ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

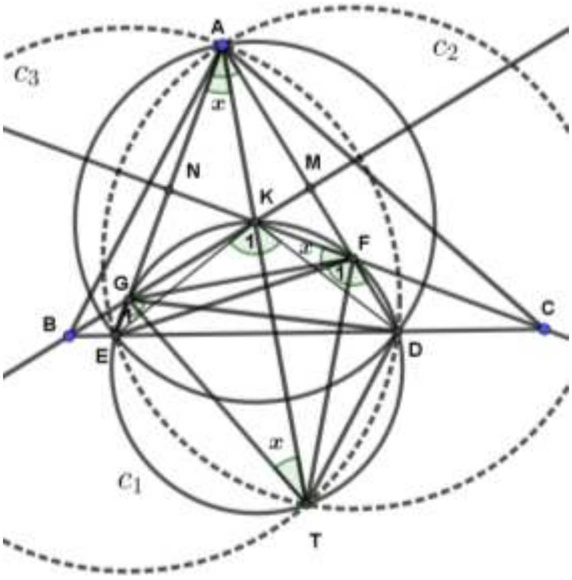
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Οι λύσεις των θεμάτων των μεγάλων τάξεων

1. Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στο ευθύγραμμο τμήμα BC θεωρούμε τα σημεία D, E ώστε $BD = BA$ και $CE = CA$. Αν K είναι το περίκεντρο του τριγώνου ADE, F είναι η τομή των ευθειών AD, KC και G είναι η τομή των ευθειών AE, KB, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KDE, έστω c_1, ο κύκλος με κέντρο το σημείο F και ακτίνα FE, έστω c_2, και ο κύκλος με κέντρο το σημείο G και ακτίνα GD, έστω c_3, περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία AK.

Λύση.



Σχήμα 1

Έστω M το μέσο του AD. Από τις υποθέσεις του προβλήματος τα σημεία B, G, K, M είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AD. Επιπλέον ο κύκλος c_3 περνάει από το A, αφού $GD = GA$.
Ομοίως, αν N είναι το μέσο του AE, τα σημεία G, F, K, N είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AE. Επιπλέον ο κύκλος c_2 περνάει από το A, αφού $FA = FE$.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία G, F ανήκουν στο περιγεγραμμένο κύκλο c_1 του τριγώνου KDE.
Από τα ισοσκελή τρίγωνα ADG και AFE, έχουμε;

$$\widehat{G}_1 = E\widehat{G}D = 2\cdot G\widehat{A}D = 2\cdot E\widehat{A}F = \widehat{F}_1 \qquad (1)$$

Επίσης, η γωνία $E\widehat{A}D$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ADE με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\widehat{K}_1 = G\widehat{K}F$, οπότε

$$\widehat{K}_1 = 2\cdot E\widehat{A}D \qquad (2)$$

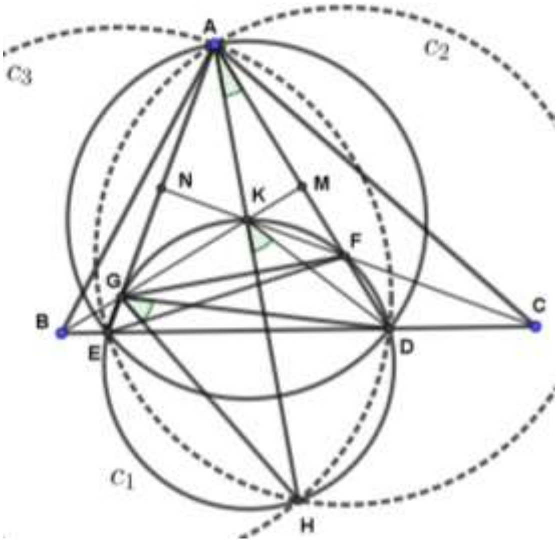
Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\widehat{G}_1 = \widehat{F}_1 = \widehat{K}_1$, οπότε τα σημεία D, E, F, G, K είναι ομοκυκλικά και ανήκουν στο κύκλο c_1.
Έστω T το σημείο τομής των κύκλων c_2, c_3. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία A, K, T είναι συνευθειακά και ότι το T ανήκει στον ίδιο κύκλο με τα σημεία D, E, F, G, K.
Πράγματι, η κοινή χορδή AT των κύκλων c_2 και c_3είναι κάθετη προς τη διακεντρική ευθεία τους FG και επίσης η ευθεία AK είναι κάθετη προς την ευθεία FG, αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF.
Επίσης, επειδή $GA = GD = GT$ έχουμε τις ισότητες γωνιών:

$$G\hat{A}T = G\hat{T}A = x \, , \qquad (3)$$

και αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF

$$G\hat{A}T = G\hat{F}K = 90 - A\hat{G}F \qquad (4)$$

Άρα έχουμε $G\hat{T}K = G\hat{T}A = G\hat{F}K$, οπότε τα σημεία F, G, K, T είναι ομοκυκλικά.



Σχήμα 2

2ος τρόπος

Αφού BD = BA και KA = KD, η BK είναι η μεσοκάθετη του AD, οπότε GA=GD. Έχουμε $\widehat{KGD} = \widehat{KGA} = 90° - \widehat{EAD} = \widehat{AFK}$, οπότε τα σημεία K, F, D, G είναι ομοκυκλικά.

Όμοια βγάζουμε $\widehat{KFE} = \widehat{AGK}$, οπότε τα σημεία K, F, E, G είναι ομοκυκλικά.

Από τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα έχουμε ότι τα K, F, E, G και D είναι ομοκυκλικά.

Έστω τώρα ότι η AK τέμνει τον κύκλο c_1 στο H. Τότε

$$\widehat{HGD} = \widehat{HKD} = 2 \cdot \widehat{HAD} \qquad (5)$$

Επομένως το G ανήκει στη μεσοκάθετη του AD και επιπλέον ισχύει η σχέση (5), οπότε το G είναι το περίκεντρο του τριγώνου AHD, δηλαδή ο κύκλος c_3 περνάει από το H. Όμοια, ο κύκλος c_2 περνάει από το H, οπότε το ζητούμενο έπεται.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $n > 4$, που διαιρείται από τον αριθμό 4. Συμβολίζουμε με A_n το άθροισμα όλων των θετικών περιττών διαιρετών του n. Συμβολίζουμε με B_n το άθροισμα όλων των θετικών άρτιων διαιρετών του n, εξαιρουμένου του n. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $f(n) = B_n - 2A_n$, για τις διάφορες τιμές του n. Για ποιους θετικούς ακεραίους n επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή;

Λύση

Συμβολίζουμε με $d_1, \ldots, d_k$ τους περιττούς διαιρέτες του n. Τότε οι αριθμοί $2d_1, \ldots, 2d_k$ είναι άρτιοι διαιρέτες του n. Επίσης, καθένας από αυτούς δεν διαιρείται από 4, επομένως, άρα κανένας από αυτούς δεν μπορεί να ισούται με n. Τέλος, κανείς από αυτούς δεν ισούται με 4, και ο 4 είναι ένας άρτιος διαιρέτης του n. Συνοψίζοντας έχουμε ότι,

$$A_n = d_1 + \cdots + d_k \text{ και } B_n = 2d_1 + 2d_2 + \cdots + 2d_k + 4.$$

Επομένως, έχουμε

$$B_n - 2A_n \geq 4.$$

Πράγματι, η τιμή 4 είναι η ελάχιστη τιμή, αφού για $n = 8$, έχουμε:

$$A_n = 1, B_n = 2 + 4 = 6, B_n - 2A_n = 4.$$

Τώρα μένει να βρούμε όλους τους θετικούς ακεραίους n με την ιδιότητα: $B_n - 2A_n = 4$. Η ισότητα, σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει όταν $B_n = 2d_1 + \cdots + 2d_k$. Αν τώρα p είναι ένας περιττός πρώτος διαιρέτης του n, τότε ο $4p$ είναι άρτιος διαιρέτης του n και δεν συμπεριλαμβάνεται στο $2d_1 + \cdots + 2d_k$. Επομένως για να ισχύει
$B_n = 2d_1 + \cdots + 2d_k + 4$, πρέπει $n = 4p$. Πράγματι, τότε

$$B_n - 2A_n = (2 + 4 + 2p) - 2(1 + p) = 4.$$

Αν τώρα ο n δεν έχει περιττό πρώτο διαιρέτη, τότε είναι δύναμη του 2, δηλαδή $n = 2^{k+1}$, οπότε $A_n = 1, B_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = \frac{2^{k+1}-2}{2-1} = 2^{k+1} - 2$ και $B_n - 2A_n = 2^{k+1} - 4$. Άρα $B_n - 2A_n = 4$, αν και μόνον, αν $k = 2$. Επομένως $n = 4p$, όπου p πρώτος.

Πρόβλημα 3

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta+\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}=18.$$

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α .

Λύση (1ος τρόπος)

Με κατάλληλη χρήση της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\alpha+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta+\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}=\alpha+\left(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta+\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}\right)$$

$$\geq \alpha+4\cdot\sqrt[4]{\beta\gamma\cdot\gamma\delta\cdot\delta\beta\cdot\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}}=\alpha+\frac{4}{\sqrt[4]{\alpha}}$$

Αν θέσουμε $x=\sqrt[4]{\alpha}$ και λάβουμε υπόψη τη δεδομένη ισότητα, καταλήγουμε στην ανίσωση

$$x^4+\frac{4}{x}\leq 18, x>0 \Leftrightarrow x^5-18x+4\leq 0, x>0. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)=x^5-18x+4$, οπότε καταλήγουμε στην παραγοντοποίηση

$$\mathrm{P}(x)=x^5-18x+4=(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x-2\right),$$

οπότε έχουμε τελικά την ανίσωση:

$$(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x-2\right)\leq 0. \qquad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x>2$, τότε $(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x-2\right)>0$, οπότε η ανίσωση (2) δεν επαληθεύεται. Επομένως, πρέπει να είναι $0<x\leq 2$.

Παρατηρούμε ότι για $x=2$, είναι $\alpha=16$ και η σχέση (2) ισχύει ως ισότητα. Κατά τα γνωστά από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αυτό ισχύει όταν

$$\beta\gamma=\gamma\delta=\delta\beta=\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}\Leftrightarrow \beta=\gamma=\delta \text{ και } \beta^2=\frac{1}{16\beta^6}$$

$$\Leftrightarrow \beta=\gamma=\delta \text{ και } \beta^8=\frac{1}{16}\Leftrightarrow \beta=\gamma=\delta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α είναι το 16.

2ος τρόπος: Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ παίρνουμε:

$$a+bc+cd+db+\frac{1}{ab^2c^2d^2}=\frac{a}{32}+\cdots+\frac{a}{32}+bc+cd+db+\frac{1}{ab^2c^2d^2}\geq$$

$$36\sqrt[36]{\frac{a^{32}}{32^{32}}\cdot bc\cdot cd\cdot db\cdot\frac{1}{ab^2c^2d^2}}=36\sqrt[36]{\frac{a^{31}}{32^{32}}}.$$

Άρα έχουμε $\alpha^{31}\leq\frac{32^{32}}{2^{36}}=2^{124}$ και επομένως $a\leq 2^4=16$, κλπ.

Πρόβλημα 4

Έστω Q_n το σύνολο των n-άδων $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $x_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1,2, \dots, n.$ Μία τριάδα (x, y, z), όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, διακεκριμένων στοιχείων του Q_n λέγεται *καλή,* αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα συνόλων: $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0,1,2\}$. Ένα υποσύνολο A του Q_n λέγεται *καλό,* αν οποιαδήποτε τρία στοιχεία του A σχηματίζουν μια *καλή* τριάδα. Να αποδείξετε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_n έχει το πολύ $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$ στοιχεία.

Λύση

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο επαγωγικά ως προς n. Η περίπτωση $n = 1$ είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_{n-1} έχει το πολύ $2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ στοιχεία.

Έστω $A_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A \ : x_n \neq 0\}$ και ορίζουμε τα σύνολα A_1, A_2 όμοια, δηλαδή
$A_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A \ : x_n \neq 1\}$ και $A_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A \ : x_n \neq 2\}$.
Αφού το A είναι *καλό* σύνολο και το A_0 είναι υποσύνολό του, το A_0 είναι επίσης *καλό.* Έτσι, τρία οποιαδήποτε στοιχεία του έχουν μια συντεταγμένη που διαφέρουν ανά δύο. Αυτή η συντεταγμένη δεν μπορεί να είναι η τελευταία, διότι το 0 δεν μπορεί να εμφανιστεί εκεί. Συνεπώς, το σύνολο $A_0{}'$ που προκύπτει από τα στοιχεία του A_0 διαγράφοντας την τελευταία συντεταγμένη είναι καλό υποσύνολο του Q_{n-1}.
Παρατηρούμε επιπλέον ότι, αν $|A_0| \geq 3$, τότε $|A_0'| = |A_0|$.
Πράγματι, αν ίσχυε το αντίθετο, τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο $a \in A_0'$ έτσι ώστε $x, y \in A_0$, όπου τα x, y προκύπτουν από το a προσθέτοντας τα στοιχεία 1 και 2, αντίστοιχα, ως τελευταία συντεταγμένη. Αλλά τότε, αν z είναι ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του A_0, αυτό δεν μπορεί να έχει ως τελευταία συντεταγμένη το 0, οπότε τα x, y, z δεν θα σχημάτιζαν μία καλή τριάδα, άτοπο.
Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$|A_0| \leq \max\{2, |A_0'|\} \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

Ομοίως, παίρνουμε ότι : $|A_1|, |A_2| \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. Όμως, κάθε στοιχείο του A εμφανίζεται σε ακριβώς δύο από τα A_0, A_1, A_2, οπότε:

$$|A| = \frac{1}{2}(|A_0| + |A_1| + |A_2|) \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$