ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 17$^{\text{ο}}$

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)f(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Η $g(x)=f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(-x)}{f(x)}dx=\frac{f^2(0)-f^2(-1)}{2}$

Γ) Αν $f(0)=1$ να βρείτε τη συνάρτηση f.

Λύση

Α) α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)f(-x)=1$ (1)

Η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$, επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)>0$, άρα από (1) έχουμε $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-x_1)>f(-x_2) \underset{\text{ΜΕΛΗ}}{\overset{\text{ΘΕΤΙΚΑ}}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{f(-x_1)}<\frac{1}{f(-x_2)} \Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Στο (β) ερώτημα δείξαμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$f(-x_1)>f(-x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

οπότε η $g(x)=f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Θέτουμε $-x=u\Leftrightarrow x=-u$, οπότε $dx=-du$. Όταν $x=0$ το $u=0$ και όταν $x=1$ το $u=-1$.

Έχουμε $\displaystyle\int_0^1\frac{f(-x)}{f(x)}dx=-\int_0^{-1}\frac{f(u)}{f(-u)}du=-\int_0^{-1}f(u)\cdot f'(u)du=-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_0^{-1}=\frac{f^2(0)-f^2(-1)}{2}$

Γ) Η (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα θα ισχύει και για $-x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$f'(-x)\cdot f(x)=1\Leftrightarrow -f'(-x)\cdot f(x)=-1\Leftrightarrow\left[f(-x)\right]'\cdot f(x)=-1 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x)+\left[f(-x)\right]'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot f(-x)\right]'=0\Leftrightarrow f(x)\cdot f(-x)=c_1,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $f(0)\cdot f(0)=c_1 \Leftrightarrow c_1=1$. Άρα $f(x)\cdot f(-x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ (3)

Από (1) και (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)\cdot f(-x)=f(x)\cdot f(-x) \overset{f(-x)>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0 \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow} f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot e^{-x}\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot e^{-x}=c_2$$

Για $x=0$ είναι $f(0)\cdot e^0=c_2 \Leftrightarrow c_2=1$. Επομένως $f(x)\cdot e^{-x}=1 \Leftrightarrow f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 18°

Α) Να αποδείξετε ότι $e^x-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $\left(f'(x)-f(x)\right)e^x=(x-1)f'(x)-f(x)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{e^{\kappa}-e^{\lambda}}<e^{\kappa-\lambda}$ για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$ με $\kappa<\lambda$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς Α , Β έτσι, ώστε

$$x-2=A\cdot f'(x)+B\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x-2}{e^x-x+1}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

Λύση

Α) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)=e^x-1$

Είναι $h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης h είναι

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h΄(x)	−	0	+
h(x)	↘	2	↗
		ελάχιστο	

$h(0)=2$

Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ με ελάχιστη τιμή $h(0)=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$h(x)\ge h(0) \Leftrightarrow h(x)\ge 2$, άρα $h(x)>0 \Leftrightarrow e^x-x+1>0$

Β) α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(f'(x)-f(x)\right)e^x=(x-1)f'(x)-f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^x-f(x)e^x-x\cdot f'(x)+f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)-f(x)\cdot\left(e^x-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)-f(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)-f(x)\cdot\left(e^x-x+1\right)'}{\left(e^x-x+1\right)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x-x+1}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x-x+1}=c \Leftrightarrow f(x)=c\cdot\left(e^x-x+1\right).$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=c\cdot\left(e^0-0+1\right)\Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Η $f(x)=e^x-x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (βλέπε (Α) ερώτημα), άρα για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$ με $\kappa<\lambda$ ισχύει

$$f(\kappa)<f(\lambda)\Leftrightarrow e^{\kappa}-\kappa+1<e^{\lambda}-\lambda+1\Leftrightarrow e^{\kappa}-\kappa<e^{\lambda}-\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{e^{\kappa}-\kappa}<e^{e^{\lambda}-\lambda}\Leftrightarrow\frac{e^{e^{\kappa}}}{e^{\kappa}}<\frac{e^{e^{\lambda}}}{e^{\lambda}}\Leftrightarrow\frac{e^{e^{\kappa}}}{e^{e^{\lambda}}}<\frac{e^{\kappa}}{e^{\lambda}}\Leftrightarrow e^{e^{\kappa}-e^{\lambda}}<e^{\kappa-\lambda}$$

γ) Αναζητούμε $A,B\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $x-2=A\cdot f'(x)+B\cdot f(x)\Leftrightarrow$

$$x-2=A\cdot(e^x-1)+B\cdot(e^x-x+1)\Leftrightarrow x-2=(A+B)e^x-Bx+B-A$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει και για συγκεκριμένες τιμές του x.

Για $x=0$ έχουμε $0-2=(A+B)e^0-B\cdot0+B-A\Leftrightarrow-2=\cancel{A}+B+B-\cancel{A}\Leftrightarrow2B=-2\Leftrightarrow B=-1$

Για $x=1$ έχουμε $1-2=(A+B)e^1-B\cdot1+B-A\Leftrightarrow-1=(A+B)e-\cancel{B}+\cancel{B}-A\overset{B=-1}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow-1=(A-1)e-A\Leftrightarrow(A-1)(e-1)=0\Leftrightarrow A=1$$

δ) Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι:

$$E(\Omega)=-\int_0^1 g(x)dx=-\int_0^1\frac{x-2}{e^x-x+1}dx=-\int_0^1\frac{(e^x-1)-(e^x-x+1)}{e^x-x+1}dx=$$

$$=-\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x-x+1}dx+\int_0^1\frac{e^x-x+1}{e^x-x+1}dx=-\int_0^1\frac{(e^x-x+1)'}{e^x-x+1}dx+\int_0^1 1dx=$$

$$=-\left[\ln(e^x-x+1)\right]_0^1+1(1-0)=-(\ln e-\ln2)+1=\ln2\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 19°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$.

i) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$

ii) Έστω η συνάρτηση g με $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$ και $g(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 g(x)dx$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^2e^{-u}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^2}{e^u}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(u^2\right)'}{\left(e^u\right)'}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2u}{e^u}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{(2u)'}{\left(e^u\right)'}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2}{e^u}=0$$

ii) α) Για να είναι η g συνεχής στο $[0,1]$ πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $(0,1)$ και επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} g(x)=g(1)$$

Η g είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\left(1+\dfrac{1}{1}\right)e^{-\frac{1}{1}}=g(1)$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0=g(0)$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

β) 1ος τρόπος

Η συνάρτηση $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα και η αρχική της στο $[0,1]$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη:

$$G(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & 0<x\le 1\\ c, & x=0\end{cases} \quad \text{με} \quad c=\lim_{x\to 0^+} G(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right)=0, \quad \text{άρα} \quad c=0$$

Επομένως $I=\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 G'(x)\,dx=\left[G(x)\right]_0^1=G(1)-G(0)=\frac{1}{e}-0=\frac{1}{e}$

2ος τρόπος

$$I=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}dx=\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt=\lim_{x\to 0^+}\left[\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt+\int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\int_x^1 (t)'\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt+\int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\left[t\cdot e^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1-\int_x^1 t\cdot\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)'dt+\int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \cancel{t}\cdot \frac{1}{t^{\cancel{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt + \cancel{\int_x^1 \frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e} - xe^{-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{e}$$

Γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right) = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$.

ΘΕΜΑ 20ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $x < f(x) < \dfrac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x < 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(\varepsilon\varphi x) = x$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και να υπολογίσετε το $f(1)$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y = 0$, x=0 και x=1.

Λύση

α) Η συνάρτηση $g(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0 \in \mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί λοιπόν $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \left(\int_0^x \dfrac{dt}{t^2+1}\right)' = \dfrac{1}{x^2+1} > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$, ενώ για $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{2x}{x^2+1}$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2x}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f´´(x)	+	0	−
f(x)		0	
		Σ.Κ.	

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $O(0, f(0))$, δηλαδή στο $O(0, 0)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και σε κάθε διάστημα $[x, 0]$ με $x < 0$. Ισχύει λοιπόν Θ.Μ.Τ.

οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(0)-f(x)}{0-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(x)}{x}$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, οπότε για

$$x < \xi < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} < \frac{f(x)}{x} < 1 \overset{\cdot x<0}{\Leftrightarrow} x < \frac{f(x)}{x} < \frac{x}{x^2+1}$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $f(\varepsilon\varphi x) = x \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x) - x = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{dt}{t^2+1} - x = 0$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{dt}{t^2+1} - x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $g'(x) = \left(\displaystyle\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{dt}{t^2+1}\right)' - (x)' \Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2 x + 1}(\varepsilon\varphi x)' - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $g(0) = f(0) = 0$, άρα $c = 0$, οπότε $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x) - x = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x) = x$.

Είναι $f(\varepsilon\varphi x) = x$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε $f(1) = f\left(\varepsilon\varphi \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$. Από (α) ερώτημα έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

άρα $E = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1\cdot f(x)dx = \int_0^1 (x)'\cdot f(x)dx = \big[x\cdot f(x)\big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot f'(x)dx =$

$$= f(1) - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\ln(x^2+1)\right)'dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi - 2\ln 2}{4} = \frac{\pi - \ln 4}{4} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 21$^{\text{ο}}$

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x-1} \frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}dt$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της F.

β) i) Να αποδείξετε ότι $F(\eta\mu x) = x - \dfrac{\pi}{6}$ **για κάθε** $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f **:** $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$,

τον άξονα $x'x$ **και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και** $x = \sqrt{3} - 1$**.**

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$ είναι συνεχής στο $(-3,1)$, το $0\in(-3,1)$, άρα η F ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $-3<2x-1<1\Leftrightarrow -2<2x<2\Leftrightarrow -1<x<1$, οπότε $A_F=(-1\ ,\ 1)$.

Για κάθε $x\in(-1\ ,\ 1)$ είναι $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-(2x-1+1)^2}}(2x-1)'=\dfrac{2}{\sqrt{4-4x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

β) i) Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$\left[F(\eta\mu x)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}(\eta\mu x)'=\frac{1}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}}\sigma\upsilon\nu x=1,\ \text{οπότε έχουμε}$$

$$\left[F(\eta\mu x)\right]'=(x)'\Leftrightarrow F(\eta\mu x)=x+c \qquad (1)$$

δηλαδή $\displaystyle\int_0^{2\eta\mu x-1} f(t)dt=x+c\ ,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Από την τελευταία σχέση για $x=\dfrac{\pi}{6}$, βρίσκουμε $\displaystyle\int_0^0 f(t)dt=\frac{\pi}{6}+c\Leftrightarrow c=-\frac{\pi}{6}$, οπότε

η (1) γίνεται $F(\eta\mu x)=x-\dfrac{\pi}{6},\ \ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2)

ii) Επειδή $f(t)>0$, για κάθε $t\in\left[0,\sqrt{3}-1\right]$ έχουμε $E=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1} f(t)dt=\int_0^{2\eta\mu\frac{\pi}{3}-1} f(t)dt=$

$$E=\int_0^{\sqrt{3}-1} f(t)dt=\int_0^{2\eta\mu\frac{\pi}{3}-1} f(t)dt=F\left(\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)\overset{(2)}{=}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ \ \text{τ.μ}$$

γ) Από (ii) έχουμε $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}dt=\frac{\pi}{6}$ (3)

Θέτουμε $x=t+1$, οπότε $dx=dt$. Για $t=0$ είναι $x=1$ και για $t=\sqrt{3}-1$ είναι $x=\sqrt{3}$.

Επομένως η (3) γράφεται $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}$

ΘΕΜΑ 22ο

Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\mathbf{(f(x))^2-x\cdot f(x)+x^2-3=0\ \ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}}$$

α) Αν το $x=\alpha$ είναι κρίσιμο σημείο της f, να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=2\alpha$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το α.

β) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει καμπή.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x=\alpha$ είναι κρίσιμο σημείο της f, οπότε $f'(\alpha)=0$ (1)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $(f(x))^2-xf(x)+x^2-3=0$ (2)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (2) έχουμε $\left[2f(x)-x\right]f'(x)+2x-f(x)=0$ (3)

Για $x=\alpha$ η (3) γίνεται $\left[2f(\alpha)-\alpha\right]\cdot f'(\alpha)+2\alpha-f(\alpha)=0 \overset{f'(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} f(\alpha)=2\alpha.$ (4)

Για $x=\alpha$ η (2) γίνεται

$$\left(f(\alpha)\right)^2-\alpha\cdot f(\alpha)+\alpha^2-3=0 \overset{f(\alpha)=2\alpha}{\Leftrightarrow} 4\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2-3=0 \Leftrightarrow 3\alpha^2=3 \Leftrightarrow \alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=\pm1.$$

β) Έστω ότι η C_f έχει σημείο καμπής το $M\left(x_0,f(x_0)\right)$, τότε $f''(x_0)=0$ (5)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3) έχουμε $2\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+2+\left[2f(x)-x\right]f''(x)=0$ (6)

Για $x=x_0$ η (6) γίνεται $2\left(f'(x_0)\right)^2-2f'(x_0)+2+\left[2f(x_0)-x_0\right]f''(x_0)=0$ και λόγω της (5) έχουμε $\left(f'(x_0)\right)^2-f'(x_0)+1=0$ άτοπο, γιατί αν το θεωρήσουμε ως τριώνυμο του $f'(x_0)$, τότε έχει $\Delta=-3<0$, άρα η f δεν παρουσιάζει καμπή.

γ) Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$, όμως για κάθε $x\neq0$ έχουμε $\left(f(x)\right)^2-x\cdot f(x)+x^2-3=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\dfrac{f(x)}{x}+1-\dfrac{3}{x^2}=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2-\frac{f(x)}{x}+1-\frac{3}{x^2}\right]=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda+1=0$$ άτοπο, άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ 23ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=g(0)=1$, οι οποίες για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=2g'(x)+g^2(x)\cdot f(x)=0$ (1), $f(x)\neq0$ και $g(x)\neq0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\alpha+1$ όπου $\alpha>0$, καθώς και το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$.

Λύση

α) Από (1) έχουμε $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=0 \overset{g(x)\neq0}{\Leftrightarrow} 2f'(x)\cdot g(x)+f^2(x)\cdot g^2(x)=0$ (2) και

$2g'(x)+g^2(x)\cdot f(x)=0 \overset{f(x)\neq0}{\Leftrightarrow} 2g'(x)\cdot f(x)+f^2(x)\cdot g^2(x)=0$ (3)

Από (2), (3) έχουμε $2f'(x)\cdot g(x)+\cancel{f^2(x)\cdot g^2(x)}=2g'(x)\cdot f(x)+\cancel{f^2(x)\cdot g^2(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)=g'(x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)=0 \overset{g(x)\neq0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c,\ x\in(-1,+\infty).$$

Για $x=0$ είναι $\frac{f(0)}{g(0)}=c \Leftrightarrow c=\frac{1}{1}=1$, άρα $\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x),\ x\in(-1,+\infty)$.

Οι f, g είναι συνεχείς στο $(-1,+\infty)$, $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Άρα οι f, g διατηρούν σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0)=g(0)=1>0$ έχουμε $f(x)>0$ και $g(x)>0$.

β) Είναι $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=0 \overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} 2f'(x)+f^3(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)=-f^3(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow -\frac{2f'(x)}{f^3(x)}=1 \Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x)=1 \Leftrightarrow \left(f^{-2}(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)}=x+c$$

Για $x=0$ έχουμε $\frac{1}{f^2(0)}=0+c \Leftrightarrow c=1$

Άρα για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $f^2(x)=\frac{1}{x+1} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

γ) Για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=-\frac{(x+1)'}{2\left(\sqrt{x+1}\right)(x+1)}=-\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)(x+1)}<0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$.

Για $x\in(-1,+\infty)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$, γιατί για $x>-1$ είναι $\sqrt{x+1}>0$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{x+1}=0$. Άρα η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{x}\right)=0=\lambda\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=0=\beta\in\mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $y=0x+0=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) $E(\alpha)=\int_\alpha^{\alpha+1}|f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_\alpha^{\alpha+1}f(x)dx=\int_\alpha^{\alpha+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2\sqrt{x+1}\right]_\alpha^{\alpha+1}=2\sqrt{\alpha+2}-2\sqrt{\alpha+1}$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}2\left[\sqrt{\alpha+2}-\sqrt{\alpha+1}\right]=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{\alpha+2}-\sqrt{\alpha+1}\right)\left(\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}\right)}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2\left[\left(\sqrt{\alpha+2}\right)^2-\left(\sqrt{\alpha+1}\right)^2\right]}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2(\alpha+2-\alpha-1)}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}=0.$$

ΘΕΜΑ 24ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για $x\in\mathbb{R}^*$ η οποία είναι «1-1» και έχει την ιδιότητα:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x\neq 0$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(f(x)\right)=\frac{1}{x}$ και $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ για κάθε $x\neq 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(1)=-1$ και $f(-1)=1$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ είναι αδύνατη.

δ) Αν η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)<0$ για κάθε $x>0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x<0$

ii) Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$.

Λύση

α) Είναι $f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x\neq 0$ (1)

Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $f(x)\neq 0$ και έχουμε:

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=\frac{1}{f\left(f(x)\right)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{f\left(f(x)\right)}\Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0 \quad (2)$$

Στη σχέση (2) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}\neq 0$ και έχουμε:

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x,\text{ άρα και } f^{-1}\left(f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f^{-1}(x)\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=f^{-1}(x)f(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1 \text{ για κάθε } x\neq 0 \quad (3)$$

β) Από τη σχέση (3) για $x=1$ έχουμε $f(1)f(1)=1\Leftrightarrow f^2(1)=1\Leftrightarrow f(1)=1$ ή $f(1)=-1$

Έστω ότι $f(1)=1$, τότε $f^{-1}(1)=\frac{1}{f(1)}=1\Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $(0,+\infty)$, άρα για $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>1\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}<1\Leftrightarrow f^{-1}(x)<1$ άτοπο, αφού $f^{-1}(1)=1$. Άρα $f(1)=-1$

Από τη σχέση (3) για $x=-1$ έχουμε $f\left(f(-1)\right)=-1\underset{\text{ερώτημα}}{\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}}f\left(f(-1)\right)=f(1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}f(-1)=1$

γ) Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x},\text{ άρα } x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$$

Όμως για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$ άτοπο, αφού $f(1)=-1$ και για $x=-1$ έχουμε $f(-1)=-1$ άτοπο, αφού $f(-1)=1$. Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ είναι αδύνατη.

δ) i) Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(1)=-1<0$, οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(-\infty,0)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι

$f(-1)=1>0$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, τότε για κάθε $x_1,x_2\,(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{f^{-1}(x_1)}<\dfrac{1}{f^{-1}(x_2)}\Leftrightarrow f^{-1}(x_1)>f^{-1}(x_2)$ άτοπο αφού $f^{-1}(x_1)$, $f^{-1}(x_2)$ είναι ομόσημοι και f^{-1} διατηρεί τη μονοτονία της f.

ΘΕΜΑ 25^o

Δίνονται:

- **Η ευθεία (ε): $y=x-e$**
- **Η συνάρτηση $g(x)=x\ln x-x$ και**
- **Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f'(\ln x)=x\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$**

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_g.

β) i) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$ τότε ισχύει $f(x)=g(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Για κάθε $x\in(0,1)$, ισχύει $-1<f(x)<xe-1$

Λύση

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g'(x)=\ln x$.

Η ευθεία (ε): $y=x-e$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, αν και μόνο αν, υπάρχει σημείο $M(x_o,\,g(x_o))$ τέτοιο, ώστε $\begin{cases}g(x_o)=x_o-e\\ g'(x_o)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_o\ln x_o-x_o=x_o-e\\ \ln x_o=1\end{cases}\Leftrightarrow x_o=e$

Έχουμε λοιπόν $\begin{cases}g(e)=0\\ g'(e)=1\end{cases}$, συνεπώς η ευθεία (ε): $y=x-e$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $M(e,\,0)$.

β) i) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(\ln x)=x\ln x\Leftrightarrow f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x\Leftrightarrow$

$\left[f(\ln x)\right]'=(x\ln x-x)'$, άρα: $f(\ln x)=x\ln x-x+c$. Για $x=1$ έχουμε $f(0)=0-1+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα $f(\ln x)=x\ln x-x\Leftrightarrow f(\ln x)=g(x)$.

Αν θέσουμε όπου x το e^x έχουμε $g(e^x)=f(\ln e^x)\Leftrightarrow f(x)=g(e^x)$.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα $[0,x]$, $0<x<1$ με $f'(x)=xe^x$. Ισχύει λοιπόν το Θ.Μ.Τ. άρα θα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow\xi e^\xi=\dfrac{f(x)+1}{x}$ (1)

Είναι $0<\xi<x<1\Leftrightarrow e^0<e^\xi<e^x<e^1\Leftrightarrow 1<e^\xi<e^x<e$ άρα $1<e^\xi<e$. Έχουμε λοιπόν

$\begin{cases}0<\xi<1\\ 1<e^\xi<e\end{cases}$ άρα $0<\xi e^\xi<e\overset{(1)}{\Leftrightarrow}0<\dfrac{f(x)+1}{x}<e\Leftrightarrow -1<f(x)<xe-1$

ΘΕΜΑ 26°

Έστω συνεχής συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in (-1,1)$ ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) \neq 0$ και $ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right) = x$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ **για κάθε** $x \in (-1,1)$

β) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-1,1)$, το $0 \in (-1,1)$, άρα η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

Η συνάρτηση $ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε $\left[ημ\left(\int_0^x f(t)dt\right)\right]' = (x)' \Leftrightarrow συν\left(\int_0^x f(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^x f(t)dt\right)' = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow συν\left(\int_0^x f(t)dt\right) \cdot f(x) = 1 \underset{x\in(-1,1)}{\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}} συν\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{1}{f(x)} \qquad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Από (1) για $x = 0$ έχουμε $συν0 = \dfrac{1}{f(0)} \Leftrightarrow f(0) = 1 > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

β) Έχουμε $ημ^2\left(\int_0^x f(t)dt\right) + συν^2\left(\int_0^x f(t)dt\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f^2(x)} = 1 - x^2$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{1-x^2} \overset{f(x)>0,\ x\in(-1,1)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1).$$

ΘΕΜΑ 27°

Έστω συνάρτηση $f:[0,1] \to R$ με πρώτη παράγωγο γνησίως φθίνουσα και συνεχή. Αν $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ και για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \geq 0$ και $f'(x) \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

β) Η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

γ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} < \frac{f(1)}{f'(1)}$

Λύση

α) Η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0)>0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}=f(1)$ (1).

Άρα η εξίσωση $f'(x)=f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Για $\xi<1\overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi)>f'(1)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f(1)>f'(1)\overset{f'(1)>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f(1)}{f'(1)}>1$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{f^2(x)+1}\leq 1\Leftrightarrow\int_0^1\frac{dx}{f^2(x)+1}\leq\int_0^1 1dx\Leftrightarrow\int_0^1\left(\frac{1}{f^2(x)+1}-1\right)dx\leq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow-\int_0^1\frac{f^2(x)}{f^2(x)+1}dx\leq 0\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f^2(x)}{f^2(x)+1}dx\geq 0,$$ το οποίο ισχύει.

ΘΕΜΑ 28ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$ **και** $g(x)\neq 0$
- $1+\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{g(x)}$ **και** $1+\displaystyle\int_0^x g(t)dt=\frac{1}{f(x)}$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)>0$ **και** $g(x)>0$ **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$

β) $f(x)=g(x)$ **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$

γ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$

Λύση

α) Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$ και δε μηδενίζονται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο. Για $x=0$ έχουμε $f(0)=g(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

β) Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$, άρα οι συναρτήσεις $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ και $\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ ορίζονται και είναι παραγωγίσιμες στο $[0,+\infty)$. Η συνάρτηση $1+\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, άρα και η συνάρτηση $\frac{1}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, αφού από υπόθεση είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα και η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Ομοίως και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ έχουμε:

$$\left(1+\int_0^x f(t)dt\right)'=\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\Leftrightarrow f(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=-f(x)g(x)\quad(1)$$

$$\left(1+\int_0^x g(t)dt\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'\Leftrightarrow g(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-f(x)g(x)\quad(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}\Leftrightarrow(\ln f(x))'=(\ln g(x))'\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln g(x)+c\ ,\ x\in[0,+\infty)\quad(3).$$

Για $x=0$ από τις αρχικές σχέσεις έχουμε ότι $f(0)=g(0)=1$ και από τη σχέση (3) έχουμε ότι c=0.

Άρα $\ln f(x)=\ln g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\,,\ x\in[0,+\infty)$ (4).

γ) Είναι $1+\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{g(x)}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}1+\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{f(x)}$, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε

$$f(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x)=-1\Leftrightarrow\left(\frac{f^{-2}(x)}{-2}\right)'=(-x)'\Leftrightarrow\frac{f^{-2}(x)}{-2}=-x+c\Leftrightarrow f^{-2}(x)=2x-2c\quad(5)$$

Για $x=0$ έχουμε $1=-2c\Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$, οπότε

$$f^{-2}(x)=2x+1\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{f^2(x)}=2x+1\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{2x+1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\ ,\ x\geq 0.$$

ΘΕΜΑ 29ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)=\int_0^x f(x+t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο R, να αποδείξετε ότι:

α) $F'(x)=F(2x)-F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $\kappa<0$, υπάρχει $\xi_\kappa\in(2\kappa,\kappa)$ έτσι, ώστε $F'(\kappa)F'(\xi_\kappa)\leq 0$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει άπειρες λύσεις στο $(-\infty,0)$.

Λύση

α) Θέτουμε $u = x + t$, άρα $du = dt$.

Για $t = 0$ είναι $u_1 = x$ και για $t = x$ είναι $u_2 = 2x$. Επομένως έχουμε

$$f(x) = \int_0^x f(x+t)dt = \int_x^{2x} f(u)du = \int_x^{2x} F'(u)du = \left[F(u)\right]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

Επειδή η F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$F'(x) = F(2x) - F(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

β) Για κάθε $\kappa < 0$ θεωρούμε το διάστημα $[2\kappa, \kappa]$

- Η F είναι συνεχής στο $[2\kappa, \kappa]$, ως παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(2\kappa, \kappa)$ με $F'(x) = f(x)$.

Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_\kappa \in (2\kappa, \kappa)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_\kappa) = \frac{F(\kappa) - F(2\kappa)}{\kappa - 2\kappa} = \frac{F(2\kappa) - F(\kappa)}{\kappa} \overset{(1)}{=} \frac{F'(\kappa)}{\kappa}$$

Όμως $\kappa < 0$, άρα $F'(\xi_\kappa)F'(\kappa) = \dfrac{F'(\kappa)}{\kappa}F'(\kappa) = \dfrac{1}{\kappa}\left(F'(\kappa)\right)^2 \le 0$

(Η ισότητα ισχύει όταν $F'(\kappa) = 0$, δηλαδή $F(\kappa) = F(2\kappa)$, οπότε $F'(\xi_\kappa) = 0$).

γ) Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι για κάθε $\kappa < 0$ έχουμε $f(\xi_\kappa)f(\kappa) \le 0$ γιατί $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

- Η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[\xi_\kappa, \kappa]$
- $f(\xi_\kappa)f(\kappa) \le 0$

Άρα i) αν $f(\xi_\kappa) \cdot f(\kappa) < 0$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\xi_\kappa, \kappa)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$

ii) αν $f(\xi_\kappa) \cdot f(\kappa) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_\kappa) = 0$ ή $f(\kappa) = 0$, δηλαδή $x_1 = \xi_\kappa$ ή $x_1 = \kappa$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\xi_\kappa, \kappa]$. Άρα υπάρχουν άπειρες ρίζες της $f(x) = 0$ στο $(-\infty, 0)$.

Θέμα 30ο

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}dt$

Α. 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και να αποδείξετε ότι η F είναι κοίλη.

2) Αν $1 < \alpha \le \beta$ να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}dt \ge \int_2^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int_2^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$

Β. 1) Να αποδείξετε ότι: (i) $F\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right) = \ln x + c$, **για κάθε $x > 1$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά**

(ii) $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c$, **για κάθε $x > 1$.**

2) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ και τις ευθείες $x=\sqrt{3}$ και $x=\sqrt{5}$.

Λύση

Α. 1) Η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή $2\in(1,+\infty)$ η F έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(1,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ και $F''(x)=-\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}<0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Άρα η F είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$.

2) Για $\alpha=\beta$ η ανισοταυτότητα ισχύει ως ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ από Θ.Μ.Τ. για την F σε καθένα από τα διαστήματα: $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

Επομένως θα υπάρχει: $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1)=\dfrac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$ (1) και

$\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_2)=\dfrac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$ (2)

Όμως η F' ↓ $(1,+\infty)$, οπότε για $\xi_1<\xi_2\Leftrightarrow F'(\xi_1)>F'(\xi_2)$ και από (1), (2) προκύπτει:

$$F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)>F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow 2F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>F(\alpha)+F(\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}dt>\int_2^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}+\int_2^{\beta}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει $\displaystyle\int_2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}dt\geq\int_2^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}+\int_2^{\beta}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$

Β. 1) Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε: $\left[F\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)\right]'=F'\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2-1}}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2}=$

$=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}}{2x}}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2}=\dfrac{2x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2}=\dfrac{1}{x}=(\ln x)'$. Έχουμε $\left[F\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)\right]'=(\ln x)'$, $x\in(1,+\infty)$

Άρα $F\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)=\ln x+c$ (3)

2) Θέτουμε $\dfrac{x^2+1}{2x}=y\Leftrightarrow x^2-2yx+1=0\overset{x>1}{\Leftrightarrow}x=y+\sqrt{y^2-1}$, $y>1$ (4)

Είναι $y>1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{2x}>1 \overset{(x>1)}{\Leftrightarrow} x^2+1>2x \Leftrightarrow (x-1)^2>0$ που ισχύει.

Η $(3) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} F(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)+c,\ y>1$. Άρα $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c,\ \ x>1$.

3) Είναι $E=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_{2}^{\sqrt{5}}\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt-\int_{2}^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=F\left(\sqrt{5}\right)-F\left(\sqrt{3}\right)=$

$$=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\ln\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\ \text{τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 31ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x)+3f(x)=x^5+x+1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho\in(-1\,,0)$.

γ) Η f αντιστρέφεται.

δ) Το σημείο $N(0\,,\rho)\in C_{f^{-1}}$.

ε) Η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Υπόδειξη

Θεωρείται γνωστό ότι:

$$\text{αν } f \nearrow \text{ στο } A,\ \text{τότε } f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x,\ \ x\in B=A\cap f(A)$$

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση x^5+x+1 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+3f'(x)=5x^4+1\Leftrightarrow$$

$$3\left(f^2(x)+1\right)f'(x)=5x^4+1\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{5x^4+1}{3\left(f^2(x)+1\right)}>0\ ,\ \ x\in\mathbb{R}$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)\left(f^2(x)+3\right)=x^5+x+1\Rightarrow f(x)=\frac{x^5+x+1}{f^2(x)+3}\quad (2)$$

Είναι $f(0)=\dfrac{1}{f^2(0)+3}>0$ και $f(-1)=\dfrac{-1}{f^2(-1)+3}<0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και $f(-1)f(0)<0$. Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο $(-1,0)$ και μάλιστα μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και "1 - 1", άρα αντιστρέφεται.

δ) Αφού ρ ρίζα της $f(x)=0$ ισχύει $f(\rho)=0 \Leftrightarrow M(\rho,0)\in C_f \Leftrightarrow N(0,\rho)\in C_{f^{-1}}$.

ε) Η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f^3(x)+3f(x)=x^5+x+1 \Leftrightarrow$$

$$f^3(x)-x^3+3f(x)-3x=x^5+x+1-x^3-3x \Leftrightarrow$$

$$[f(x)-x]\cdot\left[f^2(x)+xf(x)+x^2+3\right]=x^5-x^3-2x+1 \qquad (2)$$

Είναι γνωστό ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f^2(x)+xf(x)+x^2\geq 0 \Leftrightarrow f^2(x)+xf(x)+x^2+3\geq 3$.

Αρκεί λοιπόν η συνάρτηση $g(x)=x^5-x^3-2x+1,\ x\in\mathbb{R}$, να έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Παρατηρούμε ότι

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- $g(0)g(1)=1\cdot(-1)<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano, οπότε η $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα 32^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\alpha}(x+\alpha)e^{\alpha-x}, x\in R$ και $\alpha>0$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε α>0 οι γραφικές παραστάσεις των f και f΄ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

δ) Η ευθεία x=1 ορίζει με τις γραφικές παραστάσεις των f και f΄ ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε το τμήμα αυτό να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

ε) Η γραφική παράσταση της f για α=1, ο άξονας x΄x και η ευθεία $x=\lambda$ με $\lambda>-1$ ορίζουν ένα χωρίο με εμβαδόν Ε(λ). Να βρείτε το Ε(λ) και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

Λύση

α)

- Η f είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\quad -\infty}\frac{f(x)}{x}\quad\infty$, η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\alpha}{e^{x-\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-\alpha}}=0$, οπότε η ευθεία y=0, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι οριζόντια ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της f.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-x}-\frac{1}{\alpha}(x+\alpha)e^{\alpha-x}=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}-1\right)e^{\alpha-x}$ και $f''(x)=\left(\frac{x}{\alpha}+1-\frac{2}{\alpha}\right)e^{\alpha-x}$

$f'(x)=0\ x=1-\alpha,\quad f'(x)<1-\alpha$ και $f''(x)=0\ x=2-\alpha,\quad f''(x)>2-\alpha$

x	$-\infty$		1-α		2-α		$+\infty$
f΄(x)		+	0	−		−	
f΄΄(x)		−		−	0	+	
f(x)		↗		↘		↘	

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $(-n\ , 1\text{-}a]$, γνησίως φθίνουσα και κοίλη στο $[1-\alpha,\ 2-\alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $[2-\alpha, +\infty)$. Η f έχει μοναδικό μέγιστο για $x=1-\alpha$ το $f(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\cdot e^{2\alpha-1}$ και μοναδικό σημείο καμπής το $K\left(2-\alpha\ ,\ \frac{2}{\alpha}e^{2\alpha-2}\right)$

γ) Έχουμε $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow \frac{x}{\alpha}+1=\frac{1}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}-\alpha$, που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f΄ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

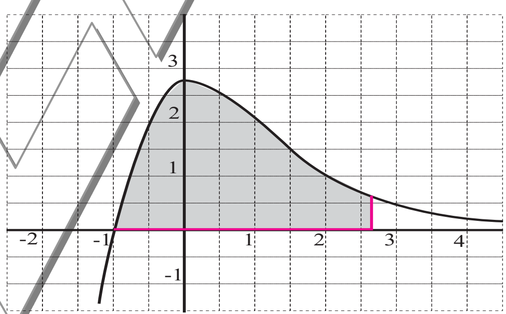
δ) Έστω d(α) το μήκος του τμήματος, τότε $d(\alpha)=\left|f(1)-f'(1)\right|=\left(\frac{1}{\alpha}+2\right)e^{\alpha-1}$ και

$d'(\alpha)=d'(\alpha)=\left(-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+2\right)e^{\alpha-1}$. Επομένως $d'(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ και $d'(\alpha)>0\Leftrightarrow \alpha>\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		½		$+\infty$
f΄(x)		−	0	+	
f(x)		↓		↑	

Άρα για $\alpha=\frac{1}{2}$ το d έχει ελάχιστο μήκος.

ε) $E(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda}f(x)dx=\int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{x-1}dx=\left[(x+1)\left(-e^{1-x}\right)\right]_{-1}^{\lambda}-\int_{-1}^{\lambda}\left(-e^{1-x}\right)dx=e^2-(\lambda+2)e^{1-\lambda}$



και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=e^2-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda+2}{e^{\lambda-1}}=e^2$