ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Διαγωνισμός Μαθηματικών ικανοτήτων
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ
http://www.hms.gr/pythagoras/index.html

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ

Ευκλείδεια Διαίρεση

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon}$
- Ο αριθμός **Δ** λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο** και το **υ υπόλοιπο** της διαίρεσης.

  Το υπόλοιπο είναι αριθμός πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $\boxed{\upsilon < \delta}$

  Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.
- Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση:** $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi}$

Ορισμοί

- Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (**ΕΚΠ)** είναι το **μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια** που έχουν δύο αριθμοί.
- Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (**ΜΚΔ)** είναι ο **μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες** που έχουν δύο αριθμοί.
- Ένας αριθμός **α** που έχει **διαιρέτες** μόνο τον **α** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, αλλιώς λέγεται **σύνθετος**.

Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** όταν **ΜΚΔ(α, β) = 1**

Κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α και β φυσικοί αριθμοί, β≠0

- Ίσα ή ισοδύναμα κλάσματα: αν, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε **α·δ=β·γ**

- Ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma}$ και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:\delta}{\beta:\delta}$

- Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ***ανάγωγο*** όταν **ΜΚΔ(α,β)=1**

- Τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ***αντίστροφα*** όταν $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=1$

- ***Ομώνυμα*** $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta}$ ***Ετερώνυμα*** $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$

- $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\gamma}{\beta}$ όταν α>γ και $\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\beta}{\gamma}$ όταν α>γ

- Ο **Μεικτός** αποτελείται από έναν **ακέραιο** και ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας.

Πράξεις μεταξύ κλασμάτων

ΠΡΟΣΘΕΣΗ: $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ **ΑΦΑΙΡΕΣΗ:** $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$

ΠΟΛ/ΣΜΟΣ: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$ **και** $\lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda\cdot\alpha}{\beta}$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ: **α:β= α ·** $\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$ **και** $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΕ ΑΠΛΟ: $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$

Δεκαδικοί αριθμοί

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρανομαστή μια δύναμη του 10 και μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρανομαστής του.

Κάθε δεκαδικός αριθμός διακρίνεται σε **ακέραιο μέρος** και **δεκαδικό μέρος**, που διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.

Μονάδες Μέτρησης

		Υποδιαιρέσεις:	Πολλαπλάσια:
Μήκους:	**το μέτρο (1m)**	= 10 dm = 10^2 cm = 10^3 mm	1 Km = 10^3 m
Επιφάνειας:	**το τετραγωνικό μέτρο ($1m^2$)**	= 10^2 dm^2 = $10^4 cm^2$ = 10^6 mm^2	1 στρέμμα = 10^3 m^2
Όγκου:	**το κυβικό μέτρο ($1m^3$)**	= 10^3 dm^3 = 10^6 cm^3 = 10^9 mm^3	1 lt = 0,001 m^3
Χρόνου:	**το δευτερόλεπτο (1s)**		1min = 60s, 1 h = 3600 s
Μάζας:	**το χιλιόγραμμο (1Kg)**	= 10^3 gr = 10^6 mg	1t = 10^3 Kg

Εξισώσεις

Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι κάθε αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Η διαδικασία μέσω της οποίας, βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης, λέγεται **επίλυση** της εξίσωσης.

Μια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα ή αόριστη**, όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.

Μία εξίσωση λέγεται **αδύνατη**, όταν κανείς αριθμός δεν την επαληθεύει ή δεν είναι λύση της.

Εξίσωση	Λύση
$x + α = β$	$x = β - α$
$x - α = β$	$x = α + β$

α - x = β	**x = α - β**
α · x = β	**x = β : α**
x : α = β	**x = α · β**
α : x = β	**x = α : β**

Ποσοστά

- Το σύμβολο **α%** ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα **ποσοστό** και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{100}$
- Χρησιμοποιούμε ακόμη το ποσοστό **α ‰** που διαβάζεται **ποσοστό επί τοις χιλίοις** και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{1000}$
- **Το ποσοστό α% του β είναι** $\frac{\alpha}{100}$ **· β**
- **Τα κλάσματα μπορούν να γράφονται και ως ποσοστά.**

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

Ακέραιοι αριθμοί:	…,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…
Ρητοί αριθμοί:	Φυσικοί, Κλάσματα, Δεκαδικοί (Θετικοί και Αρνητικοί)
Ομόσημοι ρητοί αριθμοί:	Έχουν το ίδιο πρόσημο

Ετερόσημοι ρητοί αριθμοί: Έχουν αντίθετο πρόσημο

Αντίθετοι ρητοί αριθμοί: Οι ετερόσημοι με ίδια απόλυτη τιμή

Απόλυτη τιμή ρητού |α|: Εκφράζει την απόσταση σημείου με τετμημένη α από την αρχή Ο του άξονα των ρητών

Αν α > ο, τότε |α|= α και αν α < ο, τότε |α| = -α

Πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- $\boldsymbol{\alpha+\beta = \beta+\alpha}$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\boldsymbol{\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma}$ *(Προσεταιριστική)*
- $\boldsymbol{\alpha+0=0+\alpha=\alpha}$
- $\boldsymbol{\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0}$ **(α και -α, αντίθετοι)**

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- $\boldsymbol{\alpha\cdot \beta = \beta\cdot \alpha}$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma}$ *(Προσεταιριστική)*
- $\boldsymbol{\alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha}$
- $\boldsymbol{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1}$ (α και $\frac{1}{\alpha}$ αντίστροφοι) όπου $\alpha\neq0$
- $\boldsymbol{\alpha\cdot0=0}$

Αφαίρεση:

- $\boldsymbol{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)}$

Διαίρεση:

- $\boldsymbol{\alpha : \beta = \alpha/\beta = \alpha \cdot 1/\beta}$

Επιμεριστική Ιδιότητα

- Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
- Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση: $\alpha \cdot (\beta-\gamma) = \alpha \cdot \beta-\alpha \cdot \gamma$

Προτεραιότητα Πράξεων

- ❶ Δυνάμεις ➔ ❷ Πολλαπλασιασμοί & Διαιρέσεις ➔ ❸ Προσθέσεις & Αφαιρέσεις
- *Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά*

Δυνάμεις (όπου: α, β $\neq0$ και μ, ν φυσικοί αριθμοί)

Ορισμοί

$\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$ **(ν φορές)**

Το **α** λέγεται **βάση** και το **ν** **εκθέτης**

$\alpha^0 = 1$ και $\alpha^1 = \alpha$

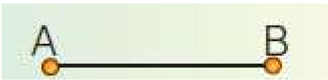
$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ ή $\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

Ιδιότητες των δυνάμεων

- $\alpha^\mu \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$
- $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$
- $(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$
- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$
- $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

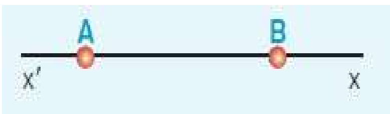
Το ευθύγραμμο τμήμα 

- Τα σημεία **Α** και **Β** είναι τα **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος.
- Λέμε ότι τα σημεία **Α** και **Β** **ορίζουν** το ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**

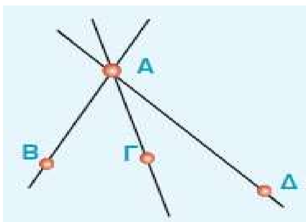
Η ευθεία

- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**, τότε το νέο σχήμα, που **δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος**, λέγεται **ευθεία**.
- Συμβολίζουμε μια ευθεία με ένα μικρό γράμμα από τα αρχικά του αλφαβήτου, π.χ.

  (ε), ή με δύο μικρά γράμματα από τα τελευταία του αλφαβήτου π.χ. **x΄x**, **y΄y**.



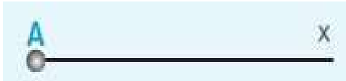
- Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.
- Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.

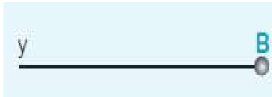


Ημιευθεία

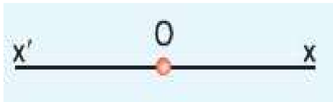
Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το Β, τότε το νέο σχήμα, που έχει **αρχή** το **Α** αλλά **δεν έχει τέλος**, λέγεται **ημιευθεία**.

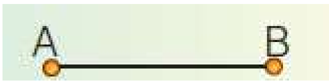
- Η ημιευθεία συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό από τα τελευταία γράμματα, π.χ. **Αx**, **Βy** κ.λπ.



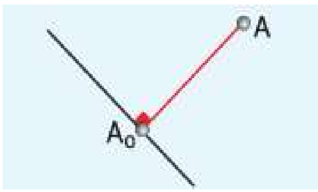


  - Εάν **Ο** είναι ένα σημείο της ευθείας **x΄x**, τότε με αρχή το **Ο** ορίζονται δύο ημιευθείες **Οx** και **Οx΄**, οι οποίες λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.

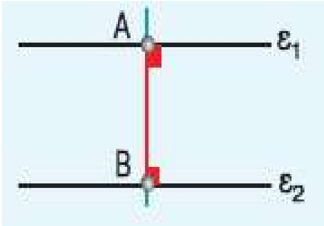


- **Απόσταση** δύο σημείων Α,Β  είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ

- **Απόσταση** του σημείου **Α** από την ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος **AA_0** από το σημείο **Α** προς την ευθεία **ε**.

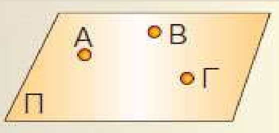


- **Απόσταση** δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές, π.χ. το **ΑΒ**.

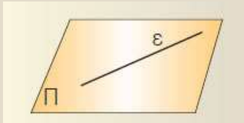


Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

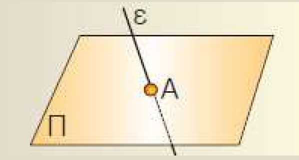
- **ΕΠΙΠΕΔΟ**
- **ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ**



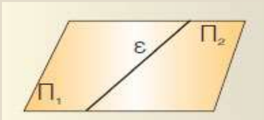
τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο



Η ευθεία ε ανήκει ολόκληρη στο επίπεδο Π



Η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο Π

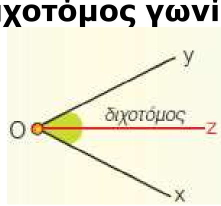


Η ευθεία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα

Γωνία-Είδη γωνιών

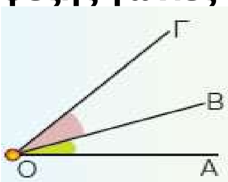
γωνία

διχοτόμος γωνίας

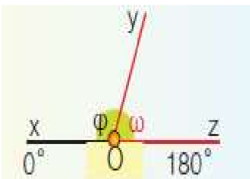


κατακορυφήν γωνίες

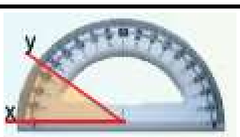
εφεξής γωνίες

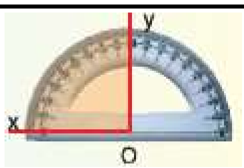


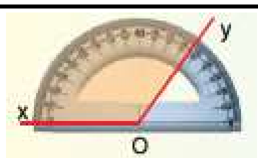
παραπληρωματικές γωνίες



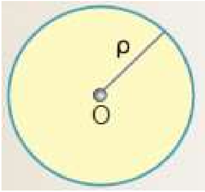
συμπληρωματικές γωνίες



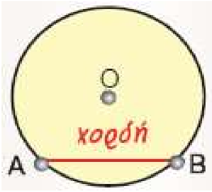




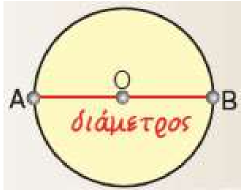
οξεια γωνια	ορθή γωνία	αμβλεια γωνια	ευθεια γωνια



κύκλος(Ο, ρ) και κυκλικός δίσκος

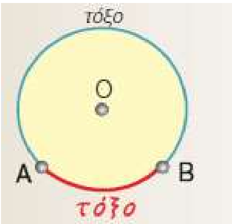


χορδή ΑΒ

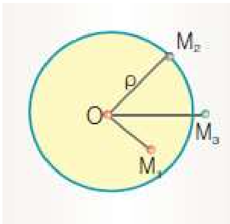


η διάμετρος ΑΒ χωρίζει τον κύκλο σε 2 ημικύκλια

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ



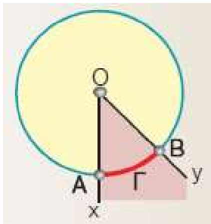
δύο σημεία Α και Β του κύκλου ορίζουν δύο τόξα του κύκλου



Μ1 εσωτερικό του (Ο, ρ)

Μ2 σημείο του (Ο, ρ)

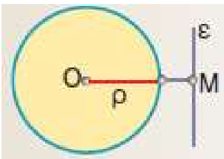
Μ3 εξωτερικό του (Ο, ρ)



Επίκεντρη γωνία

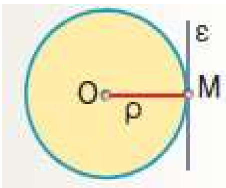
Η ευθεία ε είναι

A)



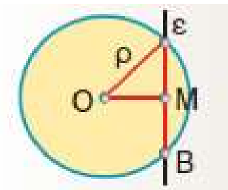
εξωτερική

B)



εφαπτόμενη

Γ)



τέμνουσα

Συμμετρία

Συμμετρία ως προς άξονα: Συμμετρικό σημείο Β ως προς ευθεία ε, είναι το σημείο Γ με το οποίο συμπίπτει το Β, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας ε. (Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα)

Άξονας συμμετρίας: Άξονας συμμετρίας σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Τότε λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.

Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος: Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει **ίσες αποστάσεις (ισαπέχει)** από τα άκρα του.

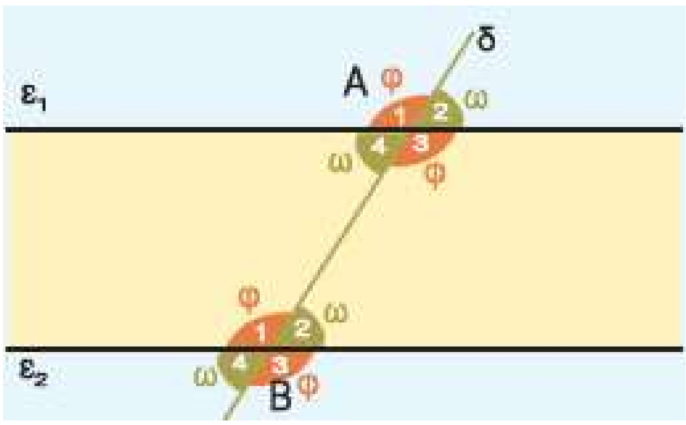
Κάθε σημείο που **ισαπέχει** από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη **μεσοκάθετό** του.

Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι **άξονας συμμετρίας** του.

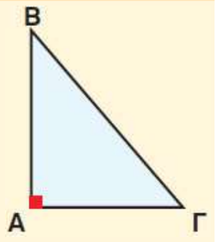
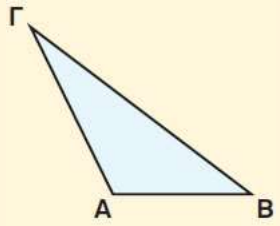
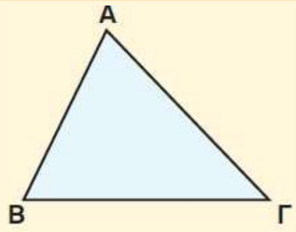
Συμμετρία ως προς σημείο: Δύο σημεία **Μ** και **Μ'** είναι **συμμετρικά ως προς σημείο Ο**, όταν το **Ο** είναι **μέσο** του τμήματος **ΜΜ' .** Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.

Κέντρο συμμετρίας: Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του **Ο**, γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά **180°**, συμπίπτει με το αρχικό. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει **κέντρο συμμετρίας** το

Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία: Οι οξείες γωνίες ω , είναι μεταξύ τους ίσες. Οι αμβλείες γωνίες φ, είναι και αυτές μεταξύ τους ίσες.

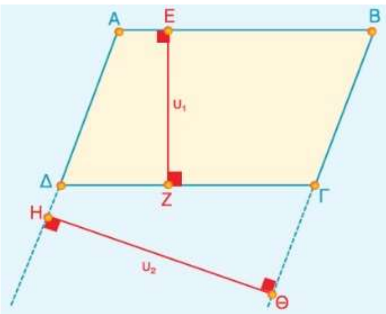


Τρίγωνα

Είδη τριγώνων		
Μία γωνία ορθή	**Μία γωνία μεγαλύτερη της ορθής**	**Όλες οι γωνίες μικρότερες της ορθής**
		
Ορθογώνιο	**Αμβλυγώνιο**	**Οξυγώνιο**

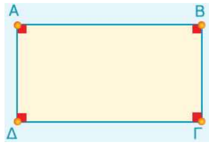
Παραλληλόγραμμα

- **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή **ΑΒ//ΓΔ** και **ΑΔ//ΒΓ**.
- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **βάση** του παραλληλογράμμου.
- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.

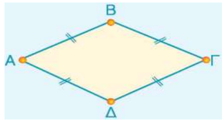


Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων

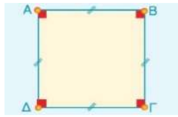
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή απλά **ορθογώνιο**.



- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **ρόμβος**.

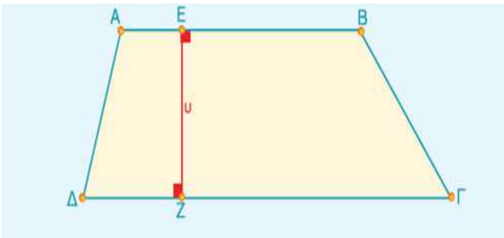


- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **τετράγωνο**.



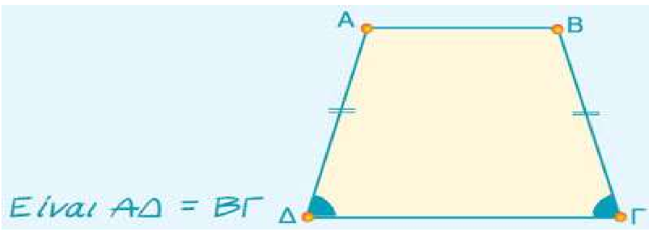
Τραπέζιο

- Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** του οποίου μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται **τραπέζιο**.
- Οι παράλληλες πλευρές **ΑΒ, ΓΔ (ΑΒ//ΓΔ)** του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.
- Η απόσταση των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου



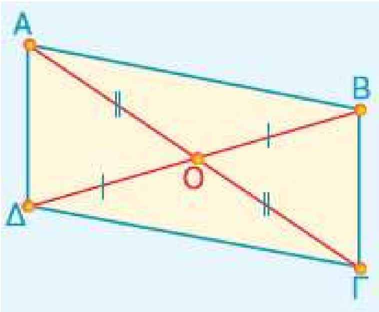
Η απόσταση των βάσεων ΑΒ και ΓΔ είναι το ύψος ΕΖ.

- Αν ένα τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του **ίσες** λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο**.



Ιδιότητες του ορθογώνιου και πλάγιου παραλληλογράμμου

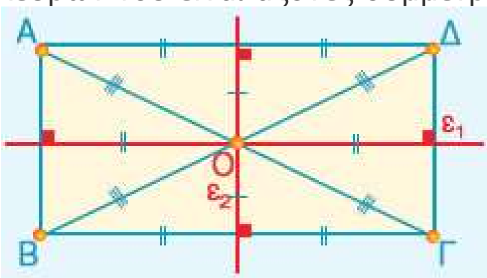
- Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).



- Οι απέναντι πλευρές είναι **ίσες**.
- Οι απέναντι γωνίες είναι **ίσες**.

Στο ορθογώνιο:

- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.

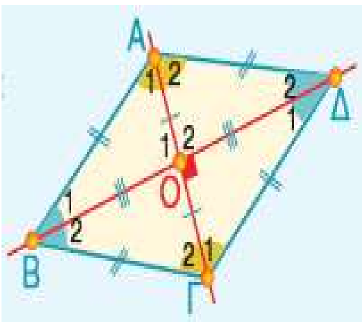


- Οι διαγώνιές του είναι ίσες και διχοτομούνται.

Ιδιότητες του ρόμβου

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

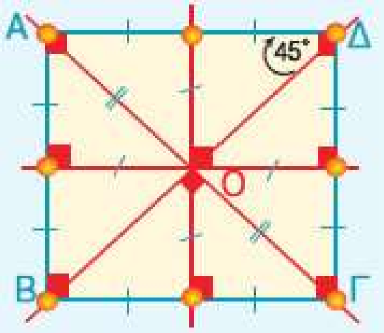
- Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιες είναι κάθετες (και διχοτομούνται).
- Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.



Ιδιότητες του τετραγώνου

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

- Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιές του είναι ίσες, κάθετες (και διχοτομούνται).



- Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου

- Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες.