ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
Β΄- ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ & Α΄ - Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

100 χρόνια Ε.Μ.Ε

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αγαπητοί συνάδελφοι

Η ΕΜΕ, ως μέλος της Διεθνούς Ολυμπιακής Επιτροπής Μαθηματικών, διεξάγει κάθε χρόνο τους μεγαλύτερους Μαθητικούς διαγωνισμούς στη χώρα μας.
Στα πλαίσια των διαγωνισμών αυτών διοργανώνει, τον Φεβρουάριο του 2019, έναν νέο πρωτότυπο, ως προς τους στόχους του, διαγωνισμό για μαθητές και μαθήτριες των τεσσάρων τελευταίων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου και των δύο πρώτων τάξεων του Γυμνασίου.
Ο διαγωνισμός αυτός δεν θα ελέγχει άμεσα ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να σκέφτεται με τα εφόδια που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη σκέψη. Ενδεικτικό του σχεδιασμού σε αυτή τη βάση είναι και η δυνατότητα που θα έχουν οι μαθητές να φέρουν και σημειώσεις θεωρίας μαζί τους, σε όλη τη διάρκεια του διαγωνισμού, προκειμένου η απόδοση τους στο διαγωνισμό να μη στηρίζεται σε στείρα απομνημόνευση.

Ο σχεδιασμός του νέου διαγωνισμού έχει επομένως ως αφετηρία ένα βασικό ερώτημα:

Τι σημαίνει όμως σκέπτομαι με Μαθηματικό τρόπο;

Στο ερώτημα αυτό αντί να δώσουμε έναν ορισμό επιλέγουμε να αναζητήσουμε τις μορφές της Μαθηματικής σκέψης, δηλαδή τις μορφές αυτού που ονομάζουμε **Μαθηματική ικανότητα**. Τώρα είναι πλέον φανερός ο κεντρικός στόχος του διαγωνισμού ο οποίος συνοψίζεται στο παρακάτω:

Να εμπλακούν ΟΛΟΙ οι μαθητές σε Μαθηματικές δράσεις στις οποίες θα αξιοποιήσουν εκείνες τις ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ που ανήκουν στο φάσμα του ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΣΚΕΨΗΣ.

Η Μαθηματική ικανότητα δεν είναι μονοδιάστατη, διαθέτει ένα ευρύ φάσμα από πτυχές οι οποίες, στο εγχειρίδιο αυτό, έχουν οργανωθεί σε ενότητες. Τα θέματα του διαγωνισμού είναι οργανωμένα σε αυτές ακριβώς τις ενότητες που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες Μαθηματικές ικανότητες. Οι ικανότητες αυτές έχουν προταθεί διεθνώς από τους ερευνητές της Μαθηματικής εκπαίδευσης. Ενδεικτικές ενότητες θεμάτων του διαγωνισμού: Αριθμητικές ικανότητες, Επαγωγικός συλλογισμός, Αναλογική σκέψη, κριτική ικανότητα, λύση προβλήματος, γεωμετρική αντίληψη κ.λ.π.
Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι ο νέος διαγωνισμός απευθύνεται σε όλα τα παιδιά που θα ήθελαν να γευθούν την μαθηματική εμπειρία, ανεξάρτητα από την απόδοση που χαρακτηρίζει τη σχολική διαδρομή τους.
Οι μαθητές θα πρέπει να απαντήσουν σε 25 θέματα πολλαπλής επιλογής. Βαθμολογούνται μόνο οι σωστές απαντήσεις με 4 μόρια κάθε μία.
Τα θέματα θα έχουν μία κλιμάκωση με τα περισσότερο σύνθετα να βρίσκονται στο τέλος και θα απαιτούν κυρίως Μαθηματικό συλλογισμό και όχι μόνο πράξεις ή απλή εφαρμογή τύπων.
Από όσα αναφέραμε γίνεται φανερό ότι θα είναι εξαιρετικά χρήσιμη η βοήθεια όλων των συναδέλφων:

- Στη φάση της προετοιμασίας του διαγωνισμού με κριτική των ενδεικτικών θεμάτων, με αξιοποίησή τους στη διδασκαλία, και
- στη φάση της ανάλυσης των απαντήσεων στους μαθητές τους είτε έχουν λάβει μέρος στον διαγωνισμό είτε όχι.

Στο κείμενο που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων, που δεν αποτελούν ως σύνολο ένα φύλλο εξέτασης του διαγωνισμού, να ενημερώσουμε τους διδάσκοντες για τη φιλοσοφία του διαγωνισμού, για τους τομείς της μαθηματικής σκέψης που αξιολογούνται και για τον τρόπο με τον οποίο κάθε θέμα μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά.

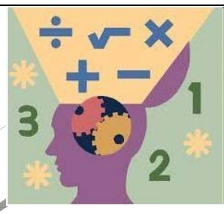
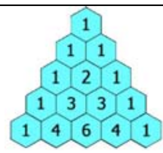
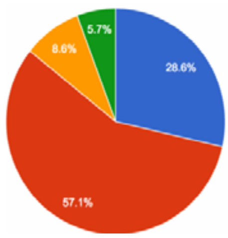
ΟΙ ΕΝΟΤΗΤΕΣ ΤΑΞΙΝΟΜΙΣΗΣ

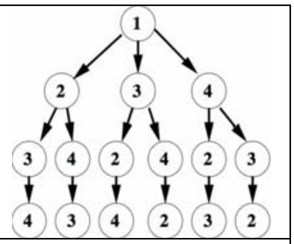
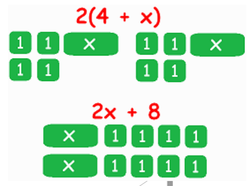
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΩΝ

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, τα θέματα είναι οργανωμένα σε ενότητες. Οι ενότητες αυτές ταξινομούν βασικές Μαθηματικές ικανότητες, βασικούς τρόπους αξιοποίησης των Μαθηματικών εννοιών, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τους εξαντλούν.

Οι ενότητες όπως περιγράφονται παρακάτω δεν αποτελούν παραγράφους των σχολικών βιβλίων και είναι ανεξάρτητες από τις θεματικές ενότητες στις οποίες διαιρείται η ύλη των κεφαλαίων των σχολικών βιβλίων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

Τέλος να σημειωθεί ότι κάθε μία από τις ενότητες αυτές αποτελεί χώρο έρευνας για τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών και διαθέτει μία πλούσια βιβλιογραφία που την υποστηρίζει.

1) Η πρώτη ενότητα αφορά σε ικανότητες να χειριζόμαστε αριθμητικές ποσότητες. Εδώ θα μπορούσαμε να διακρίνουμε υποενότητες όπως να εκτελούμε νοερά πράξεις, να κάνουμε εκτίμηση μιας ποσότητας, να συγκρίνουμε αριθμητικές ποσότητες. Είναι, θα λέγαμε, η γενική ικανότητα να έχουμε μία καλή αίσθηση των αριθμητικών ποσοτήτων.	
2) Η δεύτερη ενότητα περιλαμβάνει θέματα στα οποία θα πρέπει να εφαρμόσουμε επαγωγικό συλλογισμό, δηλαδή να εντοπίσουμε κάποιον κανόνα (μοτίβο) και να τον αξιοποιήσουμε ή να σκεφτούμε με τη βοήθεια κάποιας αναλογίας. (αναλογικός συλλογισμός)	
3) Η τρίτη ενότητα περιλαμβάνει θέματα στα οποία θα πρέπει να επεξεργαστούμε κάποια δεδομένα τα οποία δίνονται μέσα από ένα σχήμα, ένα διάγραμμα, μία εικόνα κ.λ.π (σύνδεση, μετάφραση πολλαπλών παραστάσεων). Επιπλέον περιλαμβάνει θέματα στα οποία δίνονται δεδομένα σε λεκτική περιγραφή και ζητείται η μετάφραση αυτών σε κάποιο σχήμα, διάγραμμα κ.λ.π	

4) Η τέταρτη ενότητα περιλαμβάνει θέματα που αφορούν σε μία ικανότητα που ανήκει στο φάσμα των στοχαστικών Μαθηματικών (συνδυαστική, πιθανότητες, στατιστική) και ιδιαίτερα στη συνδυαστική σκέψη. Οι βασικές δραστηριότητες στην ενότητα αυτή αναφέρονται στον εντοπισμό των συνδυασμών που ικανοποιούν ορισμένες απαιτήσεις.	
5) Η πέμπτη ενότητα περιλαμβάνει θέματα τα οποία περιέχουν αφηρημένες ποσότητες, δηλαδή γράμματα τα οποία παριστάνουν αριθμητικές ποσότητες. Η ικανότητα να χειριζόμαστε παραστάσεις με γράμματα αντί για αριθμούς χαρακτηρίζεται ως αλγεβρική. Το πέρασμα από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη έχει αφετηρία τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού και συνεχίζεται σε όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.	
6) Η έκτη ενότητα αναφέρεται σε θέματα που αφορούν στον Γεωμετρικό συλλογισμό. Εδώ υπάρχουν αρκετές υποενότητες όπως υπολογισμοί γεωμετρικών μεγεθών (μήκη, εμβαδά, όγκοι), γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (συμμετρία, μεγέθυνση, σμίκρυνση).	
7) Η έβδομη ενότητα αναφέρεται στην διαδικασία επίλυση προβλήματος. Στην ενότητα αυτή συνήθως γίνεται ένας περισσότερο ή λιγότερο ευρύτερος συνδυασμός θεματικών ενοτήτων και στρατηγικών, από τις πλέον απλές στις πλέον σύνθετες, που αρκετές από αυτές ήδη αναφέρθηκαν. Επομένως η ενότητα αυτή, έχει, σε κάποιο βαθμό και επαναληπτικό χαρακτήρα. Στην ουσία στην ενότητα αυτή ο λύτης χρειάζεται να διαθέτει ικανότητες οι οποίες χαρακτηρίζονται από την έκφραση ¨διαδικασίες λύσης προβλήματος¨.	
8) Η όγδοη ενότητα αναφέρεται σε θέματα που απαιτούν κάποια βασική ικανότητα του μαθητή να αναγνωρίζει, να δημιουργεί και να χειρίζεται αλγορίθμους. Η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής οργανώνει τον τρόπο σκέψης του μαθητή καθώς αλγόριθμος είναι μία καθορισμένη, βήμα προς βήμα διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, εύρεσης ενός αποτελέσματος, κωδικοποίησης μιας σειράς δράσεων.	

Όπως τονίσαμε και στην αρχή οι παραπάνω ενότητες είναι μεν βασικές, αλλά δεν μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι καλύπτουν όλο το φάσμα των Μαθηματικών ικανοτήτων. Αυτό που εκτιμούμε ότι προσφέρει η συγκεκριμένη διάκριση δεν είναι μια πλήρης ακαδημαϊκού τύπου κατάταξη (εξ΄ άλλου ο στόχος δεν είναι μια αυστηρά επιστημονική παρουσίαση), αλλά μια κυρίως λειτουργική διαδικασία που θεωρούμε ότι είναι δυνατό να φανεί χρήσιμη στα πλαίσια της διδακτικής πρακτικής.

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Κάθε φορά που καλούμεθα να αντιμετωπίσουμε ένα Μαθηματικό θέμα χρειάζεται να ακολουθήσουμε μία στρατηγική, ένα σχέδιο πορείας.

- **Μία στρατηγική για διαφορετικά προβλήματα**

Μία στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικά είδη προβλημάτων, δηλαδή σε προβλήματα που ανήκουν σε διαφορετικές ενότητες. Για παράδειγμα:

<u>Η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα</u>

1) Τα $\frac{3}{5}$ ενός ποσού είναι 24 Πόσο είναι τα $\frac{7}{8}$ του ποσού;

Εδώ υπολογίζουμε πρώτα το $\frac{1}{5}$ που είναι 8, στη συνέχεια ολόκληρο το ποσό που είναι 40 και στη συνέχεια το ζητούμενο κλάσμα του ποσού δηλαδή $\frac{7}{8}\times 40=35$.

2) Μία βρύση χρειάζεται 4 ώρες να γεμίσει μια δεξαμενή ενώ μία άλλη χρειάζεται 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν ανοίξουμε και τις δύο βρύσες συγχρόνως;

Εδώ υπολογίζουμε τι μέρος της δεξαμενής γεμίζει κάθε βρύση σε μία ώρα. Η πρώτη γεμίζει το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής και η άλλη το $\frac{1}{6}$ άρα κάθε ώρα γεμίζουν μαζί τα $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ της δεξαμενής οπότε πλέον η λύση είναι απλή.

- **Ένα πρόβλημα - διαφορετικές στρατηγικές**

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να τονίσουμε ότι πολλές φορές για την λύση ενός προβλήματος, οσοδήποτε απλού ή σύνθετου και αν είναι, μπορεί κάποιος να ακολουθήσει διαφορετικές στρατηγικές. Για παράδειγμα στο πρόβλημα:

Τα $\frac{3}{5}$ ενός ποσού είναι 24. Πόσο είναι τα $\frac{7}{8}$ του ποσού;

α) Είδαμε ότι η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα ήταν αποδοτική και έδωσε αποτέλεσμα 35.

β) Ας εφαρμόσουμε την στρατηγική των ίσων ή ισοδυνάμων κλασμάτων. Τα δύο κλάσματα γίνονται ομώνυμα $\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$ ενώ $\frac{7}{8}=\frac{35}{40}$. Άρα τα $\frac{24}{40}$ του ποσού είναι 24 επομένως τα $\frac{35}{40}$ είναι 35.

Να υπογραμμίσουμε ότι η στρατηγική των ισοδυνάμων κλασμάτων ήταν κατάλληλη γιατί τα δύο κλάσματα αναφέρονται στο ίδιο ποσό. Αν αυτό δεν συνέβαινε τότε η στρατηγική θα ήταν ακατάλληλη και θα οδηγούσε σε λανθασμένο αποτέλεσμα.

Είναι λοιπόν ιδιαίτερα σημαντικό να έχει ο μαθητής κατακτήσει σε ικανοποιητικό βαθμό την Μαθηματική έννοια, στη συγκεκριμένη περίπτωση το κλάσμα, για να επιλέξει κατάλληλη στρατηγική.

Η έννοια της στρατηγικής αποτυπώνεται από στην παρακάτω εικόνα.

Η λύση ενός προβλήματος είναι μία διαδικασία, μία διαδρομή. Για να φτάσουμε στη λύση θα πρέπει να επιλέξουμε μέσα από μία σειρά δρόμων, καθένας από τους οποίους είναι μία στρατηγική.
Η επιλογή της στρατηγικής όμως δεν εξασφαλίζει αμέσως τη λύση του προβλήματος. Θα πρέπει να έχει αναπτυχθεί η ικανότητα να βαδίσουμε με συνέπεια πάνω σε αυτό το δρόμο. Η ικανότητα αυτή χαρακτηρίζεται ως Μαθηματική σκέψη πτυχές της οποίας περιγράφονται στις ενότητες ταξινόμησης των Μαθηματικών ικανοτήτων.

Χωρίς Μαθηματικές ικανότητες η στρατηγική είναι άχρηστη.

Χωρίς στρατηγική οδηγούμεθα σε αδιέξοδα.

Όπως τονίσαμε προηγουμένως δεν υπάρχει μόνο μία στρατηγική για να βρούμε την σωστή απάντηση. ***Υπάρχει μια ποικιλία από στρατηγικές οι οποίες εξαρτώνται από ένα μεγάλο αριθμό παραγόντων, ορισμένοι από τους οποίους είναι εξωμαθηματικής φύσης, (πολιτιστικοί, κοινωνικοί) κλπ. Επομένως είναι σχεδόν αδύνατο να εξαντληθούν στα πλαίσια αυτού του εγχειριδίου****. Συνήθως αναζητούμε τη στρατηγική που θα μας οδηγήσει στην απάντηση στον ελάχιστο χρόνο, μία τέτοια στρατηγική είναι και η πιο κομψή!. Επίσης είναι αρκετά συχνό φαινόμενο οι ίδιες στρατηγικές να αντιστοιχούν σε διάφορες κατηγορίες θεματικών ενοτήτων.*

Παρατήρηση: Το ζήτημα των θεματικών ενοτήτων και των κατάλληλων στρατηγικών είναι αρκετά ευρύ και σύνθετο καθώς οι οπτικές των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών σε αρκετές περιπτώσεις διαφέρουν μεταξύ τους. Στο κείμενο που ακολουθεί γίνεται προσπάθεια λειτουργικής κατάταξης των βασικών θεματικών ενοτήτων και των σχετικών στρατηγικών διαχείρισης που παίρνει υπόψη τα ελληνικά και τα διεθνή ερευνητικά δεδομένα. Ο τελικός στόχος είναι μια προσπάθεια χαρτογράφησης των βασικών ικανοτήτων, σκέψεων, συλλογισμών και στρατηγικών που αναφέρονται στα Μαθηματικά του Δημοτικού και του Γυμνασίου και όπως κάθε προσπάθεια κατάταξης είναι ανοικτή σε τεκμηριωμένες συμπληρώσεις και βελτιώσεις.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ

Η μορφή παρουσίασης των θεμάτων

Με τα παραδείγματα που ακολουθούν θα προσπαθήσουμε να δείξουμε το πνεύμα του διαγωνισμού και συγχρόνως να αναπτύξουμε μία νέα αντίληψη για το πως ο Μαθηματικός τρόπος σκέψης θα μπορούσε να γίνει κτήμα όλων των μαθητών.

Κάθε παράδειγμα διατυπώνεται και αναλύεται σε δύο στήλες.

- Στην πρώτη στήλη βρίσκεται η εκφώνηση του θέματος και 5 απαντήσεις από τις οποίες θα πρέπει να επιλεγεί μόνο μία καθώς μόνο μία είναι σωστή.
- Στη δεύτερη στήλη γίνεται μία αναλυτική επεξεργασία του θέματος.

i) Αρχικά αναφέρονται οι βασικές γνώσεις από τα Μαθηματικά που θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν στην συγκεκριμένη ερώτηση ή στο πρόβλημα. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε μαθητής θα μπορεί να συμβουλεύεται κάποιες σημειώσεις θεωρίας που θα μοιράζονται μαζί με το φύλλο των ερωτήσεων.

Στο σημείο αυτό θέλουμε να τονίσουμε για άλλη μία φορά ότι στόχος είναι να αναπτύξουμε την Μαθηματική μας σκέψη και όχι απλά να εξασκήσουμε τη μνήμη μας.

ii) Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στην στρατηγική που μπορούμε να ακολουθήσουμε ώστε να φτάσουμε όσο το δυνατόν συντομότερα στη μοναδική σωστή απάντηση από τις 5 που παρατίθενται.

iii) Τέλος περιγράφεται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο θα εφαρμοστεί η συγκεκριμένη στρατηγική.

Μετά την διδακτική επεξεργασία του θέματος ακολουθεί μία σύντομη πρόταση διδακτικής αξιοποίησης του θέματος από τον εκπαιδευτικό στην τάξη.

Παρατίθεται το σημείο ή τα σημεία διδασκαλίας στα οποία θα μπορούσε να ενσωματωθεί λειτουργικά το παράδειγμα.

Σε επιλεγμένα παραδείγματα υπάρχει προτεινόμενος σύνδεσμος σε ψηφιακό αρχείο από το ψηφιακό σχολείο (Φωτόδεντρο).

Ο εκπαιδευτικός έχει δυνατότητα να χρησιμοποιήσει το ψηφιακό αρχείο για περαιτέρω διερεύνηση και επέκταση του θέματος.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Ικανότητα στο χειρισμό αριθμητικών ποσοτήτων

Η ικανότητα χειρισμού αριθμητικών ποσοτήτων θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι αποτελεί την πρωταρχική, την θεμελιώδη ικανότητα που θα πρέπει να αναπτύξει ο μαθητής της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Πτυχές της ικανότητας αυτής είναι η ικανότητα εκτίμησης και η ικανότητα νοερών υπολογισμών. Η εκτίμηση μιας ποσότητας ή ενός αποτελέσματος πράξεων είναι μία πολύ σημαντική Μαθηματική ικανότητα ιδιαίτερα χρήσιμη στις καθημερινές μας δραστηριότητες. Αν για παράδειγμα θέλουμε να γνωρίζουμε πόσο είναι το ΦΠΑ (24%) σε έναν λογαριασμό 158€ σκεπτόμαστε ότι το 24% είναι κοντά στο 25% που είναι το $\frac{1}{4}$ και επειδή το 158 είναι κοντά στο 160 άρα το ΦΠΑ θα είναι λίγο πιο κάτω από τα 40€. Πράγματι είναι 38€. Εδώ έχουμε κάνει κάποιες νοερές πράξεις και η ικανότητα αυτή είναι συμπληρωματική της ικανότητας εκτίμησης. Τέλος σε πολλές περιπτώσεις θα πρέπει να κάνουμε σύγκριση δύο ποσών οπότε θα πρέπει να επιστρατεύσουμε τόσο την εκτίμηση όσο και τους νοερούς υπολογισμούς για να βγάλουμε σωστά συμπεράσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 4.356×2.154 είναι ίσο με:

Α) 9.382.826

Β) 9.382.824

Γ) 8.382.824

Δ) 8.382.826

Ε) 9.992.824

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Πολλαπλασιασμός δύο πολυψήφιων αριθμών.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Απορρίπτω απαντήσεις. Προσεγγίζω με εκτίμηση.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

*Αρχικά πρέπει να σκεφτούμε ότι το γινόμενο θα πρέπει να έχει τελευταίο ψηφίο το 4 καθώς το γινόμενο των μονάδων των δύο αριθμών είναι 6×4=2**4**.*
(Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να περιοριστούμε στις απαντήσεις Β , Γ και Ε).
Το γινόμενο που μας ζητούν θα πρέπει να υπερβαίνει τα 8.600.000 καθώς προσεγγιστικά το 43 × 21 είναι μεγαλύτερο του 900, όχι όμως πολύ.
Με βάση τα παραπάνω το ζητούμενο γινόμενο θα πρέπει να είναι το 9.382.824. **(άρα Β)**

Διδακτική αξιοποίηση: Το θέμα αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί κατά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού πολυψήφιων αριθμών σε συνδυασμό με την στρατηγική της εκτίμησης στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού.
Είναι προφανές ότι το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να προσαρμοστεί σε μικρότερες τάξεις και η εκτίμηση ενός γινομένου να αποτελέσει μία εισαγωγική δραστηριότητα για την εκμάθηση της προπαίδειας.
Στο κεφάλαιο 10 του βιβλίου της ΣΤ΄ Δημοτικού, στη σελίδα 27, γίνεται συζήτηση για το πότε είναι απαραίτητος ο υπολογιστής τσέπης και για την εργασία με τον νου κατά τον υπολογισμό του αποτελέσματος μιας πράξης.

Δραστηριότητα 2η

Ο υπολογιστής τσέπης δεν αντικαθιστά τις υπόλοιπες μεθόδους υπολογισμού! Επιλέγω πότε πρέπει να εργαστώ με τον **νου,** με **χαρτί** και **μολύβι** ή με **υπολογιστή τσέπης.** Επέλεξε με ποια από τις τρεις μεθόδους μπορείς να απαντήσεις πιο γρήγορα σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις. Μέτρησε και σημείωσε για κάθε περίπτωση πόσα πλήκτρα πρέπει να πατήσεις στον υπολογιστή τσέπης.

- $110 + 24 =$ ....
- $1100 : 10 =$ ....
- Είναι τέλεια η διαίρεση 99578 : 2; **ΝΑΙ – ΟΧΙ**..............................
- $(2 \cdot 48 + 112 : 2 - 4 \cdot 0{,}5) : 2 =$ ....
- $32 \cdot 22459{,}90 =$ ....
- Είναι πάντα η χρήση του υπολογιστή τσέπης η πιο σύντομη μέθοδος; ....

27

Εδώ θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη η διαπραγμάτευση με τους μαθητές για το πότε η εκτίμηση ενός αποτελέσματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε καταστάσεις που ο υπολογιστής τσέπης απουσιάζει.

2) Δίνονται τα κλάσματα $α=\frac{125}{150}$, $β=\frac{2117}{7112}$, $γ=\frac{14}{13}$, $δ=\frac{521}{522}$.

Αν θελήσουμε να βάλουμε σε μία σειρά τα κλάσματα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τότε η σωστή σειρά είναι:

Α) α, β, γ, δ

Β) γ, α, δ, β

Γ) β, α, δ, γ

Δ) β, δ, γ, α

Ε) δ, α, β, γ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Η σχέση ενός κλάσματος με τη μονάδα.

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Εκτιμώ τη σχέση του αριθμητή προς τον παρονομαστή.

ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Αρχικά παρατηρούμε ότι στο κλάσμα β ο αριθμητής είναι αρκετά μικρότερος από το μισό του παρονομαστή, άρα το κλάσμα είναι αρκετά μικρότερο από το $\frac{1}{2}$ *πράγμα που δεν συμβαίνει με τα άλλα κλάσματα. Αυτό σημαίνει ότι αναζητούμε τη σωστή απάντηση μεταξύ των Γ, Δ απαντήσεων.*
Το κλάσμα γ είναι μεγαλύτερο της μονάδας πράγμα που δεν συμβαίνει με τα άλλα κλάσματα άρα το γ θα πρέπει να είναι τελευταίο. ***(άρα Γ)***

Διδακτική αξιοποίηση:

Το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να συνδυαστεί με την εφαρμογή στη σελίδα 48 του νέου σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ τάξης του Δημοτικού. Ενότητα 3. Σύγκριση και διάταξη κλασμάτων.

Προτεινόμενη δραστηριότητα από ψηφιακό σχολείο: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1958?locale=el

3) Το άθροισμα 151+152+153+154+155 είναι ίσο με:

Α) 4×155

Β) 5×153

Γ) 5×154

Δ) 4×155

Ε) 5×155

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Μία πρόσθεση μπορεί να πραγματοποιηθεί με οποιαδήποτε σειρά. (Προσεταιριστική ιδιότητα)
Το γινόμενο ακέραιου επί έναν αριθμό είναι στην ουσία επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Αναλύω κάθε πολλαπλασιασμό (στις απαντήσεις) σε άθροισμα.

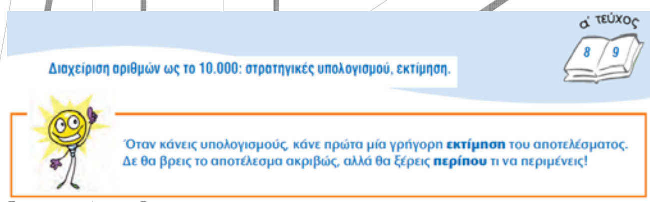
<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Αρχικά θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα περιέχει 5 διαδοχικούς αριθμούς με κεντρικό το 153.
Αν αναλύσω το π.χ το 4×155 σε 155+155+155+155 παρατηρώ ότι έχουν αυξηθεί κατά 1 οι δύο προηγούμενοι όροι του 155 αθροίσματος αλλά έχει αφαιρεθεί το 151, που είναι μεγάλη ποσότητα. Αυτό σημαίνει ότι το 4×155 είναι αρκετά μικρότερο από το άθροισμα.
Αν αναλύσω το 5×153 σε 153+153+153+153+153 τότε όσα προσθέσαμε στους δύο πρώτους όρους τα αφαιρέσαμε από τους δύο τελευταίους άρα προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα με το αρχικό άθροισμα. **(άρα Β)**

Διδακτική αξιοποίηση:

Το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά σε θεματικές περιοχές που αναφέρονται σε στρατηγικές εκτίμησης και σύντομου υπολογισμού αθροισμάτων ή και γινομένων.

Για παράδειγμα οι δραστηριότητες στις σελίδες 10 - 11 σχολικού εγχειριδίου της Δ΄ τάξης του Δημοτικού αναφέρονται σε αυτό το θέμα.



ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού

2α) Εντοπισμός και αξιοποίηση μοτίβων.

Μοτίβα είναι μία σειρά από αριθμούς ή άλλα αντικείμενα τα οποία ακολουθούν έναν κανόνα. Όταν ανακαλύπτουμε τον κανόνα μπορούμε να προβλέψουμε τι θα ακολουθήσει μετά από ορισμένες επαναλήψεις. Τον κανόνα αρκετές φορές μπορούμε να ανακαλύψουμε κάνοντας δοκιμές. Το σημαντικό είναι ότι ένα αριθμητικό ή Γεωμετρικό μοτίβο θα μπορούσε να συνδυαστεί διδακτικά με μία άλλη Μαθηματική έννοια ή διαδικασία.

1) Το γινόμενο $(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot(1-\frac{1}{5})\cdot(1-\frac{1}{6})\cdot(1-\frac{1}{7})\cdot(1-\frac{1}{8})$ είναι ίσο με:

Α) $\frac{7}{8}$

Β) $\frac{1}{8}$

Γ) 1

Δ) $\frac{4}{5}$

Ε) $\frac{3}{7}$

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων.

Η απλοποίηση κλασμάτων

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Υπολογίζω απλούστερες παραστάσεις.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Αρχικά θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι αριθμοί δεν είναι τυχαίοι αλλά ακολουθούν κάποιο κανόνα. Αν κάνουμε κάποιες δοκιμές με τις πρώτες 2-3 παρενθέσεις ίσως παρατηρούσαμε κάποιον επιπλέον κανόνα στα αποτελέσματα.

Πράγματι παρατηρούμε ότι:

$$(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}=\frac{1}{3}$$

$$(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}=\frac{1}{4}$$

Πως μπορούμε τώρα να απαντήσουμε αμέσως για το αποτέλεσμα της αρχικής παράστασης; **(άρα Β)**

Διδακτική αξιοποίηση: Το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά σε θεματικές περιοχές που αναφέρονται σε πράξεις κλασμάτων σε συνδυασμό με θέματα αριθμητικών μοτίβων. Στο νέο βιβλίο της Ε΄ Δημοτικού η Ενότητα 3 στη σελίδα 52.

Το **γινόμενο δυο κλασμάτων** είναι ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$$

Βρίσκουμε το $\frac{1}{5}$ του $\frac{2}{3}$.

2) Το γινόμενο *9×9×9×9×9×9×9×9×9×9* είναι ένας αριθμός του οποίου το τελευταίο ψηφίο είναι ίσο με:

Α) 9

Β) 6

Γ) 1

Δ) 0

Ε) 8

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Πολλαπλασιασμός μονοψήφιου επί πολυψήφιο αριθμό.

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Υπολογίζω απλούστερες παραστάσεις.

ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Είναι προφανές ότι δεν ζητά να υπολογίσουμε το τελικό αποτέλεσμα.
Ας κάνουμε μερικές δοκιμές μήπως και βρούμε κάποιον κανόνα.
*9×9=8**1***
*9×9×9=72**9***
*9×9×9×9 = ……….**1***
*9×9×9×9×9 = ………**9***
*Παρατηρούμε ότι όλα τα γινόμενα έχουν τελευταίο ψηφίο **1** (όταν πολλαπλασιάζουμε ζυγό αριθμό από 9άρια) ή **9** (όταν πολλαπλασιάζουμε μονό αριθμό από 9άρια)*
*Επειδή το γινόμενο περιέχει 10 εννιάρια άρα θα έχει τελευταίο ψηφίο το **1*** **(άρα Γ)**

Διδακτική αξιοποίηση: Το παραπάνω θέμα θα μπορούσε αρχικά να αξιοποιηθεί διδακτικά στη Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού. Επιπλέον είναι κατάλληλο για θεματικές περιοχές που αναφέρονται σε δυνάμεις Φυσικών αριθμών τόσο στην ΣΤ΄ Δημοτικού (λιγότερο) σελίδα 42 όσο και στο κεφάλαιο των Φυσικών αριθμών στην Α΄ Γυμνασίου (περισσότερο).

Το θέμα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί σε πολλαπλά γινόμενα ή δυνάμεις αριθμών όπως του 5 και του 6 (απλή περίπτωση) ή σε δυνάμεις του 7 και του 8 όπου απαιτείται περισσότερη διερεύνηση για να εντοπιστούν τα μοτίβα των τελευταίων ψηφίων.

2β) Αναλογικός συλλογισμός

Η αναλογική σκέψη είναι στην ουσία η ικανότητα να συγκρίνουμε δύο σχέσεις και όχι μόνο δύο ποσότητες. Η απλούστερη αναλογική σύγκριση είναι αυτή μεταξύ δύο κλασμάτων. Για παράδειγμα η σχέση που έχει το 2 προς το 3 είναι ίδια με τη σχέση που έχει το 10 προς το 15. Γράφω λοιπόν $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ και αποκαλώ τα κλάσματα ισοδύναμα ενώ την ισότητα την λέω αναλογία. Αυτά συμβαίνουν βέβαια όταν συγκρίνω αριθμούς αλλά η αναλογική σκέψη δεν περιορίζεται μόνο σε αριθμούς. Για παράδειγμα λέμε:

Η σχέση που έχουν τα χρώματα με τον ζωγράφο είναι ανάλογη προς την σχέση που έχουν οι νότες προς τον συνθέτη μουσικής.

Γενικά το να μελετά κάποιος καταστάσεις που συνδέονται μέσω κάποιας με αναλογίας είναι μία πολύ καλή δραστηριότητα για να αναπτύξει την νοητική του ικανότητα.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα περιοριστούμε αποκλειστικά και μόνο σε αριθμητικά δεδομένα.

1) Ο Λευτέρης και οι φίλοι του βρίσκονται στη βιβλιοθήκη του σχολείου όπου μπορούν να παίζουν και επιτραπέζια παιχνίδια σε τραπέζια όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα. Σε κάθε τραπέζι χρειάζονται 2 ζάρια.

Ο Λευτέρης ανέλαβε να βρει ζάρια για όλους και έτσι μοίρασε τα 8 ζάρια που χρειαζόντουσαν σε όλα τα τραπέζια.

Τα παιδιά που θα παίξουν επιτραπέζια παιχνίδια είναι:

Α) 4 Β) 8 Γ) 12 Δ) 16 Ε) 20

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση αριθμών ίσων με 2 ή με 4 ή πολλαπλάσια του 2 και του 4 (για μεγαλύτερες τάξεις από Β΄ Δημοτικού).

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

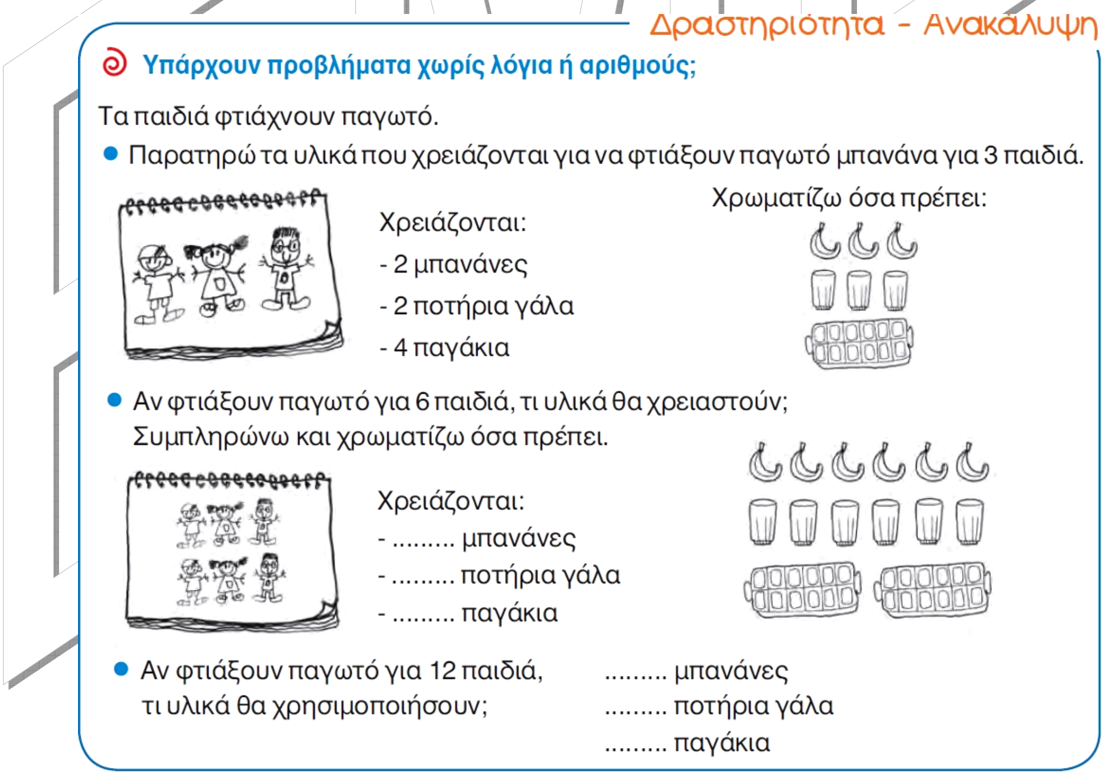
Προσθέτω νοερά και επαναληπτικά το 2 μέχρι να πάρω άθροισμα 8.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Με βάση την εικόνα θα μπορούσαμε να σκεφτούμε θα πρέπει να επαναλάβουμε τα 2 ζάρια 4 φορές για να γίνουν 8.

Άρα 4 φορές θα πρέπει να επαναλάβουμε και το 4 (με βάση την εικόνα του τραπεζιού με τις 4 καρέκλες. **(άρα Δ)**

Διδακτική αξιοποίηση: Το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά στη Β΄ Δημοτικού αλλά και σε μεγαλύτερη τάξη. Στη Β΄ Δημοτικού στο σχολικό εγχειρίδιο πραγματοποιείται μία πρώιμη, στοιχειώδης επαφή των μαθητών με τον αναλογικό συλλογισμό.
Το σημαντικό είναι ότι εδώ η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού έχει τη μορφή: Ότι κάνω στα δύο ζάρια, για να πετύχω το κατάλληλο αποτέλεσμα, το ίδιο θα πρέπει να κάνω και στις 4 καρέκλες. Θα μπορούσε κάποιος να αναγνωρίσει μία πρώιμη επαφή των παιδιών με την έννοια του συντελεστή των αναλόγων ποσών, καθώς εδώ αυτός συμπίπτει με τον αριθμό των επαναλήψεων.
Σχολικό εγχειρίδιο Β΄ Δημοτικού (σελίδα 16)


Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Υπάρχουν προβλήματα χωρίς λόγια ή αριθμούς;

Τα παιδιά φτιάχνουν παγωτό.

- Παρατηρώ τα υλικά που χρειάζονται για να φτιάξουν παγωτό μπανάνα για 3 παιδιά.

Χρειάζονται:
- 2 μπανάνες
- 2 ποτήρια γάλα
- 4 παγάκια

Χρωματίζω όσα πρέπει:

- Αν φτιάξουν παγωτό για 6 παιδιά, τι υλικά θα χρειαστούν; Συμπληρώνω και χρωματίζω όσα πρέπει.

Χρειάζονται:
- .... μπανάνες
- .... ποτήρια γάλα
- .... παγάκια

- Αν φτιάξουν παγωτό για 12 παιδιά, τι υλικά θα χρησιμοποιήσουν;

.... μπανάνες
.... ποτήρια γάλα
.... παγάκια

2) Ο Βασίλης τα καταφέρνει αρκετά καλά με τους υπολογιστές και έτσι η δασκάλα του του ανέθεσε να επεξεργαστεί μία φωτογραφία του Παρθενώνα 32cm×12cm σε έναν από τους υπολογιστές του σχολείου του. Καθώς προσπαθούσε ο Βασίλης να κάνει σμίκρυνση στην εικόνα κατασκεύασε 5 διαφορετικές με τις εξής διαστάσεις:

Α) (6cm×2cm)

Β) (16cm× 5cm)

Γ) (3,2cm ×0,6cm)

Δ) (4cm×1,5cm)

Ε) (10cm×5cm)

Ποια από αυτές δεν παραμορφώνει τη φωτογραφία του Παρθενώνα;

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Μεγέθυνση ή σμίκρυνση σημαίνει ότι όλες οι πλευρές του σχήματος πολλαπλασιάζονται επί τον ίδιο αριθμό.

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για να έχω μεγέθυνση ή σμίκρυνση θα πρέπει ο λόγος (το πηλίκο) της βάσης προς το ύψος να είναι σταθερό.

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Αναζητώ ισοδύναμα κλάσματα

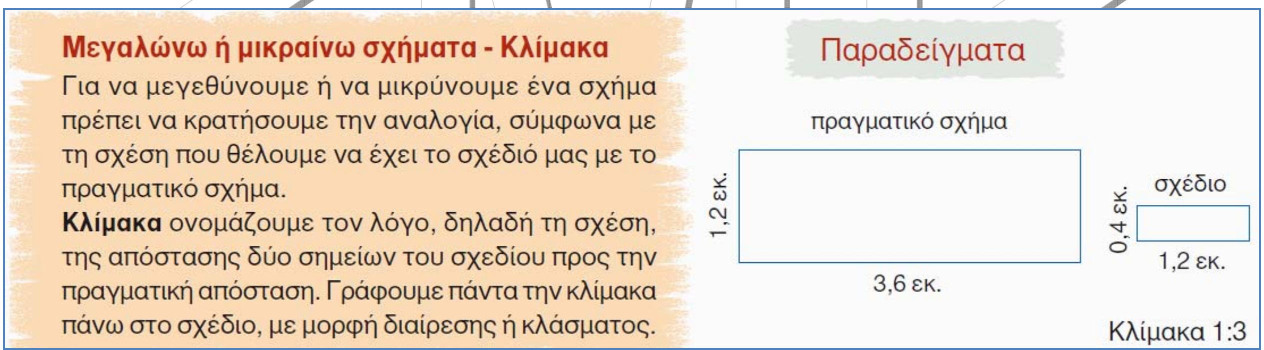
ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Ο λόγος (πηλίκο) 32/12 είναι κλάσμα ισοδύναμο προς το 8/3.

Παρατηρώντας προσεκτικά τις απαντήσεις βλέπουμε ότι οι διαστάσεις 4cm×1,5cm έχουν λόγο 8/3.

(άρα Δ)

Διδακτική αξιοποίηση: Το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά στη σύνδεση της μεγέθυνσης – σμίκρυνσης με τα ανάλογα ποσά. Προτείνεται να δοθεί ως επαναληπτικό θέμα στη θεματική ενότητα της μεγέθυνσης - σμίκρυνσης στην ΣΤ΄ Δημοτικού (σελ. 144)


Μεγαλώνω ή μικραίνω σχήματα - Κλίμακα
Για να μεγεθύνουμε ή να μικρύνουμε ένα σχήμα πρέπει να κρατήσουμε την αναλογία, σύμφωνα με τη σχέση που θέλουμε να έχει το σχέδιό μας με το πραγματικό σχήμα.
Κλίμακα ονομάζουμε τον λόγο, δηλαδή τη σχέση, της απόστασης δύο σημείων του σχεδίου προς την πραγματική απόσταση. Γράφουμε πάντα την κλίμακα πάνω στο σχέδιο, με μορφή διαίρεσης ή κλάσματος.

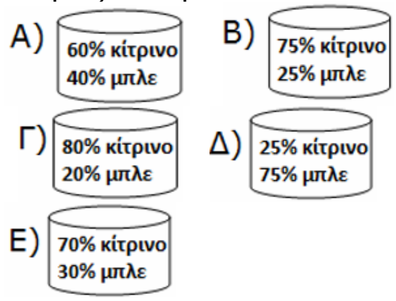
όσο και στην Α΄ Γυμνασίου ως συμπληρωματικό θέμα στις ασκήσεις της σελίδας 92 στις οποίες υπάρχει ανάλογο θέμα:

8. *Αν οι διαστάσεις ενός δωματίου, σε ένα σχέδιο με κλίμακα 1:250, είναι 3x5, οι πραγματικές διαστάσεις του δωματίου θα είναι .....x..... .*

Προτεινόμενη δραστηριότητα από ψηφιακό σχολείο: Με τον παρακάτω σύνδεσμο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν δυναμικά καταστάσεις προβλήματος παρόμοιου με το παραπάνω.

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-5472

3) Για να βάψει ένα δωμάτιο ο τεχνίτης με μία συγκεκριμένη απόχρωση χρειάζεται η μπογιά του να περιέχει 3 μέρη κίτρινο χρώμα και 2 μέρη μπλε.
Ποιο από τα παρακάτω κουτιά μπογιάς θα πρέπει να επιλέξει:



ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Κάθε ποσοστό είναι στην ουσία κλάσμα με παρονομαστή το 100.
Συγκρίνω ομώνυμα κλάσματα.

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Συγκρίνω λόγους χρωμάτων με τον λόγο 3/2

ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Πρέπει να συγκρίνουμε λόγους ποσοστών. Αφού τα ποσοστά είναι ομώνυμα κλάσματα αρκεί να συγκρίνουμε τους λόγους των αριθμητών.
Καθώς 60/40 = 6/4 = 3/2
(άρα Α)

Διδακτική αξιοποίηση: Το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά στη θεματική περιοχή που αναφέρεται στα ποσοστά σε συνδυασμό με τα ανάλογα ποσά τόσο στην ΣΤ΄ Δημοτικού όσο και στην Α΄ Γυμνασίου. Είναι κατά κάποιο τρόπο συνδυαστικό επαναληπτικό θέμα.

Προτεινόμενη δραστηριότητα από ψηφιακό σχολείο: Με τον παρακάτω σύνδεσμο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν δυναμικά καταστάσεις προβλήματος παρόμοιου με το παραπάνω.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1866?locale=el

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Ικανότητα επεξεργασίας και μετάφρασης δεδομένων από ένα αναπαραστασιακό πλαίσιο (γλωσσικό, εικονικό, πινακοποιημένο, διαγραμματικό) σε ένα άλλο.

4α. από ένα διάγραμμα, μία εικόνα ή ένα σχήμα στη φυσική γλώσσα. (αποκωδικοποίηση της εικόνας)

Πολλές φορές μας δίνουν ένα διάγραμμα, μία εικόνα ή ένα σχήμα και με βάση αυτό θα πρέπει εμείς να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Αυτό που κάνουμε στην ουσία είναι μία αποκωδικοποίηση της εικόνας, δηλαδή την ερμηνεύουμε, εντοπίζουμε τη σημασία της. Καθημερινά συναντάμε στο δρόμο εικόνες - σήματα όπως το παρακάτω:

Εδώ το κόκκινο σχήμα και το μαύρο σχήμα σημαίνουν διαφορετικά πράγματα τα οποία όμως όταν συνδυαστούν συνθέτουν ένα πολύ συγκεκριμένο μήνυμα.

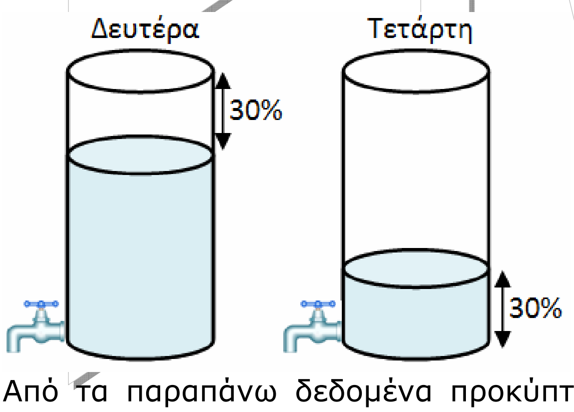
Τελικά όταν έχουμε μία εικόνα θα πρέπει αρχικά να κατανοήσουμε τι σημαίνει κάθε ιδιαίτερο κομμάτι της και στη συνέχεια πως τα κομμάτια αυτά συνδυάζονται και οδηγούν σε κάποιο συμπέρασμα. Το ίδιο συμβαίνει όταν έχω ως δεδομένο έναν πίνακα με αριθμητικές ή άλλες πληροφορίες.

4β. Μετάφραση δεδομένων από τη φυσική γλώσσα σε κατάλληλο διάγραμμα, εικόνα, σχήμα ή σε συμβολική γλώσσα.

Εδώ αναφερόμαστε σε μεταφορά δεδομένων από τη φυσική γλώσσα σε ένα σχήμα, διάγραμμα ή σε μια περισσότερο τυπική γλώσσα όπως είναι η συμβολική της Άλγεβρας. Στην περίπτωση αυτή εντάσσεται η κατασκευή μιας εξίσωσης για τις ανάγκες επίλυσης ενός λεκτικού προβλήματος. Στη συγκεκριμένη κατασκευή σημαντικό ρόλο έχει και η Αλγεβρική ικανότητα για την οποία θα γίνει λόγος σε άλλη θεματική ενότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μία δεξαμενή νερού και το περιεχόμενό της στην αρχή της εβδομάδας (Δευτέρα) και κάπου στη μέση της εβδομάδας (Τετάρτη). Σε αυτό το διάστημα είχαν αφαιρεθεί 40 τόνοι νερού.



Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι η χωρητικότητα της δεξαμενής είναι:

Α) 60 τόνοι

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Μπορώ να προσθέσω ή να αφαιρέσω ποσοστά μόνο όταν αναφέρονται στο ίδιο ποσό!!!

Όταν είναι γνωστό πόσο είναι το 40% ενός ποσού τότε μπορούμε να υπολογίσουμε ολόκληρο το ποσό. Προφανώς το ίδιο γίνεται και με οποιοδήποτε ποσοστό μας είναι γνωστό.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Εργάζομαι με ποσοστά πάνω στο ίδιο ποσό

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Αρχικά παρατηρούμε προσεκτικά της πληροφορίες ώστε να αντιληφθούμε ότι την Δευτέρα ήταν <u>γεμάτη</u> η δεξαμενή κατά 70%, ενώ την Τετάρτη ήταν <u>γεμάτη</u> κατά 30%.

Β) 80 τόνοι

Γ) 100 τόνοι

Δ) 120 τόνοι

Ε) 140 τόνοι

Μας ενδιαφέρει πόσο νερό αφαιρέθηκε και αυτό είναι σε ποσοστό 70%-30%=40% της δεξαμενής.
Αυτό το 40% αντιστοιχεί σε 40 τόνους επομένως το 100% είναι 100 τόνοι.
(άρα Γ)

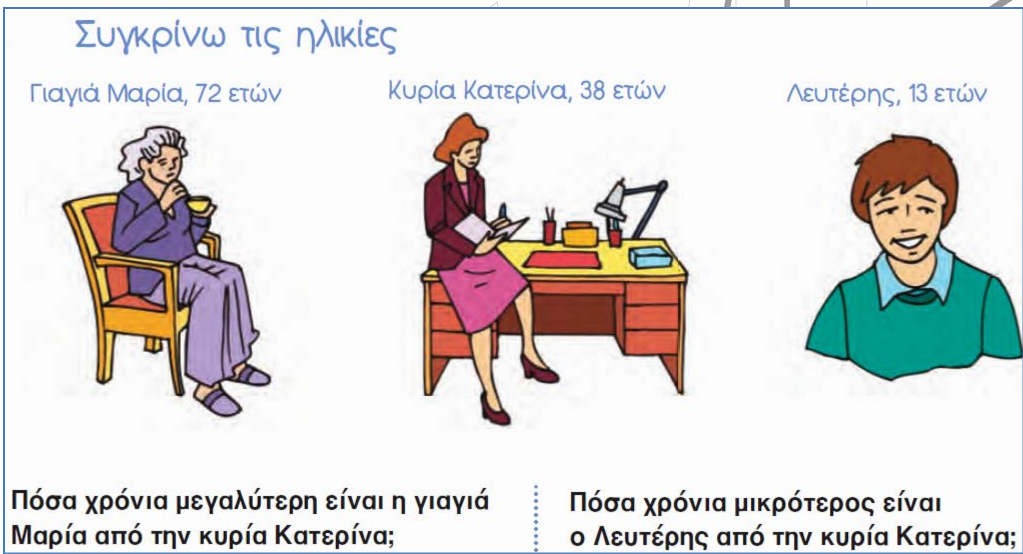
Διδακτική αξιοποίηση

Το θέμα αυτό θα μπορούσε να αξιοποιηθεί σε ομάδες προβλημάτων τα οποία σε σχολικά εγχειρίδια ονομάζονται ¨Εικονοπροβλήματα¨ και εμφανίζονται υπό μορφή δραστηριοτήτων.

Στη Β΄ τάξη του Δημοτικού μάλιστα γίνεται λόγος για λύση προβλήματος μόνο από την εικόνα, χωρίς πράξεις (σελίδα 17)

Συμπέρασμα *Ένα πρόβλημα μπορεί να μην έχει λόγια. Υπάρχουν προβλήματα που δε χρειάζεται να κάνουμε υπολογισμούς με αριθμούς.* ***Χρησιμοποιούμε τη ζωγραφική, χάντρες και ό,τι άλλο μας βοηθάει να καταλάβουμε*** *τι μας δίνει και τι μας ζητάει το πρόβλημα.*

και στην Γ΄ Δημοτικού (σελ. 39)



Αλλά και στην Δ΄ Δημοτικού (σελ. 29).

2) Με τα στοιχεία της εικόνας συμπληρώνουμε το παρακάτω πρόβλημα.

- .... Πόσους επιβάτες μπορούν να μεταφέρουν 16 τέτοια λεωφορεία;
- Αρχικά εκτιμώ και στη συνέχεια υπολογίζω με ακρίβεια:

Στο Γυμνάσιο είναι απαραίτητη η συγκεκριμένη ικανότητα και μάλιστα και οι δύο πτυχές της. Για παράδειγμα στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου στη σελίδα 74.

1. *Αντιστοίχισε τις προτάσεις των γραμμών του πρώτου πίνακα με τις εκφράσεις αριθμών και γραμμάτων των γραμμών στο δεύτερο πίνακα.*

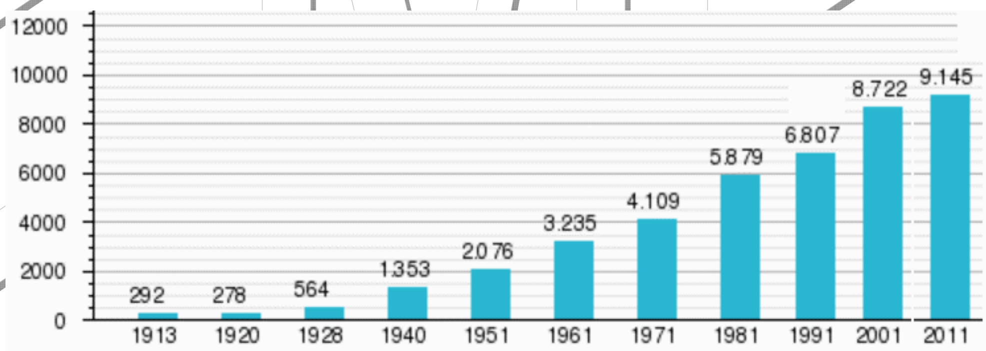
το τριπλάσιο ενός αριθμού	$x-y > 20$
το δεκαπλάσιο ενός αριθμού	$x\cdot y=32$
ένας αριθμός αυξάνεται κατά 12	$3\cdot x$
ένας αριθμός ελαττώνεται κατά 5	$x+12$
η διαφορά δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη του 20	$10\cdot x$
το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με 32	$x-5$

2. *Διατύπωσε με λόγια τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:*
(α) $3\cdot x + 25$, (β) $(\frac{1}{2})\cdot x - 7 = 2$, (γ) $\alpha - 2\cdot\beta$, (δ) $4\cdot\kappa + 7\cdot\kappa = 88$

Εδώ η τεχνολογία έχει να προσφέρει σημαντική υποστήριξη σε δραστηριότητες που αφορούν στην συγκεκριμένη ικανότητα. Για παράδειγμα στο ψηφιακό σχολείο στο:

http://photodentro.edu.gr/aggregator/lo/photodentro-lor-8521-5533

2) Από την Εθνική Στατιστική Υπηρεσία ανακοινώθηκε η εξέλιξη του πληθυσμού της Ηγουμενίτσας από το 1913 μέχρι και το 2011.



Με βάση το διάγραμμα αυτό προκύπτει ότι:

Α) Η μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού έγινε από το 1951 μέχρι το 1961

Β) Η μικρότερη αύξηση πληθυσμού μετά το 1940 σημειώθηκε από το 2001 μέχρι το 2011.

Γ) Δεν σημειώθηκε καμία ελάττωση του πληθυσμού από το 1913 και μετά.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Κάνω εκτίμηση της διαφοράς δύο τετραψήφιων αριθμών.

ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

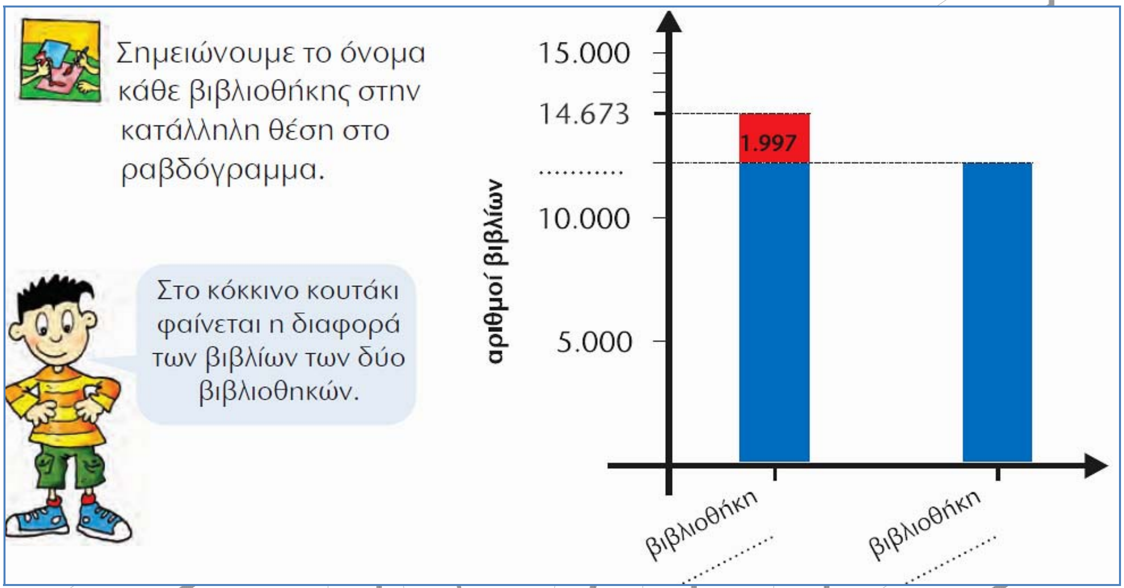
Παρατηρούμε με ιδιαίτερη προσοχή τόσο τα αριθμητικά δεδομένα όσο και το

Δ) Το 1984 ο πληθυσμός ήταν 6.500.
Ε) Τίποτε από τα προηγούμενα.

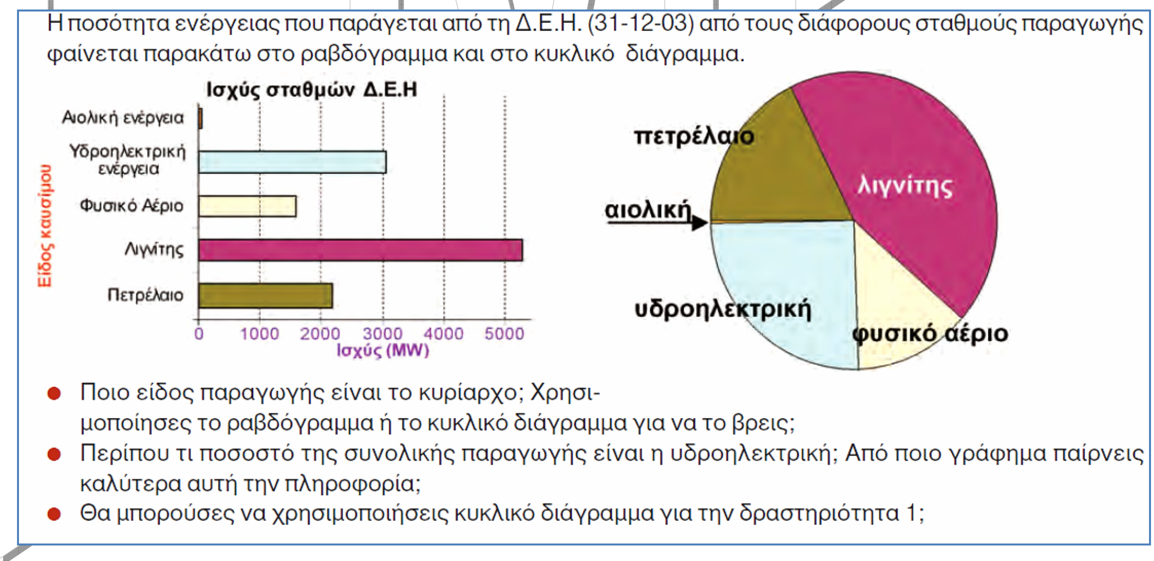
ύψος κάθε μπάρας.
Διαπιστώνουμε αρχικά οπτικά ότι η αύξηση από το 2001 μέχρι το 2011 είναι πολύ μικρή και το επιβεβαιώνουμε με πρόχειρη εκτίμηση. ***(άρα Β)***

Διδακτική αξιοποίηση

Σε θέματα που σχετίζονται με Στατιστικά δεδομένα και διαγράμματα η ικανότητα της μετάφρασης από ένα αναπαραστασιακό πλαίσιο σε ένα άλλο είναι πρωταρχική. Στα σχολικά εγχειρίδια έχουμε μία κλιμακούμενη εμφάνιση τέτοιων θεμάτων από μία απλή μορφή (Δ΄ Δημοτικού σελ. 89)



μέχρι και την ΣΤ΄τάξη με θέματα περισσότερο σύνθετα ως προς τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί, π.χ σελίδα 113



ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Συνδυαστική ικανότητα

Μία πολύ χρήσιμη Μαθηματική ικανότητα είναι και αυτή που μας επιτρέπει να βρίσκουμε σύντομα συνδυασμούς και να μετράμε το πλήθος τους. Η ικανότητα αυτή αναπτύσσεται όταν αποκτήσουμε στρατηγικές να ¨σαρώσουμε¨ κατά κάποιον τρόπο συστηματικά όλες τις δυνατές περιπτώσεις (συνδυασμούς). Θέματα που αναφέρονται στην ικανότητα συνδυαστικής σκέψης υπάρχουν στα περισσότερα σχολικά βιβλία του Δημοτικού. Ήδη στη Β΄ και Γ΄ Δημοτικού συναντάμε ψήγματα συνδυαστικής σκέψης όπως το παρακάτω στη Β΄ δημοτικού (σελίδα 20)

Εργασία

1. Κάτω από το σπίτι του Άρη είναι σταματημένα 15 αυτοκίνητα, μπλε, κόκκινα και πράσινα. Τα 5 είναι κόκκινα. Πόσα μπορεί να είναι πράσινα και πόσα μπορεί να είναι μπλε;

Αν ζωγραφίσω ό,τι μου λέει το πρόβλημα, θα το καταλάβω καλύτερα...

Ανάδειξη των βημάτων που ακολουθούμε στην επίλυση ενός προβλήματος.

20 Είκοσι

και το παρακάτω στην Γ΄ Δημοτικού.

συμπεραίνω

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο 14 x 23:

- **Χωρίζουμε το 23, σε 10 + 10 + 3 ή σε 20 + 3.**
- **Χωρίζουμε το 14, σε 10 + 4.**
- **Βρίσκουμε όλα τα γινόμενα, 10 x 10, 10 x 3, κτλ.**
- **Στο τέλος προσθέτουμε όλα αυτά τα γινόμενα.**

Σε μεγαλύτερες τάξεις είναι ιδιαίτερα φανερή η παρουσία των συνδυαστικών απαιτήσεων όπως για παράδειγμα στην ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων στην ΣΤ΄ τάξη.

Δραστηριότητα 1η *«Δεντροδιαγράμματα»*

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης αναρωτήθηκαν: «Μπορούμε οποιονδήποτε σύνθετο αριθμό να τον εκφράσουμε ως γινόμενο πρώτων αριθμών;» Ας πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 18:

- Γράψε στο διπλανό «δέντρο» το 18 ως γινόμενο δύο παραγόντων :
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε με τα ψηφία 4, 5, 0, αν χρησιμοποιήσουμε το καθένα από αυτά μόνο μια φορά.

Α) 3

Β) 4

Γ) 5

Δ) 6

Ε) 8

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Το 0 μπροστά από έναν ακέραιο αριθμό δεν έχει κάποια αξία.

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Οργανώνω την μέτρηση κρατώντας κάθε φορά έναν αριθμό σταθερό και αλλάζοντας τη σειρά των άλλων.

ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Η μέτρηση χρειάζεται οργάνωση. Ξεκινάμε με πρώτο ψηφίο το **4** και βρίσκουμε όλους τους συνδυασμούς: **4**50 και **4**05.
Τοποθετούμε πρώτο ψηφίο το **5** και βρίσκουμε όλους τους συνδυασμούς: **5**40 και **5**04.
Έχουμε εξαντλήσει συστηματικά όλους τους συνδυασμούς. **(άρα Β)**

Διδακτική αξιοποίηση.

Η ερώτηση θα μπορούσε να συνδυαστεί με την παρακάτω εφαρμογή στη σελίδα 18 του νέου σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ τάξης του Δημοτικού.

Εφαρμογή

Να γράψετε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 2, 7 και 9 από μία φορά το καθένα. Έπειτα να τους συγκρίνετε και να τους τοποθετήσετε πάνω στην αριθμογραμμή.

2) Ο Γιώργος έριχνε στον κουμπαρά του μόνο κέρματα των 2€ και χαρτονομίσματα των 5€. Όταν άνοιξε τον κουμπαρά του και μέτρησε τα χρήματα είδε ότι είχε 50€. Τα χαρτονομίσματα των 5€ θα μπορούσε να ήταν:

Α) 5

Β) 6

Γ) 7

Δ) 9

Ε) 11

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Τα πολλαπλάσια του 5

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

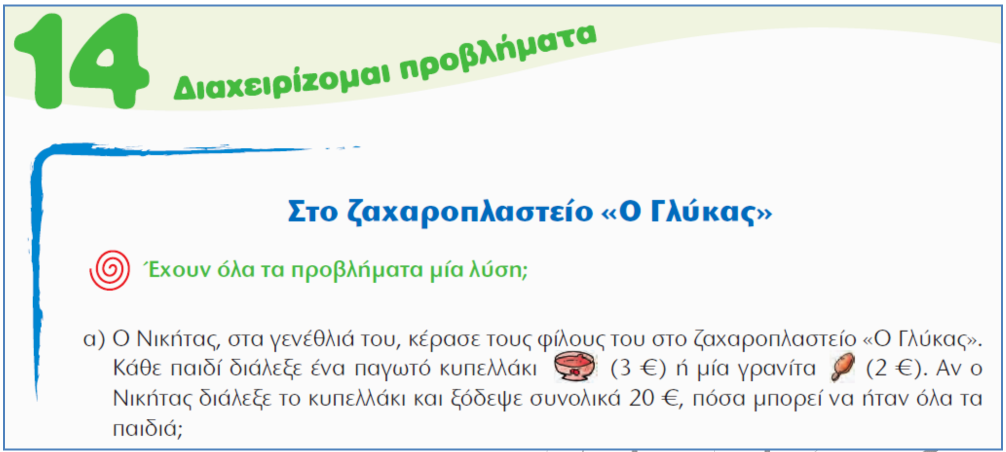
Δοκιμάζω οργανωμένα συνδυασμούς περιπτώσεων.

ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Εδώ θα πρέπει να σκεφτόμαστε τα πολλαπλάσια του 5 σε συνδυασμό με τα πολλαπλάσια του 2. Η μοναδική περίπτωση κατάλληλου συνδυασμού, που να δίνει άθροισμα 50, είναι τα χαρτονομίσματα των 5€ να είναι ζυγός αριθμός. **(άρα Β)**

Διδακτική αξιοποίηση.

Η ικανότητα συνδυαστικής σκέψης είναι χαρακτηριστική περίπτωση ικανότητας που είναι απαραίτητη σε περισσότερες από μία θεματικές Μαθηματικές περιοχές και ενότητες τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο. Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί στην ενότητα των πολλαπλασίων δύο αριθμών, στη συγκεκριμένη περίπτωση των πολλαπλασίων του 2 και του 5. Στο σχολικό εγχειρίδιο της Δ΄ Δημοτικού υπάρχει σχετική δραστηριότητα.



14 Διαχειρίζομαι προβλήματα

Στο ζαχαροπλαστείο «Ο Γλύκας»

Έχουν όλα τα προβλήματα μία λύση;

α) Ο Νικήτας, στα γενέθλιά του, κέρασε τους φίλους του στο ζαχαροπλαστείο «Ο Γλύκας». Κάθε παιδί διάλεξε ένα παγωτό κυπελλάκι (3 €) ή μία γρανίτα (2 €). Αν ο Νικήτας διάλεξε το κυπελλάκι και ξόδεψε συνολικά 20 €, πόσα μπορεί να ήταν όλα τα παιδιά;

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ικανότητα αλγεβρικού συλλογισμού

Η ικανότητα να κατασκευάζουμε και να χειριζόμαστε παραστάσεις με γράμματα που μπορεί να πάρουν διάφορες αριθμητικές τιμές χαρακτηρίζεται ως Αλγεβρική ικανότητα. Έτσι μπορούμε να γράφουμε α+α+α+α+β+β = 4α + 2β ή να υπολογίζουμε την τιμή του γράμματος x (άγνωστος) που ικανοποιεί τη σχέση 3x+5=x+13.

Εδώ μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ικανότητα να χρησιμοποιούμε ένα γράμμα π.χ το x για να εκφράσουμε μία άγνωστη ποσότητα και να λύσουμε κάποιο πρόβλημα. Η διαδικασία αυτή συνήθως μοιάζει με μία μετάφραση των όσων λέει το πρόβλημα από τη φυσική μας γλώσσα στη γλώσσα της άλγεβρας.

Η Αλγεβρική σκέψη έχει ως διδακτική αφετηρία την ΣΤ΄ Δημοτικού. Στο παρακάτω απόσπασμα από το σχολικό εγχειρίδιο φαίνεται η πρώτη αναφορά σε γράμματα, σύμβολα, μεταβλητές.

Έχουμε μάθει ότι μια αριθμητική παράσταση περιέχει αριθμούς και πράξεις. Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορεί να περιέχει και **γράμματα.**

Άγνωστος / Μεταβλητή

Το **γράμμα** ή το **σύμβολο** το οποίο χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε τιμή που μπορεί να πάρει ένα ποσό, λέγεται **μεταβλητή.**

Παραδείγματα

Εμβαδό τετραγώνου: $\mathbf{α^2}$,
όπου **α** = το μήκος της πλευράς του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Τα α και β παριστάνουν δύο ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύει: 2α+3β=α·β. Οι αριθμοί αυτοί μπορεί να είναι ίσοι με:

Α) α=3 και β=5

Β) α=5 και β=3

Γ) α=4 και β=8

Δ) α=8 και β=4

Ε) α=4 και β=4

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός ακεραίων αριθμών.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Κάνω αντικατάσταση στη θέση του α και του β των αριθμών που μας δίνονται.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Για α=4 και β=8 το πρώτο μέλος γίνεται (2×4)+(3×8)=32.
Το δεύτερο μέλος γίνεται 4×8=32
(**άρα Γ**).

Διδακτική αξιοποίηση.
Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε την απλούστερη δυνατή διαχείριση συμβόλων που είναι η αντικατάστασή τους με συγκεκριμένους αριθμούς. Μία από τις πρώτες δραστηριότητες αντικατάστασης μεταβλητής με αριθμό συναντάμε στο σχολικό εγχειρίδιο της ΣΤ΄ Δημοτικού στη σελίδα 62.

Η έκταση του Ατλαντικού: ***α***
Η έκταση του Ειρηνικού .... τετρ. χμ.
Η έκταση του Ινδικού: .... τετρ. χμ
2ο βήμα: Αντικαθιστώ τη μεταβλητή ***α*** με την τιμή της (100.000.000) και κάνω τις πράξεις.

2) Δίνεται η εξίσωση 18.357x+ 12= 700x +126. Για την εξίσωση αυτή ισχύει:

Α) ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός 1

Β) ρίζα της εξίσωσης είναι το 0

Γ) ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και 3

Δ) η εξίσωση έχει για ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{2}$

Ε) τίποτα από τα προηγούμενα

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Η έννοια της ρίζας (λύσης) εξίσωσης.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Κάνω αντικατάσταση στη θέση του x τους αριθμούς που μας δίνονται. Σύγκριση μέσω εκτίμησης.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Για x=1 το πρώτο μέλος είναι πολύ μεγαλύτερο από το δεύτερο, ενώ για x=0 το δεύτερο μέλος είναι μεγαλύτερο του πρώτου. Εδώ εκτιμούμε άμεσα το μέγεθος του αριθμού που προκύπτει σε κάθε μέλος.
Για τους αριθμούς 2 και 3 η διαφορά του πρώτου από το δεύτερο μέλος γίνεται ακόμη μεγαλύτερη. Για x=$\frac{1}{2}$ το μισό του 18.357 εξακολουθεί να δίνει πολύ μεγάλο αποτέλεσμα για το πρώτο μέλος.
(**άρα Ε**).

Διδακτική αξιοποίηση.
Στο παραπάνω παράδειγμα οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συνδυάσουν δραστηριότητες εκτίμησης και σύγκρισης με την έννοια της λύσης (ρίζας) μιας εξίσωσης. Θα μπορούσε να αξιοποιηθεί το παράδειγμα στο τέλος της διδασκαλίας των εξισώσεων τόσο στην ΣΤ΄ δημοτικού όσο και στην Α΄ Γυμνασίου. Στην Α΄ Γυμνασίου υπάρχουν θέματα στα οποία ο μαθητής θα πρέπει να κάνει αντικατάσταση του x με αριθμό για να ελέγξει αν ο αριθμός είναι ρίζα π.χ στη σελίδα 74 του σολικού εγχειριδίου.

7. *Να εξετάσεις, αν ο αριθμός 12 είναι η λύση της εξίσωσης: x + 13 = 25*

8. *Τοποθέτησε ένα “Χ” στην θέση εκείνη που ο αριθμός επαληθεύει την αντίστοιχη εξίσωση:*

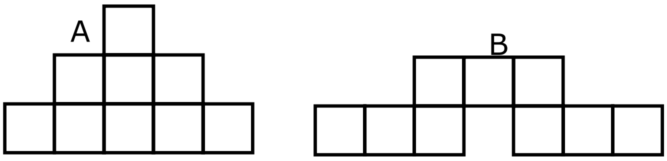
	1	2	3	4	5	6	7	8
x – 2 = 4								
1 + y = 4								
18 – ω = 10								
9 – α = 1								
93 – β = 86								

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: Γεωμετρική ικανότητα

Για να αναπτύξουμε τον γεωμετρικό τρόπο σκέψης θα πρέπει, εκτός των άλλων, να αναπτύξουμε την ικανότητά μας να φανταζόμαστε την κίνηση των Γεωμετρικών αντικειμένων, να συνδυάζουμε και να εφαρμόζουμε σωστά τους τύπους της Γεωμετρίας και ασφαλώς να γνωρίζουμε τη σημασία των Γεωμετρικών όρων (περίμετρος, διάμετρος, κατακορυφήν κ.λ.π). Υπάρχουν και άλλες επιμέρους ικανότητες που θα πρέπει να αναπτυχθούν όπως η σωστή κατασκευή ενός απλού σχήματος, η ανάλυση ενός δοσμένου σχήματος σε επιμέρους κατάλληλα σχήματα κ.λ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Το σχήμα Α αποτελείται από τετράγωνα και έχει εμβαδόν 81cm^2.



Αποσυναρμολογούμε το σχήμα Α και κατασκευάζουμε το σχήμα Β. Η περίμετρος του σχήματος Β είναι:

Α) 60 cm

Β) 66 cm

Γ) 70 cm

Δ) 74 cm

Ε) 80 cm

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Εμβαδόν τετραγώνου.
Περίμετρος σχήματος.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Μετρώ ένα ένα τα τμήματα της περιμέτρου.

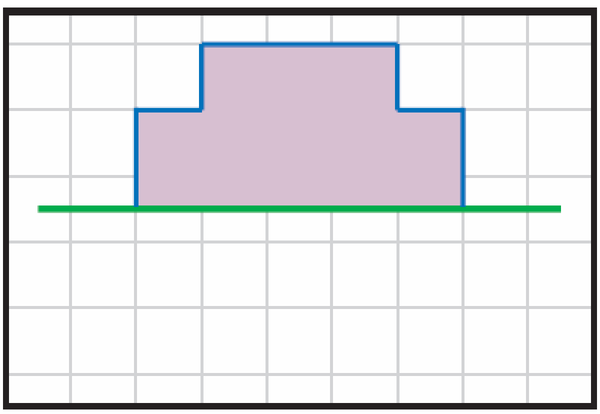
<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Θα πρέπει να υπολογίσουμε πόση είναι η πλευρά κάθε τετραγώνου. Στο αρχικό σχήμα έχουμε 9 τετράγωνα άρα το εμβαδόν καθενός είναι 81 cm^2:9=9cm^2. Άρα η πλευρά κάθε τετραγώνου είναι 3cm.
(άρα Α)

Διδακτική αξιοποίηση. Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά τόσο στην Γ΄ όσο και στην Δ΄ Δημοτικού σε δραστηριότητες υπολογισμού επιφάνειας και περιμέτρου. Έχει ενδιαφέρον να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι εδώ έχουμε έναν μετασχηματισμό που ενώ διατηρεί το εμβαδόν αλλάζει την περίμετρο.

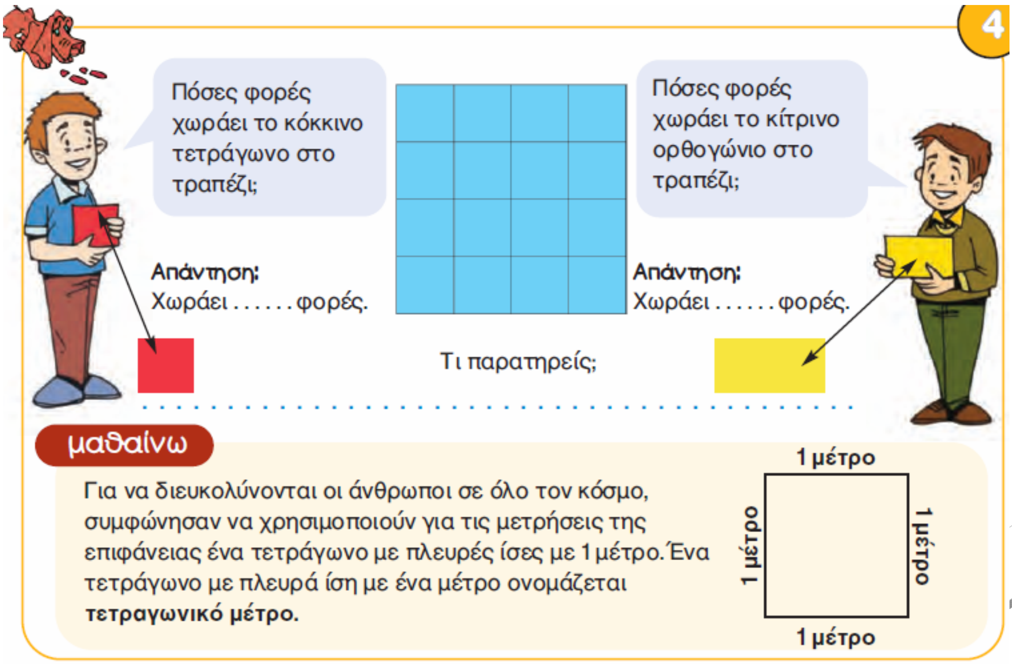
Εργασίες

1)



- Υπολογίζω το μήκος της μπλε γραμμής:
  ....
- Υπολογίζω το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.
  ....
- Συμπληρώνω το σχήμα, ώστε να έχει άξονα συμμετρίας την πράσινη γραμμή.

Εγχειρίδιο Δ΄ Δημοτικού σελ.85



Εγχειρίδιο Γ΄ Δημοτικού σελίδα 121.

2) Ο Γιάννης στο καινούργιο του τετράδιο έχει κατασκευάσει 6 τρίγωνα, 5 ρόμβους που έχουν την μορφή ◊ και 4 τετράγωνα. Πόσα παραλληλόγραμμα υπάρχουν τώρα στο τετράδιό του;

Α) 13

Β) 11

Γ) 9

Δ) 5

Ε) 4

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Ορισμός του παραλληλογράμμου, του ρόμβου, του τετραγώνου.

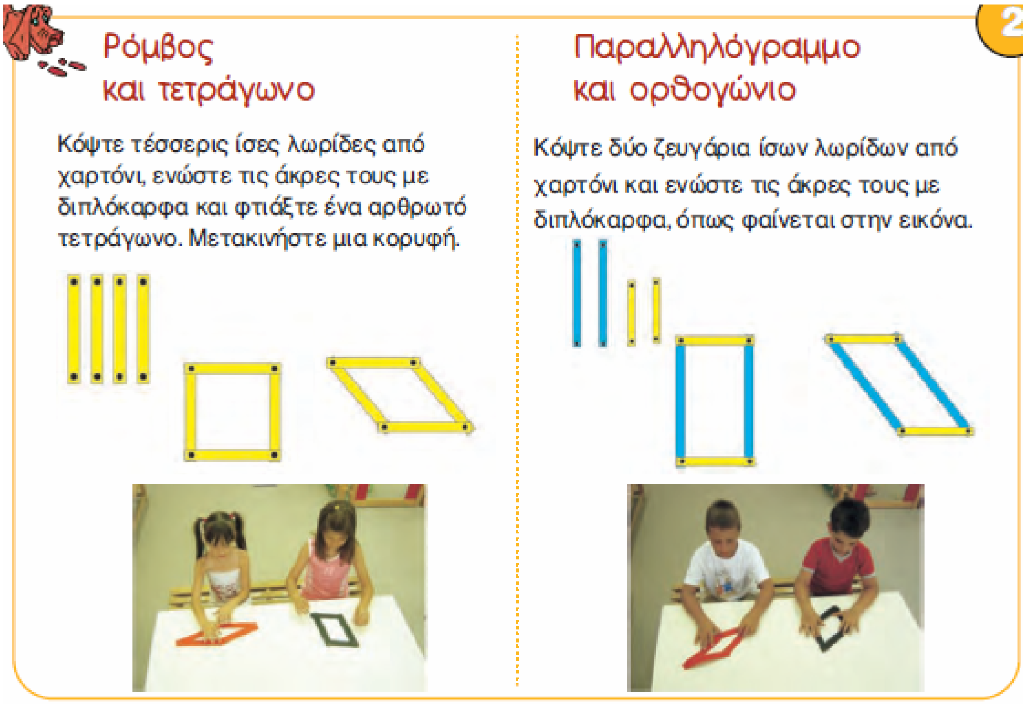
<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Χρησιμοποιώ τον ορισμό του παραλληλογράμμου σαν κριτήριο.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Τα τετράγωνα είναι ρόμβοι. Οι ρόμβοι που έχουν σχήμα ◊ και τα τετράγωνα είναι διαφορετικού τύπου παραλληλόγραμμα. Τα τρίγωνα δεν είναι παραλληλόγραμμα. Άρα συνολικά 5+4=9 παραλληλόγραμμα. **(άρα Γ)**

Διδακτική αξιοποίηση. Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά στα πλαίσια δραστηριοτήτων που έχουν στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να διακρίνουν τις ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων. Στη Γ΄ τάξη στο σχολικό εγχειρίδιο υπάρχει η σχετική δραστηριότητα (σελίδα 16)


Ρόμβος και τετράγωνο

Κόψτε τέσσερις ίσες λωρίδες από χαρτόνι, ενώστε τις άκρες τους με διπλόκαρφα και φτιάξτε ένα αρθρωτό τετράγωνο. Μετακινήστε μια κορυφή.

Παραλληλόγραμμο και ορθογώνιο

Κόψτε δύο ζευγάρια ίσων λωρίδων από χαρτόνι και ενώστε τις άκρες τους με διπλόκαρφα, όπως φαίνεται στην εικόνα.

Οι μαθητές αναγνωρίζουν και διακρίνουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά σώματα.

Στο ψηφιακό σχολείο υπάρχει αντίστοιχη δραστηριότητα που θα μπορούσε να συμπληρώσει την αξιοποίηση του παραδείγματος.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4385?locale=el

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Διαδικασία επίλυσης προβλήματος

Η λύση προβλήματος αποτελεί την κορωνίδα της Μαθηματικής δραστηριότητας καθώς συχνά απαιτεί την σύμπραξη περισσότερών της μίας Μαθηματικής ικανότητας από τον λύτη. Συνήθως θεωρούμε πρόβλημα μία Μαθηματική κατάσταση για την οποία δεν γνωρίζουμε μία έτοιμη διαδικασία λύσης και αυτό ακριβώς διακρίνει το πρόβλημα από την άσκηση. Στη λύση προβλήματος η έννοια της στρατηγικής είναι κεντρική. Κάποιες από τις γενικές στρατηγικές θα γνωρίσουμε στα παρακάτω παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Σε μία πολυκατοικία υπάρχουν οκτώ όροφοι καθένας από του οποίους αποτελείται από ένα μεγάλο διαμέρισμα. Όλα τα διαμερίσματα χρησιμοποιούνται σαν γραφεία διαφόρων εταιρειών. Κάθε γραφείο πληρώνει κοινόχρηστα με τον εξής τρόπο:

Το γραφείο του πρώτου ορόφου πληρώνει 32€. Κάθε γραφείο από τον δεύτερο όροφο και πάνω πληρώνει 5€ περισσότερα από ότι πληρώνει ο προηγούμενος όροφος. Μία εταιρεία έχει ενοικιάσει 2 συνεχόμενους ορόφους και πληρώνει συνολικά 89€ για κοινόχρηστα.

Οι όροφοι που έχει ενοικιάσει η εταιρεία είναι οι

Α) πρώτος και δεύτερος

Β) ο δεύτερος και τρίτος

Γ) ο τρίτος και τέταρτος

Δ) ο τέταρτος και έκτος

Ε) Τίποτε από τα προηγούμενα.

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

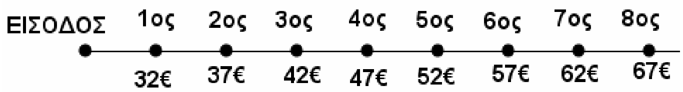
Άθροισμα διψήφιων αριθμών.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Καταγράφω σε μία σειρά τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα κοινόχρηστα κάθε ορόφου. Ακόμη πιο παραστατική στρατηγική θα ήταν να κάνω ένα κατάλληλο σχήμα, μία γραμμή κ.λ.π

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Αρχικά, όπως σε κάθε πρόβλημα, θα πρέπει να μελετήσουμε προσεκτικά τα δεδομένα του προβλήματος. Παρατηρούμε ότι τα δεδομένα βρίσκονται σε μία σειρά (όροφοι).
Θα ήταν πολύ χρήσιμο να κατασκευάσουμε ένα σχήμα ή ένα σχέδιο, ακόμη δε καλύτερα να καταγράψουμε τα δεδομένα σε μία αριθμογραμμή.



Τώρα πλέον είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι 89 άθροισμα δίνουν ο τρίτος και τέταρτος όροφος.
(άρα Γ)

Διδακτική αξιοποίηση. Αυτό που θα πρέπει να σημειωθεί εδώ είναι η σημασία της στρατηγικής, η οποία στη λύση προβλήματος είναι θεμελιώδης.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα εφαρμόστηκε η γενική στρατηγική: ¨Κατασκευάζουμε ένα κατάλληλο σχήμα¨ που θα λειτουργήσει σαν σκαλωσιά για να φτάσουμε στη λύση.

Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά τόσο στην Γ΄ όσο και σε μεγαλύτερη τάξη. Είναι δηλαδή προβλήματα στα οποία δεν χρειάζονται πολλές και διαφορετικές πράξεις, αλλά είναι απαραίτητη η οργάνωση των δεδομένων.

Στη Γ΄ Δημοτικού συναντάμε αυτής της μορφής προβλήματα όπως στο κεφάλαιο 44 με τα προβλήματα.

2) Ένα μπουκάλι κρασί κοστίζει συνολικά 10€. Το περιεχόμενο, δηλαδή το κρασί, κοστίζει 8,8€ περισσότερο από το μπουκάλι (δηλαδή από το γυαλί). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το άδειο μπουκάλι κοστίζει:

Α) 1,2 €

Β) 0,8 €

Γ) 0,7 €

Δ) 0,6 €

Ε) 0,5 €

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Λύση απλών εξισώσεων.

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

¨Μεταφράζω¨ την εκφώνηση σε μία αλγεβρική σχέση με τη βοήθεια του γράμματος x.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Συνήθως σε αυτό το θέμα απαντάμε αυθόρμητα ότι το μπουκάλι κοστίζει 1,2€. Αυτό όμως είναι λάθος καθώς το κρασί δεν κοστίζει 8,8€. Ας κάνουμε την ¨μετάφραση¨:

Φυσική γλώσσα	**Άλγεβρα**
Το μπουκάλι κοστίζει	x
το κρασί κοστίζει 8,8€ περισσότερο από το μπουκάλι	8,8+x
συνολικά 10€	(8,8+x)+x=10

Η εξίσωση που προκύπτει δίνει 2x+8,8=10 άρα 2x=1,2 οπότε x=0,6 (**άρα Δ**).

Διδακτική αξιοποίηση.

Στη λύση του παραπάνω παραδείγματος είναι κυρίαρχη η αλγεβρική ικανότητα και το θέμα μπορεί να αξιοποιηθεί στην ΣΤ΄ Δημοτικού και Α΄ Γυμνασίου.

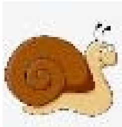
Θα μπορούσε να αξιοποιηθεί σε μικρότερες τάξεις οπότε ο διδάσκων θα πρέπει να επιλέξει την στρατηγική της δημιουργίας ενός πίνακα με τιμές τόσο του μπουκαλιού όσο και του κρασιού. Η στρατηγική αυτή είναι γνωστή ως ¨δοκιμή και διόρθωση¨.

μπουκάλι	1,2	1	0,8	**0,6**
κρασί	1,2+8,8=10	1+8,8=9,8	0,8+8,8=9,6	**0,6+8,8=9,4**
Συνολική αξία	11,2	10,8	10,4	**10**

ΕΝΟΤΗΤΑ 8 : Αλγοριθμική σκέψη

Η ικανότητα να αναγνωρίζει, να εφαρμόζει ή να δημιουργεί ο μαθητής έναν αλγόριθμο αποτελεί μία ιδιαίτερη πτυχή της Μαθηματικής σκέψης. Ο αλγόριθμος είναι ένα σύνολο από λειτουργίες, οι οποίες περιγράφουν βήμα προς βήμα τις ενέργειες που πρέπει να εκτελεστούν για να ολοκληρωθεί μία εργασία ή να επιλυθεί ένα πρόβλημα σε πεπερασμένο αριθμό ενεργειών. Η αλγοριθμική επίλυση ενός προβλήματος, μπορεί να καταγραφεί με : ελεύθερο κείμενο, Φυσική γλώσσα με βήματα, με γραφικό τρόπο (σχηματική αναπαράσταση) ή με κωδικοποίηση.

1) Το σαλιγκάρι αποφάσισε να μετακινηθεί από τη θέση που βρίσκεται και έκανε τις εξής κινήσεις:



1) Προχώρησε μπροστά σε ευθεία 8m,

2) έστριψε δεξιά 90^0,

3) προχώρησε σε ευθεία 5m,

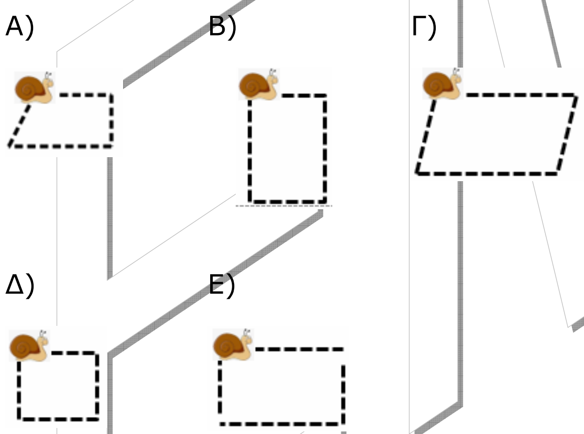
4) έστριψε δεξιά 90^0,

5) προχώρησε σε ευθεία 8m,

6) έστριψε δεξιά 90^0 και

7) προχώρησε σε ευθεία 5m.

Το ίχνος που άφησε πάνω στο έδαφος δημιούργησε το σχήμα:



ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Ιδιότητες παραλληλογράμμων

ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Αναπαριστώ τις κινήσεις με βάση τους αριθμούς των δεδομένων.

ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Αρχικά θα πρέπει να ορίσουμε τη θέση του σαλιγκαριού σε κάθε ένα από τα σχήματα. Ας υποθέσουμε ότι βρίσκεται στην πάνω αριστερή κορυφή.

1) Προχωρώ μπροστά σε ευθεία 8m σημαίνει ευθύγραμμο τμήμα μήκους 8m.

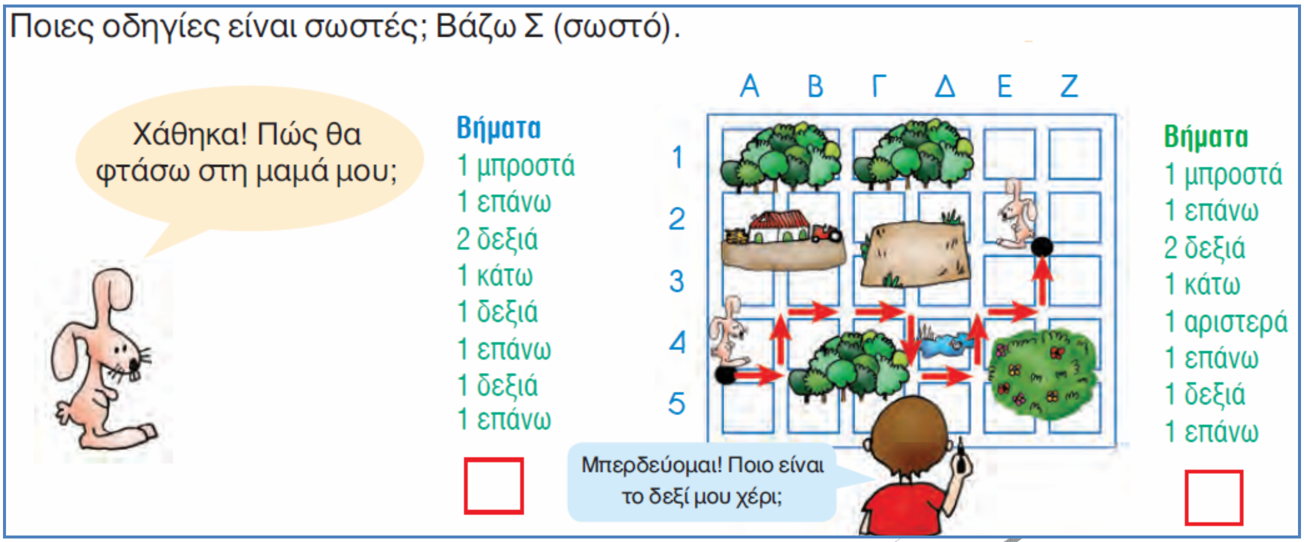
2) Στρίβω δεξιά 90^0 σημαίνει ορθή γωνία οπότε απορρίπτεται το Γ).

3) Προχωρώ 5m, δηλαδή λιγότερο από 8m σημαίνει απόρριψη των Β) και Δ)

Τέλος η τελευταία στροφή είναι 90^0 οπότε απορρίπτεται η Α).

(άρα Ε)

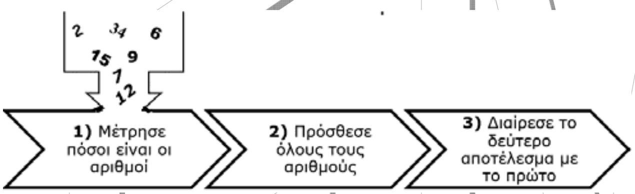
Διδακτική αξιοποίηση.
Οι αλγόριθμοι εμφανίζονται σε ένα πρώιμο στάδιο σε μικρές τάξεις και εδώ έχουμε το παράδειγμα της δραστηριότητας που προτείνεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Δημοτικού στη σελίδα 17. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε για πρώτη ίσως φορά δραστηριότητα σχετική με την έννοια της πλοήγησης στο επίπεδο, δηλαδή ενός συνόλου εντολών με τις οποίες κάποιο νοητό αντικείμενο θα φτάσει σε κάποιο σημείο μέσα από μία σειρά εντολών.



Οι αλγόριθμοι οι οποίοι στηρίζονται στην έννοια της πλοήγησης ενός αντικειμένου αποτελούν τον προθάλαμο, κατά κάποιον τρόπο, στην τυπική, ιδιαίτερα σημαντική γλώσσα προγραμματισμού logo.

Στο ψηφιακό σχολείο υπάρχει αντίστοιχη δραστηριότητα που θα μπορούσε να συμπληρώσει την αξιοποίηση του παραδείγματος.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/9524?locale=el

2) Διαθέτουμε μία μηχανή στην οποία μπορούμε να εισάγουμε όσους αριθμούς θέλουμε και εκείνη εκτελεί 3 συγκεκριμένες εντολές όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η μηχανή αυτή είναι κατάλληλη για να υπολογίζει:

Α) Τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που έχουμε εισάγει.

Β) Τον μικρότερο από τους αριθμούς που έχουμε εισάγει.

Γ) Τον μέσο όρο των αριθμών που έχουμε εισάγει.

Δ) Πόσοι από τους αριθμούς που έχουμε εισάγει είναι άρτιοι

Ε) Τίποτε από τα προηγούμενα.

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ</u>

Μέσος όρος ενός πλήθους αριθμών

<u>ΕΠΙΛΕΓΩ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Κάνω δοκιμή με 2 απλούς (μονοψήφιους) τυχαίους αριθμούς.

<u>ΕΦΑΡΜΟΖΩ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ</u>

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τους αριθμούς 4, 8.

Το πρώτο αποτέλεσμα της μηχανής είναι 2

Το δεύτερο είναι 4+8=12

Το τρίτο είναι 12:2 =6 που είναι ο μέσος όρος.

(άρα Γ)

Διδακτική αξιοποίηση.
Με το παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό πως μία διαδικασία που περιγράφεται στο σχολικό εγχειρίδιο μπορεί να αποτελέσει τη βάση για τη δημιουργία ενός αλγορίθμου.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η διαδικασία είναι η εύρεση του μέσου όρου αριθμητικών ποσοτήτων και υπάρχει στο νέο βιβλίο Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού στη σελίδα 64.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες

Κατά την επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων, βρίσκουμε κάποιες χαρακτηριστικές τιμές, χρήσιμες στην ερμηνεία των δεδομένων.
Μία από αυτές είναι η μέση τιμή ή μέσος όρος.

Για να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** ή τον **μέσο όρο**, προσθέτουμε τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρούμε το άθροισμά τους με το πλήθος των δεδομένων.

$$\textbf{Μέση τιμή ή μέσος όρος} = \frac{\textbf{άθροισμα δεδομένων}}{\textbf{πλήθος δεδομένων}}$$

Τέλος το παράδειγμα αποτελεί μία πρώτης τάξεως ευκαιρία να αναδειχθεί στους μαθητές η σημασία της γενικής στρατηγικής ¨Μελέτησε μία απλούστερη περίπτωση¨.