ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

**Διαγωνισμός Μαθηματικών ικανοτήτων**

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

**http://www.hms.gr/pythagoras/index.html**

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

# *ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ*

## ΑΛΓΕΒΡΑ

### Μονώνυμα

- Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**.
- Σ΄ ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.
- Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο **βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

### Πράξεις με μονώνυμα

- Το **άθροισμα ομοίων μονωνύμων** είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.
- Το **γινόμενο μονωνύμων** είναι μονώνυμο με: **συντελεστή** το γινόμενο των συντελεστών τους και **κύριο μέρος** το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.
- Η **Διαίρεση μονωνύμων** όπως και η διαίρεση αριθμών γίνεται, αν πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη

### Πολυώνυμα

- Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**.

- **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Συμφωνούμε, ακόμα, ότι κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό** πολυώνυμο. Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

- Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, ή όπως λέμε όμοιοι όροι, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

Πρόσθεση - Αφαίρεση πολυωνύμων

Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο

- Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο

- Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

| | |
|---|---|
| **Τετράγωνο αθροίσματος** | $(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$ |
| **Τετράγωνο διαφοράς** | $(α - β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$ |

| | |
|---|---|
| **Κύβος αθροίσματος** | $(\alpha+\beta)^3 = = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ |
| **Κύβος διαφοράς** | $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ |
| **Γινόμενο αθροίσματος επι διαφορά** | $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ |

**Παραγοντοποίηση** είναι ο μετασχηματισμός μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο. Η παραγοντοποίηση γίνεται σε παράσταση που υπάρχει:

| | |
|---|---|
| **Κοινός παράγοντας σ' όλους τους όρους** | $\alpha x + \beta x = x(\alpha+\beta)$ |
| **Κοινός παράγοντας σε ομάδες όρων της παράστασης** | $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y =$<br>$= \alpha(x+y) + \beta(x+y) =$<br>$= (\alpha+\beta)(x+y)$ |
| **Διαφορά τετραγώνων** | $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ |
| **Ανάπτυγμα τετραγώνου** | $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2$<br>$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2$ |
| **Τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$** | $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta =$<br>$= (x+\alpha)(x+\beta)$ |

**Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων**

- Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο **(Ε.Κ.Π.)** δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
- Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης **( Μ.Κ.Δ. )** δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

## Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

- Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση**. Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

## Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων

- **Πολλαπλασιασμός**

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες.

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

**Με τον ίδιο τρόπο** πολλαπλασιάζουμε και μια ακέραια με μια ρητή παράσταση ή δύο ρητές παραστάσεις.

- **Διαίρεση**

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

**Με τον ίδιο τρόπο** διαιρούμε και δύο ρητές παραστάσεις.

## Εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο

η γενική μορφή μιας εξίσωσης 1ου βαθμού με άγνωστο x είναι αχ+β=0

- Αν **α ≠ 0**, τότε; η εξίσωση αx + β = 0 έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$
- Αν **α = 0**, τότε η εξίσωση αx + β = 0 γράφεται 0x = -β και αν **β≠0**, δεν έχει λύση (**αδύνατη**), ενώ αν **β = 0**, κάθε αριθμός είναι λύση της (**ταυτότητα** ή **αόριστη**)

**Ε**ξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \neq 0$$

Η ύπαρξη των λύσεων και το πλήθος εξαρτάται απο την παράσταση **Δ=β²-4αγ που ονομάζεται διακρίνουσα**

1. Αν Δ > 0, έχει **δύο άνισες λύσεις** τις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

2. Αν Δ = 0, έχει **μία διπλή λύση** την

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

3. Αν Δ < 0, **δεν έχει λύση** (αδύνατη).

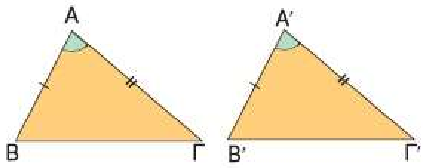
**<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</u>**

**ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ**

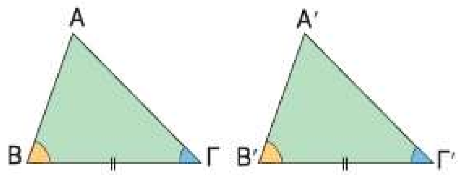
**Ίσα τρίγωνα** λέγονται τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

- **Κριτήρια ισότητας τριγώνων.** Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

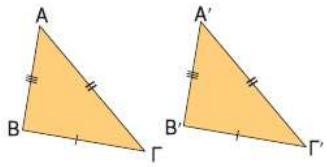
1. Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (Π - Γ - Π).




2. Μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (Γ-Π - Γ).



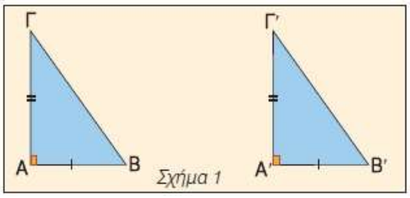

3. Τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π - Π - Π).



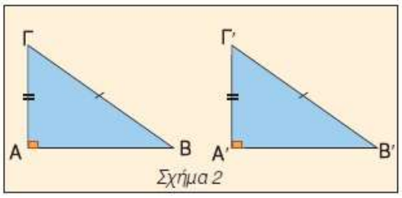
- **Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.**

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία



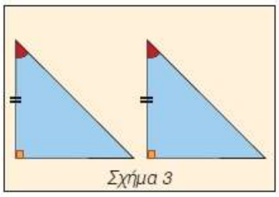
Σχήμα 1

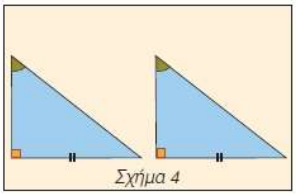


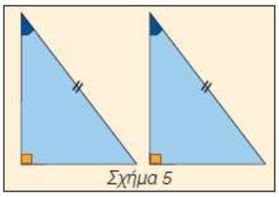
Σχήμα 2

ή

- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

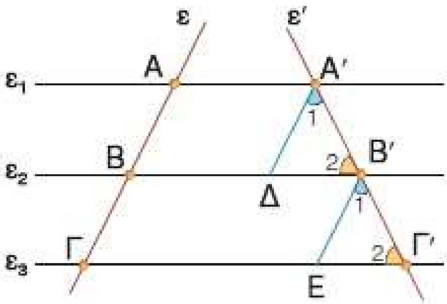

Σχήμα 3


Σχήμα 4


Σχήμα 5

**ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ**

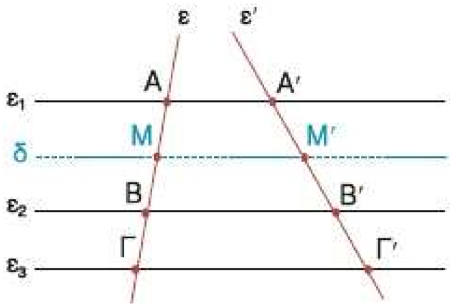
Παράλληλες ευθείες, αν ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.




- **Λόγος** ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ·ΑΒ.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

- **Θεώρημα Θαλή.**

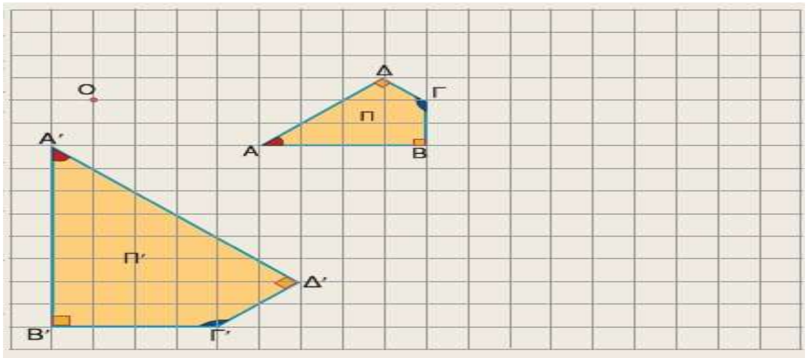
αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ τότε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$



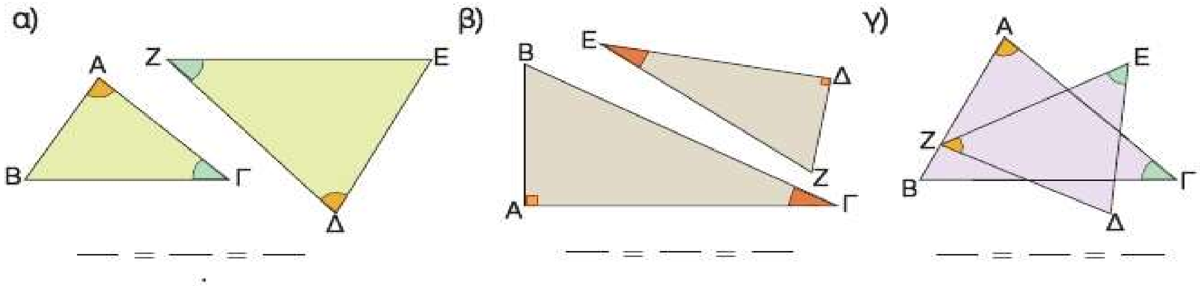
**ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ**

**Όμοια πολύγωνα** λέγονται τα πολύγωνα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.

Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και αντιστρόφως.




**Δύο τρίγωνα** που έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία **είναι όμοια** και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.




Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:

- Ο **λόγος των περιμέτρων** τους είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.
- Ο **λόγος των εμβαδών** τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.