ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Οι λύσεις των θεμάτων των μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού k για την οποία το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια για την τιμή του k που θα βρείτε να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές.

(b) Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν την εξίσωση $2a + b + \frac{4}{ab} = 10$, να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του a.

Λύση

(Α) Για να είναι ο 2 ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - kx + 2$, πρέπει και αρκεί

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 5.$$

Για $k = 5$ παίρνουμε:

$$P(x) = x^3 - 5x + 2 = x^3 - 4x - x + 2$$
$$= x(x-2)(x+2) - (x-2) = (x-2)(x^2 + 2x - 1).$$

(Β) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε:

$$b + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{4}{ab}} = \frac{4}{\sqrt{a}}$$

Επομένως, $2a + \frac{4}{\sqrt{a}} \leq 10$. Θέτοντας $\sqrt{a} = x$, παίρνουμε $x^2 + \frac{2}{x} \leq 5 \Leftrightarrow x^3 - 5x + 2 \leq 0$. Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα έχουμε $(x-2)(x^2 + 2x - 1) \leq 0$. Η τελευταία δεν ισχύει για $x > 2$, άρα $x \leq 2$, οπότε $a \leq 4$. Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a = 4$, παίρνουμε $b = 1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

2ος τρόπος

Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε

$$2a + b + \frac{4}{ab} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \cdots + \frac{a}{4} + b + \frac{4}{ab} \geq 10\sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8} \cdot b \cdot \frac{4}{ab}}$$

Επομένως $\sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8} \cdot b \cdot \frac{4}{ab}} \leq 1$, άρα $a^7 \leq 4^7$, άρα $a \leq 4$.

Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a = 4$, παίρνουμε $b = 1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

3ος τρόπος: Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $ab^2 + (2a^2 - 10a)b + 4 = 0$. (1)
Για να έχει λύσεις η τελευταία, πρέπει η διακρίνουσα να είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2(2a-10)^2 - 16a \geq 0 \Leftrightarrow a(a-5)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 - 10a^2 + 25a - 4 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 6a^2 + 25a - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-4) - (6a-1)(a-4) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(a-4)(a^2 - 6a + 1) \geq 0.$$

Η τελευταία αληθεύει για $3 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 4$ ή $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$.
Αν $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$, τότε η (1) δεν μπορεί να ισχύει, αφού

$$ab^2 > 0,\ (2a^2 - 10a)b > 0, \text{οπότε } ab^2 + (2a^2 - 10a)b + 4 > 4.$$

Επομένως $3 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 4$. Άρα η μέγιστη τιμή του a είναι 4, αφού για για $a = 4$, παίρνουμε $b = 1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{B}\Gamma = 30^0,\ \Delta\hat{B}A = 50^0,\ \Delta\hat{\Gamma}B = 55^0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^0$

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.

Λύση (1ος τρόπος)

(α) Πρώτα διαπιστώνουμε ότι

$$\hat{B} = \Delta\hat{B}A + \Delta\hat{B}\Gamma = 50^0 + 30^0 = 80^0.$$

Αν ήταν $\hat{A} = \hat{B} = 80^0$, τότε θα είχαμε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 80^0 + 80^0 + \hat{\Gamma} > 160^0 + 55^0 = 215^0,$$

που είναι άτοπο.

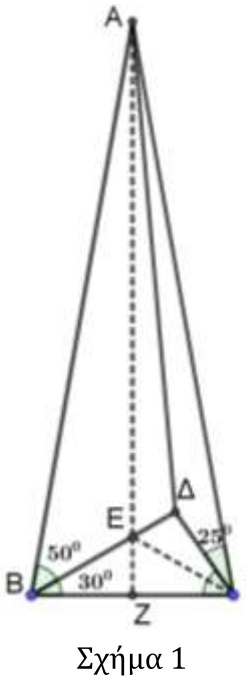
Αν ήταν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \dfrac{180^0 - 80^0}{2} = 50^0$, τότε $B\hat{\Gamma}\Delta = 55^0 < \hat{\Gamma} = 50^0$, άτοπο.

Επομένως έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^0$ και $\hat{A} = 20^0$

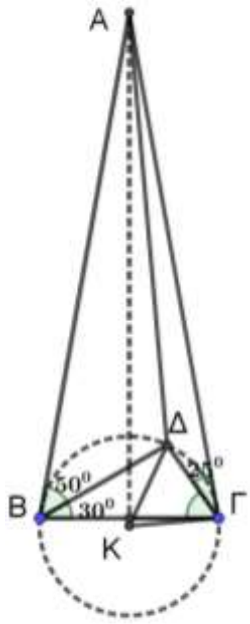
(β) Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^0$, έχουμε:

$$\Delta\hat{\Gamma}A = 80^0 - 55^0 = 25^0 \qquad (1)$$

Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας $\hat{A}$, που επιπλέον είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ, και υποθέτουμε ότι τέμνει την ευθεία ΒΔ σε σημείο Ε, σχήμα 1.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Επειδή στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι $\Gamma\hat{B}\Delta < B\hat{\Gamma}\Delta$, έπεται ότι $\Delta\Gamma < \Delta B$, οπότε το Δ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο ακμής ΑΖ που περιέχει το σημείο Γ. Έτσι το Ε βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ.

Επειδή το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΕΓ, έπεται ότι $E\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma = 30^0$, οπότε

$$E\hat{\Gamma}\Delta = 55^0 - 30^0 = 25^0 \overset{(1)}{=} \Delta\hat{\Gamma}A. \qquad (2)$$

Από τη σχέση (2) έπεται ότι η ευθεία ΓΔ διχοτομεί τη γωνία $E\hat{\Gamma}A$ του τριγώνου ΑΕΓ.
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\Delta\hat{E}\Gamma$ και $\Delta\hat{E}A$ είναι εξωτερικές στα τρίγωνα ΕΒΓ και ΕΒΑ, αντίστοιχα, οπότε έχουμε:

$$\Delta\hat{E}\Gamma = 30^0 + 30^0 = 60^0 \text{ και } \Delta\hat{E}A = E\hat{B}A + \frac{\hat{A}}{2} = 50^0 + 10^0 = 60^0.$$

Άρα είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{E}A = 60^0$, οπότε η ευθεία ΕΔ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{E}\Gamma$ του τριγώνου ΑΕΓ. Επομένως, το σημείο Δ είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ, οπότε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \frac{E\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{10^0}{2} = 5^0.$$

2ος τρόπος (β) Θεωρούμε το περίκεντρο Κ του τριγώνου ΒΔΓ, σχήμα 2, το οποίο βρίσκεται στη μεσοκάθετη της ΒΓ. Επειδή $\widehat{\Delta K\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Delta B\Gamma} = 60°$, ως επίκεντρη, έπεται ότι το τρίγωνο ΚΔΓ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, οπότε είναι ισόπλευρο. Άρα $\widehat{B\Gamma K} = 5°$, οπότε $\widehat{A\Gamma K} = 85°$. Όμως, $\widehat{KA\Gamma} = 10°$, οπότε το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισοσκελές και το Α είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΔΓ και το Δ είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη του ΚΓ, οπότε θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{KA\Gamma}$, δηλαδή $\widehat{\Delta A\Gamma} = 5°$.

Πρόβλημα 3
Στον πίνακα γράφουμε σε μία σειρά n αριθμούς, $n \geq 40$, όπου καθένας από αυτούς ισούται με 1 ή -1, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:
(i) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 40 διαδοχικών αριθμών είναι ίσο με 0.
(ii) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 42 διαδοχικών αριθμών δεν είναι ίσο με 0.
Ονομάζουμε Σ_n το μέγιστο δυνατό άθροισμα των n αριθμών του πίνακα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του Σ_n για τις διάφορες τιμές του n .
Λύση
Αφού το άθροισμα των πρώτων 40 αριθμών είναι 0, πρέπει οι μισοί να είναι 1 και οι άλλοι μισοί -1. Αφού το άθροισμα των πρώτων 42 δεν είναι 0, πρέπει ο 41ος και ο 42ος αριθμός να είναι ίσοι, έστω ίσοι με $a \in \{-1, 1\}$. Ομοίως αν πάρουμε τους 42 αριθμούς, από τον 2ο μέχρι τον 43ο, αφού το άθροισμά τους δεν είναι 0, θα πρέπει ο 42ος και ο 43ος να είναι ίσοι. Άρα και ο 43ος πρέπει να είναι ίσος με a.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε ότι όλοι οι αριθμοί από τον 41ο και μετά πρέπει να είναι ίσοι με α. Επομένως αν $n > 60$, το άθροισμα των 40 αριθμών από τον a_{22} μέχρι τον a_{61} έχει τους 21 αριθμούς $a_{41} = a_{42} = \cdots = a_{61} = a$, οπότε τα 1 και -1 δεν μπορεί να είναι ίσα το πλήθος σε αυτό το άθροισμα, άρα το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών δεν είναι 0, άτοπο.
Επομένως, η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n είναι 60. Η μέγιστη τιμή του Σ_n επιτυγχάνεται όταν έχουμε όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς ίσους με 1. Κοιτώντας την πρώτη 40-αδα, αριθμών, πρέπει να έχουμε τουλάχιστον 20 αριθμούς ίσους με -1. Άρα οι αριθμοί ίσοι με 1 είναι το πολύ 40. Άρα, για κάθε n , έχουμε ότι $\Sigma_n \leq 20$. Πράγματι, το 20 είναι η μέγιστη δυνατή τιμή και επιτυγχάνεται όταν οι πρώτοι 20 αριθμοί είναι όλοι ίσοι με 1, η δεύτερη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με -1 και η τρίτη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με 1.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοιοι ώστε ο ακέραιος $x^2 + y^2$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $x^5 + y$ και $y^5 + x$.

Λύση

Επειδή $x^2 + y^2 \mid x(x^5 + y)$ και $x^2 + y^2 \mid y(y^5 + x)$, έπεται ότι

$$x^2 + y^2 \mid x(x^5 + y) + y(y^5 + x) \Rightarrow x^2 + y^2 \mid x^6 + y^6 + 2xy. \qquad (1)$$

Όμως από την ταυτότητα για το άθροισμα κύβων παίρνουμε ότι:

$$x^2 + y^2 \mid (x^2)^3 + (y^2)^3 = x^6 + y^6. \qquad (2)$$

Επομένως συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$x^2 + y^2 \mid 2xy. \qquad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι $x^2 + y^2 \le 2\cdot|xy| \Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \le 0$, δηλαδή $|x| = |y|$.

Επομένως έχουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $x = y$, τότε από την εκφώνηση έχουμε:

$$2x^2 \mid x^5 + x \Rightarrow 2x \mid x^4 + 1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.,$$

(β) Αν $x = -y$, τότε από την εκφώνηση έχουμε

$$2x^2 \mid x^5 - x \Rightarrow 2x \mid x^4 - 1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.,$$

Επομένως τα ζεύγη που ζητάμε είναι τα

$$(x, y) \in \{(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1)\}.$$