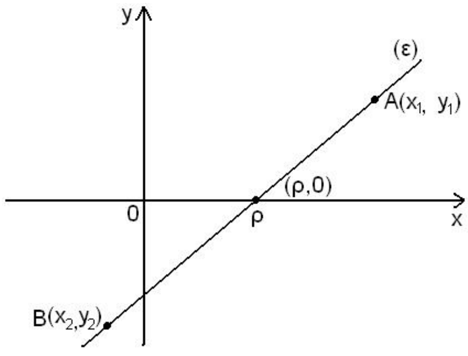
$$(x+\alpha)^2-(x-\beta)^2=\alpha+\beta\Leftrightarrow x^2+2\alpha x+\alpha^2-x^2+2\beta x-\beta^2=\alpha+\beta\Leftrightarrow$$
$$2(\alpha+\beta)x=-\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+\alpha+\beta\Leftrightarrow$$
$$2(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)(\beta-\alpha+1) \qquad (1)$$

- Αν $2(\alpha+\beta)\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq-\beta$, τότε έχουμε:
  $$(1)\xrightarrow{:2(\alpha+\beta)}\frac{2(\alpha+\beta)}{2(\alpha+\beta)}x=\frac{(\alpha+\beta)(\beta-\alpha+1)}{2(\alpha+\beta)}\Leftrightarrow x=\frac{\beta-\alpha+1}{2}$$
- Αν $2(\alpha+\beta)=0\Leftrightarrow \alpha+\beta=0\Leftrightarrow \alpha=-\beta$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται:
  $0x=0$, (αόριστη ή ταυτότητα)

2.3. Γραφική επίλυση των γραμμικών εξισώσεων 1^{ου} βαθμού αx + β = 0 με α≠0.

Έστω η εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ με δύο αγνώστους x, y. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x_0,y_0) ή $(x_0,\alpha x_0+\beta)$ ή $\left(\frac{y_0-\beta}{\alpha},y_0\right)$.

Αν πάρουμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy, τότε το σύνολο των λύσεων (x_0, y_0) ορίζει σημεία στο επίπεδο xOy, τα οποία βρίσκονται σε ευθεία ε. **Η εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ είναι η εξίσωση της ευθείας (ε).**



Σχήμα 1

Αν το (ρ,0) είναι το σημείο τομής της ευθείας (ε) με του άξονα x΄x, τότε ο αριθμός ρ είναι λύση της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ αφού ισχύει αρ+β=0.

Παρατήρηση: Για να κατασκευάσουμε την ευθεία (ε) είναι αρκετό να πάρουμε αυθαίρετα δύο τιμές x_1, x_2, και κατόπιν να βρούμε τα y_1, y_2 ως $y_1 = \alpha x_1 + \beta$ και $y_2 = \alpha x_2 + \beta$. Έτσι βρίσκουμε δύο σημεία Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) και κατασκευάζουμε την ευθεία (ε).

Παράδειγμα.
Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις:

i) $\mathbf{2x - 8 = 0}$, **ii)** $\mathbf{\dfrac{x+1}{2} + 2x = \dfrac{3x-2}{2} + 2}$

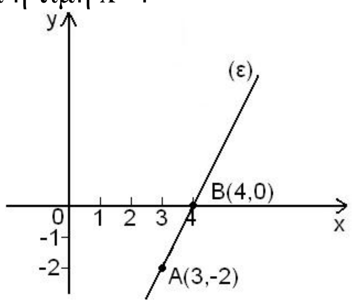
Λύση

i) Κατασκευάζουμε την ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 2x - 8$ και βρίσκουμε την τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα x΄x που θα είναι και η λύση της εξίσωσης $0 = 2x - 8$

Για x=3, $y = 2 \cdot 3 - 8 = -2$ έτσι Α(3,-2)

Για x=4, $y = 2 \cdot 4 - 8 = 0$ έτσι Β(4,0)

Λύση της εξίσωσης είναι η τιμή x=4



Σχήμα 2

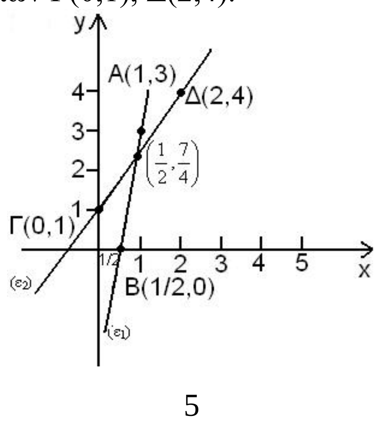
ii) $\dfrac{x+1}{2} + 2x = \dfrac{3x-2}{2} + 2$

Μπορούμε να φέρουμε την εξίσωση στη μορφή αx + β = 0 και να εργαστούμε όπως στο (i) ερώτημα.

Εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $y = \dfrac{x+1}{2} + 2x = \dfrac{5x+1}{2}$ (1) και $y = \dfrac{3x-2}{2} + 2 = \dfrac{3x+2}{2}$ (2)

Η (1) παριστάνει ευθεία (ε_1) και η (2) ευθεία (ε_2). Κατασκευάζουμε τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) κατά τα γνωστά. Η (ε_1) είναι η ευθεία των σημείων Α(1,3), Β($\dfrac{1}{2}$,0) και η (ε_2) είναι η ευθεία των σημείων Γ(0,1), Δ(2,4).



Σχήμα 3

Οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$, οπότε η λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{1}{2}$.

Άσκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{4(x^2-2x)=3x^2-6x+(x-2)^2}$.

Λύση

Εκτελούμε τις πράξεις και με κατάλληλους μετασχηματισμούς θα μετατρέψουμε την εξίσωση σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων ίσο με το μηδέν.

$$\begin{aligned}
&4(x^2-2x)=3x^2-6x+(x-2)^3 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 4x(x-2)-3x(x-2)-(x-2)^3=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x-2)\cdot[4x-3x-(x-2)^2]=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x-2)\cdot(-x^2+5x-4)=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x^2-5x+4)=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow x-2=0 \text{ ή } x-4=0 \text{ ή } x-1=0\\
&\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=4 \text{ ή } x=1 \;.
\end{aligned}$$

Συνεπώς λύσεις είναι: x=1 ή x=2 ή x=4

Άσκηση 2

Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\mathbf{(2x+3)^3+(1-5x)^3=(4-3x)^3}$

ii) $\mathbf{(x-4)^3+8(x-1)^3-27(x-2)^3=0}$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή αν α = β = γ τότε ισχύει:
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ (από ταυτότητα του Euler).

i) $(2x+3)^3+(1-5x)^3=(4-3x)^3 \Leftrightarrow (2x+3)^3+(1-5x)^3-(4-3x)^3=0 \Leftrightarrow$
$(2x+3)^3+(1-5x)^3+(-4+3x)^3=0$

Παρατηρούμε ότι:

$$(2x+3)+(1-5x)+(-4+3x)=4-4+5x-5x=0\,.$$

Άρα, από την ταυτότητα του Euler έχουμε :

$$(2x+3)^3+(1-5x)^3+(-4+3x)^3=3\cdot(2x+3)(1-5x)(-4+3x)$$

Έτσι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$3\cdot(2x+3)(1-5x)(-4+3x)=0$$

$$2x+3=0 \text{ ή } 1-5x=0 \text{ ή } -4+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \text{ ή } x=\frac{1}{5} \text{ ή } x=\frac{4}{3}.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x=-\frac{3}{2}$ ή $x=\frac{1}{5}$ ή $x=\frac{4}{3}$.

ii) $(x-4)^3+8(x-1)^3-27(x-2)^3=0 \Leftrightarrow (x-4)^3+2^3(x-1)^3+(-3)^3(x-2)^3=0$

$$\Leftrightarrow (x-4)^3+(2x-2)^3+(-3x+6)^3=0$$

Ομοίως σκεπτόμενοι όπως στο ερώτημα (i) βρίσκουμε λύσεις x = 1 ή x = 2 ή x = 4.

Άσκηση 3

Να λυθούν οι παραμετρικές εξισώσεις:

i) $\dfrac{5\lambda+2x}{5}+\dfrac{4x-6}{\lambda}=\dfrac{x+(\lambda+5)^2}{5\lambda}$

ii) $\lambda=\dfrac{\mu\lambda-\mu x}{\lambda+\mu}+\dfrac{2x}{\lambda}$

Λύση

i) $\dfrac{5\lambda+2x}{5}+\dfrac{4x-6}{\lambda}=\dfrac{x+(\lambda+5)^2}{5\lambda}\Leftrightarrow \boxed{\text{Ε.Κ.Π.}:5\lambda\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 0}$

$5\lambda\dfrac{5\lambda+2x}{5}+5\lambda\dfrac{4x-6}{\lambda}=5\lambda\dfrac{x+(\lambda+5)^2}{5\lambda}\Leftrightarrow \lambda(5\lambda+2x)+5(4x-6)=x+(\lambda+5)^2\Leftrightarrow$

$5\lambda^2+2\lambda x+20x-30=x+(\lambda+5)^2\Leftrightarrow(2\lambda+20-1)x=-5\lambda^2+30+\lambda^2+10\lambda+25\Leftrightarrow$

$(2\lambda+19)x=-4\lambda^2+10\lambda+55\qquad(1)$

- Αν $2\lambda+19\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq-\dfrac{19}{2}$ η (1) έχει λύση:

$$x=\frac{-4\lambda^2+10\lambda+55}{2\lambda+19}\quad(\text{με }\lambda\neq 0\text{ και }\lambda\neq\frac{21}{2}).$$

- Αν $2\lambda+19=0\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{19}{2}$ η (1) γίνεται:

$$0x=-\frac{1474}{4}\ (\text{εξίσωση αδύνατη}).$$

ii) $\lambda=\dfrac{\mu\lambda-\mu x}{\lambda+\mu}+\dfrac{2x}{\lambda},\quad \boxed{\text{Ε.Κ.Π.}:\lambda(\lambda+\mu)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 0\ \text{ και }\ \lambda\neq-\mu}$

$$\lambda(\lambda+\mu)\lambda=\lambda(\lambda+\mu)\frac{\mu\lambda-\mu x}{\lambda+\mu}+\lambda(\lambda+\mu)\frac{2x}{\lambda}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lambda^3+\lambda^2\mu=\lambda^2\mu-\lambda\mu x+(\lambda+\mu)2x$$

$$\Leftrightarrow[\lambda\mu-2(\lambda+\mu)]x=-\lambda^3\Leftrightarrow[2(\lambda+\mu)-\lambda\mu]x=\lambda^3\qquad(1)$$

Έχουμε να λύσουμε την (1) με τους περιορισμούς $\lambda\neq 0$ και $\lambda+\mu\neq 0$ (2)

- Αν επιπλέον $2(\lambda+\mu)-\lambda\mu\neq 0\Leftrightarrow 2(\lambda+\mu)\neq\lambda\mu$ η εξίσωση (1) έχει λύση την

$$x=\frac{\lambda^3}{2(\lambda+\mu)-\lambda\mu}$$

- Αν επιπλέον $2(\lambda+\mu)-\lambda\mu=0\Leftrightarrow 2(\lambda+\mu)=\lambda\mu$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x=\lambda^3$ με $\lambda\neq 0$ συνεπώς, είναι αδύνατη.

Άσκηση 4

Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα α, β ώστε η εξίσωση

$$(x-\alpha)\cdot(2x-\beta)^2=(x-\beta)\cdot(2x-\alpha)^2$$

i) να έχει μία μόνο λύση, ii) να είναι αδύνατη στο R, iii) να είναι αόριστη.

Λύση

Κατ' αρχάς φέρουμε την εξίσωση στη μορφή $ax = b$. Έχουμε

$$(x-\alpha)(2x-\beta)^2 = (x-\beta)(2x-\alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha)(4x^2-4x\beta+\beta^2) = (x-\beta)(4x^2-4x\alpha+\alpha^2) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4x^3} - \cancel{4x^2\beta} + x\beta^2 - 4\alpha x^2 - 4\cancel{\alpha\beta}x - \alpha\beta^2 = \cancel{4x^3} - \cancel{4x^2\alpha} + \alpha^2 x - \cancel{4\beta x^2} + \cancel{4\alpha\beta x} - \beta\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 x - \alpha^2 x = \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)x = \alpha\beta(\beta-\alpha) \qquad (1)$$

i) Για να έχει η εξίσωση (1) μια λύση απαιτούμε

$$(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \beta-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \alpha \text{ και } \beta+\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \pm\alpha$$

ii) Για να είναι η εξίσωση (1) αδύνατη στο $\mathbb{R}$ απαιτούμε

$$\left\{\begin{matrix} (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = 0 \\ \text{και } \alpha\beta(\beta-\alpha) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \beta = \alpha \text{ ή } \beta = -\alpha \\ \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0 \text{ και } \beta \neq \alpha \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \beta = -\alpha \neq 0.$$

iii) Για να είναι η εξίσωση (1) ταυτότητα απαιτούμε

$$\left\{\begin{matrix} (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = 0 \\ \text{και } \alpha\beta(\beta-\alpha) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \beta = \alpha \text{ ή } \beta = -\alpha \\ \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0 \text{ ή } \beta = \alpha \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Άσκηση 5

Αν $\alpha^2+\beta^2+9-3\alpha-3\beta-\alpha\beta = 0$ να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{\lambda}{x-\lambda} + \frac{\alpha}{x+\alpha} = \frac{\lambda+\alpha}{x-(\alpha+\beta)}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+9-3\alpha-3\beta-\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+3^2-3\alpha-3\beta-\alpha\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\alpha-3)^2+(\beta-3)^2\right] = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\alpha-3)^2+(\beta-3)^2 = 0.$$

Αν $\alpha-\beta \neq 0$ ή $\alpha\text{-}3 \neq 0$ ή $\beta\text{-}3 \neq 0$, τότε θα είχαμε $(\alpha-\beta)^2+(\alpha-3)^2+(\beta-3)^2 > 0$, που είναι άτοπο. Άρα έχουμε α = β = 3 και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\lambda}{x-\lambda} + \frac{3}{x+3} = \frac{\lambda+3}{x-6}.$$

Είναι Ε.Κ.Π.: $(x-\lambda)(x+3)(x-6) \neq 0$, οπότε πρέπει: $x \neq \lambda$, $x \neq -3$ και $x \neq 6$.

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. και έχουμε :

$$(x-\lambda)(x+3)(x-6)\frac{\lambda}{x-\lambda} + (x-\lambda)(x+3)(x-6)\frac{3}{x+3} = (x-\lambda)(x+3)(x-6)\frac{\lambda+3}{x-6}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-6)\lambda + (x-\lambda)(x-6)3 = (x-\lambda)(x+3)(\lambda+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2-6\lambda-27)x = -3\lambda(\lambda+3) \Leftrightarrow (\lambda-9)(\lambda+3)x = -3\lambda(\lambda+3) \qquad (1)$$

- Αν $(\lambda-9)(\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 9$ και $\lambda \neq -3$, τότε η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση που προκύπτει με διαίρεση των δύο μελών της με το συντελεστή $(\lambda-9)(\lambda+3)$:

$$x = \frac{-3\lambda}{\lambda-9} \text{ με } x \neq \lambda, x \neq -3 \text{ και } x \neq 6.$$

Επειδή ισχύουν:

$$x = \frac{-3\lambda}{\lambda-9} = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2-9\lambda = -3\lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda-6) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 6,$$

$$x=\frac{-3\lambda}{\lambda-9}=-3\Leftrightarrow -3\lambda+27=-3\lambda\Leftrightarrow 0\cdot\lambda=27\,(\text{αδύνατη}),$$

$$x=\frac{-3\lambda}{\lambda-9}=6\Leftrightarrow 6\lambda-54=-3\lambda\Leftrightarrow 9\lambda=54\Leftrightarrow\lambda=6,$$

συμπεραίνουμε ότι η λύση $x=\dfrac{-3\lambda}{\lambda-9}$ είναι αποδεκτή, για $\lambda\in\mathbb{R}-\{-3,0,6,9\}$.

- Αν $(\lambda-9)(\lambda+3)=0\Leftrightarrow\lambda=9$ ή $\lambda=-3$, τότε έχουμε:

  Για λ = 9 η εξίσωση (1) γίνεται: $0\cdot x=-3\cdot 9\cdot(9+3)\Leftrightarrow 0\cdot x=-324$ (αδύνατη).

  Για $\lambda=-3$ η εξίσωση (1) γίνεται: $0\cdot x=0$ (αόριστη, αλλά με $x\neq-3$ και $x\neq 6$).

Άσκηση 6

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε η εξίσωση

$$\mathbf{\frac{5\lambda x-5\mu}{4}=\frac{3\lambda-3\mu x}{4}+8x-4}$$

να αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Υπόδειξη

Πρέπει η παραμετρική εξίσωση να είναι ταυτότητα. Τη φέρουμε στη μορφή ax =b και απαιτούμε a = 0 και b = 0.

Άσκηση 7

Αν $\alpha^2+\beta^2+53\leq 14\alpha+4\beta$ με $\alpha,\beta\in R$, να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{\frac{\alpha+\beta}{x+2}+\frac{\beta}{x\cdot(x+2)}=\frac{\alpha+7}{x+2}}$$

Υπόδειξη . Έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+53\leq 14\alpha+4\beta\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2-14\alpha-4\beta+49+4\leq 0\Leftrightarrow(\alpha-7)^2+(\beta-2)^2\leq 0.$$

Άρα α = 7 και β = 2.

Η εξίσωση γίνεται $\dfrac{9}{x+2}+\dfrac{2}{x(x+2)}=\dfrac{14}{x+2}$, η οποία λύνεται κατά τα γνωστά.

Άσκηση 8

Αν λ είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $(x-2)^3+(x-1)^3+(3-2x)^3=0$, να λυθεί η εξίσωση $\mu(x-2)-2\lambda x=5-7x$.

Υπόδειξη

Επειδή $(x-2)+(x-1)+(3-2x)=0$, από τις συνέπειες της ταυτότητας του Euler βρίσκουμε ότι: x = 2 ή x = 1 ή $x=\dfrac{3}{2}$, οπότε: λ = 2. Έτσι, η παραμετρική εξίσωση γίνεται $\mu(x-2)-4x=5-7x\Leftrightarrow(\mu+3)x=2\mu+5$, η οποία λύνεται εύκολα.

Άσκηση 9

Αν ισχύει α(α+2β)=1-β^2 με α + β ≠-1 να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\mathbf{\frac{\alpha x-1}{x-1}+\frac{\beta}{x+1}=\frac{\alpha(x^2+1)}{x^2-1}}$$

είναι αδύνατη.

Υπόδειξη

$\alpha(\alpha+2\beta)=1-\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=1 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=\pm 1$, οπότε α + β = 1, αφού α + β ≠ -1 Από $\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=1-\alpha$ η εξίσωση γίνεται:

$\frac{\alpha x-1}{x-1}+\frac{1-\alpha}{x+1}=\frac{\alpha(x^2+1)}{x^2-1}$, την οποία λύνουμε κατά τα γνωστά και καταλήγουμε στην εξίσωση $0\cdot x=2$, που είναι αδύνατη.

Άσκηση 10

Να χωριστεί ο αριθμός 317 σε δύο μέρη, έτσι ώστε το μεγαλύτερο μέρος διαιρούμενο με το μικρότερο να δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 68.

Λύση

Έστω x το μικρότερο μέρος τότε το μεγαλύτερο θα είναι 317-x και από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης θα είναι:

$317-x=2x+68 \Leftrightarrow -3x=-249 \Leftrightarrow x=83$ το μικρότερο μέρος και 317 - 83 = 234 το μεγαλύτερο μέρος.

Άσκηση 11

Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 7. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος κατά 9. Να βρεθεί ο αρχικός αριθμός.

Λύση

Έστω $\overline{xy}=10x+y$ ο αριθμός.

Ο αριθμός που προκύπτει με εναλλαγή των ψηφίων είναι $\overline{yx}=10y+x$ και ισχύει

$$\overline{yx}=\overline{xy}+9.$$

Άρα θα έχουμε:

$$10y+x=10x+y+9 \qquad (1)$$

Όμως ισχύει:

$$x+y=7 \Leftrightarrow y=7-x \qquad (2)$$

Η εξίσωση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$10(7-x)+x=10x+7-x+9 \Leftrightarrow 70-10x+x=10x-x+7+9$$

$$\Leftrightarrow -18x=-54 \Leftrightarrow x=3.$$

Άρα θα είναι και y = 4 και ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 34.

Άσκηση 12

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{x-\frac{2x-\frac{2-x}{5}}{6}=2-\frac{\left(1-\frac{4-x}{2}\right)\frac{1}{3}}{5}}.$$

Λύση

Ε.Κ.Π(6, 5) = 3. Επομένως έχουμε:

$$30x-30\frac{2x-\frac{2-x}{5}}{6}=30\cdot 2-30\frac{\left(1-\frac{4-x}{2}\right)\frac{1}{3}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 30x-5\left(2x-\frac{2-x}{5}\right)=60-6\left(1-\frac{4-x}{2}\right)\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30x-10x+5\frac{2-x}{5}=60-2\left(1-\frac{4-x}{2}\right)\Leftrightarrow 30x-10x+5\frac{2-x}{5}=60-2\left(1-\frac{4-x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 30x-10x+2-x=60-2+\cancel{2}\frac{4-x}{\cancel{2}}\Leftrightarrow 19x+2=60-2+4-x$$

$$\Leftrightarrow 20x=56\Leftrightarrow x=\frac{56}{20}\Leftrightarrow x=\frac{14}{5}.$$

Άσκηση 13
Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί ω για τους οποίους ισχύει:

$$\mathbf{(4\omega+2004)^8=(4\omega+1000)^8}.$$

Λύση

$$(4\omega+2004)^8=(4\omega+1000)^8\Leftrightarrow 4\omega+2004=\pm\sqrt[8]{(4\omega+1000)^8}$$

Έτσι έχουμε:

$$4\omega+2004=4\omega+1000 \quad \text{ή} \quad 4\omega+2004=-(4\omega+1000)$$

$$4\omega-4\omega=1000-2004 \quad \text{ή} \quad 8\omega=1000-2004$$

$$0=-1004 \ \text{αδύνατη} \quad \text{ή} \quad 8\omega=-1004$$

$$\omega=-\frac{1004}{8}=-125{,}5\notin\mathbb{Z}.$$

Επομένως, η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Άσκηση 13

Μια αλεπού καταδιώκει ένα λαγό που απέχει 60 πηδήματά του από την αλεπού. Όταν ο λαγός κάνει 9 πηδήματα η αλεπού κάνει 6 πηδήματα. Αλλά 3 πηδήματα της αλεπούς, είναι ίσα με 7 πηδήματα του λαγού. Μετά από πόσα πηδήματα η αλεπού θα φτάσει το λαγό;

Λύση

Έστω ότι η αλεπού θα φτάσει το λαγό μετά από x πηδήματα.

Όταν η αλεπού κάνει 6 πηδήματα ο λαγός, κάνει 9 πηδήματα επομένως όταν η αλεπού κάνει x πηδήματα ο λαγός κάνει $\frac{9}{6}x=\frac{3}{2}x$ πηδήματα.

Όμως 3 πηδήματα της αλεπούς, είναι ίσα με 7 πηδήματα του λαγού, έτσι 1 πήδημα του λαγού ισοδυναμεί με $\frac{3}{7}$ πηδήματα της αλεπούς.

Έτσι τα $60+\frac{3x}{2}$ πηδήματα του λαγού ισοδυνάμων με $\frac{3}{7}\left(60+\frac{3x}{2}\right)$ πηδήματα της αλεπούς. Επομένως $\frac{3}{7}\left(60+\frac{3x}{2}\right)=x$ (πηδήματα της αλεπούς)

$$\Leftrightarrow 3\left(60+\frac{3x}{2}\right)=7x\Leftrightarrow 180+\frac{9x}{2}=7x\Leftrightarrow 360+9x=14x\Leftrightarrow -5x=-360\Leftrightarrow x=\frac{360}{5}$$

$\Leftrightarrow x=72$ πηδήματα.

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

3.1. Η γενική μορφή της εξίσωσης δεύτερου βαθμού είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq0$ και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Ελλιπείς μορφές της εξίσωσης δεύτερου βαθμού είναι : $\alpha x^2+\beta x=0$ (1) με $\alpha\neq0$ και $\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha x^2+\gamma=0$ (2) με $\alpha\neq0$ και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης δεύτερου βαθμού εξαρτάται από το πρόσημο της ποσότητας $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, που ονομάζεται **διακρίνουσα.**

Συγκεκριμένα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \alpha\neq0$
Αν **Δ > 0**	*η εξίσωση **έχει δύο ρίζες στο** $\mathbb{R}$, τις* $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Αν **Δ = 0**	*η εξίσωση **έχει διπλή ρίζα** (δύο ρίζες ίσες)* $x_1=x_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
Αν **Δ < 0**	*η εξίσωση **δεν έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς,** αλλά έχει ρίζες στο σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών, τις* $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.

Σχόλια

α) Αν ο συντελεστής β είναι δηλαδή άρτιος $\beta = 2\beta_1$, τότε:

$$\Delta=4\beta_1^2-4\alpha\gamma=4(\beta_1^2-\alpha\gamma)=4\cdot\Delta_1 \text{ και τις ρίζες } x_{1,2}=\frac{-\beta_1\pm\sqrt{\Delta_1}}{\alpha}.$$

β) Αν οι α, γ είναι **ετερόσημοι** δηλαδή $\alpha\cdot\gamma<0$ τότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$, συνεπώς η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

γ) Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι **ρητοί αριθμοί** και η διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$:

i) είναι **τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού**, τότε οι ρίζες x_1,x_2 είναι ρητοί.

ii) **δεν είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού**, τότε οι ρίζες x_1,x_2 είναι άρρητοι συζυγείς αριθμοί.

Λυμένες ασκήσεις –ασκήσεις με υπόδειξη.

(1) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\mathbf{x^2-20x+51=0}$

ii) $\mathbf{(\alpha^2-\beta^2)\cdot x^2-2\alpha^2\beta x+\alpha^2\beta x+\alpha^2\beta^2=0 \quad (\alpha\neq\pm\beta)}$

iii) $\mathbf{x^2-3\alpha x+(2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-\alpha\beta+2\beta\gamma+\alpha\gamma)=0}$

Λύση

i) $x^2-20x+51=0$

$\alpha=1$ $\beta=-20=2\cdot(-10)$ γ=51 θέτουμε β_1 = -10

$\Delta_1=\beta_1^2-\alpha\gamma=(-10)^2-1\cdot51=100-51=49=7^2>0$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta_1\pm\sqrt{\Delta_1}}{\alpha}=\frac{10\pm 7}{1}=10\pm 7=\left\langle\begin{array}{l}17\\3\end{array}\right. ,$$

οπότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = 17$ ή $x_2 = 3$.

ii) $(\alpha^2-\beta^2)\cdot x^2-2\alpha^2\beta\cdot x+\alpha^2\beta^2=0,\ \ \alpha\neq\pm\beta$ άρα $\alpha^2-\beta^2\neq 0$.

$\Delta=(-2\alpha^2\beta)^2-4(\alpha^2-\beta^2)\cdot\alpha^2\beta^2-4\alpha^4\beta^2-4(\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4)=$

$=4\alpha^4\beta^2-4\alpha^4\beta^2+4\alpha^2\beta^4=4\alpha^2\beta^4=(2\alpha\beta^2)^2\geq 0$.

Άρα $\sqrt{\Delta}=\sqrt{(2\alpha\beta^2)^2}=\left|2\alpha\beta^2\right|=2|\alpha|\cdot\beta^2$ συνεπώς $\pm\sqrt{\Delta}=\pm\alpha\beta^2$

$$x_{1,2}=\frac{2\alpha^2\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{2\alpha^2\beta\pm 2\alpha\beta^2}{2(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{\cancel{2}\alpha\beta(\alpha\pm\beta)}{\cancel{2}(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)}=$$

$$=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\\[2ex]\dfrac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\end{array}\right.\quad \text{και έτσι } x_1=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\ \text{ ή }\ x_2=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

iii) $x^2-3\alpha x+(2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-\alpha\beta+2\beta\gamma+\alpha\gamma)=0$

Έχουμε: $\Delta=(-3\alpha)^2-4\cdot 1\cdot(2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-\alpha\beta+2\beta\gamma+\alpha\gamma)=$

$=9\alpha^2-8\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2+4\alpha\beta-8\beta\gamma-4\alpha\gamma=$

$=\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2+4\alpha\beta-8\beta\gamma-4\alpha\gamma=$

$=\alpha^2+(2\beta)^2+(2\gamma)^2+2\alpha 2\beta-2\cdot 2\beta\cdot 2\gamma-2\alpha 2\gamma=(\alpha+2\beta-2\gamma)^2$

$=\left|\alpha+2\beta-2\gamma\right|^2$.

Συνεπώς έχουμε: $\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{\left|\alpha+2\beta-2\gamma\right|^2}=\pm\left|\alpha+2\beta-2\gamma\right|=\pm(\alpha+2\beta-2\gamma)$ και

$$x_{1,2}=\frac{3\alpha\pm(\alpha+2\beta-2\gamma)}{2\cdot 1}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{3\alpha+\alpha+2\beta-2\gamma}{2}=2\alpha+\beta-\gamma\\[2ex]\dfrac{3\alpha-\alpha-2\beta+2\gamma}{2}==\alpha-\beta+\gamma\end{array}\right.$$

(2) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\mathbf{4x^2+\left(\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\cdot x-\sqrt{15}=0}$ **ii)** $\mathbf{x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot x+\sqrt{6}=0}$

Λύση

(i) $\Delta=\left(\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 4\cdot\left(-\sqrt{15}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-8\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+4^2\left(\sqrt{3}\right)^2+16\sqrt{15}$

$=\left(\sqrt{5}\right)^2+4^2\left(\sqrt{3}\right)^2-8\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+16\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(4\sqrt{5}\right)^2+8\sqrt{5}\sqrt{3}\ =\left(\sqrt{5}+4\sqrt{3}\right)^2$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\left(\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{5}+4\sqrt{3}\right)^2}}{2\cdot 4}==\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-\sqrt{5}+4\sqrt{3}+\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}\\[2ex]\dfrac{-\sqrt{5}+4\sqrt{2}-\sqrt{5}-4\sqrt{3}}{8}=-\dfrac{\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$$

Άρα έχουμε τις ρίζες: $x_1=\sqrt{3}$ και $x_2-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

ii) Για εξάσκηση του μαθητή.

(3) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\mathbf{x^2+3\cdot|x|-18=0}$ **ii)** $\mathbf{(x-2)^2-3|2-x|-10=0}$

iii) $\mathbf{x^2+5|x-3|+1=0}$ **iv)** $\mathbf{|x^2+2x+4|=7x-2}$

Λύση

i) $x^2+3\cdot|x|-18=0$

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή: $|x|^2+3\cdot|x|-18=0$ (1) και παίρνουμε βοηθητικό άγνωστο $\omega=|x|\geq 0$. Έτσι η (1) γίνεται:

$$\omega^2+3\omega-18=0,\ \Delta=81=9^2>0,\ \omega_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9^2}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-3+9}{2}=3\\[2mm]\dfrac{-3-9}{2}=-6\end{array}\right.$$

Άρα έχουμε: $|x|=\omega=3>0$ ή $|x|=\omega=-6<0$, (απορρίπτεται) $\Leftrightarrow x=\pm 3$.

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_{1,2}=\pm 3$.

Υπενθύμιση

> Ισχύει ότι
> $\alpha^2=|\alpha|^2,\quad |\alpha|\geq 0$
> $|x|=\theta,\quad \theta>0\Leftrightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$

ii) Υπόδειξη

$(x-2)^2-3|2-x|-10=0\Leftrightarrow |x-2|^2-3\cdot|x-2|-10=0$.

Θέτουμε $|x-2|=\omega\geq 0$. Λύσεις: $\omega=-3$, $\omega=7$, οπότε

$|x-2|=-3$ (απορρίπτεται) ή $|x-2|=7\Leftrightarrow x-2=\pm 7\Leftrightarrow x=9$ ή $x=-5$.

Υπενθύμιση

> Ισχύει ότι
> $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$,
> αφού οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίδια απόλυτη τιμή

iii) Υπόδειξη: $x^2+5|x-3|+1=\begin{cases}x^2+5\cdot(x-3)+1, & \text{αν } x\geq 3\\ x^2+5(-x+3)+1, & \text{αν } x\leq 3\end{cases}$

Έτσι για $\boxed{x\geq 3}$: $x^2+5(x-3)+1=0$ βρίσκουμε τις λύσεις $x_{1,2}=-7,2$, οι οποίες απορρίπτονται, ενώ για $x\leq 3$: $x^2+5(-x+3)+1=0$ βρίσκουμε $\Delta<0$ έτσι δεν έχουμε ρίζες. στο $\mathbb{R}$.

iv) Υπόδειξη: $x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3>0$, οπότε

$$\left|x^2+2x+4\right| = x^2+2x+4.$$

(4). Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) με α≠0 και $\alpha,\beta,\gamma \in Q$ έχει ρίζα $\rho_1=\kappa+\sqrt{\lambda}$ όπου κ ρητός και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος, τότε θα έχει ρίζα και τον συζυγή του αριθμού ρ_1.

Λύση

Αφού ο αριθμός ρ_1 είναι ρίζα της (1) θα επαληθεύει:

$$\begin{aligned}
&\alpha\cdot\left(\kappa+\sqrt{\lambda}\right)^2+\beta\cdot\left(\kappa+\sqrt{\lambda}\right)+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\left(\kappa^2+2\kappa\sqrt{\lambda}+\lambda\right)+\beta\kappa+\beta\sqrt{\lambda}+\gamma=0\\
&\Leftrightarrow \alpha\kappa^2+2\alpha\sqrt{\lambda}+\alpha\lambda+\beta\cdot\kappa+\beta\sqrt{\lambda}+\gamma=0\\
&\Leftrightarrow (2\alpha\kappa+\beta)\cdot\sqrt{\lambda}+\alpha\kappa^2+\alpha\lambda+\beta\kappa+\gamma=0\\
&\Leftrightarrow (2\alpha\kappa+\beta)\cdot\sqrt{\lambda}=-(\alpha\kappa^2+\alpha\lambda+\beta\kappa+\gamma) \quad (2).
\end{aligned}$$

Όμως $\alpha,\beta,\gamma,\kappa \in \mathbb{Q}$,οπότε

$$2\alpha\kappa+\beta \ \in \ \mathbb{Q} \text{ και } -(\alpha\kappa^2+\alpha\lambda+\beta\kappa+\gamma) \ \in \ \mathbb{Q}$$

και συνεπώς η ισότητα (2) ισχύει μόνο όταν

$$2\alpha\kappa+\beta=0 \text{ και } \alpha\kappa^2+\alpha\lambda+\beta\kappa+\gamma=0.$$

Συζυγής του ρ_1 είναι ο αριθμός $\rho_2=\kappa-\sqrt{\lambda}$, οπότε

$$\alpha\cdot\left(\kappa-\sqrt{\lambda}\right)^2+\beta\cdot\left(\kappa-\sqrt{\lambda}\right)+\gamma=\ldots=\underbrace{\alpha\kappa^2+\alpha\lambda+\beta\kappa+\gamma}_{0}-\underbrace{(2\alpha\kappa+\beta)}_{0}\sqrt{\lambda}=0,$$

δηλαδή $\kappa-\sqrt{\lambda}$ είναι ρίζα της (1).

(5) i) Αν α, β ρητοί αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ δεν μπορεί να έχει ως ρίζες της τους αριθμούς $1-\sqrt{2}$ και $1+\sqrt{2}$.

ii) Να βρεθούν οι ρητοί α,β ώστε η εξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ να έχει ρίζα τον αριθμό $3+\sqrt{2}$.

(6) Αν α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου, τότε η εξίσωση

$$\boldsymbol{\beta^2x^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x+\gamma^2=0},$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2-4\beta^2\gamma^2=(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2-(2\beta\gamma)^2=\\
&=(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+2\beta\gamma)\cdot(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-2\beta\gamma)=\left[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2)\right]\cdot\left[(\beta-\gamma)^2-\alpha^2\right]\\
&=(\beta+\gamma+\alpha)\cdot(\beta+\gamma-\alpha)\cdot(\beta-\gamma+\alpha)\cdot(\beta-\gamma-\alpha).
\end{aligned}$$

Όμως $\beta+\gamma+\alpha>0$ (αφού α, β, γ μήκη) και από την τριγωνική ιδιότητα έχουμε

$$\beta+\gamma>\alpha \Rightarrow \beta+\gamma-\alpha>0,\ \ \beta+\alpha>\gamma \Rightarrow \beta+\alpha-\gamma>0 \ \ \beta<\alpha+\gamma \Rightarrow \beta-\alpha-\gamma<0.$$

Άρα Δ<0, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές.

(7) Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \neq -1$, ώστε η εξίσωση:

$$(\lambda+1)x^2-2\lambda x+\lambda-3=0$$

να έχει: i) μια διπλή ρίζα ii) ρίζες άνισες iii) ρίζες πραγματικές.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2\lambda)^2-4(\lambda+1)\cdot(\lambda-3)\\ &= 4\lambda^2-4(\lambda^2-3\lambda+\lambda-3)\\ &= 4\lambda^2-4\lambda^2+8\lambda+12=8\lambda+12=4(2\lambda+3)\end{aligned}$$

i) Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\cdot(2\lambda+3)=0 \Leftrightarrow 2\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{3}{2}$

ii) Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\cdot(2\lambda+3)>0 \Leftrightarrow \lambda>-\frac{3}{2}$

iii) Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4\cdot(2\lambda+3)\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\geq-\frac{3}{2}$

(8) Να βρεθεί το είδος των ριζών των εξισώσεων:

i) $x^2+(\kappa-\mu)x+\mu^2+\kappa^2-2\mu\kappa=0$

ii) $\kappa x^2+(52\kappa-3\lambda+2\mu)^2x-8\kappa=0$

iii) $3x^2-(5\kappa^2+3\mu^2-4\kappa\mu)x-6\kappa^2=0$

iv) $(\alpha^2-3\alpha+2)\cdot x^2-(2\alpha-4)x+1=0$

Μέθοδος

Για να βρούμε το είδος των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης εργαζόμαστε:

α) με το πρόσημο της Δ ή

β) με το πρόσημο του γινομένου αγ

(9) Αν για τους συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύει

$$\alpha\neq 0 \quad \text{και} \quad |\alpha-\gamma|=|\alpha|+|\gamma|$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

(10) Αν $|\alpha|+|\gamma|\leq|\beta|$ και $\alpha\neq 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει πραγματικές ρίζες.

3.2. Άθροισμα και γινόμενο των ριζών της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Αν συμβολίσουμε με S το άθροισμα x_1+x_2 και με P το γινόμενο x_1x_2 βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\begin{aligned}S &= x_1+x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}\\ P &= x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}\end{aligned}}$$

(Τύποι Vieta)

Σημείωση

1) Αν δύο αριθμοί x_1, x_2 έχουν άθροισμα S και γινόμενο P, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - S\cdot x + P = 0$.

2) Με τους τύπους Vieta μπορούμε να υπολογίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0,\ \Delta \geq 0)$, χωρίς να λύνουμε την εξίσωση.

3) Με τους τύπους Vieta μπορούμε να υπολογίσουμε συμμετρικές παραστάσεις των ριζών x_1, x_2, δηλαδή παραστάσεις που περιέχουν τις ρίζες x_1, x_2 και δεν αλλάζει η τιμή τους, αν εναλλάξουμε τα γράμματα x_1 και x_2, π.χ. οι παραστάσεις $x_1^2 + x_2^2,\ x_1^3 + x_2^3, x_1^n + x_2^n,\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$**,** κ. λ. π.

4) Με τους τύπους Vieta και εφ' όσον Δ≥0, βρίσκουμε το πρόσημο των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

3.3. Πίνακας διερεύνησης του είδους και του προσήμου των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

1. Αν $P = \frac{\gamma}{\alpha} < 0$, η εξίσωση έχει 2 ρίζες ετερόσημες, έστω $x_1 < 0 < x_2$ και

- αν $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$, τότε μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή είναι η θετική.
- αν $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$, τότε μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή είναι η αρνητική.
- αν $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0$, τότε οι 2 ρίζες είναι αντίθετες.

2. Αν $P = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ πρέπει να εξετάσουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε 2 ρίζες πραγματικές και

- αν $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$, τότε $0 < x_1 < x_2$ **(2 ρίζες θετικές)**
- αν $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$, τότε $x_1 < x_2 < 0$ **(2 ρίζες αρνητικές)**

Αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε δύο ρίζες ίσες: $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

3. Αν $P = \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ η μία ρίζα είναι μηδέν και η άλλη $\frac{-\beta}{\alpha}$.

3.4. Συμμετρικές παραστάσεις των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

α) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$

β) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$

γ) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

δ) Εύρεση του $x_1^{\mu} + x_2^{\mu}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cdot x_1^2 + \beta x_1 \ + \gamma = 0 \\ \alpha \cdot x_2^2 + \beta x_2 \ + \gamma = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot x_1^{\mu-2}} \\ \xrightarrow{\cdot x_2^{\mu..2}} \end{array} \left.\begin{array}{l} \alpha \cdot x_1^{\mu} + \beta \cdot x_1^{\mu-1} + \gamma \cdot x_1^{\mu-2} = 0 \\ \alpha \cdot x_2^{\mu} + \beta \cdot x_1^{\mu-1} + \gamma \cdot x_1^{\mu-2} = 0 \end{array}\right\}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\alpha \cdot \left(x_1^{\mu} + x_2^{\mu} \right) + \beta \cdot \left(x_1^{\mu-1} + x_2^{\mu-1} \right) + \gamma \cdot \left(x_2^{\mu-2} + x_2^{\mu-2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot S_{\mu} + \beta \cdot S_{\mu-1} + \gamma \cdot S_{\mu-2} = 0$$

και από αυτή τη σχέση υπολογίζουμε την παράσταση

$$\boxed{S_{\mu} = x_1^{\mu} + x_2^{\mu} = -\frac{\beta}{\alpha} S_{\mu-1} - \frac{\gamma}{\alpha} S_{\mu-2} = SS_{\mu-1} - PS_{\mu-2}}.$$

Π.χ. για το $S_5 = x_1^5 + x_2^5$ έχουμε:

$$\alpha \cdot S_5 + \beta \cdot S_4 + \gamma \cdot S_3 = 0$$

$$S_5 = \frac{-\beta \cdot S_4 - \gamma \cdot S_3}{\alpha}.$$

ε) $\left| x_1 - x_2 \right|$

$$\left| x_1 - x_2 \right| = \left| \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|},$$

3.5. Σχέσεις μεταξύ ριζών και συντελεστών πολυωνυμικής εξίσωσης.

Έστω το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_{\nu} x^{\nu} + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, με $\alpha \neq 0$ και $\alpha_{\nu}, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\nu}$. Για την εξίσωση $\alpha_{\nu} x^{\nu} + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$S_1 = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{\nu} = -\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu}}$$

$$S_2 = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_{\nu} + \rho_2\rho_3 + \ldots + \rho_2\rho_{\nu} + \ldots + \rho_{\nu-1}\rho_{\nu} = \frac{\alpha_{\nu}}{\alpha_{\nu}}$$

$$S_3 = \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \ldots + \rho_1\rho_2\nu + \ldots + \rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_{\nu} = -\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_{\nu}}$$

$$\vdots$$

$$S_{\nu} = \rho_1\rho_2\rho_3 \ldots \rho_{\nu-1}\rho_{\nu} = (-1)^{\nu} \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_{\nu}}$$

Λυμένες ασκήσεις

1. Χωρίς να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2+x-6=0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $x_1^2+x_2^2$ ii) $x_1^3+x_2^3$ iii) x_1-x_2 iv) $x_1^4+x_2^4$

v) $2x_1^3-3x_1^2x_2+2x_2^3-3x_1x_2^2$ vi) $x_1^5+x_2^5$.

Λύση

Έχουμε $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{1}{1}=-1$ και $P = x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-6}{1}=-6$

i) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)-2x_1x_2-2x_1x_2=S^2-2P=(-1)^2-2(-6)=13$

ii) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3P\cdot S=(-1)^3-3\cdot(-6)(-1)=-19$

iii) $|x_1-x_2|=\left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{25}}{1}\right|=|5|=5$, οπότε $x_1-x_2=5$ ή $x_1-x_2=-5$

iv) $x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2\overset{(i)}{=}13^2-2\cdot(-6)^2=97$

v) $2x_1^3-3x_1^2x_2+2x_2^3-3x_1x_2=2\left(x_1^3+x_2^3\right)-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)\overset{(i)}{=}$

$=2\cdot(-19)-3\cdot(-6)\cdot(-1)=-38-18=-56$.

vi) $x_1^5+x_2^5=\dfrac{-\beta\cdot S_4-\gamma\cdot S_3}{\alpha}=\dfrac{-1\cdot 97+6\cdot(-19)}{1}=-97-114=-213$

2. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-4x-5=0$ να κατασκευαστεί εξίσωση με ρίζες $(x_1-2)^{-3}$ και $(x_2-2)^{-3}$.

Λύση

Ζητούμενη εξίσωση: $\omega^2+S\omega+P=0$ (1)

όπου $S=(x_1-2)^{-3}+(x_2-2)^{-3}$ και $P=(x_1-2)^{-3}(x_2-2)^{-3}$

Έχουμε $x_1+x_2=2$ άρα $x_1=2-x_2$ και $x_2=2-x_1$, οπότε

$$S=(x_1-2)^{-3}+(x_2-2)^{-3}=(-x_2)^{-3}+)-(x_1)^{-3}$$

$$=\frac{1}{(-x_2)^3}+\frac{1}{(-x_1)^3}=-\left(\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_2^3}\right)=-\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}$$

$$=-\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}=-\frac{2^3-3(-\frac{5}{2})\cdot 2}{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$$

$$=-\frac{23}{\frac{125}{8}}=-\frac{184}{125}$$

και $P=(x_1-2)^{-3}\cdot(x_2-2)^{-3}=(-x_2)^{-3}(-x_1)^{-3}=\dfrac{1}{(x_1x_2)^3}=-\dfrac{8}{125}$

έτσι έχουμε $(1)\longrightarrow\omega^2-\dfrac{184}{125}\omega-\dfrac{8}{125}=0 \Leftrightarrow 125\omega-184\omega-8=0$.

3. Για ποιες τιμές του λ οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2 - 2x - \lambda - 5 = 0$ επαληθεύουν τη σχέση $2x_1 - 3x_2 = 14$.

Λύση

Για να έχει η εξίσωση $x^2 - 2x - \lambda - 5 = 0$ δύο ρίζες x_1, x_2 πρέπει

$$\Delta \geq 0. \Leftrightarrow (-2)^2 - 4 \cdot (-\lambda - 5) \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \geq -6}.$$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} S = x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ P = x_1 \cdot x_2 = -\lambda - 5 & (2) \\ \text{και } 2x_1 - 3x_2 = 14 & (3) \end{array}\right\}$$

Από τις (1) και (3) θα βρούμε τα x_1, x_2 και θα αντικαταστήσουμε τη σχέση (2):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 = 14 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r} 3x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 = 14 \end{array}\right\},$$

οπότε προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε $5x_1 = 20$,

δηλαδή $x_1 = 4$ και $x_2 = 2 - x_1 = -2$.

$x_1 \cdot x_2 = -\lambda - 5 \Leftrightarrow 4(-2) = -\lambda - 5 \Leftrightarrow \lambda = 3$ (δεκτή τιμή.)

4. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση:

$$\mathbf{x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 4 = 0}$$

να έχει:

i) δύο ρίζες ετερόσημες,
ii) δύο ρίζες θετικές,
iii) δύο ρίζες αρνητικές,
iv) δύο ρίζες αντίθετες,
v) δύο ρίζες αντίστροφες και
vi) η μία ρίζα να είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση

Βρίσκουμε τα Δ, S και P.

$$\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - 4) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 16 = -4\lambda + 17$$

$$S = x_1 + x_2 = 2\lambda - 1 \text{ και } P = \lambda^2 - 4$$

i) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες ετερόσημες πρέπει και αρκεί:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4\lambda + 17 > 0 \\ \lambda^2 - 4 < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda < \dfrac{17}{4} \\ |\lambda|^2 < |4| \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} \lambda < \dfrac{17}{4} \\ |\lambda| < 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda < \dfrac{17}{4} \\ -2 < \lambda < 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -2<\lambda<2.$$

ii) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες θετικές πρέπει και αρκεί:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\geq 0\\ P>0\\ S>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\lambda\leq 17/4\\ \lambda^2-4>0\\ 2\lambda-1>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\lambda\leq 17/4\\ |\lambda|>2\\ \lambda>1/2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{c}\lambda\leq 17/4\\ \lambda>2 \text{ η } \lambda<-2\\ \lambda>1/2\end{array}\Leftrightarrow 2<\lambda\leq\frac{17}{4}$$

iii) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες αρνητικές, πρέπει και αρκεί:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\geq 0\\ P>0\\ S<0\end{array}\right\}$$, από τις οποίες ,όμοια εργαζόμενοι , βρίσκουμε λ<-2

iv) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες αντίθετες πρέπει και αρκεί:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>0\\ P<0\\ S=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lambda=1/2$$

v) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες αντίστροφες πρέπει και αρκεί:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\geq 0\\ P=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{5}$$

vi) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες και $x_1=2x_2$. Τότε έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}S=x_1+x_2=2x_2+x_2=2\lambda-1\\ P=x_1\cdot x_2=2x_2x_2=2x_2^2=\lambda^2-4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}3x_2=2\lambda-1\\ 2x_2^2=\lambda^2-4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\boxed{x_2=\frac{2\lambda-1}{3}}$$

Επομένως πρέπει και αρκεί:

$$2\cdot\left(\frac{2\lambda-1}{3}\right)^2=2\lambda-1\Leftrightarrow 2(4\lambda^2-4\lambda+1)=18\lambda-9$$

$$\Leftrightarrow 8\lambda^2-26\lambda+11=0,\ \ (\Delta=(-26)^2-4\cdot 8\cdot 11=676-352=18^2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{18^2}}{16}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{44}{16}=\frac{11}{4}\\ \frac{8}{16}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ασκήσεις για λύση

(1) Να προσδιοριστεί ο αριθμός μ, ώστε το διπλάσιο του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $\left(\mu^2-\frac{4}{3}\mu-4\right)x^2-\mu x+2=0$ να είναι ίσο με το τετράγωνο μιας ρίζας.

(2) Ποια σχέση πρέπει να υπάρχει μεταξύ των συντελεστών κ και λ της εξίσωσης $x^2+\lambda x+\kappa=0$, ώστε η μία ρίζα να είναι ν φορές μεγαλύτερη της άλλης. Αν ν = 4 να βρεθούν οι ακέραιες τιμές των κ, λ οι μικρότερες του 30.

(3) Αν οι δύο ρίζες μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού έχουν διαφορά $\alpha^2\beta^2$ και γινόμενο $\left(\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{2}\right)$ να υπολογιστούν οι ρίζες και επίσης η μορφή της εξίσωσης.

(4) Αν οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι οι 1 και 2, να υπολογιστούν τα α, β, γ, αν γνωρίζουμε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

(5) Να προσδιοριστούν οι συντελεστές β,γ της εξίσωσης $x^2+\beta x+\gamma^2=0$ αν γνωρίζουμε ότι ο λόγος των ριζών είναι ίσος με β και η διαφορά τους 3γ.

(6) Να βρεθούν τα α, β ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+\alpha x+\beta=0$ αν ελαττωθούν κατά 1 να γίνονται ρίζες της εξίσωσης: $x^2-(\alpha^2+3\alpha-7)x+\alpha\beta+4\beta+7=0$.

4.6. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ Γραφική επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$.

Η παράσταση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι μία συνάρτηση η οποία λέγεται και τριώνυμο. Είναι γνωστό ότι:

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}.$$

Η γραφική παράσταση της f είναι η παραβολή $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και κατασκευάζεται ως εξής:

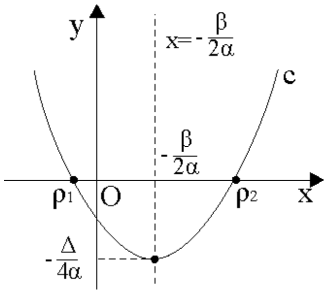
- κατασκευάζουμε την παραβολή C_1 με εξίσωση $y=\alpha x^2$,
- κατασκευάζουμε την παραβολή C_2 με εξίσωση $y=\alpha\cdot\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ μεταφέροντας τη C_1 οριζόντια κατά $\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ μονάδες,
- κατασκευάζουμε τη ζητούμενη παραβολή μεταφέροντας τη C_2 κατακόρυφα κατά $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$ μονάδες.

Από τη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ εξάγουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

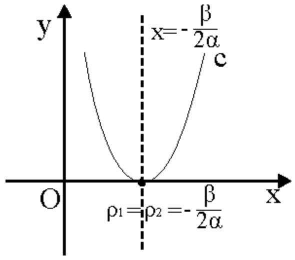
♦ Αν α > 0 τότε

x	$-\infty$	$-\dfrac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$	$\nearrow$

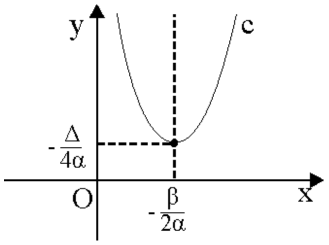
και η γραφική παράσταση μπορεί να έχει μια από τις παρακάτω μορφές:



1) Η καμπύλη τέμνει τον άξονα τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία τα $(\rho_1,0)$ και $(\rho_2,0)$ των οποίων οι τεμνόμενες ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ Άρα $\Delta>0$



2) Η καμπύλη τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα σημείο το $(\rho_1,0)\equiv(\rho_2,0)\equiv\left(-\frac{\beta}{2\alpha},0\right)$ του οποίου η τεμνόμενη ρ_1 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Άρα $\Delta=0$.



3) Η καμπύλη c δεν τέμνει τον άξονα x΄x η εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν έχει πραγματική ρίζες άρα $\Delta<0$.

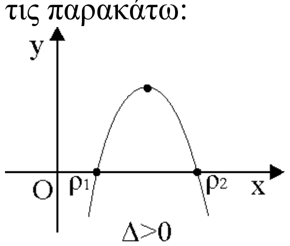
Και στις τρεις περιπτώσεις ισχύουν ακόμα:

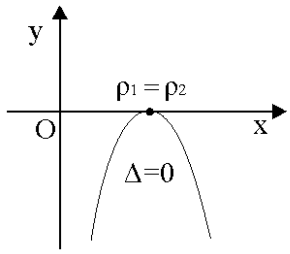
- Η ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$
- Κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.
- Για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ έχουμε ελάχιστο $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

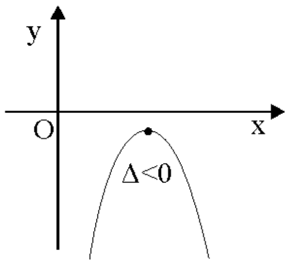
♦ Αν $\alpha<0$ τότε

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$-\frac{\Delta}{4\alpha}$	↘

Η γραφική παράσταση σε αυτήν την περίπτωση μπορεί επίσης να έχει τρείς μορφές τις παρακάτω:







Αντίστοιχα έχουμε:

- Η ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.
- Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.
- Για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ έχουμε τη μέγιστη τιμή $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

4. Το τριώνυμο.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$, $\alpha,\beta,\gamma \in R$ λέγεται τριώνυμο. Η διακρίνουσα Δ και οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ λέγονται αντίστοιχα **διακρίνουσα** και **ρίζες** του τριώνυμου.

4.1. Μορφές του τριωνύμου $\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ με $\alpha \neq 0$.

Το τριώνυμο μπορεί να πάρει την μορφή:

$$f(x) = \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right] \quad \text{ή} \quad f(x) = \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right],$$

η οποία λέγεται **κανονική μορφή** του τριωνύμου.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\Delta > 0$ και x_1, x_2 ρίζες, τότε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

το τριώνυμο γράφεται ως γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων και αντίστροφα.

2) Αν $\Delta = 0$ και $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - x_1)^2,$$

δηλαδή το τριώνυμο γράφεται ως γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο ενός πρωτοβάθμιου πολυωνύμου και αντίστροφα.

3) Αν $\Delta < 0$, τότε

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right] = \alpha \cdot \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)^2\right],$$

δηλαδή το τριώνυμο γράφεται ως άθροισμα δύο τετραγώνων (επί $\alpha \neq 0$) και αντίστροφα.

Οι παραπάνω μορφές είναι χρήσιμες στην παραγοντοποίηση των πολυωνύμων και στην απλοποίηση κλασμάτων και επίσης στην ευκολότερη μελέτη των τριωνύμων.

Ασκήσεις

1. Να γίνει γινόμενο η παράσταση $4x^4 - 37x^2 + 9$.

Λύση

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ και έχουμε $4x^4 - 37x^2 + 9 = 4\omega^2 - 37\omega + 9$ που είναι τριώνυμο Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $4\omega^2 - 37\omega + 9$.

Έχουμε $\Delta = 1225 = 35^2$, οπότε θα είναι $\omega_1 = 9$ και $\omega_2 = \frac{1}{4}$.

Άρα $4\omega^2 - 37\omega + 9 = 4\cdot(\omega - 9)\cdot\left(\omega - \frac{1}{4}\right) = (\omega - 9)\cdot(4\omega - 1) =$

$$(x^2 - 9)\cdot(4x^2 - 1) = (x+3)\cdot(x-3)\cdot(2x-1)\cdot(2x+1).$$

2. Να βρεθούν τα λ και μ ώστε για κάθε $x \in R$ να είναι

$$\mathbf{x^2 + (3\lambda + 2\mu + 1)x + (\lambda^2 - \mu^2 + 3) = (x-1)\cdot(x+2)} \qquad \mathbf{(1)}$$

Λύση

Το 1^o μέλος της (1) είναι τριώνυμο και αφού το 2^o μέλος έχει ρίζες 1 και -2

$$\left(\text{διότι: } (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2\right)$$

πρέπει να έχει τις ίδιες ρίζες.

Όμως έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -(3\lambda + 2\mu + 1) \\ x_1 \cdot x_2 = \lambda^2 - \mu^2 + 3 \end{array}\right\} \text{(τύποι Vieta)}$$

Έτσι

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -3\lambda - 2\mu - 1 \\ -2 = \lambda^2 - \mu^2 + 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2\mu + 3\lambda = 0 \\ \lambda^2 - \mu^2 + 5 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \mu = \frac{-3\lambda}{2}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$\lambda^2 - \frac{(-3\lambda)^2}{2^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{9\lambda^2}{4} + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 9\lambda^2 = -20$$

$$\Leftrightarrow 5\lambda^2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

Για $\lambda = 2$, προκύπτει ότι $\mu = \frac{-6}{2} = -3$

Για $\lambda = -2$, προκύπτει ότι $\mu = \frac{6}{2} = 3$.

Και στις δύο περιπτώσεις το πρώτο μέλος ταυτίζεται με το δεύτερο

3. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή από τις ελάχιστες τιμές της συνάρτησης $\mathbf{f(x) = x^2 - 2(l-1)x - 2(3\lambda + 2)}$, όταν $\lambda \in R$.

Λύση

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$\alpha > 0$, στο $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ελάχιστη τιμή $y = \frac{-\Delta}{4\alpha}$
$\alpha < 0$, στο $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ μέγιστη τιμή $y = \frac{-\Delta}{4\alpha}$

$f(x) = x^2 - 2(\lambda - 1)x - 2(3\lambda + 2)$

$\alpha = 1 > 0$. Άρα ελάχιστη τιμή της $f(x)$ είναι

$$y=\frac{-\Delta}{4\alpha}=-\frac{4(\lambda^2-2\lambda+1)+24\lambda+16}{4}=-\frac{4\lambda^2-8\lambda+4+24\lambda+16}{4}=$$

$$-\frac{4\lambda^2+16\lambda+20}{4}=-\lambda^2-4\lambda-5,$$

που είναι επίσης τριώνυμο ως προς λ με α = -1<0.
Άρα έχει μέγιστη τιμή

$$\omega=-\frac{\Delta'}{4\alpha'}=-\frac{16-20}{4(-1)}=-1.$$

4. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+(2-\alpha)x-(\alpha+3)=0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε α. (β). Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρεθεί το $\alpha\in R$, ώστε η παράσταση $y=x_1^2+x_2^2$ να γίνει ελάχιστη.

Λύση: α) Για να έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση πρέπει $\Delta\geq 0$.
Πράγματι, έχουμε: $(2-\alpha)^2+4(\alpha+3)=\alpha^2+16>0$.
β) Ονομάζουμε $y=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$

$$=\left[-(2-\alpha)\right]^2-2\cdot\left[-(\alpha+3)\right]=4-4\alpha+\alpha^2+2\alpha+6=\alpha^2-2\alpha+10.$$

Όμως $\alpha^2-2\alpha+10$ είναι τριώνυμο ως προς α, το οποίο για $\alpha=-\frac{(-2)}{2\cdot 1}=1$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $y=-\frac{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 10}{4\cdot 1}=-\frac{-36}{4}=9$.

5. Να βρεθούν τα α, β, γ, ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ να είναι γνησίως στο $\left(-\infty,1\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$, να έχει ακρότατο με τεταγμένη 4 και να διέρχεται από το σημείο Α (2,3).

Λύση

Παρατηρούμε ότι στο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=1$ έχουμε μέγιστη τιμή $y=-\frac{\Delta}{4\beta}=4$

Έτσι έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{\beta}{2\alpha}=1\\ -\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}=4\\ \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2+\gamma=3\end{array}\right\}$$

οπότε θα είναι

$$\left.\begin{array}{l}\beta=-2\alpha\\ \beta^2-4\alpha\gamma=-16\alpha\\ 4\alpha+2\beta+\gamma=3\end{array}\right\}\xrightarrow{\beta=-2\alpha}\left.\begin{array}{l}(-2\alpha)^2-4\alpha\gamma=16\alpha\\ 4\alpha+2\cdot(-2\alpha)+\gamma=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4\alpha^2-4\alpha\gamma+16\alpha=0\\ 4\alpha-4\alpha+\gamma=3\end{array}\right\}\Rightarrow\gamma=3$$

Έτσι έχουμε

$$4\alpha^2-4\alpha\cdot\gamma+16\alpha=0\Leftrightarrow 4\alpha^2-4\cdot\alpha\cdot 3+16\cdot=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot(\alpha+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ (απορρίπτεται)} \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Συνεπώς: α = -1, β = -2(-1) = 2, γ = 3.

Άρα είναι $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, που έχει γραφική παράσταση παραβολή και αφού στο x=1 έχει μέγιστο το 4 (ακρότατο), το σημείο $\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},\ -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right) = (1,4)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f . Επιπλέον επαληθεύουμε εύκολα ότι $f(2) = 3$.

6. Δίνεται η παραβολή $\mathbf{f(x) = x^2 + (\lambda - 1)x - \lambda,\ \ \lambda \in R}$.
Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε η παραβολή:
i) να εφάπτεται στον άξονα x΄x,
ii) να έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y,
iii) να έχει κορυφή με τεταγμένη -1.

Λύση

i) Η C_f εφάπτεται στον x΄x, αν, και μόνον αν, έχει μία μόνο πραγματική ρίζα, δηλαδή έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα x΄x, οπότε πρέπει και αρκεί:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 - 4(-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Συνεπώς, για $\lambda = -1$ η παραβολή εφάπτεται του άξονα x΄x.

ii) Άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και αφού από την υπόθεση είναι ο άξονας y΄y με εξίσωση $x = 0$, έχουμε: $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 0$. Επομένως

$$x = \frac{-(\lambda-1)}{2\cdot 1} = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

iii) Κορυφή: $\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},\ -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$

Έχουμε: $-\dfrac{\Delta}{4\alpha} = 3 \Leftrightarrow -\dfrac{(\lambda+1)^2}{4} = -1 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \lambda = -3$ ή $\lambda = 1$.

4.2. Πρόσημο του τριωνύμου.

Έστω το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$. Αν δώσουμε στο x μία τιμή ξ, τότε το τριώνυμο λαμβάνει μία αριθμητική τιμή $f(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma$, η οποία μπορεί να είναι μηδέν (τότε το ξ θα είναι ρίζα) ή αρνητική ή θετική.

Πολλές φορές όμως είναι ανάγκη να γνωρίζουμε εκ των προτέρων, το πρόσημο του $f(x)$ όταν x = ξ χωρίς να υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή $f(\xi)$.

Το πρόσημο του τριωνύμου εξαρτάται από την διακρίνουσα Δ και από το συντελεστή α. Έτσι εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

I) Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 και έστω ότι $\rho_1 < \rho_2$ τότε

$$f(x) = \alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2).$$

Αν ο αριθμός ξ βρίσκεται εκτός των ριζών, δηλαδή $\xi < \rho_1 < \rho_2$ ή $\rho_1 < \rho_2 < \xi$, τότε $f(\xi) = \alpha \cdot (\xi - \rho_1)(\xi - \rho_2)$ και το $f(\xi)$ **είναι ομόσημο του α,** δηλαδή $\alpha f(\xi) > 0$.

Αν $\rho_1 < \xi < \rho_2$ τότε το $f(\xi)$ **είναι ετερόσημο του α,** δηλαδή $\alpha f(\xi) < 0$.

x	$-\infty$	ρ_1		ρ_2	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

II) Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα $\rho_1 = \rho_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και γράφεται στη μορφή $f(x) = \alpha \cdot \left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha} \right)^2$. Επειδή για $x \neq \dfrac{-\beta}{2\alpha}$ είναι $\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha} \right)^2 > 0$, το $f(x)$ **είναι ομόσημο του α, για κάθε** $x \neq -\dfrac{\beta}{2\alpha}$**,** ενώ για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ έχουμε ότι $f(-\dfrac{\beta}{2\alpha})=0$.

x	$-\infty$	$\rho_1 = \rho_2$	$+\infty$
f(x)	ομόσημο του α	0	ομόσημο του α

III) Αν $\Delta<0$, τότε $f(x) = \alpha \cdot \left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\alpha^2} \right]$ και $\alpha \cdot \left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\alpha^2} \right] > 0$, οπότε το $f(x)$ **είναι ομόσημο του α για κάθε τιμή του x.**

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f(x)	ομόσημο του α

Συμπέρασμα: Οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι ομόσημες του α, εκτός της περίπτωσης όπου $\Delta > 0$ και για αριθμούς ξ με $\rho_1 < \xi < \rho_2$ (ρ_1, ρ_2 ρίζες) οι τιμές $f(\xi)$ είναι ετερόσημες του α.

4.3. Θέση αριθμού ξ ως προς τις ρίζες τριωνύμου

1) Έστω $\xi \in R$ και το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, εξετάζουμε την τιμή της f στο ξ, δηλαδή την $f(\xi) = \alpha \xi^2 + \beta \cdot \xi + \gamma$ και έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f(\xi) = 0$ τότε ο ξ είναι ρίζα του $f(x)$.
- Αν $\alpha \cdot f(\xi) < 0$, τότε το $f(\xi)$ είναι ετερόσημο του α, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 και ο ξ βρίσκεται εντός των ριζών ρ_1, ρ_2.
- Αν $\alpha \cdot f(\xi) > 0$ τότε το $f(\xi)$ είναι ομόσημο του α. Αν υπάρχουν δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ τότε $\xi \notin [\rho_1, \rho_2]$ και θα είναι $\xi < \rho_1 < \rho_2$ ή $\rho_1 < \rho_2 < \xi$. Για να εξετάσουμε αν $\xi < \rho_1 < \rho_2$ ή αν $\rho_1 < \rho_2 < \xi$ συγκρίνουμε τον ξ με το ημιάθροισμα.

  $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$, αφού γνωρίζουμε ότι ισχύει $\rho_1 < \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} < \rho_2$.

2) Αν για τους $\xi_1, \xi_2 \in R$ ισχύει $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) < 0$ τότε οι αριθμοί $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ είναι ετερόσημοι, αυτό σημαίνει ότι ένας από τους δύο είναι ετερόσημος του α, έτσι ένας από τους ξ_1, ξ_2 βρίσκεται μεταξύ των ριζών ρ_1, ρ_2.

Μεθοδολογία εύρεσης του πρόσημου τριωνύμου και της θέσης ενός αριθμού ως προς τις ρίζες του τριωνύμου.

Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$.

1. Για να έχει ρίζα ένα τριώνυμο πραγματικό αριθμό, πρέπει $\Delta > 0$ ή $\Delta = 0$.

2. Για να εξετάσουμε πότε είναι $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$, βρίσκουμε τη διακρίνουσα Δ και εξετάζουμε το πρόσημο της.

3. Όταν θέλουμε το τριώνυμο να διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλαδή $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, απαιτούμε να είναι $\Delta < 0$.

4. Όταν θέλουμε:
α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, τότε απαιτούμε $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$.
β) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in R$, τότε απαιτούμε $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$.

5. Όταν έχουμε να λύσουμε ανισώσεις της μορφής

$$\mathbf{A(x) \cdot B(x) \cdot \Gamma(x) ... \geq 0 \text{ ή } A(x) \cdot B(x) \cdot \Gamma(x) ... \leq 0} \qquad (1)$$

βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα του γινομένου (1) χωριστά και κατασκευάζουμε έναν τελικό πίνακα προσήμων, από τον οποίο βρίσκουμε τη λύση ή τις λύσεις της (1).

6. Ανισώσεις της μορφής $\mathbf{\dfrac{A(x) \cdot B(x)}{\Gamma(x)} \gtrless 0}$ με $\mathbf{\Gamma(x) \neq 0.}$ είναι ισοδύναμες με την ανίσωση: $\mathbf{A(x) \cdot B(x) \cdot \Gamma(x) \gtrless 0, \Gamma(x) \neq 0.}$.

7. Σε ανισώσεις της μορφής $\mathbf{\dfrac{A(x)}{B(x)} \gtrless \Gamma(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$\mathbf{\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless \Gamma(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) \gtrless 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - \Gamma(x) \cdot B(x)}{B(x)} \gtrless 0, \ B(x) \neq 0}$$

στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση 6.

Οι περιπτώσεις 8 και 9 αναφέρονται στη θέση αριθμού ως προς τις ρίζες του $\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ με $\mathbf{\alpha \neq 0}$.

8. $\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$, $\mathbf{\alpha \neq 0}$, $\mathbf{\alpha, \beta, \gamma \in R}$, **$\rho_1$, ρ_2 οι ρίζες του, με $\rho_1 < \rho_2$ και έστω $\xi \in R$**. Τότε ισχύουν:

- αν $\mathbf{\alpha f(\xi) < 0}$, τότε $\Delta > 0$ και $\rho_1 < \xi < \rho_2$.
- αν $\mathbf{\alpha f(\xi) = 0}$, τότε $\rho_1 = \xi$ και $\mathbf{\rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha \cdot \xi}}$,

- αν $\alpha f(\xi) > 0$ και $\Delta \geq 0 \left.\right\} \Rightarrow \begin{cases} \xi < -\dfrac{\beta}{2\alpha} \text{ και } \xi < \rho_1 < \rho_2 \\ \text{ή} \\ \xi > -\dfrac{\beta}{2\alpha} \text{ και } \rho_1 < \rho_2 < \xi \end{cases}$

9. Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του, με $\rho_1 < \rho_2$ και έστω $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, με $\xi_1 < \xi_2$. Τότε ισχύουν:

- αν $\alpha f(\xi_1) < 0$ και $\alpha f(\xi_2) < 0$, τότε $\rho_1 < \xi_1 < \xi_2 < \rho_2$
- αν $\alpha f(\xi_1) < 0$ και $\alpha f(\xi_2) > 0$, τότε $\rho_1 < \xi_1 < \rho_2 < \xi_2$
- αν $\alpha f(\xi_1) > 0$ και $\alpha f(\xi_2) < 0$, τότε $\xi_1 < \rho_1 < \xi_2 < \rho_2$
- αν $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$, τότε $\xi_1 < \rho_1 < \xi_2 < \rho_2$ ή $\rho_1 < \xi_1 < \rho_2 < \xi_2$
- αν

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0, \left| \begin{array}{l} \rightarrow \xi_1 < -\dfrac{\beta}{2\alpha}, \xi_2 > -\dfrac{\beta}{2\alpha}, \text{τότε } \xi_1 < \rho_1 < \rho_2 < \xi_2 \\ \rightarrow \xi_2 < -\dfrac{\beta}{2\alpha}\left(\text{τότε και } \xi_1 < -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right), \text{τότε } \xi_1 < \xi_2 < \rho_1 < \rho_2 \\ \rightarrow \xi_1 > -\dfrac{\beta}{2\alpha}, \left(\text{τότε και } \xi_2 > -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right), \text{τότε } \rho_1 < \rho_2 < \xi_1 < \xi_2 \end{array} \right.$$

Ασκήσεις

1. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

i) Να μελετηθεί το πρόσημό του για τις διάφορες τιμές του x.

ii) Να ερμηνευτεί γεωμετρικά η απάντησή σας.

Λύση

i) Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4(-1)\cdot 16 = 4^2$. Άρα η εξίσωση $f(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0$ έχει ρίζες τις:

$$\rho_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4^2}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right.$$

Έτσι το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον πίνακα:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f(x) α=-1		−	0	+	0	−	

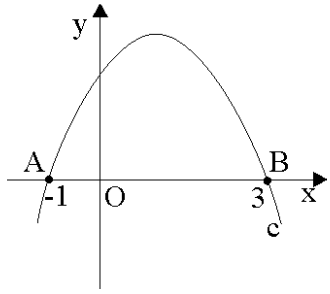
Συνεπώς έχουμε:

- Για x = -1 και x = 3 $f(x) = 0$.
- Για $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ $f(x) \leq 0$
- Για $x \in [-1, 3]$ είναι $f(x) \geq 0$.

ii) Εφ' όσον το τριώνυμο έχει ρίζες –1 και 3, η γραφική του παράσταση τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία στα A(-1,0), B(3,0).

Εφόσον α = -1 το τριώνυμο παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

Μία πρόχειρη γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα. Από αυτήν προκύπτουν τα εξής:



Η γραφική παράσταση C τέμνει τον x΄x στα σημείο A(-1,0) B(3,0).

- Για $-1 < x < 3$ $f(x) > 0$ και η C είναι πάνω από τον άξονα x΄x.
- Για $x < -1$ ή $x > 3$ είναι f(x)<0 και η C είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

2) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε το τριώνυμο

$$\mathbf{f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3}$$

να είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

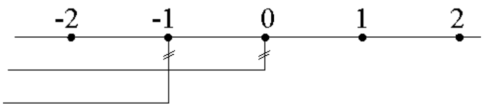
Λύση

Θέλουμε το τριώνυμο να είναι $f(x) < 0,$ δηλαδή να διατηρεί σταθερό το πρόσημό του, άρα απαιτούμε:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta < 0\\ \alpha < 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\left[-2(\lambda-1)\right]^2 - 4\cdot\lambda\cdot(\lambda-3) < 0\\ \lambda < 0\end{array}\right\} \textbf{ (σύστημα ανισώσεων)}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda^2 + 12\lambda < 0\\ \lambda < 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 12\lambda < 0\\ \lambda < 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\lambda < -1\\ \lambda < 0\end{array}$$

Συναληθεύουμε:



Άρα για τα $\lambda < -1$ είναι $f(x) < 0$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

3) Αν το x παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\mathbf{\dfrac{4x+3}{x^2+1}}$.

Λύση

Θέτουμε $\dfrac{4x+3}{x^2+1} = \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$. Αναζητούμε τις τιμές του μ, ώστε το κλάσμα να παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Για το σκοπό αυτό θα βρούμε όλα τα $\mu \in \mathbb{R}$, για τα οποία έχει λύση στο $\mathbb{R}$, ως προς x, η εξίσωση:

$$\frac{4x+3}{x^2+1} = \mu \overset{x^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow} 4x + 3 = \mu(x^2+1) \Leftrightarrow -\mu x^2 - \mu + 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu x^2 + 4x - \mu + 3 = 0 \Leftrightarrow \mu x^2 - 4x + \mu - 3 = 0 \qquad (1).$$

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις :

1) Αν μ = 0, τότε $\dfrac{4x+3}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow 4x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$.

Έτσι για $x=-\dfrac{3}{4}$ η τιμή του κλάσματος είναι μηδέν.

2) Αν μ ≠ 0, πρέπει και αρκεί Δ ≥ 0.

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot\mu(\mu-3)\geq 0 \Leftrightarrow 16-4\mu^2+12\mu\geq 0$$
$$\Leftrightarrow -4\mu^2+12\mu+16\geq: 0 \Leftrightarrow 4(-\mu^2+3\mu+4)\geq 0$$

Αρκεί $-\mu^2+3\mu+4\geq 0$, που είναι τριώνυμο ως προς μ με διακρίνουσα

$$\Delta'=9+16=25=5^2 \text{ και ρίζες } \mu_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5^2}}{-2}=\frac{-3\pm 5}{-2}=\left\langle\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right.$$

Το πρόσημο της Δ΄ δίνεται από τον πίνακα:

μ		-1		4	
Δ΄	−	0	+	0	−

Επομένως, οι τιμές που μπορεί να πάρει το μ είναι:

$$-1\leq\mu\leq 4 \Leftrightarrow -1\leq\frac{4x+3}{x^2+1}\leq 4.$$

Έτσι μέγιστη τιμή του κλάσματος είναι το 4 και ελάχιστη τιμή του είναι το –1.

4) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=x^2-6x+7$ να τοποθετηθούν από τον μεγαλύτερο προς το μικρότερο οι αριθμοί x_1, x_2, -1, 3, 4, 5 χωρίς να βρεθούν οι ρίζες του f(x).

Λύση

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες με $x_2 > x_1$ τότε:

x	-∞		x_1		x_2		+∞
f(x)		+	0	−	0	+	

τότε: $f(-1)=(-1)^2-6(-1)+7=14>0$.

Άρα $\quad -1<x_1$ ή $-1>x_2$ (1)

$f(3)=3^2-6\cdot 3+7=-2<0$ άρα $x_1<3<x_2$ (2)

$f(4)=-4^2-6\cdot 4+7=-1<0$ άρα $x_1<4<x_2$ (3)

$f(5)=5^2-6\cdot 5+7=2>0$ άρα $5<x_1$ ή $5>x_2$. (4)

Από τις (1), (2), (3) και (4) έχουμε:

$$5>x_2>4>3>x_1>-1.$$

5) Αν το τριώνυμο $f(x)=x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5$ έχεις ρίζες πραγματικές άνισες να αποδείξετε ότι μια μόνο ρίζα θα βρίσκεται στο διάστημα (-2, 3).

Λύση

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες του $f(x)$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε:

$$\Delta=\left[-2(\lambda-1)\right]^2-4\cdot1\cdot(\lambda+5)>0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+1-\lambda-5>0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0$$

Επειδή είναι $\Delta'=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=5^2$, έχουμε τις ρίζες $\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm5}{2}=\begin{cases}-1\\4\end{cases}$

λ	-∞		-1		4		+∞
Δ		+	0	−	0	+	

Άρα $\Delta=\lambda^2-3\lambda-4>0$, όταν λ<-1 ή λ>4.

Για λ<-1 , τότε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ δίνεται από τον πίνακα:

x	-∞		x_1		x_2		+∞
f(x)		+	0	−	0	+	

Έχουμε: $f(-2)=(-2)^2-2(\lambda-1)\cdot(-2)+\lambda+5=4+4\lambda-4+\lambda+5=5\lambda+5=5(\lambda+1)$

Όμως $\lambda<-1 \Leftrightarrow \lambda+1<0 \Leftrightarrow 5(\lambda+1)<0$. Άρα $f(-2)<0$ και έτσι $x_1<-2<x_2$.

Επιπλέον έχουμε: $f(3)=3^2-2(\lambda-1)\cdot3+\lambda+5=-5\lambda+20=-5(\lambda-4)$

Επειδή $\lambda<-1 \Leftrightarrow \lambda-4<-5 \Leftrightarrow -5\cdot(\lambda-4)>25>0 \Rightarrow f(3)>0$

και αφού $-2<x_2$ και $f(3)>0$, έχουμε: $-2<x_2<3$.

Επομένως είναι: $x_1<-2<x_2<3$.

Ομοίως εργαζόμαστε για λ > 4. Τότε $f(-2)>0$ και $f(3)<0$, οπότε:

$$-2<x_1<3<x_2.$$

6) Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\dfrac{(x-1)^{2003}\cdot(x^2-9x+20)}{x^2-x+1}>0$ **ii)** $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\le1$

Λύση

i) $\dfrac{(x-1)^{2003}\cdot(x^2-9x+20)}{x^2-x+1}>0$

Αρκεί να ισχύει:

$$(x-1)^{2003}\cdot(x^2-9x+20)\cdot(x^2-x+1)>0$$

Εξετάζουμε χωριστά το πρόσημο κάθε παράγοντα.

- $x-1\ge0 \Leftrightarrow x\ge1$
- $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$
- $x^2-9x+20$

  $\Delta=(-9)^2-4\cdot1\cdot20=81-80=1=1^2$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm1}{2}=\begin{cases}5\\4\end{cases}$$

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
$x^2-9x+20$		+	0	−	0	+	

- $x^2 - x + 1$
  Έχουμε $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$, οπότε

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-x+1		+	

Κατασκευάζουμε τον τελικό πίνακα:

x	$-\infty$		1		4		5		$+\infty$
$(x-1)^{2003}$		−	0	+		+	0	+	
$x^2-9x+20$		+		+	0	−	0	+	
x^2-x+1		+		+		+		+	
		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (1,4) \cup (5,+\infty)$

ii) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-10}{x^2-7x+12} \le 0$.

Αρκεί: $(4x-10)\cdot(x^2-7x+12) \le 0$ και $x^2-7x+12 \ne 0$.

- $4x - 10 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{5}{2}$ και $4x-10 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{2}$.

- $x^2 - 7x + 12$
  $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 1 \cdot 12 = 1$, οπότε έχουμε τις ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right.$$ και

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

Κατασκευάζουμε τον τελικό πίνακα:

x	$-\infty$		5/2		3		4		$+\infty$
4x-10		−	0	+		+		+	
$x^2-7x+12$		+		+		−		+	
		−		+		−		+	

Επομένως, η ανίσωση αληθεύει όταν: $x \in (-\infty, 5/2] \cup (3,4)$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\alpha x+\beta$

α) Να βρεθούν τα α,β ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο (2,-2) και αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του f(x) να ισχύει $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=-1$

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)<15$

γ) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $h(x)=f(x-2)$.

Λύση

α) Για $x=2$, έχουμε $f(2)=-2\Leftrightarrow 2^2-\alpha\cdot 2+\beta=02\Leftrightarrow -2\alpha+\beta=-6$ (1)

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=-1\Leftrightarrow\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=-1\overset{\text{Vieta}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=-1\Leftrightarrow\alpha=-\beta \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε α = 2 , β = -2.

Έτσι $f(x)=x^2-2x-2$.

β) $f(x)<15\Leftrightarrow x^2-2x-2<15\Leftrightarrow x^2-2x-17<0$

$\Delta=4+68=72=3^2\cdot 2^2\cdot 2=6^2\cdot 2$, οπότε έχουμε τις ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{6^2\cdot 2}}{2}=\frac{2\pm 6\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}1+3\sqrt{2}\\1-3\sqrt{2}\end{cases}$$

x	$-\infty$	$1-3\sqrt{2}$		$1+3\sqrt{2}$	
f(x)-15	+	0	−	0	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in\left(1-3\sqrt{2},\ 1+3\sqrt{2}\right)$.

γ) $f(x)=x^2-2x-2$

$h(x)=f(x-2)=(x-2)^2-2(x-2)-2=x^2-4x+4-2x+4-2=x^2-6x+6$.

Έτσι $h(x)=x^2-6x+6$

α = 1>0, κορυφή $\left(\frac{-\beta}{2\alpha},\ \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)=\left(\frac{6}{2},-\frac{36-24}{4}\right)=(3,-3)$.

x	$-\infty$	$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=3$	$+\infty$
h(x) α=1>0	↘	$x=-\frac{\Delta}{4\alpha}=-3$	↗

Έτσι η h είναι

- γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$ και
- γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$.

4.4. Συνθήκες ώστε δύο τριώνυμα να έχουν ρίζες, που πληρούν κάποια σχέση.

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, με ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R},\ (\rho_1<\rho_2)$ και το τριώνυμο $g(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma',\ \alpha'\neq 0,\ \alpha',\beta',\gamma'\in R$ με ρίζες $\rho_1',\rho_2'\in\mathbb{R},\ (\rho_1'<\rho_2')$. Τότε έχουμε:

1) Για να έχουν τα $f(x)$ και $g(x)$ ρίζες αντίθετες, πρέπει αρκεί να ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=-\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Απόδειξη

Ευθύ. Έστω ότι τα τριώνυμα έχουν ρίζες αντίθετες, δηλαδή ισχύει: $\rho_1'=-\rho_1$ και $\rho_2'=-\rho_2$. Τότε χρησιμοποιώντας του τύπους του Vieta λαμβάνουμε:

$$\left.\begin{cases}\rho_1'+\rho_2'=-(\rho_1+\rho_2)\Rightarrow -\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\alpha}\\[2ex] \rho_1'\rho_2'=\rho_1\rho_2\Rightarrow \dfrac{\gamma'}{\alpha'}=\dfrac{\gamma}{\alpha}\end{cases}\right\}\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha'}=-\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'},$$

αν $\beta',\gamma'\neq 0$. Αν κάποιος από τους συντελεστές β',γ' είναι μηδέν, τότε προκύπτει ότι και ο αντίστοιχος συντελεστής του πρώτου τριωνύμου θα είναι μηδέν.

Αντίστροφα, έστω ότι: $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=-\dfrac{\beta}{\beta'}=\dfrac{\gamma}{\gamma'}=\lambda\in\mathbb{R}^*$.και έστω ρ μία ρίζα του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Τότε

$$f(\rho)=\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0\Leftrightarrow \lambda\alpha'\rho^2-\lambda\beta'\rho+\lambda\gamma'=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda\left(\alpha'\rho^2-\beta'\rho+\gamma'\right)=0\Leftrightarrow g(-\rho)=0,\ \text{αφού}\ \lambda\neq 0,$$

δηλαδή ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα του τριωνύμου $g(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'$.

2) Για να έχουν τα $f(x)$ και $g(x)$ **ρίζες ανάλογες, δηλαδή:** $\rho_1=\kappa\rho_1',\ \rho_2=\kappa\rho_2'$ **(αν $\rho_1'\rho_2'\neq 0$, γράφουμε: $\dfrac{\rho_1}{\rho_1'}=\dfrac{\rho_2}{\rho_2'}=\kappa\in\mathbb{R}^*$) πρέπει και αρκεί να ισχύει:**

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'\cdot\kappa}=\frac{\gamma}{\gamma'\cdot\kappa^2}.$$

Απόδειξη

Ευθύ. Έστω ότι τα τριώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ ρίζες ανάλογες, δηλαδή: $\rho_1=\kappa\rho_1',\ \rho_2=\kappa\rho_2',\ \kappa\neq 0$. Τότε έχουμε:

$$\left.\begin{cases}\rho_1+\rho_2=\kappa\left(\rho_1'+\rho_2'\right)\Rightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha}=\kappa\left(-\dfrac{\beta'}{\alpha'}\right)\\[2ex] \rho_1\rho_2=\kappa^2\left(\rho_1'\rho_2'\right)\Rightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha}=\kappa^2\left(\dfrac{\gamma'}{\alpha'}\right)\end{cases}\right\}\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'\kappa}=\frac{\gamma}{\gamma'\kappa^2},$$

αν $\beta',\gamma'\neq 0$. Αν κάποιος από τους συντελεστές β',γ' είναι μηδέν, τότε προκύπτει ότι και ο αντίστοιχος συντελεστής του πρώτου τριωνύμου θα είναι μηδέν.

Αντίστροφα, έστω ότι: $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'\kappa}=\dfrac{\gamma}{\gamma'\kappa^2}=\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\kappa\neq 0$ και έστω ρ μία ρίζα του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Τότε $\alpha=\lambda\alpha'$, $\beta=\lambda\kappa\beta'$ και $\gamma=\lambda\kappa^2\gamma'$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, οπότε

$$f(\rho)=\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0\Leftrightarrow \lambda\alpha'\rho^2+\lambda\beta'\kappa\rho+\lambda\kappa^2\gamma'=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda\left(\alpha'\rho^2+\beta'\kappa\rho+\kappa^2\gamma'\right)=0\Leftrightarrow \lambda\kappa^2\left[\alpha'\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)^2+\beta'\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)+\gamma'\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha'\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)^2+\beta'\left(\frac{\rho}{\kappa}\right)+\gamma'=0,\ \text{αφού είναι } \lambda\kappa\neq 0,$$

δηλαδή ο αριθμός $\rho'=\dfrac{\rho}{\kappa}$ είναι ρίζα του τριωνύμου $g(x)=\alpha'x^2+\beta'x+\gamma'$. Επομένως, αν ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε οι $\rho_1'=\dfrac{\rho_1}{\kappa}$, $\rho_2'=\dfrac{\rho_2}{\kappa}$ θα είναι ρίζες του τριωνύμου $g(x)=\alpha'x^2+\beta'x+\gamma'$ και ισχύει: $\rho_1=\kappa\rho_1'$, $\rho_2=\kappa\rho_2'$.

3) Για να έχουν τα f(x) και $g(x)$ ρίζες αντίστροφες, έστω

$$\rho_1=\frac{1}{\rho_1'}\neq 0\ \text{ και } \rho_2=\frac{1}{\rho_2'}\neq 0$$

πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\alpha'}.$$

Απόδειξη

Ευθύ. Έστω ότι τα τριώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ ρίζες αντίστροφες, δηλαδή: $\rho_1=\dfrac{1}{\rho_1'}\neq 0$ και $\rho_2=\dfrac{1}{\rho_2'}\neq 0$, όπου $\rho_1'\rho_2'\neq 0$. Τότε έχουμε:

$$\left.\begin{cases}\rho_1+\rho_2=\dfrac{1}{\rho_1'}+\dfrac{1}{\rho_2'}=\dfrac{\rho_1'+\rho_2'}{\rho_1'\rho_2'}\Rightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{\beta'}{\gamma'}\\[2ex] \rho_1\rho_2=\dfrac{1}{\rho_1'\rho_2'}\Rightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\alpha'}{\gamma'}\end{cases}\right\}\Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\alpha'},$$

αν $\beta'\neq 0$. Αν $\beta'=0$, τότε προκύπτει και ότι $\beta=0$, ενώ δεν μπορεί να είναι $\gamma\gamma'=0$.

Αντίστροφα, έστω ότι: $\dfrac{\alpha}{\gamma'}=\dfrac{\beta}{\beta'}=\dfrac{\gamma}{\alpha'}=\lambda\in\mathbb{R}^*$, και έστω $\rho\neq 0$ μία ρίζα του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Τότε $\alpha=\lambda\gamma'$, $\beta=\lambda\beta'$ και $\gamma=\lambda\alpha'$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, οπότε

$$f(\rho)=\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0\Leftrightarrow \lambda\gamma'\rho^2+\lambda\beta'\rho+\lambda\alpha'=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(\gamma'\rho^2+\beta'\rho+\alpha'\right)=0\Leftrightarrow \lambda\rho^2\left(\gamma'+\beta\cdot\frac{1}{\rho}+\alpha'\cdot\frac{1}{\rho^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{\rho}\right)=0,\ \text{αφού } \lambda\rho^2\neq 0,$$

οπότε ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα του τριωνύμου $g(x)$.

4) Για να έχουν τα τριώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ **δύο ρίζες κοινές πρέπει και αρκεί:**

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Απόδειξη

Ευθύ. Έστω ότι τα τριώνυμα έχουν δύο ρίζες κοινές , δηλαδή ισχύει: $\rho_1' = \rho_1$ και $\rho_2' = \rho_2$. Τότε χρησιμοποιώντας του τύπους του Vieta λαμβάνουμε:

$$\left.\begin{cases} \rho_1' + \rho_2' = \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow -\dfrac{\beta'}{\alpha'} = -\dfrac{\beta}{\alpha} \\ \rho_1'\rho_2' = \rho_1\rho_2 \Rightarrow \dfrac{\gamma'}{\alpha'} = \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},$$

αν $\beta', \gamma' \neq 0$. Αν κάποιος από τους συντελεστές β', γ' είναι μηδέν, τότε προκύπτει ότι και ο αντίστοιχος συντελεστής του πρώτου τριωνύμου θα είναι μηδέν.

Αντίστροφα, έστω ότι: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \lambda \in \mathbb{R}^*$.και έστω ρ μία ρίζα του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Τότε

$$f(\rho) = \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda\alpha'\rho^2 + \lambda\beta'\rho + \lambda\gamma' = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(\alpha'\rho^2 + \beta'\rho + \gamma'\right) = 0 \Leftrightarrow g(\rho) = 0, \text{ αφού } \lambda \neq 0,$$

δηλαδή ο αριθμός ρ είναι ρίζα και του τριωνύμου $g(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'$.

5) Για να έχουν τα τριώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ **μία μόνο κοινή ρίζα πρέπει και αρκεί να ισχύει:**

$$\boxed{R = (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)^2 - (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\cdot(\beta\gamma' - \gamma\beta') = 0 \text{ και } \alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0}$$

και η κοινή ρίζα είναι:

$$\rho = \frac{\gamma\cdot\alpha' - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = -\frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

Σημείωση

*Η συνάρτηση R ονομάζεται **απαλείφουσα** των τριωνύμων* $f(x)$ και $g(x)$. *Ισχύει η σχέση:*

$$\boxed{R = (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)^2 - (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\cdot(\beta\gamma' - \beta\gamma') = \frac{(\alpha\beta' - \beta'\alpha)^2}{\alpha} g(\rho) = \frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}{\alpha'} f(\rho),}$$

όπου ρ *η κοινή ρίζα τους, αν υπάρχει. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της πρότασης (5) είναι χρήσιμο να αναφερθούμε σε μία βασική ιδιότητα της απαλείφουσας δύο τριωνύμων.*

Πρόταση. Θεωρούμε τα τριώνυμα

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\quad \alpha\neq 0,\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \textit{με ρίζες}\ \rho_1,\ \rho_2\ (\rho_1<\rho_2)\ \textit{και}$$

$$g(x)=\alpha' x^2+\beta' x+\gamma',\quad \alpha'\neq 0,\ \alpha',\beta',\gamma'\in \mathrm{R}\ \textit{με ρίζες}\ \rho_1',\ \rho_2'\ (\rho_1'<\rho_2').$$

Τότε ισχύουν οι ισότητες:

$$R=\alpha^2 g(\rho_1)g(\rho_2)\ \text{και}\ R=\alpha'^2 f(\rho_1')f(\rho_2').$$

Απόδειξη

Πράγματι, έχουμε

$$\alpha^2 g(\rho_1)g(\rho_2)=\alpha^2\left(\alpha'\rho_1^2+\beta'\rho_1+\gamma'\right)\left(\alpha'\rho_2^2+\beta'\rho_2+\gamma'\right)$$

$$=\alpha^2\left[\alpha'^2(\rho_1\rho_2)^2+\beta'^2\rho_1\rho_2+\gamma'^2+\alpha'\beta'\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)+\alpha'\gamma'\left(\rho_1^2+\rho_2^2\right)+\beta'\gamma'(\rho_1+\rho_2)\right]$$

$$=\alpha^2\left[\alpha'^2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\beta'^2\cdot\frac{\gamma}{\alpha}+\gamma'^2+\alpha'\beta'\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\alpha'\gamma'\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)+\beta'\gamma'\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]$$

$$=\left(\alpha'\gamma\right)^2+\alpha\gamma\beta'^2+(\alpha\gamma')^2+\alpha'\beta'\beta\gamma+\beta^2\alpha'\gamma'-2\alpha\gamma\alpha'\gamma'-\alpha\beta\beta'\gamma'$$

$$=\left(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\right)^2-\left(\alpha\beta'-\alpha'\beta\right)\left(\beta\gamma'-\beta'\gamma\right)$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα: $R=\alpha'^2 f(\rho_1')f(\rho_2')$

Απόδειξη της (5)

Ευθύ. Υποθέτουμε ότι τα δύο τριώνυμα έχουν μία μόνο κοινή ρίζα, έστω ρ. Τότε το σύστημα $f(\rho)=0,\ g(\rho)=0$ έχει μοναδική λύση ως προς άγνωστο το ρ, δηλαδή το σύστημα

$$f(\rho)=\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0,\ g(\rho)=\alpha'\rho^2+\beta'\rho+\gamma'=0$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\alpha\rho^2+\beta\rho=-\gamma\\ \alpha'\rho^2+\beta'\rho=-\gamma'\end{cases}\right\}\ \text{έχει μοναδική λύση ως προς}\ \rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0\ \text{και}\ \rho=-\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\ \rho^2=\frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0,\ \rho=-\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\ \text{και}\ \left(\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\right)^2=\frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0,\ \rho=-\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\ \text{και}\left(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\right)^2-\left(\alpha\beta'-\alpha'\beta\right)\left(\beta\gamma'-\beta'\gamma\right)=0.$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύουν:

$$R=(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\cdot(\beta\gamma'-\gamma\beta')=0\ \text{και}\ \alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι τα δύο τριώνυμα έχουν μία μόνο κοινή ρίζα. Από την ισότητα $R=\alpha^2 g(\rho_1)g(\rho_2)$ έπεται ότι $\alpha^2 g(\rho_1)g(\rho_2)=0\Rightarrow g(\rho_1)=0$ ή $g(\rho_2)=0$. Αν ήταν

$g(\rho_1)=0$ και $g(\rho_2)=0$, τότε τα τριώνυμα θα είχαν δύο κοινές ρίζες, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση (4) θα είχαμε $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, δηλαδή, $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$, άτοπο.

Παραδείγματα

1. Να προσδιοριστεί το $\lambda\in R$ ώστε οι εξισώσεις

$$\mathbf{(1-2\lambda)x^2-6\lambda x-1=0 \quad και \quad \lambda x^2-x+1=0}$$

να έχουν μια κοινή ρίζα και να υπολογιστεί αυτή η ρίζα.

Λύση

Απαιτούμε $R=0\Leftrightarrow(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\alpha\beta'-\beta\alpha')\cdot(\beta\gamma'-\gamma\beta')=0$ και $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq{}'0$.
Όμως είναι :

$$\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=(1-2\lambda)\cdot-(-1)\cdot\lambda=1-2\lambda+\lambda=1-\lambda,$$
$$\alpha\beta'-\beta\alpha'=(1-2\lambda)\cdot(-1)+6\lambda\cdot\lambda=-1+2\lambda+6\lambda^2=6\lambda^2+2\lambda-1\neq0,$$
$$\beta\gamma'-\gamma\beta'=(-6\lambda)\cdot1-(-1)\cdot(-1)=-6\lambda-1,$$

οπότε έχουμε

$$R=(1-\lambda)^2+(6\lambda^2+2\lambda-1)\cdot(6\lambda+1)=0 \quad και \quad 6\lambda^2+2\lambda-1\neq0.$$

Έχουμε τώρα

$$R=1-2\lambda+\lambda^2+(36\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda^2+2\lambda-6\lambda-1)=0$$
$$\Leftrightarrow 36\lambda^3+19\lambda^2-6\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\cdot(36\lambda^2+19\lambda-6)=0\Leftrightarrow$$
$$\lambda=0 \text{ ή } 36\lambda^2+19\lambda-6=0\Leftrightarrow\lambda=0 \text{ ή } \lambda=\frac{2}{9} \text{ ή } \lambda=\frac{37}{36},$$

αφού είναι $\Delta=19^2-4\cdot(-6)\cdot36=361+864=1225=35^2$.

Για $\lambda=0$ ισχύει ότι $\alpha\beta'-\beta\alpha'=6\lambda^2+2\lambda-1=-1\neq0$, οπότε οι δύο εξισώσεις έχουν μία μόνο κοινή ρίζα η οποία είναι η $\rho=\frac{\gamma\cdot\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}=\frac{0-1}{-1}=1$.

Πράγματι, μπορούμε να δούμε ότι για $\lambda=0$ οι εξισώσεις γίνονται: $x^2-1=0$ και $-x+1=0$, οι οποίες έχουν κοινή ρίζα το 1.

Για $\lambda=\frac{2}{9}$ είναι $\alpha\beta'-\beta\alpha'=6\lambda^2+2\lambda-1=\frac{1}{9}\neq0$, οπότε πάλι οι δύο εξισώσεις έχουν μία μόνο κοινή ρίζα $\rho=\frac{\gamma\cdot\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}=3$.

Για $\lambda=\frac{37}{36}$ είναι $\alpha\beta'-\beta\alpha'=6\lambda^2+2\lambda-1\neq0$, οπότε πάλι οι δύο εξισώσεις έχουν μία μόνο κοινή ρίζα $\rho=\frac{\gamma\cdot\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$.

2. Να προσδιοριστούν οι $\lambda,\mu\in R$ ώστε τα τριώνυμα

$$\mathbf{f(x)=x^2-(\mu+3)x+3\lambda \quad και \quad \varphi(x)=x^2-\lambda x+\mu-2}$$

να έχουν τις ρίζες του πρώτου ανάλογες προς τις ρίζες του δεύτερου με λόγο 2.

Λύση
Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της f(x) και ρ_1', ρ_2' οι ρίζες της $\varphi(x)$.

Θέλουμε $\frac{\rho_1}{\rho_1'} = \frac{\rho_2}{\rho_2'} = 2$, οπότε απαιτούμε:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta' \cdot 2} = \frac{\gamma}{\gamma' \cdot 2^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-(\mu+3)}{-\lambda \cdot 2} = \frac{3\lambda}{(\mu-2)\cdot 4}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\mu+3}{2\lambda} = \frac{3\lambda}{4\mu-8}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{\mu+3}{2\lambda} = 1 \text{ και } \frac{3\lambda}{4\mu-8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \mu+3 = 2\lambda \text{ και } 3\lambda = 4\mu-8$$

$$\Leftrightarrow \mu-2\lambda = -3 \quad \text{και } -4\mu+3\lambda = -8$$

$$\left.\begin{cases} \mu-2\lambda = -3 \\ -4\mu+3\lambda = -8 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (\lambda,\ \mu) = (4,\ 5)$$

Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[3]{\frac{x+2}{4x+3}} + \sqrt[3]{\frac{4x+3}{x+2}} = \frac{13}{6}$

Λύση
Για να ορίζονται οι δύο ρίζες του πρώτου μέλους της εξίσωσης, πρέπει:

$$(x+2)(4x+3) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > -\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Θέτουμε $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{4x+3}}$, οπότε $\frac{1}{y} = \sqrt[3]{\frac{4x+3}{x+2}}, y > 0$ και η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3} \text{ ή } y = \frac{3}{2}.$$

- Για $y = \frac{2}{3}$ λαμβάνουμε: $\sqrt[3]{\frac{x+2}{4x+3}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{4x+3} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow 5x = 30 \Leftrightarrow x = 6$.
- Για $y = \frac{3}{2}$ λαμβάνουμε: $\sqrt[3]{\frac{x+2}{4x+3}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{4x+3} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow 100x = -65 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{20}$.

  Οι ρίζες που βρήκαμε είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς (1).

2. Να λύσετε την εξίσωση: $3a + x = \sqrt{2ax + x^2}, a > 0.$

Λύση
Περιορισμοί: $2ax + x^2 \geq 0$ και $3a + x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+2a) \geq 0$ και $x \geq -3a$

$$\Leftrightarrow -3a \leq x \leq -2a \text{ ή } x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{A} = [-3a, -2a] \cup [0, +\infty).$$

Για $x \in \mathrm{A}$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση που προκύπτει με ύψωση των δύο μελών στο τετράγωνο., δηλαδή την εξίσωση

$$(3a+x)^2 = 2ax + x^2, a>0 \Leftrightarrow 4ax = -9a^2, a>0 \Leftrightarrow x = -\frac{9a}{4} \in [-3a, -2a] \subseteq \mathrm{A}.$$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $3a - x = 2\sqrt{ax - a^2}$, $a > 0$.

Λύση

Περιορισμοί: $3a - x \geq 0$ και $ax - a^2 \geq 0$, $a > 0 \Leftrightarrow x \leq 3a$ και $x \geq a$, $a > 0$

$$\Leftrightarrow x \in \mathrm{A} = [a, 3a].$$

Για $x \in \mathrm{A}$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση που προκύπτει με ύψωση των δύο μελών στο τετράγωνο., δηλαδή την εξίσωση:

$$(3a-x)^2 = 4\left(ax - a^2\right),\ a>0 \Leftrightarrow 9a^2 - 6ax + x^2 = 4ax - 4a^2, a>0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10ax + 13a^2 = 0, a>0 \Leftrightarrow x = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)a \text{ ή } x = \left(5 + 2\sqrt{3}\right)a \notin [a, 3a]$$

$$\Leftrightarrow x = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)a.$$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-3} = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Λύση

Περιορισμοί: $a > 0$, $x - 8 \geq 0$ και $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a > 0$ και $x \geq 8$.

Για $a > 0$ και $x \geq 8$, η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$2x - 11 + 2\sqrt{(x-8)(x-3)} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-8)(x-3)} = a^2 - 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - 11x + 24\right) = \left(a^2 - 2x + 11\right)^2, \text{ (εφόσον } a^2 - 2x + 11 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{a^2 + 11}{2}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 44x + 96 = a^4 + 4x^2 + 121 - 4a^2x - 44x + 22a^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x = a^4 + 22a^2 + 25 \Leftrightarrow x = \frac{a^4 + 22a^2 + 25}{4a^2}.$$

Η λύση που βρήκαμε είναι δεκτή, όταν ισχύουν:

$$8 \leq x = \frac{a^4 + 22a^2 + 25}{4a^2} \leq \frac{a^2 + 11}{2}, a > 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 22a^2 + 25 \geq 32a^2 \text{ και } a^4 + 22a^2 + 25 \leq 2a^4 + 22a^2, a > 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 10a^2 + 25 \geq 0 \text{ και } a^4 \geq 25, a > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - 5\right)^2 \geq 0 \text{ και } a^2 \geq 5, a > 0 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{5}.$$

Επομένως, για $a \geq \sqrt{5}$ η δεδομένη εξίσωση έχει τη λύση $x = \dfrac{a^4 + 22a^2 + 25}{4a^2}$.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{3x - a} = a - 2x$, $a \neq 0$.

Λύση

Περιορισμοί: $3x-a\ge 0$ και $a-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{a}{3}$ και $x\le \frac{a}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}\le x\le \frac{a}{2}, & \text{αν } a>0 \\ \frac{a}{2}\le x\le \frac{a}{3}, & \text{αν } a<0 \end{cases}$

Με τους παραπάνω περιορισμούς η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$(a-2x)^2=3x-a \Leftrightarrow a^2-4ax+4x^2=3x-a \Leftrightarrow 4x^2-(4a+3)x+a^2+a=0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(4a+3)^2-16(a^2+a)=8a+9$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες $x_1,x_2, x_1\le x_2$, στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $a\ge -\frac{9}{8}$.

Επιπλέον, αν $\varphi(x)=4x^2-(4a+3)x+a^2+a$, λαμβάνουμε: $\varphi\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^2}{9}>0$, οπότε:

- ο αριθμός $\frac{a}{3}$ βρίσκεται εκτός των ριζών του τριωνύμου $\varphi(x)$, δηλαδή έχουμε

$$\frac{a}{3}<x_1\le x_2 \text{ ή } x_1\le x_2<\frac{a}{3}, \text{για κάθε } a\ge -\frac{9}{8}. \qquad (1)$$

Επίσης έχουμε $\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a}{2}$, οπότε καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $a>0$, τότε ο αριθμός $\frac{a}{2}$ βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου $\varphi(x)$. Σε συνδυασμό με την (1) προκύπτει ότι:

$$\frac{a}{3}<x_1<\frac{a}{2}<x_2 \text{ ή } x_1\le x_2<\frac{a}{3}<\frac{a}{2}, \text{για κάθε } a>0,$$

  δηλαδή η εξίσωση έχει για $a>0$, μία μόνο λύση $x=\frac{4a+3-\sqrt{8a+9}}{8}$.

- Αν $-\frac{9}{8}\le a<0$, τότε ο αριθμός $\frac{a}{2}$ βρίσκεται εκτός των ριζών του τριωνύμου $\varphi(x)$. Σε συνδυασμό με την (1) προκύπτει ότι:

$$\frac{a}{2}<x_1\le x_2\le \frac{a}{3} \text{ ή } x_1\le x_2\le \frac{a}{2}<\frac{a}{3} \text{ ή } \frac{a}{2}<\frac{a}{3}<x_1\le x_2. \qquad (2)$$

  Επειδή $\frac{a}{2}-\frac{4a+3}{8}=-\frac{3}{8}<0$ και $\frac{a}{3}-\frac{4a+3}{8}=\frac{-4a-9}{8}=-\frac{4a+9}{8}<0$, για $a\in\left[-\frac{9}{8},0\right)$. Επομένως, για $a\in\left[-\frac{9}{8},0\right)$ από τις σχέσεις (2) εφικτή είναι η περίπτωση $\frac{a}{2}<\frac{a}{3}<x_1\le x_2$, οπότε η εξίσωση δεν έχει δεκτή λύση στην περίπτωση αυτή.

6. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2-5x-2x\sqrt{x^2-5x}=1.$$

(Διαγωνισμός ΘΑΛΗΣ 2013-14)

Λύση

Περιορισμοί: $x^2-5x\geq 0 \Leftrightarrow x(x-5)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$ ή $x\geq 5.$

Η εξίσωση, για $x\leq 0$ ή $x\geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+\left(x^2-5x\right)-2x\sqrt{x^2-5x}=1 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x^2-5x}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-5x}=1 \ (\mathrm{E}_1) \text{ ή } x-\sqrt{x^2-5x}=-1 \ (\mathrm{E}_2)$$

- $(\mathrm{E}_1): x-\sqrt{x^2-5x}=1 \ \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-5x}, x\in(-\infty,0]\cup[5,+\infty),\ x\geq 1$

  $\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-5x,$ με $x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3},\ x\geq 5,$ απορρίπτεται.

- $(\mathrm{E}_2): x-\sqrt{x^2-5x}=-1 \ \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2-5x}, x\in(-\infty,0]\cup[5,+\infty),\ x\geq -1$

  $\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-5x,$ με $-1\leq x\leq 0$ ή $x\geq 5$

  $\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{7},\ -1\leq x\leq 0$ ή $x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{7}.$

7. Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}+3-2\sqrt{2}=0,$$

όπου $x\in\mathbb{R}$ άγνωστος και $a\in\mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

(Διαγωνισμός ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2012-13)

Λύση

Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$ πρέπει να είναι $x\geq 2$.

Η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+3-2\sqrt{2}=-\sqrt{x-2},\ x\geq 2. \qquad (1)$$

Για $a=0$ έχουμε την εξίσωση

$3-2\sqrt{2}=-\sqrt{x-2},\ x\geq 2$, (αδύνατη, αφού $3-2\sqrt{2}>0$).

Για $a\neq 0$, το πρώτο μέλος της (1) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(ax+\sqrt{2}-1\right)^2=-\sqrt{x-2},\ x\geq 2. \qquad (2)$$

Επειδή είναι $\left(ax+\sqrt{2}-1\right)^2\geq 0$ και $-\sqrt{x-2}\leq 0,\ x\geq 2,$ έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει λύση, αν, και μόνον αν,

$$ax+\sqrt{2}-1=0 \text{ και } x-2=0,\ x\geq 2 \Leftrightarrow x=2, \text{ εφόσον } a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει μόνο για $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ τη λύση $x=2.$

8. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

(Διαγωνισμός ΘΑΛΗΣ 2011-12)

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Αν θέσουμε $a = 2x^2 + 3x + 1,\ b = x^2 + 3x + 2$, τότε $a - b = x^2 - 1$ και η εξίσωση γίνεται:

$$
\begin{aligned}
a^3 - b^3 = 7(a-b)^3 &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = 7(a-b)^3\\
&\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2-7a^2+14ab-7b^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow -(a-b)\left(6a^2-15ab+6b^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow a-b=0 \text{ ή } 2a^2-5ab+2b^2=0\\
&\Leftrightarrow a=b \text{ ή } a=2b \text{ ή } 2a=b\\
&\Leftrightarrow x^2-1=0 \text{ ή } -3x-3=0 \text{ ή } 3x^2+3x=0\\
&\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=-1\\
&\Leftrightarrow x=-1 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x=0 \text{ ή } x=1.
\end{aligned}
$$

2^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας $(x+1)^3$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^3\left[(2x+1)^3-(x+2)^3-7(x-1)^3\right]=0 \Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα})\\
&\text{ή } 8x^3+12x^2+6x+1-x^3-6x^2-12x-8-7x^3+21x^2-21x+7=0\\
&\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } 27x^2-27x=0\\
&\Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1.
\end{aligned}
$$

9. Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2 = x^2 + 4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

(Διαγωνισμός ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2011-12)

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow |x| = 1-\alpha.$$

Επειδή είναι $|x| \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha < 1$, οπότε είναι $1-\alpha > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
  $$x = 1-\alpha \text{ ή } x = \alpha - 1.$$
- $\alpha = 1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x = 0$.
- $\alpha > 1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

10. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x + \alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

(Διαγωνισμός ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2011-12)

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-2|x|+1=2x+\alpha \Leftrightarrow x^2-2\left(|x|+x\right)+1-\alpha=0. \qquad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x\geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-4x+1-\alpha=0, \qquad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=16-4(1-\alpha)=4(3+\alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $\alpha\geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$\mathrm{P}=1-\alpha \text{ και } \mathrm{S}=4>0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha=1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x=4$ και $x=0$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x=2+\sqrt{3+\alpha}$

(ii) $x<0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+1-\alpha=0, \qquad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x=-\sqrt{\alpha-1}$, αν $\alpha>1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha<-3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x=2+\sqrt{3+\alpha}$, $x=-\sqrt{\alpha-1}$.