ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
(συμπληρωματικός διαγωνισμός)
14 Μαΐου 2021

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακέραιου 707070 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 707070 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε τον έβδομο στη σειρά διαιρέτη.

Μονάδες 6

Λύση

Με παραγοντοποίηση του αριθμού 707070 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε:

$$707070 = 70\cdot\left(10^4+10^2+1\right) = 70\cdot 10101 = 2\cdot 5\cdot 7\cdot 3\cdot 3367 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13\cdot 37.$$

Σε κάθε διαιρέτης δ_κ του 707070 που το τετράγωνό του είναι μικρότερο ή ίσο του 707070, αντιστοιχεί ένα άλλος διαιρέτης δ_λ μεγαλύτερος ή ίσος του δ_κ, με $\delta_\kappa\cdot\delta_\lambda = 707070$. Έτσι στο μικρότερο διαιρέτη 1, αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος διαιρέτης 707070, στο διαιρέτη 2, αντιστοιχεί ο διαιρέτης $707070:2=353535$ και συνεχίζοντας ομοίως με τους μικρότερους διαιρέτες $3,\ 5,\ 2\cdot 3, 7$ θα φθάσουμε στον έβδομο στη σειρά μικρότερο διαιρέτη $2\cdot 5=10$. Έτσι ο έβδομος μεγαλύτερος διαιρέτης είναι ο $707070:10=70707$.

Πρόβλημα 2

Σε μία γιορτή ένας αριθμός ζευγαριών που αποτελούνται από ένα αγόρι και ένα κορίτσι χορεύουν. Από τα κορίτσια που συμμετέχουν στη γιορτή χορεύουν τα $\frac{2}{3}$, ενώ από τα αγόρια που συμμετέχουν χορεύουν τα $\frac{3}{5}$. Να βρείτε το ποσοστό των συμμετεχόντων στη γιορτή που χορεύουν.

Μονάδες 7

Λύση

Έστω ότι συμμετέχουν στη γιορτή κ κορίτσια και α αγόρια. Τότε χορεύουν τα $\frac{2\kappa}{3}$ των κοριτσιών και τα $\frac{3\alpha}{5}$ των αγοριών και ισχύει ότι: $\frac{2\kappa}{3}=\frac{3\alpha}{5}\Leftrightarrow \kappa=\frac{9\alpha}{10}$.

Ο αριθμός των παιδιών που χορεύουν είναι $2\cdot\frac{3\alpha}{5}=\frac{6\alpha}{5}$, ενώ ο συνολικός αριθμών παιδιών που συμμετέχουν στη γιορτή είναι $\kappa+\alpha=\frac{9\alpha}{10}+\alpha=\frac{19\alpha}{10}$, οπότε έχουμε:

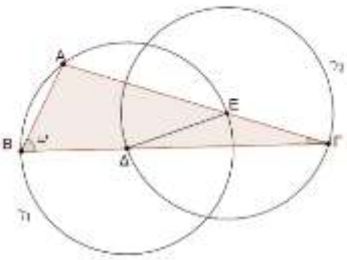
$$\frac{\text{Αριθμός παιδιών που χορεύουν}}{\text{Αριθμός παιδιών που συμμετέχουν}}=\frac{\frac{6\alpha}{5}}{\frac{19\alpha}{10}}=\frac{12}{19}.$$

Επομένως το ποσοστό x επί τις εκατό των παιδιών που χορεύουν είναι:

$$\frac{x}{100}=\frac{12}{19}\Leftrightarrow 19x=1200\Leftrightarrow x=\frac{1200}{19}=63{,}15$$

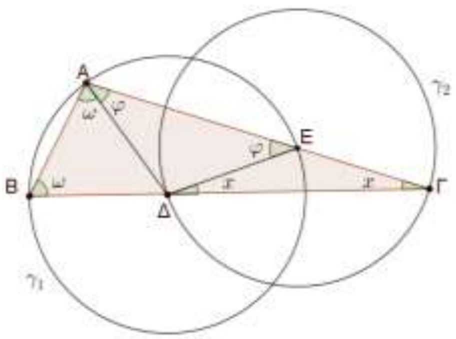
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΒΓ και το σημείο Ε ανήκει στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία Α, Β, Ε ανήκουν στον κύκλο γ_1 με κέντρο το σημείο Δ. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στον κύκλο γ_2 με κέντρο το σημείο Ε. Αν η γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\omega=63^0$ μοιρών, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.



Μονάδες 7

Λύση



Σχήμα 1

Από τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε ότι $\Delta\mathrm{B}=\Delta\mathrm{A}=\Delta\mathrm{E}=\mathrm{E}\Gamma$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΕ και ΕΔΓ είναι ισοσκελή με $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\omega$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}=\varphi$ και $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma=\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=x$.

Επειδή η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}=\varphi$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΔΓ έπεται ότι $\varphi=2x$, οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ που το άθροισμα των τριών γωνιών του είναι 180^0 έχουμε:

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^0\Rightarrow\omega+\varphi+\omega+x=180^0\overset{\varphi=2x}{\Rightarrow}2\omega+3x=180^0$$

$$\Rightarrow 3x=180^0-2\omega\Rightarrow x=60^0-\frac{2\omega}{3}\Rightarrow x=60^0-\frac{2\cdot 63}{3}=18^0.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακέραιου 4654650 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 4654650 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε το δέκατο στη σειρά διαιρέτη.

Μονάδες 6

Λύση

Με παραγοντοποίηση του αριθμού 4654650 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε:

$$4654650 = 10\cdot 465\cdot\left(10^3+1\right) = 10\cdot 465\cdot 1001 = 2\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 31\cdot 11\cdot 7\cdot 13 = 2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 31$$

Σε κάθε διαιρέτης δ_κ του 4664650 που το τετράγωνό του είναι μικρότερο ή ίσο του 4654650, αντιστοιχεί ένα άλλος διαιρέτης δ_λ μεγαλύτερος ή ίσος του δ_κ, με $\delta_\kappa\cdot\delta_\lambda = 4654650$. Έτσι στο μικρότερο διαιρέτη 1, αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος διαιρέτης 4654650, στο διαιρέτη 2, αντιστοιχεί ο διαιρέτης $4654650:2 = 2327325$ και συνεχίζοντας ομοίως με τους μικρότερους διαιρέτες $3,\ 5,\ 2\cdot 3, 7, 2\cdot 5, 11,\ 13,$ θα φθάσουμε στον δέκατο στη σειρά μικρότερο διαιρέτη $2\cdot 7 = 14$. Έτσι ο δέκατος μεγαλύτερος διαιρέτης είναι ο $4654650:14 = 332475$.

Πρόβλημα 2

(α) Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός y έτσι ώστε η διαφορά $x-y$ να ισούται με το γινόμενο xy.

(β) Αν οι x, y ικανοποιούν τις συνθήκες του ερωτήματος (α), να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \frac{y(x^2+2)}{x(y+1)}$.

Μονάδες 7

Λύση (α) Έχουμε

$$x - y = xy \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x = y\left(1+x\right) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x}.$$

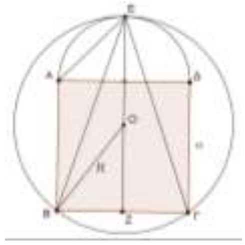
Επομένως, για κάθε πραγματικό αριθμό $x>0$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $y = \frac{x}{1+x}$ έτσι ώστε η διαφορά $x-y$ να ισούται με το γινόμενο xy.

(β) Αντικαθιστώντας το y, παίρνουμε

$$\mathrm{A} = \frac{y(x^2+2)}{x(y+1)} = \frac{\frac{x}{x+1}\cdot(x^2+2)}{x\cdot\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x^2+2}{2x+1}.$$

Όμως $x^2+2 \geq 2x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, και επομένως $\mathrm{A} \geq 1$. Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $x = 1$ και $y = \frac{1}{2}$. Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α είναι 1.

Πρόβλημα 3



Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α. Το ημικύκλιο ΑΕΔ έχει διάμετρο την πλευρά ΑΔ του τετραγώνου και ο κύκλος γ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα $\mathrm{OB}=\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OE}=R$ εφάπτεται εσωτερικά με το ημικύκλιο στο σημείο Ε που είναι το μέσο του ημικυκλίου.

Δίνεται ακόμη ότι η ΕΖ είναι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Να εκφράσετε το μήκος της ακτίνας R του κύκλου γ ως συνάρτηση της πλευράς α και να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ, ως συνάρτηση του α.

Μονάδες 7

Λύση

Επειδή ΕΖ μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ και $\mathrm{OB}=\mathrm{O\Gamma}$ η ευθεία ΕΖ περιέχει και το σημείο Ο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΖ έχουμε ότι $\mathrm{BZ}=\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{OB}=R$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$\mathrm{OZ}^2=R^2-\frac{\alpha^2}{4} \qquad (1)$$

Έστω Η το σημείο που τέμνει την πλευρά ΑΔ η ευθεία ΕΖ. Τότε, αφού ΕΑ = ΕΔ, το Η θα είναι το μέσο της ΑΔ και $\mathrm{HE}=\mathrm{HA}=\frac{\alpha}{2}$. Επειδή τα σημεία Ε, Ο και Ζ είναι συνευθειακά και το Ο βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ε και Ζ έχουμε ότι:

$$\mathrm{ZE}=\mathrm{ZH}+\mathrm{HE}=\alpha+\frac{\alpha}{2}=\frac{3\alpha}{2} \qquad (2)$$

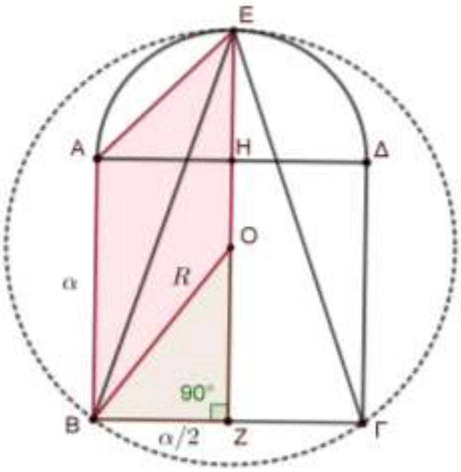
$$\mathrm{OZ}=\mathrm{EZ}-\mathrm{EO}=\mathrm{EZ}-R\overset{(2)}{=}\frac{3\alpha}{2}-R \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$\left(\frac{3\alpha}{2}-R\right)^2=R^2-\frac{\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\frac{9a^2}{4}-3aR+R^2=R^2-\frac{\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\frac{10\alpha^2}{4}=3\alpha R\Leftrightarrow R=\frac{5\alpha}{6}.$$

Επειδή $\mathrm{EZ}\parallel\mathrm{AB}$ το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι τραπέζιο, οπότε έχουμε:

$$(\mathrm{ABOE})=\left(\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{EO}}{2}\right)\cdot\mathrm{AZ}=\left(\frac{\alpha+R}{2}\right)\cdot\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{\alpha+\frac{5a}{6}}{2}\right)\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{11\alpha^2}{24}.$$



Σχήμα 2

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν μ,ν θετικοί ακέραιοι $\mu \geq 2$ και $9^{\mu-1}+9^{\nu} \leq 2\cdot 3^{\nu+\mu-1}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $3^{\mu}+3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 12.

Μονάδες 6

Λύση

Η δεδομένη σχέση γράφεται:

$$9^{\mu-1}+9^{\nu} \leq 2\cdot 3^{\nu+\mu-1} \Leftrightarrow \left(3^{\mu-1}\right)^2+\left(3^{\nu}\right)^2-2\cdot 3^{\mu-1}\cdot 3^{\nu} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{\mu-1}-3^{\nu}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3^{\mu-1}-3^{\nu}=0,$$

οπότε $3^{\mu-1}=3^{\nu}$ και

$$3^{\mu}+3^{\nu}=3\cdot 3^{\mu-1}+3^{\nu}=3\cdot 3^{\nu}+3^{\nu}=4\cdot 3^{\nu},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 12, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Βρίσκουμε όλα τα αθροίσματα που δημιουργούνται με δύο όρους από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ και παρατηρούμε ότι τα τρία μικρότερα από αυτά είναι 128, 144 και 148, ενώ τα δύο μεγαλύτερα είναι 204 και 192. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$.

Μονάδες 7

Λύση

Τα δύο μικρότερα αθροίσματα είναι $\alpha+\beta=128$ και $\alpha+\gamma=144$. Το 148 που είναι το τρίτο μικρότερο άθροισμα μπορεί να είναι το $\alpha+\delta$ ή $\beta+\gamma$. Τα δύο μεγαλύτερα αθροίσματα είναι τα $\delta+\varepsilon=204$ και $\gamma+\varepsilon=192$. Από τα δεδομένα αθροίσματα έχουμε ότι:

$$\alpha+\delta=(\alpha+\gamma)+(\delta+\varepsilon)-(\gamma+\varepsilon)=144+204-192=156,$$

οπότε το τρίτο μικρότερο άθροισμα είναι το $\beta+\gamma=148$.

Από τις ισότητες $\alpha+\beta=128, \alpha+\gamma=144, \beta+\gamma=148$ με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε $\alpha+\beta+\gamma=210$, από την οποία με αφαίρεση κατά μέλη διαδοχικά των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε: $\alpha=62,\ \beta=66,\ \gamma=82$.

Τέλος, από τις εξισώσεις $\gamma+\varepsilon=192$ και $\delta+\varepsilon=204$ λαμβάνουμε: $\varepsilon=110,\ \delta=94$.

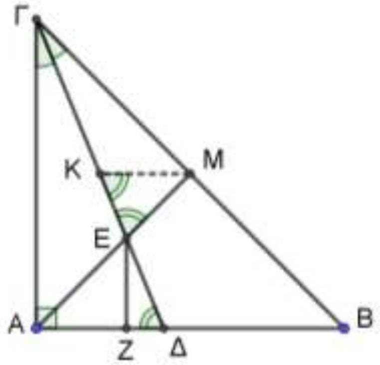
Άρα είναι $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)=(62,66,82,94,110)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και τη διάμεσο ΑΜ στο σημείο Ε. Η κάθετη από το Ε προς την πλευρά ΑΒ την τέμνει στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι: $\Delta B = 2 \cdot EZ$

Μονάδες 7

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι η παράλληλη από το Μ προς την ΑΒ τέμνει τη διχοτόμο ΓΔ στο Κ.
Τότε η ΜΚ είναι μεσοπαράλληλη στο τρίγωνο ΓΒΔ, οπότε:

$$\Delta B = 2 \cdot KM \qquad (1)$$

Επιπλέον, έχουμε

$$M\hat{K}E = E\hat{\Delta}A = 90^0 - A\hat{\Gamma}\Delta = 90^0 - 22{,}5^0 = 67{,}5^0. \qquad (2)$$

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΜΓ έχουμε:

$$K\hat{E}M = 90^0 - E\hat{\Gamma}M = 90^0 - 22{,}5^0 = 67{,}5^0. \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι: $M\hat{K}E = K\hat{E}M = 67{,}5^0$, οπότε το τρίγωνο ΜΚΕ είναι ισοσκελές με ΜΚ = ΜΕ. Όμως το Ε είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ισαπέχει από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ. Άρα είναι $ME = EZ$, οπότε θα είναι και

$$MK = EZ \qquad (4)$$

Από τις (1) και (4) έπεται ότι: $\Delta B = 2 \cdot EZ$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\beta\gamma=15 \\ (\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5)=120 \end{array}\right\}.$$

Μονάδες 6

Λύση

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$\begin{aligned} &(\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5)=120 \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma+\beta\gamma+3\alpha\gamma+5\alpha\beta+5\beta+3\gamma+15\alpha+15=120 \\ &\overset{\alpha\beta\gamma=15}{\Leftrightarrow} \beta\gamma+3\alpha\gamma+5\alpha\beta+5\beta+3\gamma+15\alpha=90 \\ &\Leftrightarrow (15\alpha+\beta\gamma)+(5\beta+3\alpha\gamma)+(3\gamma+5\alpha\beta)=90 \\ &\overset{\alpha\beta\gamma=15}{\Leftrightarrow} 15\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+5\left(\beta+\frac{9}{\beta}\right)+3\left(\gamma+\frac{25}{\gamma}\right)=90. \qquad (1) \end{aligned}$$

Με τη γνωστή ανισότητα $x+y\geq 2\sqrt{xy},\ x,y>0,$, όπου η ισότητα ισχύει για $x=y$, λαμβάνουμε:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2,\ \beta+\frac{9}{\beta}\geq 6,\ \gamma+\frac{25}{\gamma}\geq 10,\ \alpha,\beta,\gamma>0, \qquad (2)$$

όπου οι ισότητες ισχύουν για $\alpha=1,\ \beta=3$ και $\gamma=5$. Τότε έχουμε:

$$15\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+5\left(\beta+\frac{9}{\beta}\right)+3\left(\gamma+\frac{25}{\gamma}\right)\geq 15\cdot 2+5\cdot 6+3\cdot 10=90,$$

οπότε για να αληθεύει η εξίσωση (1) πρέπει και αρκεί οι τρεις ανισότητες (2) να αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,3,5)$.

2ος τρόπος

Με τη γνωστή ανισότητα $x+y\geq 2\sqrt{xy},\ x,y>0,$ όπου η ισότητα ισχύει για $x=y$, λαμβάνουμε:

$$\alpha+1\geq 2\sqrt{a}, \qquad \beta+3\geq 2\sqrt{3b}, \qquad \gamma+5\geq 2\sqrt{5\gamma}.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε

$$(\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5)\geq 8\sqrt{15\alpha\beta\gamma}=8\cdot 15=120.$$

Επομένως πρέπει σε όλες να ισχύει η ισότητα, δηλαδή **α**=1, β=3, γ=5.

Πρόβλημα 2

Για τον πραγματικό αριθμό β γνωρίζουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός α έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισότητα: $\alpha^2-\dfrac{1}{\alpha}=\beta.$

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες τιμές του β για τις οποίες ο αριθμός $\gamma=\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 7

Λύση

Από τις ισότητες $\beta = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$ και $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\gamma + \beta = 2\alpha^2 \quad \text{και} \quad \gamma - \beta = \frac{2}{\alpha},$$

από τις οποίες με απαλοιφή του α λαμβάνουμε:

$$(\gamma + \beta)(\gamma - \beta)^2 = 8.$$

Αν β, γ ακέραιοι, τότε πρέπει $0 < |\gamma - \beta| < 3$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$\gamma + \beta = 8 \text{ και } (\gamma - \beta)^2 = 1 \Rightarrow \gamma + \beta = 8 \text{ και } (\gamma - \beta = 1 \text{ ή } \gamma - \beta = -1), \text{αδύνατο.}$$

2η περίπτωση

$$\gamma + \beta = 2 \text{ και } (\gamma - \beta)^2 = 4 \Rightarrow \gamma + \beta = 2 \text{ και } (\gamma - \beta = 2 \text{ ή } \gamma - \beta = -2)$$
$$\Leftrightarrow (\gamma + \beta = 2 \text{ και } \gamma - \beta = 2) \text{ ή } (\gamma + \beta = 2 \text{ και } \gamma - \beta = -2)$$
$$\Leftrightarrow \gamma = 2,\ \beta = 0 \quad \text{ή} \quad \gamma = 0,\ \beta = 2$$

Επομένως, οι ζητούμενες τιμές του β είναι 0 ή 2.

Πράγματι, για $\beta = 0$, υπάρχει ο $\alpha = 1$, έτσι ώστε $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$ και τότε $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = 2$, ενώ για $\beta = 2$, υπάρχει ο $\alpha = -1$, έτσι ώστε $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$ και τότε $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = 0$.

2ος τρόπος

Από τις ισότητες $\beta = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$ και $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\gamma - \beta = \frac{2}{\alpha},$$

δηλαδή $\alpha = \frac{2}{\gamma-\beta} = \frac{2}{k}$, όπου κ ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση έχουμε ότι

$$\frac{4}{\kappa^2} - \frac{\kappa}{2} = \frac{8 - \kappa^3}{2\kappa^2} = \beta \in Z \qquad (1)$$

οπότε πρέπει ο κ^2 να διαιρεί το 8, οπότε $\kappa = \pm 1, \pm 2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1), οι ακέραιες τιμές του β που παίρνουμε είναι οι 0 και 2. Πράγματι, για $\beta = 0$, υπάρχει ο $\alpha = 1$, έτσι ώστε $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$ και τότε

$\gamma = \alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha} = 2$, ενώ για $\beta = 2$, υπάρχει ο $\alpha = -1$, έτσι ώστε $\alpha^2 - \dfrac{1}{\alpha} = \beta$ και τότε $\gamma = \alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha} = 0$.

Πρόβλημα 3

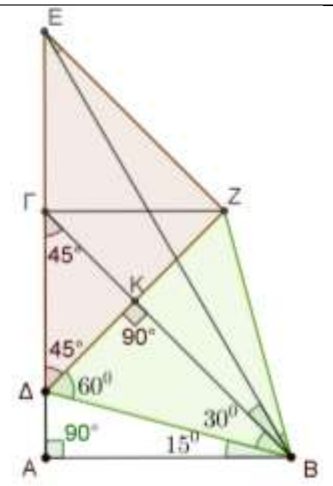
Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{\mathrm{A}} = 90^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι διαφορετικά πάνω στην ευθεία ΑΓ έτσι ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = 15^0$ και $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E}$. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$. *Μονάδες 7*

Λύση

Θεωρούμε το σημείο Ζ συμμετρικό του σημείου Δ ως προς την ευθεία ΒΓ. Τότε θα είναι $\Delta\mathrm{Z} \perp \mathrm{B}\Gamma$ και αν η ΔΖ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ, $\mathrm{K}\Delta = \mathrm{KZ}$. Επιπλέον, λόγω συμμετρίας, θα είναι $\mathrm{BZ} = \mathrm{B}\Delta$, και

$$\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} - \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 45^0 - 15^0 = 30^0.$$

Επειδή $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 2\cdot 3\hat{0} = 60^0$, το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισόπλευρο, οπότε και $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{BZ} = \mathrm{B}\Delta$. Το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, αφού $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{Z}$, λόγω συμμετρίας, και $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 2\cdot 45^0 = 90^0$. Άρα θα είναι $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E} = \dfrac{\Delta\mathrm{E}}{2}$, οπότε και το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\mathrm{Z}\Delta = \mathrm{ZE}$. Επομένως $\mathrm{ZE} = \mathrm{ZB}$ και το τρίγωνο ΖΒΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = 60^0 + 90^0 = 150^0$.



Σχήμα 4

Άρα θα είναι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \dfrac{180^0 - 150^0}{2} = 15^0$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} - \mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 30^0 - 15^0 = 15^0$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$x^2 + y^2 + (x-y)^2 + 2 = 2|x+y|.$$ ***Μονάδες 6***

Λύση

$$x^2 + y^2 + (x-y)^2 + 2 = 2|x+y| \qquad (1)$$

$$\Rightarrow |x+y| = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{(x-y)^2}{2} + 1 \geq \frac{(x+y)^2}{4} + 1$$

$$\Rightarrow |x+y|^2 - 4|x+y| + 4 \leq 0 \Rightarrow (|x+y|-2)^2 \leq 0 \Rightarrow |x+y| = 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $x = y$.
Για $x = y$ η εξίσωση (1) γίνεται: $2x^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, οπότε

$$(x, y) = (1, 1) \text{ ή } (x, y) = (-1, -1)$$

.

Πρόβλημα 2
Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\Sigma(\mu, \nu) = \frac{1}{2}\left[\mu + (\mu+2) + (\mu+4) + \ldots + (\mu+2\nu) - \mu(\nu+\mu)\right],$$

δεν μπορεί να γραφεί ως δύναμη της μορφής 2^κ, όπου κ θετικός ακέραιος, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους μ, ν με $\mu < \nu$. ***Μονάδες 7***

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned} 2\Sigma_{\mu,\nu} &= \mu + (\mu+2) + \ldots + (\mu+2\nu-2) + \mu + 2\nu - \mu(\mu+\nu) \\ &= \mu(\nu+1) + 2(1+2+\ldots+\nu) - \mu(\mu+\nu) \\ &= \mu(\nu+1) + \nu(\nu+1) - \mu(\mu+\nu) \\ &= (\mu+\nu)(\nu+1) - \mu(\mu+\nu) = (\mu+\nu)(\nu-\mu+1) \end{aligned}$$

Επομένως είναι:

$$(\nu+\mu)(\nu-\mu+1) = 2\Sigma_{\mu,\nu}, \text{ άρτιος.}$$

Επειδή οι αριθμοί $\nu+\mu$ και $\nu-\mu$ είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί, έπεται ότι οι αριθμοί $\nu+\mu$ και $\nu-\mu+1$ είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός. Επιπλέον $\nu+\mu \geq 3$ και $\nu-\mu+1 \geq 2$, οπότε σε κάθε περίπτωση ο αριθμός $\Sigma_{\mu,\nu}$ έχει ένα περιττό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1. Άρα δεν μπορεί να είναι δύναμη του 2 με θετικό ακέραιο διαιρέτη.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ = 2 \cdot ΑΒ$ και περιγεγραμμένο κύκλο $\gamma(\mathrm{O}, R)$. Η κάθετη από το Ο προς τη διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου την τέμνει στο σημείο Ε. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην ευθεία ΑΔ, διαφορετικό από το Δ, τέτοιο ώστε

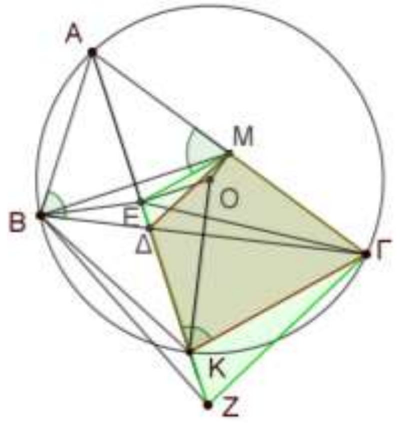
$\Gamma\Delta = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι: $E\hat{B}Z = E\hat{\Gamma}Z$.
Μονάδες 7

Λύση

Έστω ότι η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Κ. Επειδή η ΟΕ είναι κάθετη στη χορδή ΑΔ έπεται ότι: $AE = EK$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Τότε $AM = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB$, οπότε τα σημεία Β και Μ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$. Άρα έχουμε:

$$\Delta\hat{K}\Gamma = A\hat{K}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta = A\hat{M}\Delta,$$

οπότε το τετράπλευρο ΔΚΓΜ είναι εγγράψιμο. Τότε έχουμε:



Σχήμα 5

$$AM^2 = AM \cdot \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AM \cdot A\Gamma}{2} = \frac{A\Delta \cdot AK}{2} = A\Delta \cdot AE \Rightarrow \frac{AM}{A\Delta} = \frac{AE}{AM},$$

οπότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι όμοια (έχουν κοινή τη γωνία $E\hat{A}\Delta$). Άρα

$$\begin{aligned} AME = A\Delta M = A\Delta B &\text{ (λόγω συμμετρίας)} \\ &= \Gamma\hat{\Delta}K \text{ (ως κατά κορυφή)} \\ &= \Delta\hat{Z}\Gamma \text{ (αφού } \Gamma\Delta = \Gamma Z) \\ &= E\hat{Z}\Gamma \text{ (} E, \Delta, Z \text{ συνευθειακά),} \end{aligned}$$

οπότε το τετράπλευρο ΕΜΓΖ είναι εγγράψιμο, Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} E\hat{B}Z &= E\hat{M}Z \text{ (λόγω συμμετρίας)} \\ &= E\hat{\Gamma}Z \text{ (από εγγράψιμο ΕΜΓΖ).} \end{aligned}$$

2ος τρόπος

Έστω ότι η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Κ. Επειδή η ΟΕ είναι κάθετη στη χορδή ΑΔ έπεται ότι: $AE = EK$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Τότε $AM = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB$, οπότε τα σημεία Β και Μ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$. Τώρα, η ΜΕ συνδέει τα μέσα στο τρίγωνο ΑΓΚ, άρα:

$$\angle AME = \angle A\Gamma K.$$

Όμως, έχουμε και τις ισότητες :

$$\angle A\Gamma K = \angle\Gamma + \angle\frac{A}{2} = \angle K\Delta\Gamma = \angle\Gamma ZE.$$

Επομένως $\angle AME = \angle\Gamma ZE$, οπότε το τετράπλευρο ΕΜΓΖ είναι εγγράψιμο, και

$$\begin{aligned} E\hat{B}Z &= E\hat{M}Z \text{ (λόγω συμμετρίας)} \\ &= E\hat{\Gamma}Z \text{ (από εγγράψιμο ΕΜΓΖ).} \end{aligned}$$