

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

**37<sup>η</sup> ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ**

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

**Θέματα μεγάλων τάξεων**

Ενδεικτικές λύσεις

**Πρόβλημα 1**

Να προσδιορίσετε όλα τα μη σταθερά πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα:

$$P((Q(x))^3) = xP(x)(Q(x))^3.$$

**Λύση**

Έστω ότι:  $\deg P(x) = m \geq 1$ ,  $\deg Q(x) = n \geq 1$ . Θεωρώντας τους βαθμούς των δύο μελών της δεδομένης σχέσης, λαμβάνουμε την ισότητα:

$$3mn = 1 + m + 3n \Leftrightarrow (m-1)(3n-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow m-1=1, 3n-1=2 \text{ ή } m-1=2, 3n-1=1 \text{ (αδύνατη στο } \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow m=2, n=1.$$

Έστω ότι  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $Q(x) = dx + e$ ,  $d, e \in \mathbb{R}$ ,  $d \neq 0$ . Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a((Q(x))^3)^2 + b(Q(x))^3 + c = xP(x)(Q(x))^3, \quad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι το μη σταθερό πολυώνυμο  $Q(x)$  διαιρεί το σταθερό πολυώνυμο  $c$ , οπότε  $c = 0$ . Τότε από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$a((Q(x))^3)^2 + b(Q(x))^3 - xP(x)(Q(x))^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (Q(x))^3 (a(Q(x))^3 + b - xP(x))$$

$$\stackrel{Q(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} a(Q(x))^3 + b - xP(x) = 0$$

$$xP(x) = a(Q(x))^3 + b \quad (2)$$

Η σχέση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned}
x(ax^2 + bx) &= a(dx + e)^3 + b \\
\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 &= ad^3x^3 + 3ad^2ex^2 + 3ade^2x + ae^3 + b \\
\Leftrightarrow a = ad^3, b = 3ad^2e, 3ade^2 = 0, ae^3 + b &= 0 \\
& \quad a, d \neq 0 \\
\Leftrightarrow d = 1, e = 0, b = 0, a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Άρα είναι:  $P(x) = ax^2$ ,  $Q(x) = x$ ,  $a \in \mathbb{R}$  και εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

## Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και πάνω σε αυτό σημείο  $\Gamma$  τέτοιο ώστε  $AB = 3 \cdot A\Gamma$ . Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο  $A\Gamma\Delta E$  τέτοιο ώστε  $A\Gamma = \Delta E = \Gamma E > AE$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  πάνω στην πλευρά  $A\Gamma$  έτσι ώστε  $A\hat{E}Z = A\hat{\Gamma}E = \omega$ . Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο  $B$  προς την ευθεία  $E\Gamma$  και η κάθετη από το σημείο  $\Delta$  προς την ευθεία  $AB$  τέμνονται σε σημείο, έστω  $K$ , πάνω στην ευθεία  $EZ$ .

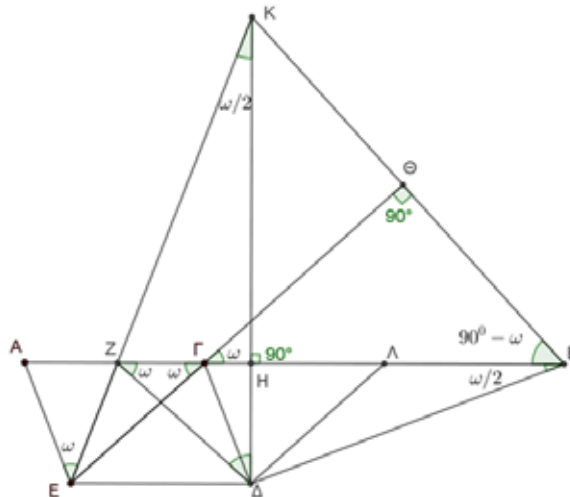
### Λύση

Αν  $A\hat{\Gamma}E = \omega$ , από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\Gamma\Theta B$  έχουμε:

$$\Gamma\hat{B}\Theta = 90^\circ - B\hat{\Gamma}\Theta = 90^\circ - \omega, \quad (1)$$

αφού  $B\hat{\Gamma}\Theta = A\hat{\Gamma}E = \omega$ , ως κατά κορυφή και επιπλέον  $B\hat{H}K = 90^\circ$ , με συνέπεια  $\Gamma\hat{B}\Theta + B\hat{H}K = 90^\circ - \omega + 90^\circ = 180^\circ - \omega < 180^\circ$ , οπότε οι ευθείες  $B\Theta$  και  $\Delta H$  τέμνονται σε σημείο, έστω  $K$ . Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία  $Z$ ,  $E$  και  $K$  είναι συνευθειακά.

Παρατηρούμε τώρα ότι το τετράπλευρο  $E\Delta\Gamma Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο, αφού  $E\Delta \parallel Z\Gamma$  και  $ZE = AE = \Gamma\Delta$ . Πράγματι, τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $A\Gamma E$  έχουν τη γωνία  $\hat{A}$  κοινή και  $A\hat{E}Z = A\hat{\Gamma}E = \omega$ , οπότε είναι ισογώνια. Άρα και το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισοσκελές με  $A\hat{Z}E = E\hat{A}Z$ , οπότε:  $AE = ZE$



Σχήμα 1

Από το ισοσκελές τραπέζιο ΕΔΓΖ έχουμε ότι:

$$\widehat{ΖΓ} = \widehat{ΖΓΔ} = 180^\circ - \widehat{ΓΑΕ} = 180^\circ - \left( \frac{180^\circ - \omega}{2} \right) = 90^\circ + \frac{\omega}{2}. \quad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΖ είναι

$$\widehat{ΖΔΗ} = 90^\circ - \widehat{ΔΖΗ} = 90^\circ - \omega. \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΚ είναι εγγράψιμο.

Θεωρούμε το μέσο Λ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ και παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΕΔΛΓ έχει  $ΕΔ \parallel ΓΛ$ ,  $ΓΕ = ΔΕ = ΑΓ = ΓΛ$ , αφού  $ΑΓ = \frac{1}{3} \cdot ΑΒ$  και Λ μέσον ΓΒ. Άρα το

τετράπλευρο ΕΔΛΓ είναι ρόμβος. Επομένως έχουμε  $\widehat{ΛΓΔ} = \omega$  και επιπλέον  $ΔΛ = ΛΓ = ΛΒ = \frac{ΓΒ}{2}$ , οπότε το τρίγωνο ΓΔΒ είναι ορθογώνιο στο Δ και από το ισοσκελές

τρίγωνο ΛΔΒ έχουμε:  $\widehat{ΔΒΛ} = \frac{\omega}{2}$ .

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΚ έχουμε:

$$\widehat{ΖΚΔ} = \widehat{ΔΒΖ} = \widehat{ΔΒΛ} = \frac{\omega}{2}, \quad (4)$$

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΚ και τη σχέση (4) έπεται ότι:

$$\widehat{ΓΖΚ} = \widehat{ΗΖΚ} = 90^\circ - \frac{\omega}{2} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έπεται ότι:

$$\widehat{ΕΖΓ} + \widehat{ΓΖΚ} = 90^\circ + \frac{\omega}{2} + 90^\circ - \frac{\omega}{2} = 180^\circ,$$

οπότε τα σημεία Α, Ε και Κ είναι συνευθειακά.

### Πρόβλημα 3

Στον πίνακα είναι γραμμένοι σε μία ευθεία οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 2030 σε αύξουσα σειρά. Έχουμε το δικαίωμα της «κίνησης» Κ:

*Επιλέγουμε δύο οποιουδήποτε αριθμούς  $\alpha, \beta$  που είναι γραμμένοι σε διαδοχικές θέσεις και αντικαθιστούμε το ζευγάρι  $(\alpha, \beta)$  με τον αριθμό  $(\alpha - \beta)^{2020}$ .*

Εκτελούμε την κίνηση Κ αρκετές φορές μέχρι που να μείνει στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να είναι ο αριθμός αυτός:

(α) ο  $2020^{2020}$ , (β) ο  $2021^{2020}$ .

### Λύση

(α) Πρώτα από όλα παρατηρούμε τα εξής:

Σε οποιαδήποτε κίνηση Κ, οι αριθμοί  $\alpha + \beta$  και  $(\alpha - \beta)^{2020}$  είναι ισοϋπόλοιποι modulo 2, δηλαδή είναι και δύο άρτιοι ή είναι και οι δύο περιττοί. Επομένως μετά την αντικατάσταση των  $\alpha, \beta$  από τον αριθμό  $(\alpha - \beta)^{2020}$  δεν μεταβάλλεται το άρτιο ή το περιττό του αθροίσματος των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα. Επειδή

$S_{2030} = \frac{2030 \cdot 2031}{2} = 1015 \cdot 2031$  περιττός, έπεται ότι μετά την τελευταία κίνηση ο μοναδικός

αριθμός που θα απομείνει θα πρέπει να είναι περιττός, οπότε η απάντηση στο ερώτημα (α) είναι αρνητική.

(β) Έστω ότι οι δύο τελευταίοι αριθμοί που έχουν μείνει είναι οι  $x, y$ . Τότε η μόνη περίπτωση να μην είναι κάποιος από αυτούς δύναμη του 2020 είναι να μην έχει λάβει μέρος ως τώρα στη διαδικασία. Αυτό μπορεί να έχει συμβεί μόνο με τους αριθμούς στην άκρη, δηλαδή τον 1 και τον 2030. Επειδή ο 1 είναι  $1^{2020}$ , αρκεί να ελέγξουμε για τον 2030. Δηλαδή αν  $x = a^{2020}$  και  $y = 2030$ , τότε πρέπει  $(a^{2020} - 2030)^{2020} = 2021^{2020}$ . Για  $a = 1$  δεν έχει λύση, οπότε για  $a \geq 2$  παίρνουμε  $a^{2020} = 4051$ , αδύνατο.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, από τη διαδικασία θα έχουμε ότι  $x = (a_1 - b_1)^{2020} = m^{2020}$  για κάποιο  $m$  και  $y = (a_2 - b_2)^{2020} = n^{2020}$ . Κάνοντας την τελευταία πράξη, στον πίνακα προκύπτει ο αριθμός  $(m^{2020} - n^{2020})^{2020}$ .

Θέλουμε τώρα να δούμε αν μπορεί να ισχύει:  $(m^{2020} - n^{2020})^{2020} = 2021^{2020}$ .

Αν  $m = n$ , δεν ισχύει. Θεωρούμε χωρίς βλάβη ότι  $m > n$ . Τότε θέλουμε να δούμε αν μπορεί να ισχύει

$$m^{2020} - n^{2020} = 2021. \quad (1)$$

Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το  $m^{2020} - n^{2020}$  είναι η τιμή 1, για  $m = 1, n = 0$ .

Από την (1) έχουμε ότι  $m > n$ , οπότε  $m \geq n + 1$ . Επομένως  $m^{2020} - n^{2020} \geq (n + 1)^{2020} - n^{2020}$ .

Αναπτύσσοντας την τελευταία βλέπουμε ότι όλες οι δυνάμεις του  $n$  έχουν θετικό συντελεστή, οπότε είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως

$$m^{2020} - n^{2020} \geq (n + 1)^{2020} - n^{2020} \geq 2^{2020} - 1 > 2^{11} - 1 = 2047$$

οπότε δεν μπορεί ποτέ να ισούται με 2021.

**Σημείωση:** Για να δείξουμε ότι η (1) δεν έχει λύση, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Για  $k = m^{505}, \lambda = n^{505}$  η (1) γίνεται:  $k^4 - \lambda^4 = 2021 = 43 \cdot 47 \Leftrightarrow (k - \lambda)(k + \lambda)(k^2 + \lambda^2) = 43 \cdot 47$ , οπότε  $k^2 + \lambda^2 = 47$ , που δεν έχει λύσεις.

## Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλες τις τιμές του θετικού ακεραίου  $\kappa$  που ικανοποιούν την ιδιότητα:

Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι  $\alpha, \beta$  ώστε η παράσταση

$$A(\kappa, \alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \kappa^2 \beta^2 - \kappa^2 \alpha \beta}$$

να είναι ένας σύνθετος θετικός ακέραιος.

### Λύση

Σταθεροποιούμε  $\kappa > 1$ . Η ιδέα για τη λύση της άσκησης είναι να βρούμε  $\alpha, \beta$  συναρτήσσει του  $\kappa$  ώστε ο παρονομαστής να ισούται με 1.

Με άλλα λόγια ζητάμε πολυώνυμα  $\alpha = P(\kappa), \beta = Q(\kappa)$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} P(\kappa)^2 + \kappa^2 Q(\kappa)^2 - \kappa^2 P(\kappa)Q(\kappa) &= 1, \\ P(\kappa)^2 &= \kappa^2 Q(\kappa)(P(\kappa) - Q(\kappa)) + 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Αν τα πολυώνυμα έχουν βαθμούς  $m = \deg P(\kappa), n = \deg Q(\kappa)$  με  $m > n \geq 0$ , τότε από τη σχέση (1) πρέπει

$$2m = 2 + m + n \Leftrightarrow m = n + 2.$$

Θα ασχοληθούμε με την πιο απλή περίπτωση αναζητώντας, αν υπάρχουν, πολυώνυμα βαθμού 2 και 0, αντίστοιχα, που ικανοποιούν τη σχέση (1).

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις βρίσκουμε ότι τα  $P(\kappa) = \kappa^2 - 1, Q(\kappa) = 1$  ικανοποιούν τη σχέση (1). Επιλέγουμε λοιπόν  $\alpha = \kappa^2 - 1, \beta = 1$  και τότε η παράσταση ισούται με  $\frac{\kappa^2 - 1 + 1}{1} = \kappa^2$ , που είναι σύνθετος για κάθε  $\kappa > 1$ . Επομένως όλες οι τιμές του  $\kappa > 1$ , δεν ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

Για  $\kappa = 1$  θα αποδείξουμε ότι ισχύει:  $0 < A(\alpha, \beta, \kappa) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta} \leq 2$ , οπότε ο ρητός αριθμός  $A(\alpha, \beta, 1)$  δεν μπορεί να είναι σύνθετος θετικός ακέραιος για οποιεσδήποτε τιμές των  $\alpha, \beta$ . Πράγματι, έχουμε

$$\alpha + \beta > 0 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4} > 0, \text{ και}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta} \leq 2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta \geq \alpha + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1) \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$