Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

Ευκλείδης Α' 118

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2020 ευρώ 3,00

6 μετάλλια

24th Junior Mathematical Olympiad (JBMO) 9 - 13 September 2020

Mathematical Society of South Eastern Europe (MASSEE)

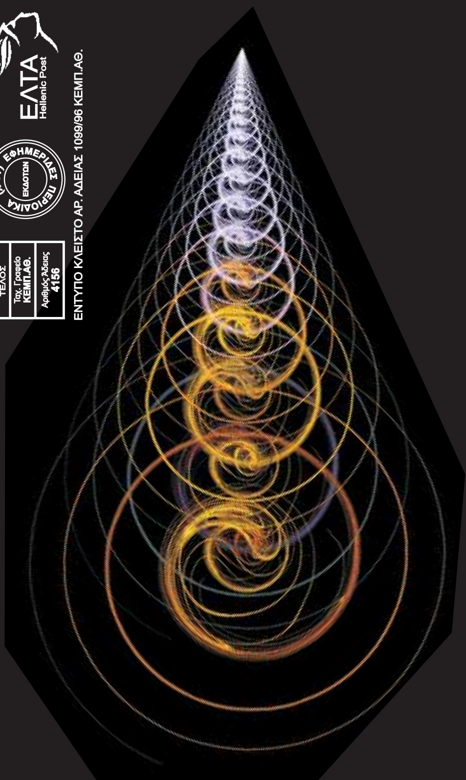
24th JBMO

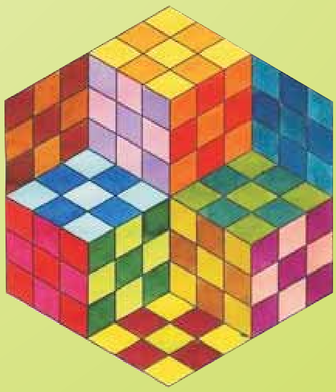
φιλοξενήθηκε από την Ε.Μ.Ε. 9-13 Σεπτ. 2020

VIRTUAL

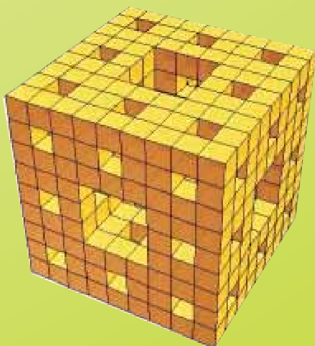
Η μαγεία των fractals

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ (Χ +7) ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156





Ας βάψουμε έναν κύβο



3ος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ
για μαθητές ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ και ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ

για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 118
Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2020
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρώ
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης
Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής
Παναγιώτης Δρούτσας

Επιμέλεια Έκδοσης:
Κεΐσογλου Στέφανος
Τριανταφύλλου Ανδρέας
Φερεντίνος Σπύρος

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί / ές αναγνώστες αναγνώστριες.

Καλή χρονιά με **υγεία** και **πρόοδο**.

Στο τεύχος αυτό έχουμε, όπως πάντα μία ποικιλία από ενδιαφέροντα θέματα σχετικά με τα Μαθηματικά των τριών τάξεων και όχι μόνο.

Με ιδιαίτερη χαρά δεχτήκαμε πολύ ενδιαφέροντα κείμενα από αποκεντρωμένους συνεργάτες καθώς και λύσεις από αναγνώστες για τα προχωρημένα θέματα.

Θα θέλαμε να σας επισημάνουμε ότι το περιοδικό περιμένει κείμενα αναγνωστών τα οποία με χαρά θα επιμεληθούμε και δημοσιεύσουμε.

Εκ μέρους της συντακτικής επιτροπής.

Εκ μέρους της **Συντακτικής επιτροπής** του περιοδικού

Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Πρόυσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

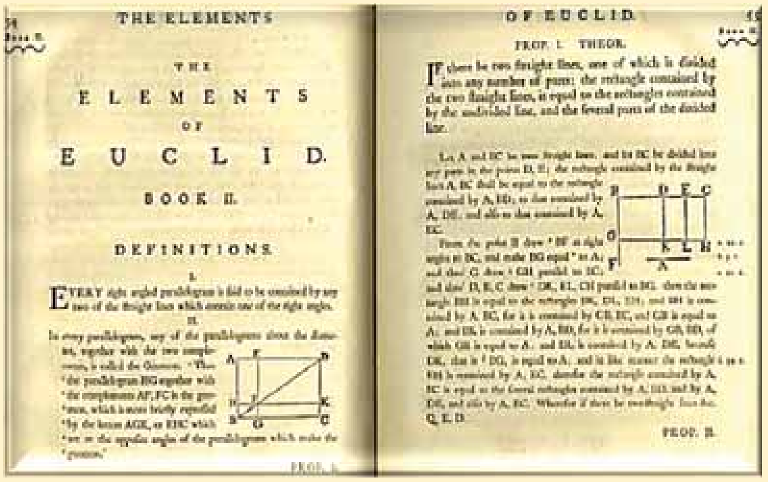
1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Η ιστορία του τριγώνου του Pascal

Από τον Γιώργο Λαγουδάκο

Το κείμενο αποτελεί συνέχεια του κειμένου που είχε δημοσιευτεί στο προηγούμενο τεύχος με γενικό τίτλο: ***Έργα και ημέρες του Blaise Pascal (1623-1662)***

Όπως ήδη έχουμε πει ο Pascal σε ηλικία 12 ετών έρχεται σε επαφή με το πρωτότυπο κείμενο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Εκεί στο $2^{ο}$ βιβλίο διατυπώνεται η $4^{η}$ πρόταση που το κείμενό της είναι το παρακάτω:


THE ELEMENTS

THE ELEMENTS OF EUCLID.

BOOK II.

DEFINITIONS.

I.

EVERY right angled parallelogram is said to be contained by any two of the straight lines which contain one of the right angles.

OF EUCLID.

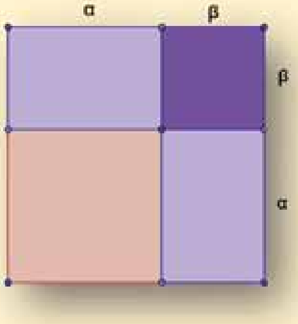
PROP. I. THEOR.

IF there be two straight lines, one of which is divided into any number of parts; the rectangle contained by the two straight lines, is equal to the rectangles contained by the undivided line, and the several parts of the divided line.

PROP. II.

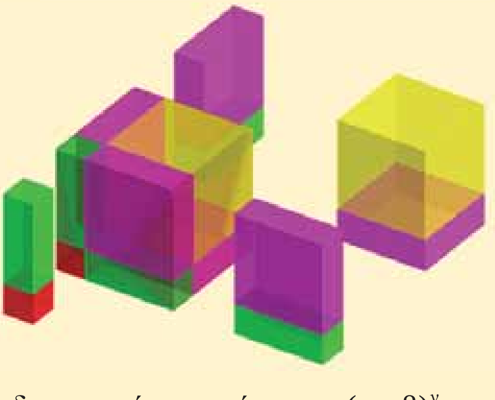
Βιβλίο ΙΙ πρόταση 4

δʹ.[4]
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Η πρόταση αυτή ουσιαστικά παρουσιάζει γεωμετρικά την γνωστή μας ταυτότητα : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

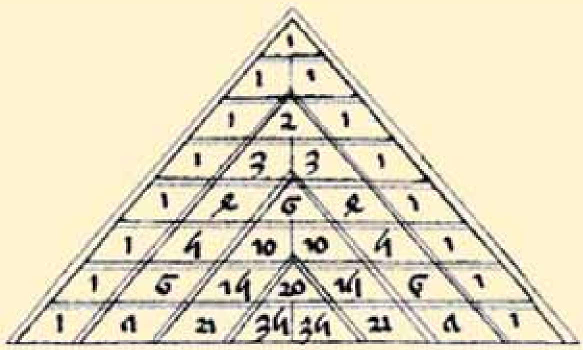
Είναι πολύ πιθανό οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί να γνώριζαν και την αντίστοιχη ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ καθώς και την γεωμετρική της ερμηνεία ως άθροισμα δύο κύβων και 6 ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων.



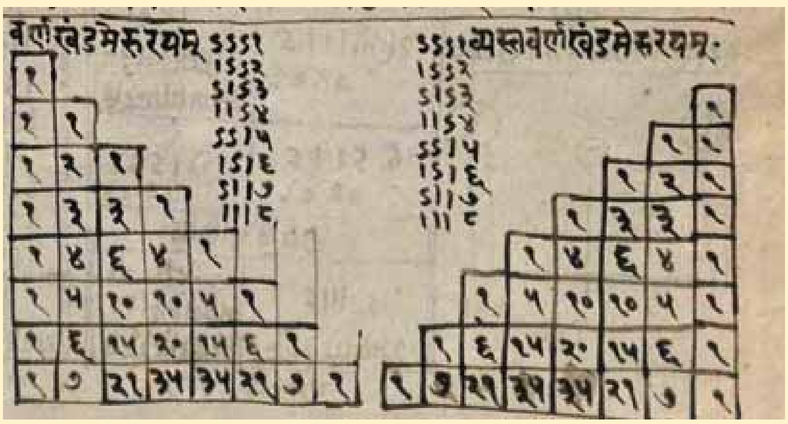
Επειδή όμως οι Έλληνες ήταν κατά βάση Γεωμέτρες τα διωνυμικά αναπτύγματα $(\alpha+\beta)^{\nu}$ για $\nu\geq 4$ δεν μπόρεσαν να τα ανακαλύψουν.

Ότι δεν κατάφεραν οι Έλληνες να ανακαλύψουν το ανακάλυψαν οι Ινδοί μαθηματικοί.

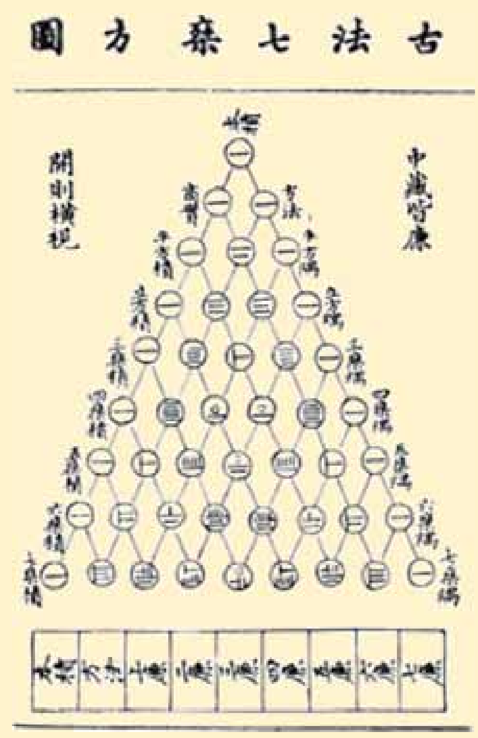
Αρχικά μπορούμε να αναφέρουμε τον **Acharya Pingala** (2 αιώνας π.χ.) συγγραφέας του έργου **Chandaḥśāstra**, που ονομάζεται επίσης και **Pingala-sutras**. Στοιχεία για το έργο αυτό έχουμε από τους σχολιαστές **Varāhamihira** (5ος αιώνας μ.Χ.) και **Halayudha** (10ος αιώνας μ.Χ.) που έγραψε το **Mṛtasañjīvanī** στο οποίο περιέχεται και μία περιγραφή του τριγώνου του Pascal που ονομάζεται **meru-prastaara**.



Περίπου το 850 μ.Χ., ο μαθηματικός **Jain Mahāvīra** αποδίδει τους διωνυμικούς συντελεστές στην γενίκευσή τους χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμούς με τρόπο ισοδύναμο με τον σύγχρονο τύπο. Αντίστοιχη εργασία γίνεται και από τον μαθηματικό **Bhattotpala** το 1068 μ.Χ.



Την ίδια περίοδο ο Πέρσης μαθηματικός **Al-Karaji** (953-1029 μ.Χ.) αναφέρεται ότι συνέγραψε μελέτη περιγράφοντας το τρίγωνο του Pascal.
Λίγο αργότερα ο επίσης Πέρσης μαθηματικός και αστρονόμος **Omar Khayyám** (1048–1131 μ.Χ.) αναφέρει το τρίγωνο και τις ιδιότητές του, χρησιμοποιώντας το στο να υπολογίζει ρίζες πράγμα που σημαίνει ότι είχε κατορθώσει να επεκτείνει του διωνυμικό θεώρημα και σε κλασματικές δυνάμεις.

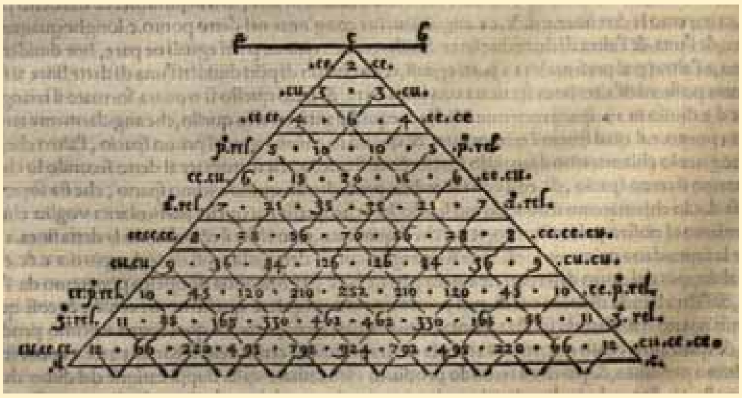


Αλλά και στην μακρινή Κίνα ήταν γνωστό το τρίγωνο του Pascal.
Αναφέρεται ότι ο Κινέζος μαθηματικός **Jia Xian** (1010–1070 π.Χ.) το χρησιμοποιούσε για την εύρεση τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Η μέθοδος αυτή λεγόταν ***Shi Suo Suan Shu***. Το έργο του σχολιάστηκε από τον μαθηματικό **Yang Hui** (1238–1298 μ.Χ.) που παρουσίασε το τρίγωνο και από τότε ονομάζεται στην Κίνα τρίγωνο **Yang Hui**.

Στη Δύση, οι διωνυμικοί συντελεστές χρησιμοποιήθηκαν από τον Εβραίο μαθηματικό και θεολόγο **Levi ben Gershon** (1288–1344 μ.Χ.) στο έργο του **Maaseh Hoshev** στο οποίο αναφερόταν σε αριθμητικές πράξεις καθώς και υπολογισμούς τετραγωνικών και κυβικών ριζών.

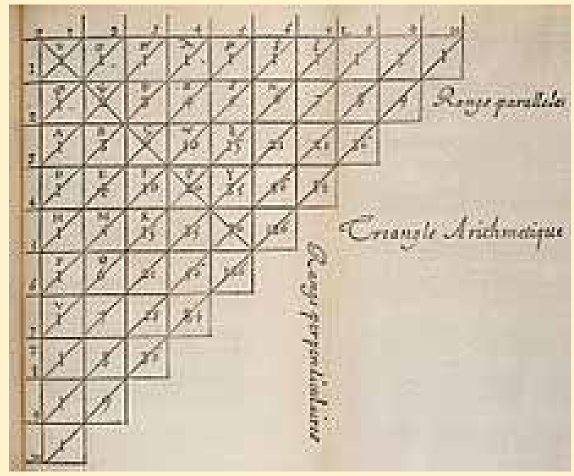
Στην Γερμανία παρουσιάζεται μία παραλλαγή του τριγώνου στο έργο του **Petrus Apianus** (1495 -1552 μ.Χ.) μαθηματικού, αστρονόμου και χαρτογράφου, όπως επίσης και στο έργο του καθηγητή **Michael Stifel** (1487-1567 μ.Χ.) του Πανεπιστημίου της **Jena**.

Στην Ιταλία το τρίγωνο ονομάζεται τρίγωνο του Tartaglia από τον **Niccolò Fontana Tartaglia** (1500–1577 μ.Χ.), ο οποίος δημοσίευσε έξι σειρές του τριγώνου το 1556. Το 1570 ο επίσης Ιταλός μαθηματικός **Gerolamo Cardano** (1501-1576 μ.Χ.) παρουσιάζει τις ιδιότητες του τριγώνου και τον τρόπο κατασκευής του.



Τέλος το 1655 ο **Pascal** δημοσίευσε το ***Treatise on Arithmetical Triangle***. Στο έργο αυτό ο **Pascal** συμπεριέλαβε διάφορα συμπεράσματα που ήταν ήδη γνωστά και το χρησιμοποίησε για την επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων κάνοντας χρήση ουσιαστικά για πρώτη φορά της λεγόμενης διωνυμικής κατανομής.

Το 1708 ο Γάλλος μαθηματικός **Pierre Rémond de Montmort** (1678 -1719 μ.Χ.) βαφτίζει το τρίγωνο "***Table de M. Pascal pour les combinaisons***" και αργότερα το 1730 ο επίσης Γάλλος μαθηματικός **Abraham de Moivre** (1667-1754 μ.Χ.) το ονομάζει στα Λατινικά ***"Triangulum Arithmeticum Pascalianum"*** δηλαδή το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal που είναι από τότε και το καθιερωμένο στην Δύση τουλάχιστον, όνομά του.



ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL ΣΕ 6 ΓΡΑΜΜΕΣ

1

1 1

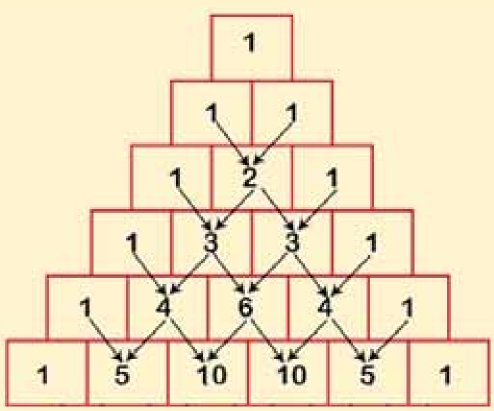
1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Ο ΤΡΟΠΟΣ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΝΤΑΙ ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΘΕ ΣΕΙΡΑΣ



ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΩΝ 6 ΠΡΩΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΟΥ $(\alpha+\beta)^{\nu}$

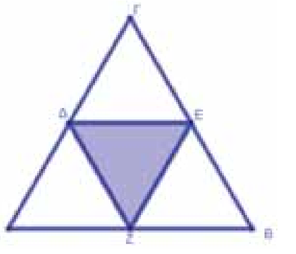
$(\alpha+\beta)^0=$	1
$(\alpha+\beta)^1=$	$1\alpha + 1\beta$
$(\alpha+\beta)^2=$	$1\alpha^2 + 2\alpha\cdot\beta + 1\beta^2$
$(\alpha+\beta)^3=$	$1\alpha^3 + 3\alpha^2\cdot\beta + 3\alpha\cdot\beta^2 + 1\beta^3$
$(\alpha+\beta)^4=$	$1\alpha^4 + 4\alpha^3\cdot\beta + 6\alpha^2\cdot\beta^2 + 4\alpha\cdot\beta^3 + 1\beta^4$
$(\alpha+\beta)^5=$	$1\alpha^5 + 5\alpha^4\cdot\beta + 10\alpha^3\cdot\beta^2 + 10\alpha^2\cdot\beta^3 + 5\alpha\cdot\beta^4 + 1\beta^5$

Η Έννοια του Ποσοστού

Στέλιος Μαραγκάκης – Ανδρέας Τριανταφύλλου

Το ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος (κλάσμα) του ποσού, οπότε στο διπλανό σχήμα το ποσοστό του σκιασμένο μέρος του σχήματος είναι $\frac{1}{4}$.

Όταν αναφερόμαστε στο ποσοστό, συνήθως εννοούμε «ποσοστό στα 100», έτσι το ποσοστό 25% σημαίνει 25/100.



Οπότε **ποσοστό επί τοις εκατό**, ονομάζουμε το δεκαδικό κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$ το οποίο συμβολίζουμε **α%**. Είναι δηλαδή $\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$

Επομένως ένα **εκατοστιαίο κλάσμα** (κλάσμα με παρονομαστή το 100) μπορεί να γραφεί με συμβολικό τρόπο ως ποσοστό στα εκατό, π.χ. Αντί να πούμε στις εκπτώσεις η τιμή ενός αντικειμένου μειώθηκε κατά $\frac{25}{100}$, είναι προτιμότερο να πούμε ότι μειώθηκε κατά 25%.

Αντίστοιχα ένα κλάσμα με παρονομαστή το 1.000 μπορεί να γραφεί με συμβολικό τρόπο σαν ποσοστό στα χίλια. Το σύμβολό του είναι **‰**.

Το ποσοστό στα εκατό (**%**), αφού είναι εκατοστιαίο κλάσμα, μπορεί να γραφεί και σαν δεκαδικός αριθμός , αρκεί να γράψουμε μόνο τον αριθμητή του κλάσματος και να χωρίσουμε με υποδιαστολή δύο δεκαδικά ψηφία (προς τ' αριστερά) π.χ. το 25% γίνεται 0,25, το 6% γίνεται 0,06 **και όχι 0,6**, το 0,6 σημαίνει 0,60, άρα 60% .

Αν το ποσοστό είναι ένα μη εκατοστιαίο κλάσμα, τότε εκτελώντας τη διαίρεση μετατρέπεται σε δεκαδικό, άρα και σε ποσοστό %, π.χ. επιτυχία 12 στις 15 βολές στο μπάσκετ σημαίνει κλάσμα 12/15, άρα 12:15 = 0,8 ή 0,80 ή 80%

Για να υπολογίσουμε το ποσοστό ενός μεγέθους μ, γράφουμε το ποσοστό σε δεκαδική ή κλασματική μορφή και το πολλαπλασιάζουμε με το μέγεθος, π.χ. το 25% του αριθμού 60 είναι:

$$25\% \cdot 60 = 0,25 \cdot 60 = \frac{25}{100} \cdot 60 = 15\,.$$

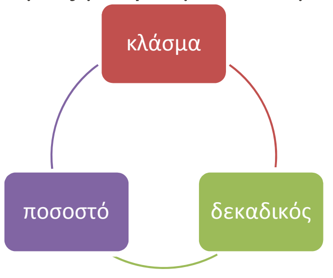
Στα προβλήματα με ποσοστά:

όταν γνωρίζουμε το ποσοστό το οποίο περιέχεται σε ένα σύνολο, και θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό τον οποίο αντιπροσωπεύει αυτό το ποσοστό στο σύνολο, παίρνουμε το ποσοστό στη δεκαδική μορφή του και το πολλαπλασιάζουμε με το σύνολο

π.χ. αν μια σοκολάτα 400 γραμμ.(σύνολο) περιέχει 12% ζάχαρη (ποσοστό) τότε περιέχει $0,12 \cdot 400 = 48$ γραμμ. ζάχαρης.

όταν γνωρίζουμε την ποσότητα μ (μέρος) και την ποσότητα ν (όλο) και ζητούμε το ποσοστό που αντιπροσωπεύει η ποσότητα μ στην ποσότητα ν, μετατρέπουμε το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ σε ποσοστό π.χ. κατά τη μεταφορά 150 αυγών έσπασαν 6, οπότε το ποσοστό των αυγών που έσπασαν είναι $\frac{6}{150} = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\%$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αν έχουμε ένα από τα 3, δηλαδή ποσοστό ή κλάσμα ή δεκαδικό αριθμό εμείς μπορούμε να το μετατρέψουμε στα άλλα δύο.



Τα ποσοστά αναφέρονται σε ανάλογα ποσά και τα προβλήματα των ποσοστών λύνονται με τις γνωστές μεθόδους: αναγωγή στη μονάδα, απλή μέθοδος των τριών, αναλογίες, δημιουργία εξίσωσης,   π.χ

1) Αγοράσαμε ένα ποδήλατο που η κανονική του τιμή είναι 2.000€ με έκπτωση 15%. Πόσα χρήματα γλυτώσαμε;

Λύση

1^{ος} τρόπος

Το ποσό που γλυτώσαμε είναι το 15% των 2.000€, δηλαδή γλυτώσαμε

$$15\% \cdot 2.000€ = \frac{15}{100} \cdot 2.000€ = 15 \cdot 20€ = 300€$$

2^{ος} τρόπος

Με την απλή μέθοδο των τριών το 15% που γλυτώσαμε σημαίνει

Στα 100€ γλυτώσαμε 15€

Στα 2.000€ » x;

Οπότε προκύπτει ότι γλυτώσαμε $x = 15 \cdot \frac{2.000}{100}€ = 300€$

2) Τι σημαίνει οταν λέμε ότι το μέγεθος ν είναι κατά 15% μεγαλύτερο από το μέγεθος μ;

Λύση

Όταν λέμε ότι το μέγεθος ν είναι κατά 15% μεγαλύτερο από το μέγεθος μ, σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τον ν προσθέτοντας στο μ το 15% του μ, δηλαδή $\nu = \mu + 15\% \cdot \mu = \mu + \frac{15 \cdot \mu}{100}$ ή $\nu = \frac{115 \cdot \mu}{100}$

Ανάλογα όταν λέμε ότι το μέγεθος ν είναι κατά 15% μικρότερο από το μέγεθος μ, κάνουμε αφαίρεση, δηλαδή : $\nu = \mu - 15\% \cdot \mu = \mu - \frac{15 \cdot \mu}{100}$ ή $\nu = \frac{85 \cdot \mu}{100}$

3) Μια οικοκυρά αγόρασε πολλά είδη καθαρισμού για το σπίτι της. Ο καταστηματάρχης της έκανε έκπτωση 8% και έτσι πλήρωσε 12€ λιγότερα. Ποια ήταν η αρχική τιμή των ειδών καθαρισμού;

Λύση

Αν x είναι η αρχική τιμή των ειδών καθαρισμού, τότε η έκπτωση 8% του x είναι 12€.

Οπότε σχηματίζουμε την εξίσωση $8\% \cdot x = 12$ ή $\frac{8}{100} \cdot x = 12$ ή $0,08x = 12$

Άρα $x = \frac{12}{0,08}€ = \frac{1.200}{8}€ = 150€$

Ασκήσεις και Προβλήματα Λυμένα

1) Να γραφούν ως ποσοστό επι τοις εκατό, τα κλάσματα:

α) $\frac{3}{5}$ **β)** $\frac{3}{8}$ **γ)** $\frac{5}{16}$ **δ)** $\frac{3}{25}$ **ε)** $\frac{3}{50}$

Λύση

α) $\frac{3}{5} = \frac{20 \cdot 3}{20 \cdot 5} = \frac{60}{100} = 60\%$

β) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 125}{1000} = \frac{375}{1000} = \frac{37,5}{100} = 37,5\%$

Όταν στον παρονομαστή έχουμε δύναμη του 2 ή του 5 ή και των δύο, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με δυνάμεις του 2 ή του 5, ώστε στον παρονομαστή το 2 και το 5 να έχουν τον ίδιο εκθέτη, οπότε $2^\nu \cdot 5^\nu = 10^\nu$

γ) $\frac{5}{16} = \frac{5}{2^4} = \frac{5 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3.125}{10.000} = \frac{31,25}{100} = 31,25\%$

δ) $\frac{3}{25} = \frac{4 \cdot 3}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$

ε) $\frac{3}{50} = \frac{3}{2 \cdot 5^2} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5^2} = \frac{6}{100} = 6\%$ ή πιο εύκολα $\frac{3}{50} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 50} = \frac{6}{100} = 6\%$

2) Να βρεθεί τι ποσοστό επι τοις εκατό είναι:

Α) το 400 για τον αριθμό 8.000 **Β) οι 3 μήνες για το 1 έτος**

Γ) τα 15cm για τα 6m **Δ) τα 100gr στα 5Kgr**

Λύση

Α) $\frac{400}{8.000} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 5\%$

Β) $\frac{3\,\mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma}{1\,\acute{\varepsilon}\tau o\varsigma} = \frac{3\,\mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma}{12\,\mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

Γ) $\frac{15\,cm}{6\,m} = \frac{15\,cm}{600\,cm} = \frac{15}{600} = 0,025 = 2,5\%$

Δ) $\frac{100gr}{5Kgr} = \frac{100gr}{5.000gr} = \frac{100}{5.000} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100} = 2\%$

3) Ένα προιόν έχει αναγραφόμενη τιμή 9,50€. Πληρώσαμε για αυτό 1,40€ λιγότερα. Πόσο ήταν το ποσοστό της έκπτωσης;

Λύση

Έστω x% η έκπτωση. Τότε $9,50€ \cdot x\% = 1,40€$ ή $9,50 \cdot \frac{x}{100} = 1,40$ άρα $0,095 \cdot x = 1,40$.

Επομένως $x = \frac{1,40}{0,095} = \frac{1400}{95} = 14,74\%$ είναι το ποσοστό της έκπτωσης.

4) Η τιμή ενός προιόντος αυξήθηκε κατά 60%. Πόσο πρέπει να μειωθεί, ώστε να έχει την ίδια τιμή;

Λύση

Έστω ότι το προιόν κοστίζει 100 λεπτά. Αφού αυξήθηκε κατά 60%, τώρα κοστίζει 160 λεπτά.

Αν x% είναι το ποσοστό μείωσης θα πρέπει $160 - \frac{x}{100} \cdot 160 = 100$, για να έχει την ίδια τιμή. Επομένως $160 - 1,6 \cdot x = 100$, άρα $1,6 \cdot x = 160 - 100$, δηλαδή $1,6 \cdot x = 60$ ή $x = \frac{60}{1,6} = \frac{600}{16} = \frac{150}{4} = \frac{75}{2} = 37,5\%$ πρέπει να είναι το ποσοστό της μείωσης.

5) **Το 40% των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στη χώρα μας είναι Γερμανικής κατασκευής.**

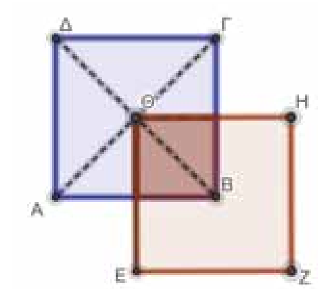
Από αυτά το 65% έχουν μεταλλικό χρώμα και από αυτά το 90% είναι καταλυτικά. Πόσο είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων Γερμανικής κατασκευής με μεταλλικό χρώμα και καταλυτικά που κυκλοφορούν στη χώρα μας;

Λύση

Θα υπολογίσουμε το 90% του 65% του 40% των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στην Ελλάδα.

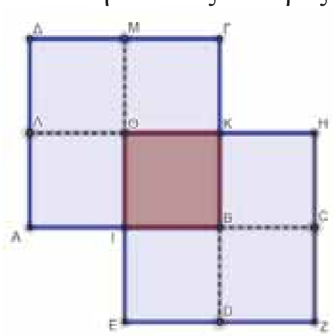
Επειδή το ποσοστό του ποσοστού προκύπτει από το γινόμενο των επί μέρους ποσοστών έχουμε ότι το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\frac{90}{100}\cdot\frac{65}{100}\cdot\frac{40}{100}=\frac{234.000}{1.000.000}=23,4\%$.

6) **Να βρείτε τι ποσοστό αντιπροσωπεύει το σκιασμένο τμήμα του διπλανού σχήματος όπου τα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι ίσα τετράγωνα**



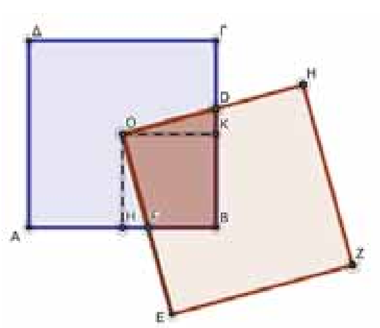
Λύση

Προεκτείνουμε τις πλευρές του κάθε τετραγώνου μέχρι να συναντήσουν τις πλευρές του άλλου, όπως στο σχήμα.



Οπότε το καθένα από τα τετράγωνα χωρίζεται σε 4 ίσα μικρότερα τετράγωνα.

Επομένως το σχήμα αποτελείται από 7 ίσα τετράγωνα. Οπότε το ποσοστό αντιπροσωπεύει το σκιασμένο τμήμα είναι $\frac{1}{7}$



Γενίκευση του προβλήματος

Όταν το δεύτερο τετράγωνο είναι υπο γωνίαν.

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα DOK και OHF είναι ίσα …

7) **Σε μία αποθήκη έχουν συγκεντρωθεί 1.000 συσκευασίες τριων ειδών Α, Β, και Γ εμπορευμάτων. Τα εμπορεύματα Β είναι το 78% των εμπορευμάτων Α και τα εμπορεύματα Γ είναι το 22% των εμπορευμάτων Α. Να βρείτε από πόσες συσκευασίες αποτελούνται τα εμπορεύματα Α, πόσες τα Β και από πόσες τα εμπορεύματα Γ.**

Λύση

Αν x είναι οι συσκευασίες των εμπορευμάτων Α, τότε οι συσκευασίες των εμπορευμάτων Β είναι $\frac{78}{100}\cdot x$ και οι συσκευασίες των εμπορευμάτων Γ είναι $\frac{22}{100}\cdot x$.

Οπότε αφου και οι 3 συσκευασίες είναι 1.000, έχουμε την εξίσωση $x+\frac{78}{100}\cdot x+\frac{22}{100}\cdot x=1.000$ ή $x+0,78x+0,22x=1.000$, άρα $2x=1.000$, οπότε $x=500$.

Επομένως οι συσκευασίες των εμπορευμάτων Α είναι 500, οι συσκευασίες των εμπορευμάτων Β είναι $\frac{78}{100}\cdot 500=78\cdot 5=390$, οι συσκευασίες των εμπορευμάτων Γ είναι $\frac{22}{100}\cdot 500=22\cdot 5=110$.

Και για όσους δεν ικανοποιήθηκαν.

1) Μια οικογένεια έχει εισόδημα 1800€ το μήνα. Από αυτά το 12% το αποταμιεύει, το 25% ξοδεύεται για ενοίκιο, το 35% για διατροφή, το 15% για εξόφληση δόσης δανείου και το 13% για άλλες καθημερινές ανάγκες.
Α) Να υπολογιστεί πόσα χρήματα ξοδεύονται για κάθε κατηγορία δαπάνης.
Β) Ποιο είναι το ποσοστό του ενοικίου σε σχέση με τα χρήματα που ξοδεύονται;

2) Ένα ποσό αυξάνεται κατά 20%. Κατά τι ποσοστό θα πρέπει να αυξηθεί στη συνέχεια ώστε να διπλασιαστεί σε σχέση με το αρχικό ποσό;

3) Ένα αρχικό ποσό Α αυξάνεται κατά α%. Κατά τι ποσοστό θα πρέπει να ελαττωθεί ώστε να επανέλθει στην αρχική του τιμή.

Σημείωση: *Το πρόβλημα αυτό αποτελεί γενίκευση του θέματος 4 που ήδη έχουμε λύσει. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να υπολογίσετε το ζητούμενο ποσοστό με βάση το γράμμα α. Με τον τρόπο αυτό θα έχετε έναν γενικό τύπο που θα λύνει το πρόβλημα της εύρεσης του ποσοστού που επαναφέρει ένα ποσό στην αρχική του τιμή όταν αυτό έχει υποστεί οποιαδήποτε ποσοστιαία αύξηση.*
Προτείνουμε να δοκιμάσετε τον τύπο που βρήκατε στην περίπτωση που η αύξηση είναι 60% και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό που έχουμε βρει στην άσκηση 4).

4) **Μία ερώτηση κρίσεως:** Κατά τι ποσοστό θα πρέπει να αυξηθεί ένα ποσό ώστε να τριπλασιαστεί;

Η **Συντακτική Επιτροπή**
και οι **Αποκεντρωμένοι Συνεργάτες**
του περιοδικού σας εύχονται
***Καλή και Δημιουργική Χρονιά για το** 2021*

Α΄ Γυμνασίου

Μαθηματική ικανότητα επίλυσης προβλήματος
Προβλήματα του διαγωνισμού μαθηματικών ικανοτήτων της ΕΜΕ ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

Σ. Φερεντίνος και Δ. Παπαϊωάννου

Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος αναφέρεται στην διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Στην ικανότητα αυτή συνήθως γίνεται σε περισσότερο ή λιγότερο βαθμό μια σύνθεση μαθηματικών ικανοτήτων και μαθηματικών εννοιών, από τις πλέον απλές στις πλέον σύνθετες. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο τεύχος η ικανότητα επίλυσης προβλήματος είναι μία σύνθετη ικανότητα που απαιτεί, το συνδυασμό όλων ή ορισμένων από τις βασικές μαθηματικές ικανότητες ώστε να δοθεί απάντηση – λύση σε κάποιο πρόβλημα. Εδώ θυμίζουμε ότι βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Γυμνάσιο είναι η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων (ΦΕΚ 304/13-3-2003).

Στο σημείο αυτό θέλουμε να τονίσουμε ότι η ικανότητα επίλυσης προβλήματος, όπως και οι υπόλοιπες ικανότητες, είναι συνδεδεμένη άρρηκτα με την κατάλληλη στρατηγική αντιμετώπισης.

Στην έννοια της στρατηγικής θα αναφερθούμε περισσότερο αναλυτικά αμέσως παρακάτω.

Κάθε φορά που χρειάζεται να αντιμετωπίσουμε ένα Μαθηματικό πρόβλημα (ή γενικότερα ένα μαθηματικό θέμα) χρειάζεται να ακολουθήσουμε μία στρατηγική, ένα σχέδιο πορείας.

Η ίδια στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικά είδη προβλημάτων, δηλαδή σε προβλήματα που ανήκουν σε διαφορετικές μαθηματικές ενότητες.

- **Η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα**

1) Τα $\frac{3}{5}$ ενός ποσού είναι 24. Πόσο είναι τα $\frac{7}{8}$ του ποσού;

Εδώ υπολογίζουμε πρώτα το $\frac{1}{5}$ που είναι 8, στη συνέχεια ολόκληρο το ποσό, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$ που είναι 40 και στη συνέχεια το ζητούμενο κλάσμα του ποσού, δηλαδή $\frac{7}{8}$. 40=35.

2) Μία βρύση χρειάζεται 4 ώρες να γεμίσει μια δεξαμενή ενώ μία άλλη χρειάζεται 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν ανοίξουμε και τις δύο βρύσες συγχρόνως;

Θα υπολογίζουμε τι μέρος της δεξαμενής γεμίζει κάθε βρύση σε μία ώρα. Η πρώτη βρύση σε μια ώρα γεμίζει το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής και η άλλη το $\frac{1}{6}$, άρα κάθε ώρα γεμίζουν μαζί τα $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ της δεξαμενής, άρα το $\frac{1}{12}$ της δεξαμενής θα γεμίσει σε $\frac{1}{5}$ της ώρας δηλαδή σε 12 λεπτά, άρα ολόκληρη η δεξαμενή θα γεμίσει σε 12 . 12 =144 λεπτά ή 2 ώρες και 24 λεπτά.

Όμως ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή για τη λύση ενός προβλήματος, οσοδήποτε απλού ή σύνθετου, μπορεί κάποιος να ακολουθήσει διαφορετικές στρατηγικές.

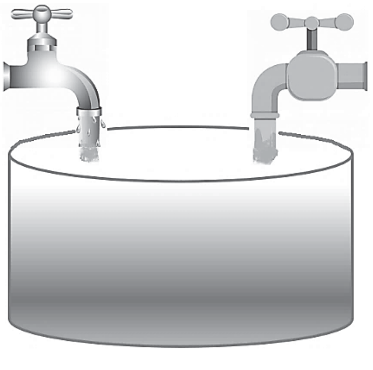
- **Εναλλακτικές στρατηγικές**

1) Τα $\frac{3}{5}$ ενός ποσού είναι 24. Πόσο είναι τα $\frac{7}{8}$ του ποσού;

Είδαμε ότι η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα ήταν αποδοτική και έδωσε αποτέλεσμα 35. Ας εφαρμόσουμε μια άλλη στρατηγική που είναι αυτή των ίσων ή ισοδυνάμων κλασμάτων. Τα δύο κλάσματα μετατρέπονται σε ομώνυμα $\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$ και $\frac{7}{8}=\frac{35}{40}$. Άρα τα $\frac{24}{40}$ του ποσού είναι 24, επομένως τα $\frac{35}{40}$ είναι 35.

Να υπογραμμίσουμε ότι η στρατηγική των ισοδυνάμων κλασμάτων ήταν κατάλληλη γιατί τα δύο κλάσματα αναφέρονται στο ίδιο ποσό. Αν αυτό δεν συνέβαινε τότε η στρατηγική θα ήταν ακατάλληλη και θα οδηγούσε σε λανθασμένο αποτέλεσμα.

2) Επίσης στο πρόβλημα: Μία βρύση χρειάζεται 4 ώρες να γεμίσει μια δεξαμενή, ενώ μία άλλη χρειάζεται 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν ανοίξουμε και τις δύο βρύσες συγχρόνως;



Όπως είδαμε και στο πρόβλημα αυτό η στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα ήταν αποδοτική.

Ας εφαρμόσουμε μια άλλη στρατηγική που είναι αυτή της εξίσωσης. Αν σε x ώρες γεμίζει η δεξαμενή και με τις 2 βρύσες ανοιγμένες τότε η πρώτη βρύση θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής και η δεύτερη τα $\frac{x}{6}$, άρα $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1$ και λύνοντας την εξίσωση θα βρούμε χ=2,4 ή 2 ώρες και 20 λεπτά.

Η λύση ενός προβλήματος όπως είδαμε είναι μία διαδικασία, μία διαδρομή. Για να φτάσουμε στη λύση θα πρέπει να επιλέξουμε μέσα από μία σειρά δρόμων, καθένας από τους οποίους είναι μία στρατηγική. Η επιλογή της στρατηγικής όμως δεν εξασφαλίζει αμέσως τη λύση του προβλήματος. Θα πρέπει να έχει αναπτυχθεί η ικανότητα να βαδίσουμε με συνέπεια πάνω σε αυτό το δρόμο. Η ικανότητα αυτή χαρακτηρίζεται ως Μαθηματική ικανότητα που με τη σειρά της υπάγεται σε μια ευρύτερη ικανότητα που ονομάζεται μαθητική σκέψη. Χωρίς Μαθηματικές ικανότητες η στρατηγική είναι άχρηστη, αλλά και η έλλειψη στρατηγικής μας οδηγεί σε αδιέξοδα.

Κλείνοντας τον πρόλογο θέλουμε να τονίσουμε ότι παρότι η διαδικασία επίλυσης προβλήματος αποτελεί ένα από τους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, στη συνήθη σχολική πρακτική δίνεται μεγάλο βάρος σε θεωρητικού τύπου ασκήσεις και εφαρμογές και όχι στην επίλυση προβλήματος. Επιπρόσθετα, κεφάλαια των μαθηματικών που συνδέονται άμεσα με την επίλυση προβλήματος όπως αυτά της επίλυσης τύπων, των ποσοστών και της αναλογίας είτε αφαιρέθηκαν από τη διδακτέα ύλη, είτε έχουν συρρικνωθεί σε μεγάλο βαθμό.

Έτσι εξηγείται και η αποτυχία των μαθητών της Ελλάδας στο πρόγραμμα PISA, γιατί τα παραπάνω κεφάλαια είναι απόλυτα συνδεδεμένα με εφαρμογές των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και τον πραγματικό κόσμο, δηλαδή τον μαθηματικό γραμματισμό, που είναι ένα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των θεμάτων που τίθενται στο πρόγραμμα PISA.

Ελπιδοφόρο μήνυμα αποτελούν οι παρακάτω προτάσεις ομάδας μελετών του ΙΕΠ (ΙΕΠ. 1919. *Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση και αξιολόγηση PISA*) που αφορούν τη σύγκλιση της εκπαιδευτικής διαδικασίας με τις αρχές που αξιολογούνται από το PISA: 1) είναι ουσιώδες να αναδειχθεί η ενασχόληση με τα προβλήματα ως βασικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης και 2) χρειάζεται ενθάρρυνση των διδασκόντων να προχωρήσουν σε μια διδακτική μετατόπιση, εντάσσοντας τα προβλήματα στο καθημερινό διδακτικό ρεπερτόριο. Αν υιοθετηθούν αυτές οι προτάσεις τότε είναι πιθανό ότι η επίλυση προβλήματος θα πάρει την κεντρική θέση στην καρδιά της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Τέλος, σύμφωνα με τις εξαγγελίες του Υπουργείου Παιδείας, στις εξετάσεις για τα Πρότυπα σχολεία δεν ελέγχονται γνώσεις και δεν απαιτείται οι μαθητές να μελετήσουν πρόσθετη ύλη. Ειδικά στα Μαθηματικά θα ελέγχονται οι ικανότητες των μαθητών για κατανόηση και επίλυση προβλημάτων κυρίως της καθημερινής ζωής. Επιπρόσθετα τα θέματα στα Μαθηματικά, όπως ακριβώς και τα αντίστοιχα στον ΠΥΘΑΓΟΡΑ, θα περιέχουν 25 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής διαβαθμισμένης δυσκολίας.

Είναι προφανές ότι όλα τα παραπάνω δηλώνουν πλήρη εναρμόνιση των εξετάσεων για τα Πρότυπα σχολεία με τα χαρακτηριστικά του ΠΥΘΑΓΟΡΑ.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά προβλήματα που τέθηκαν στον διαγωνισμό μαθηματικών ικανοτάτων της ΕΜΕ, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ.

Οι λύσεις που προτείνονται δεν στηρίζονται στη δημιουργία εξίσωσης καθώς στόχος είναι η δυνατότητα λύσης με νοερές πράξεις.

Θέμα 1: Οι κάτοικοι δύο κοινοτήτων αποφάσισαν να δενδροφυτεύσουν τον δρόμο που συνδέει τις δύο κοινότητες. Φύτευσαν λεύκες, όπως δείχνει η εικόνα, σε απόσταση 15 μέτρων την μία από την άλλη. Συνολικά χρειάστηκε να φυτεύσουν 402 λεύκες. Πόσο μήκος έχει ο δρόμος;

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι για να υπολογισθεί το μήκος του δρόμου αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος μόνο της μία σειράς. Η μία σειρά αποτελείται από 402:2=201 λεύκες. Γνωρίζουμε ότι οι λεύκες απέχουν απόσταση 15 μέτρων η μία από την άλλη συνεπώς τα διαστήματα που δημιουργούνται είναι 200, άρα αρκεί να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $200 \cdot 15 = 3000$ μέτρα που αντιστοιχούν σε 3.000:1.000=3km.

Θέμα 2: Σε μία συγκέντρωση μαθητών και μαθητριών αν τα αγόρια ήταν 10% περισσότερα τότε θα υπήρχαν στην αίθουσα 74 άτομα. Αν τα κορίτσια ήταν 10%

περισσότερα τότε στην αίθουσα θα υπήρχαν 73 άτομα. Ο αριθμός των αγοριών στην αίθουσα είναι:

Α) 30 Β) 40 Γ) 45 Δ) 50 Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Απάντηση: Στο παραπάνω πρόβλημα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα αγόρια ή τα κορίτσια θα πρέπει να είναι Φυσικοί, αφού δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν 2,1 ή $\frac{4}{5}$ παιδιά. Αυτό που θα επιχειρήσουμε να κάνουμε για να απαντήσουμε σε αυτό το θέμα είναι να ελέγξουμε με τη σειρά τις απαντήσεις που μας δίνονται, αν μπορούν να επαληθεύσουν τα δεδομένα του προβλήματος.

Πιο συγκεκριμένα, η επιλογή **Α)** ορίζει ότι τα αγόρια είναι 30.

Το 10% του 30 υπολογίζεται ως εξής $\frac{10}{100}\cdot 30=3$. Άρα ο συνολικός αριθμός των αγοριών είναι 30+3=33. Αυτό σημαίνει ότι τα κορίτσια θα είναι 74-33=41. Το 10% των κοριτσιών υπολογίζεται ως εξής $\frac{10}{100}\cdot 41=4{,}1$. Όμως δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν 4,1 κορίτσια. Άρα η επιλογή Α) απορρίπτεται.

Επόμενη στη σειρά είναι η επιλογή **Β)** όπου ορίζει ότι τα αγόρια είναι 40.

Το 10% του 40 υπολογίζεται ως εξής $\frac{10}{100}\cdot 40=4$. Άρα ο συνολικός αριθμός των αγοριών είναι 40+4=44. Αυτό σημαίνει ότι τα κορίτσια θα είναι 74-44=30. Το 10% των κοριτσιών υπολογίζεται ως εξής $\frac{10}{100}\cdot 30=3$, συνεπώς τα κορίτσια θα είναι 33 που επαληθεύεται και από το δεύτερο δεδομένο του προβλήματος αφού 33+40=73.

Θέμα 3 : Ένας κτηνοτρόφος μοίρασε στα 3 παιδιά του τα πρόβατα που είχε ως εξής:

Στο πρώτο παιδί του έδωσε τα $\frac{2}{5}$ από τα πρόβατα, στο δεύτερο παιδί έδωσε τα $\frac{2}{7}$ και στο τρίτο παιδί έδωσε το $\frac{1}{4}$. Όταν τελείωσε η μοιρασιά παρατήρησε ότι του είχαν περισσέψει 18 πρόβατα. Πόσα πρόβατα είχε συνολικά ο κτηνοτρόφος;

Απάντηση: Αρχικά, παρατηρούμε ότι τα κλάσματα στο πρόβλημα δεν είναι ομώνυμα, άρα θα τα κάνουμε ομώνυμα έτσι ώστε να βρούμε τα 18 πρόβατα σε ποιο μέρος του συνολικού μεγέθους αναφέρονται. Συνεπώς, $\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{56}{140}+\frac{40}{140}+\frac{35}{140}=\frac{131}{140}$ αφού το Ε.Κ.Π.(5,7,4)=140. Δηλαδή, ο κτηνοτρόφος έδωσε στα παιδιά του $\frac{131}{140}$, άρα του έμειναν να δώσει τα $\frac{140}{140}-\frac{131}{140}=\frac{9}{140}$. Ως εκ τούτου τα 18 πρόβατα αντιστοιχούν στα $\frac{9}{140}$. Μπορούμε να βρούμε τον συνολικό αριθμό προβάτων με αναγωγή στη μονάδα, δηλαδή 18:9=2, άρα το $\frac{1}{140}$ αντιστοιχεί σε 2 πρόβατα, συνεπώς τα $\frac{140}{140}=1$ αντιστοιχεί σε $2\cdot 140=280$ πρόβατα.

Θέμα 4: **Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το ύψος της στάθμης του νερού σε μία κυλινδρική δεξαμενή που γεμίζει από μία βρύση με σταθερή ροή νερού.**

ΧΡΟΝΟΣ	ΥΨΟΣ
8 π.μ	23cm
8.20΄π.μ	26cm
8.40΄π.μ	29cm
9 π.μ	32cm

Σε τι ύψος αναμένεται να βρίσκεται το νερό στις 10.10΄π.μ;

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι η στάθμη του νερού ανεβαίνει 3cm κάθε 20’. Άρα:

- Στις 9:20 η στάθμη θα ανέβει στα 32+3=35cm.
- Στις 9:40 η στάθμη θα ανέβει στα 35+3=38cm.
- Στις 10:00 η στάθμη θα ανέβει στα 38+3=41cm.
- Στις 10:10 η στάθμη θα ανέβει στα 41+1,5=42,5cm

Θέμα 5: **Ένα αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα και σε 7 λεπτά διάνυσε απόσταση 10 km. Αν συνεχίσει με την ίδια ταχύτητα τι διάστημα θα διανύσει σε 1 ώρα;**

Α) 60km Β) 100 km Γ) 70 km Δ) 85,7km Ε) 85,3km

Απάντηση: Ας παρατηρήσουμε τις απαντήσεις και ας εργαστούμε προσεγγιστικά. Ισχύει 60=8×7+4, δηλαδή το αυτοκίνητο θα διανύσει λίγο περισσότερα από τα 8×10km=80km. Ας κάνουμε τώρα μία καλύτερη προσέγγιση. Από τη σχέση 60=8×7+4 βλέπουμε ότι το υπόλοιπο 4 είναι περισσότερο από το μισό του 7 δηλαδή από το 3,5 άρα θα διανύσει επιπλέον και λίγο περισσότερο από τα μισά του 10km, δηλαδή από τα 5km. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ταιριάζει η απάντηση 85,7km.

Θέμα 6: **Σε ένα γραφείο εργάζεται ίδιος αριθμός γυναικών και ανδρών. Όσοι άνδρες και γυναίκες έχουν παιδιά είναι παντρεμένοι. Από τις γυναίκες οι μισές είναι παντρεμένες ενώ από τις παντρεμένες γυναίκες το $\frac{2}{3}$ έχουν παιδιά. Από τους άνδρες τα $\frac{2}{3}$ είναι παντρεμένοι ενώ οι μισοί των παντρεμένων ανδρών έχουν παιδιά. Τι μέρος των εργαζόμενων στο γραφείο δεν έχει παιδιά;**

Απάντηση: Μας ζητείται να υπολογίσουμε τι μέρος των εργαζομένων δεν έχει παιδιά, παρατηρούμε όμως ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το μέρος των γυναικών και το μέρος των ανδρών που έχει παιδιά. Πιο συγκεκριμένα το μέρος των γυναικών που έχουν παιδιά είναι $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ενώ το μέρος των ανδρών που έχουν παιδιά είναι $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Δηλαδή το $\frac{1}{3}$ των ανδρών και το $\frac{1}{3}$ των γυναικών έχουν παιδιά. Επειδή ο αριθμός των ανδρών και των γυναικών είναι ίδιος, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $\frac{1}{3}$ του συνόλου των εργαζομένων έχει παιδιά. Ως εκ τούτου για να υπολογίσουμε το μέρος των εργαζομένων που δεν έχουν παιδιά θα πρέπει να αφαιρέσουμε από τη μονάδα το μέρος εκείνων που έχει, δηλαδή $1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

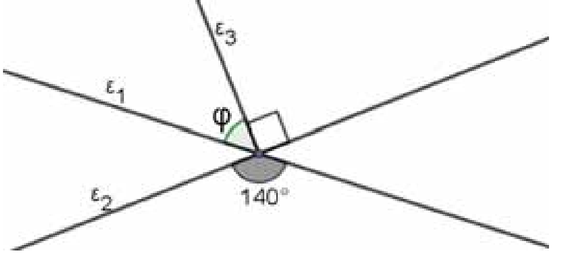
Β΄Γυμνασίου

Μαθηματική ικανότητα επίλυσης προβλήματος

Προβλήματα του διαγωνισμού μαθηματικών ικανοτήτων της ΕΜΕ ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ που λύνονται με εξίσωση

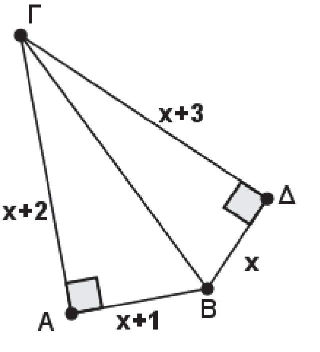
Σ. Φερεντίνος και Δ. Παπαϊωάννου

Θέμα 1: Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται ενώ η ε_3 είναι κάθετη στην ε_2. Πόσες μοίρες είναι η γωνία φ;



Απάντηση: Από το σχήμα παρατηρούμε ότι, η ορθή γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των ε_2 και ε_3 με τη γωνία φ, είναι παραπληρωματικές με τη γωνία που είναι 180^{o} . Όπως γνωρίζουμε, οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. Συνεπώς, θα ισχύει ότι $\varphi+90^{o}=140^{o}$, με $\varphi=140^{o}-90^{o}$, δηλαδή $\varphi=150^{0}$.

Θέμα 2: Ο καθηγητής των Μαθηματικών κατασκεύασε στον πίνακα το διπλανό σχήμα με τα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ και ζήτησε από τους μαθητές να συζητήσουν για το αν και το πως μπορούν να υπολογίσουν την τιμή του πραγματικού αριθμού x.



- Ο Βασίλης απάντησε αμέσως x=4
- Η Έλενα είπε ότι πρέπει οπωσδήποτε να υπολογίσει την ΒΓ.
- Ο Πέτρος είπε ότι πρέπει το x να είναι άρρητος αριθμός.
- Η Σαμάνθα είπε ότι είναι αδύνατον να υπάρχουν τέτοια τρίγωνα
- Ο Έκτορας απάντησε ότι θα πρέπει πρώτα να υπολογίσει τις γωνίες των τριγώνων.

Ποιος μαθητής ή μαθήτρια διατύπωσε την πιο σωστή άποψη;

Απάντηση: Αρχικά, παρατηρούμε ότι τα δύο τρίγωνα είναι ορθογώνια με κοινή υποτείνουσα. Γι΄αυτό θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και για τα δύο τρίγωνα με κοινή υποτείνουσα την πλευρά ΒΓ.

Δηλαδή θα ισχύει ότι $x^2+(x+3)^2=(x+1)^2+(x+2)^2$, άρα $x^2 + (x+3)\cdot(x+3) = (x+1)\cdot(x+1) = (x+2)\cdot(x+2)$ οπότε $2x^2+6x+9=2x^2+6x+5$.

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι δεν υπάρχει πραγματική τιμή του x έτσι ώστε να είναι αληθής.

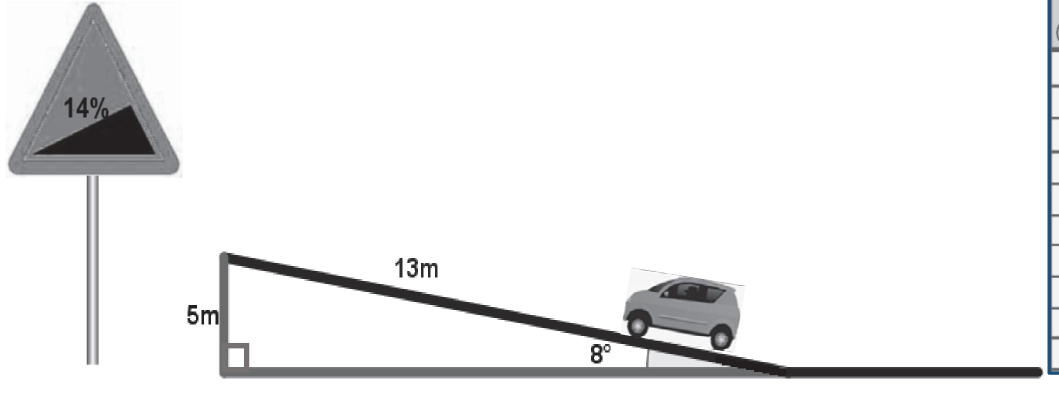
Θέμα 3: Ένα αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα και σε 2 λεπτά διάνυσε απόσταση 3 km. Αν συνεχίσει με την ίδια ταχύτητα τι διάστημα θα διανύσει σε 1 ώρα;

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι το αυτοκίνητο τρέχει με σταθερή ταχύτητα και ότι σε 2 λεπτά διάνυσε απόσταση 3 km. Θέλουμε να βρούμε, πόση απόσταση θα διανύσει σε 1 ώρα δηλαδή σε 60 λεπτά. Άρα έχουμε ότι $\frac{2}{60}=\frac{3}{x}$, δηλαδή 2x = 180 άρα x = 90km.

Θέμα 4: Εάν ανακατέψουμε 5 κιλά κόκκινο χρώμα και 9 κιλά κίτρινο, με στόχο να βάψουμε ένα δωμάτιο, παίρνουμε μια συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί χρώματος. Με πόσα κιλά κίτρινο θα ανακατέψουμε 8 κιλά κόκκινο χρώμα για να πάρουμε την ίδια απόχρωση του πορτοκαλί χρώματος;

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι για να πάρουμε τη συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί χρώματος πρέπει να ανακατέψουμε 5 κιλά κόκκινο χρώμα και 9 κιλά κίτρινο χρώμα, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει συγκεκριμένη αναλογία κόκκινου και κίτρινου χρώματος. Άρα, αν έχουμε 8 κιλά κόκκινου χρώματος θα πρέπει να υπολογίσουμε τα κιλά του κίτρινου χρώματος χρησιμοποιώντας ανάλογα ποσά. Δηλαδή $\frac{9}{5}=\frac{x}{8}$, άρα $5x = 72$, δηλαδή $x=\frac{72}{5}=14{,}4$.

Θέμα 5: Με βάση τις μετρήσεις του ανηφορικού δρόμου, την πινακίδα της κλίσης του δρόμου και τον τριγωνομετρικό πίνακα τι από τα παρακάτω ισχύει;



Γωνία (σε μοίρες)	εφαπτομένη
1	0,0175
2	0,0349
3	0,0524
4	0,0699
5	0,0875
6	0,1051
7	0,1228
8	0,1405
9	0,1584
10	0,1763

Α) δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με αυτές τις μετρήσεις
Β) με βάση της γωνία που σχηματίζει ο δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο είναι λάθος η κλίση 14%
Γ) θα έπρεπε ο πίνακας να περιέχει το συνημίτονο και όχι την εφαπτομένη.
Δ) από τον πίνακα προκύπτει ότι όσο ανέρχεται το αυτοκίνητο τόσο αυξάνεται και η κλίση του δρόμου.
Ε) όλα τα προηγούμενα ισχύουν.

Απάντηση: Πρέπει να ελέγξουμε αν η πινακίδα που υποδεικνύει ότι η κλίση είναι ίση με 14% αληθεύει. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να υπολογισθεί η προσκείμενη πλευρά της δεδομένης γωνίας των 8^0. Από τον τριγωνομετρικό πίνακα που μας δίνεται παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη των 8^0 είναι ίση με 0,14 με προσέγγιση δεκάτου, δηλαδή ισχύει ότι $εφ8^0=0{,}14=\frac{14}{100}$. Επίσης είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της οξείας γωνίας των 8^0 είναι ίση με τον λόγο, $εφ8^0=\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρα}}=\frac{5}{x}$, δηλαδή $\frac{14}{100}=\frac{5}{x}$, άρα $x=\frac{500}{14}\,m$. Δηλαδή για να είναι η κλίση ίση με 14% θα πρέπει η προσκείμενη πλευρά της γωνίας των 8^0 να είναι ίση με $\frac{500}{14}=35{,}71m$ με προσέγγιση δεκάτου.

Όμως αφού το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά που είναι 13m θα πρέπει να επαληθεύεται και το πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή θα πρέπει $5^2+x^2=13^2$, με $x^2=13^2-5^2=169-25=144$ και $\sqrt{x^2}=\sqrt{144}$, συνεπώς =12m.

Όμως βλέπουμε ότι $12m \neq \frac{500}{14}m$!

Θέμα 6: Τρεις φίλοι αγόρασαν μαζί έναν λαχνό σε μία συγκέντρωση και κέρδισαν μία τηλεόραση και ένα στερεοφωνικό.

Συμφώνησαν να κρατήσουν ο πρώτος την τηλεόραση, ο δεύτερος το στερεοφωνικό και στον τρίτο να δώσουν χρήματα ώστε τελικά να και οι τρεις να έχουν ωφεληθεί εξ ίσου από τον λαχνό. Ο πρώτος έδωσε στον τρίτο 180€ ενώ ο δεύτερος έδωσε στον πρώτο 20€ και στον τρίτο 100€. Ποια είναι η αξία της τηλεόρασης;

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι το συνολικό ποσό που πήρε ο τρίτος φίλος ήταν 280€. Αν x η αξία της τηλεόρασης τότε το ποσό που εισέπραξε ο πρώτος θα είναι: x+ 20€ - 180€.

Καθώς τα δύο αυτά ποσά θα πρέπει να είναι ίσα έχουμε: x+ 20€ - 180€=100€ + 180€ άρα x=440€

Θέμα 7: Ένα προϊόν με αρχική τιμή Α αυξήθηκε κατά 10%, μετά μειώθηκε κατά 10% και η τελική τιμή του έγινε Τ.

α) Ποια είναι η ποσοστιαία μεταβολή του ποσού Α;

β) Αν προηγηθεί η ελάττωση κατά 10% και μετά γίνει η αύξηση 10% ποια θα είναι τότε η ποσοστιαία μεταβολή του ποσού Α;

Απάντηση: Στο παραπάνω θέμα μας ζητείται να υπολογίσουμε την ποσοστιαία μεταβολή της αρχικής τιμής Α ενός προϊόντος έπειτα από κάποιες ποσοστιαίες αυξομειώσεις.

Για τους υπολογισμούς μας στη συνέχεια θα θεωρήσουμε την αρχική τιμή Α του προϊόντος ως x.

α) Αρχικά, θα υπολογίσουμε την τιμή που θα έχει το προϊόν με αρχική τιμή x, αμέσως μετά την αύξηση κατά 10%. Η τιμή αυτή είναι $x+\frac{10}{100}\cdot x$, δηλαδή $1,1\cdot x$.

Έπειτα, γίνεται μείωση της τιμής του προϊόντος κατά 10%.

Συνεπώς η τελική τιμή Τ του προϊόντος θα είναι, $T=1,1\cdot x-\frac{10}{100}\cdot 1,1\cdot x$ άρα $T=0,99\cdot x=\frac{99}{100}\cdot x$.

Είναι προφανές ότι η ποσοστιαία μεταβολή της άρα αρχικής τιμής Α του προϊόντος είναι μειωμένη κατά 1%.

β) Στη συνέχεια, καλούμαστε να υπολογίσουμε πάλι την ποσοστιαία μεταβολή της αρχικής τιμής x του προϊόντος , με τη διαφορά όμως ότι θα προηγηθεί η ελάττωση κατά 10% και έπειτα θα γίνει η αύξηση κατά 10%.
Ας ξεκινήσουμε πρώτα με τον υπολογισμό της μείωσης. Θα έχουμε ότι το ποσό x μετά την μείωση θα γίνει $x-\frac{10}{100}\cdot x$, δηλαδή $0,9\cdot x$.

Έπειτα, για την εύρεση της τελικής τιμής Τ του προϊόντος θα ισχύει ότι, $T=0,9\cdot x+\frac{10}{100}\cdot 0,9\cdot x$ άρα $T=0,9\cdot x+0,09\cdot x = 0,99x$.

Συνεπώς και σε αυτήν την περίπτωση η ποσοστιαία μεταβολή της αρχικής τιμής του προϊόντος x παρατηρούμε ότι μειώθηκε κατά 1%.

Β΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

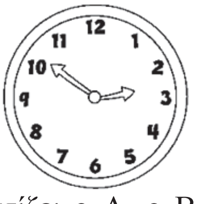
Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

1) Ένα ποσό Α αυξήθηκε κατά 25%, στη συνέχεια αυξήθηκε και πάλι κατά 25%, μετά μειώθηκε κατά 25% και τέλος μειώθηκε και πάλι κατά 25%.
Κατά τι ποσοστό, κατά προσέγγιση, μεταβλήθηκε τελικά το ποσόν Α;

2) Σε ένα βιβλιοπωλείο έχουν τοποθετηθεί στο ίδιο ράφι 31 βιβλία το ένα δίπλα στο άλλο.

Κάθε βιβλίο έχει αξία 2€ μικρότερη από το επόμενο στη σειρά. Η αξία του τελευταίου βιβλίου είναι ίση με την αξία του μεσαίου και ενός από τα δύο διπλανά του. Να ερευνήσετε αν το διπλανό βιβλίο του μεσαίου είναι το προηγούμενο ή το επόμενο.

3) Σε μία αίθουσα υπάρχουν μερικά άτομα και ένα ρολόι στον τοίχο.
Ένα άτομο βγαίνει έξω από την αίθουσα όταν στο ρολόι οι δύο δείκτες σχημάτιζαν γωνία 125^0 λίγο μετά τις 6μ.μ. Είχε περάσει πάνω από μισή ώρα, αλλά λιγότερο από μία ώρα, και το ίδιο άτομο επέστρεψε στην αίθουσα όταν οι δείκτες του ρολογιού σχημάτιζαν γωνία $122{,}5^0$. Πόση ώρα έλειψε από την αίθουσα το συγκεκριμένο άτομο;



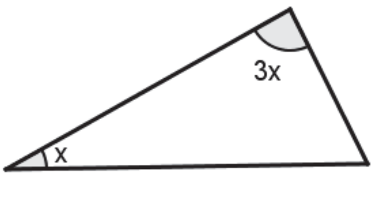
4) Τρεις αθλητές, οι Α, Β και Γ, τρέχουν σε έναν αγώνα δρόμου. Όταν τερματίζει ο Α, ο Β βρίσκεται 20m πίσω του και ο Γ βρίσκεται 28m πίσω του Α. Όταν τερματίζει ο Β ο Γ βρίσκεται 10m πίσω του. Ποια ήταν η απόσταση την οποία έτρεξαν οι 3 αθλητές;

5) Ένα ορνιθοτροφείο διαθέτει 1.521 αυγά. Το ορνιθοτροφείο διαθέτει έναν ορισμένο αριθμό από θήκες οι οποίες χωράνε όλες τον ίδιο αριθμό αυγών. Χρησιμοποιήθηκε ένας αριθμός από θήκες που ήταν μεγαλύτερος του 200 αλλά μικρότερος του 300 όμως περίσσεψαν 3 αυγά. Πόσες θήκες χρησιμοποιήθηκαν και πόσα αυγά χωρούσε η κάθε μία;

Απαντήσεις θεμάτων τεύχους 117

1) Έστω ότι ο κατηφορικός δρόμος (σε χιλιόμετρα) έχει μήκος α, ο οριζόντιος έχει μήκος β και γ ο ανηφορικός.
Ισχύει $\frac{\alpha}{75}+\frac{\beta}{60}+\frac{\gamma}{50}=3$ ενώ $\frac{\gamma}{75}+\frac{\beta}{60}+\frac{\alpha}{50}=3{,}5$ καθώς στην επιστροφή ο ανηφορικός δρόμος γίνεται κατηφορικός και αντιστρόφως.
Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $\frac{5\alpha}{150}+\frac{2\beta}{60}+\frac{5\gamma}{150}=6{,}5$ από όπου προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{30}+\frac{\beta}{30}+\frac{\gamma}{30}=6{,}5$ και τελικά $\alpha+\beta+\gamma=30\cdot 6{,}5=195$ (χιλιόμετρα)

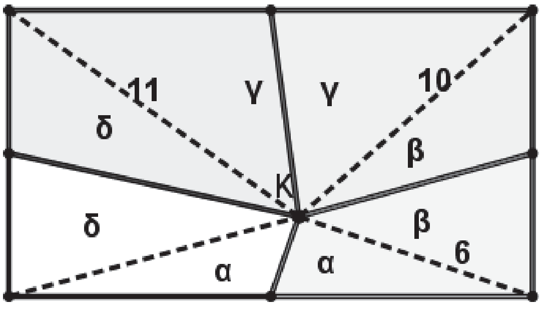
2) Με βάση την εκφώνηση και το σχήμα έχουμε $x+y+3x=180$ (σε μοίρες) όπου y είναι η τρίτη γωνία του τριγώνου. Καθώς το τρίγωνο είναι οξυγώνιο θα έχουμε $0<x<y<3x<90$.



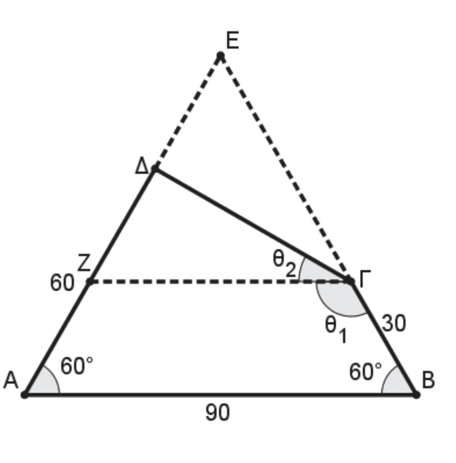
Επειδή x<y<3x θα έχουμε 5x<x+y+3x<7x (εδώ με το τέχνασμα της πρόσθεσης x+3x και στα δύο μέλη προσπαθήσαμε να αξιοποιήσουμε τη σχέση x+y+3x=180). Τελικά ισχύει 5x<180<7x και οι μόνοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση αυτή είναι οι 26, 27, 28 και 29.

3) Με βάση την εκφώνηση ισχύει: α<β<γ<δ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=1$. Υποχρεωτικά θα πρέπει να εξετάσουμε όλους τους συνδυασμούς ξεκινώντας από τις τιμές α=2 και β=3 (γιατί;)
Έχουμε $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=1$ άρα $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{1}{6}$ αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός γ μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες είτε ίσες με 7. Πράγματι αν γ=7 τότε $\frac{1}{7}+\frac{1}{\delta}=\frac{1}{6}$ άρα $\frac{\delta+7}{7\delta}=\frac{1}{6}$ οπότε δ=42 και η πρώτη τετράδα που βρήκαμε είναι η (2, 3, 7, 42). Σκεπτόμαστε με τον ίδιο τρόπο και για γ=8 προκύπτει δ=24, για γ=9 προκύπτει δ=18 και για γ=10 τότε δ=15. Στη συνέχεια δοκιμάζουμε την περίπτωση β=4 από όπου προκύπτει γ=5 και δ=20 και τέλος για β=4 προκύπτει γ=6 και δ=12.
Οι συνολικές τετράδες επομένως είναι οι (2, 3, 7, 42) - (2, 3, 8, 24) - (2, 3, 9, 18) - (2, 3, 10, 15) - (2, 4, 5, 20) - (2, 4, 6, 12).

4) Μία από τις μεθόδους υπολογισμού εμβαδών ενός επιπέδου σχήματος είναι να το χωρίσουμε σε τμήματα. Αυτό μας οδηγεί στη σκέψη να ενώσουμε το σημείο Κ με τις κορυφές του ορθογωνίου οπότε αυτό χωρίζεται πλέον σε 8 τρίγωνα τα οποία ανά δύο είναι ισεμβαδικά (γιατί;).
Με βάση το σχήμα έχουμε α+β=6 (1), β+γ=10 (2) και γ+δ=11 (3) οπότε αρκεί να υπολογιστεί το α+δ. Από τις σχέσεις (1)+(3) έχουμε (α+β)+(γ+δ) = 17 άρα (α+δ) + (β+γ) = 17 και επειδή β+γ=10 άρα α+δ= 7.



5) Αν προεκτείνουμε τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ θα δημιουργηθεί το τρίγωνο ΕΑΒ που είναι ισόπλευρο (γιατί;). Σκεφτόμαστε μήπως είναι χρήσιμο να χωρίσουμε τη ζητούμενη γωνία θ φέρνοντας την παράλληλη ΓΖ προς την ΑΒ. Πράγματι είναι χρήσιμο καθώς τώρα έχουμε νέο ισόπλευρο τρίγωνο, το ΕΓΖ (γιατί;). Επιπλέον το σημείο Δ είναι το μέσον της ΕΖ, η ΓΔ είναι διάμεσος άρα και ύψος και διχοτόμος οπότε η γωνία $\theta_2=30^0$ και καθώς $\theta_1=120^0$. Τελικά $\theta=150^0$.



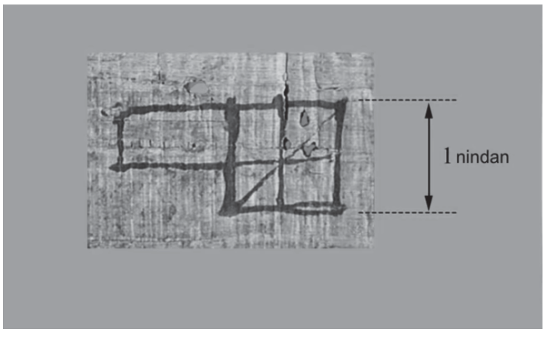
Στιγμιότυπα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: από τη Βαβυλώνα στη σύγχρονη εποχή

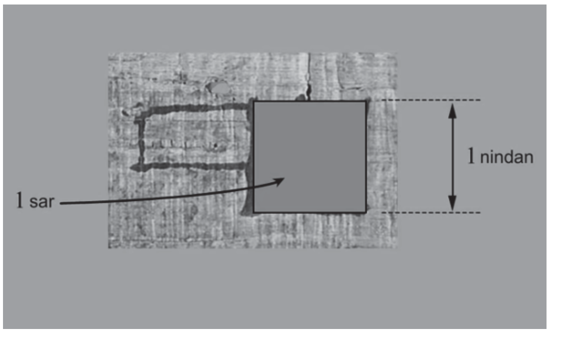
Καλλιόπη Κωστοπούλου – Γιάννης Καρκαζής

Το πρόβλημα της εξεύρεσης λύσης απλών δευτεροβάθμιων εξισώσεων αντιμετωπίστηκε τουλάχιστον 4000 χρόνια πριν, τόσο από τους Βαβυλώνιους όσο και από τους Αιγύπτιους. Με δεδομένο ότι κατά την αρχαιότητα δεν είχαν επινοηθεί τα σύμβολα για την αποτύπωση αλγεβρικών παραστάσεων γι' αυτό οι άνθρωποι κατέφευγαν στην περιγραφική αποτύπωση με λέξεις και εικόνες, τόσο των αλγεβρικών εξισώσεων όσο και της διαδικασίας επίλυσης τους.

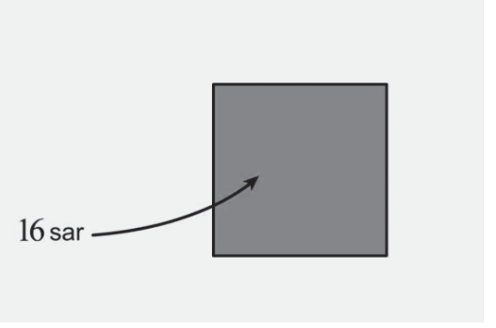
Σε εκείνους τους αρχαίους χρόνους, τα προβλήματα που αφορούσαν τετράγωνα ποσοτήτων εμφανίζονταν συνήθως κατά τον υπολογισμό των εμβαδών και των διαστάσεων οικοπέδων.

Για παράδειγμα, στη Βαβυλώνα, μια τυπική μέτρηση του μήκους ήταν το nindan, ενώ μια τυπική μονάδα έκτασης, ήταν το ένα τετραγωνικό nindan, το οποίο οριζόταν ως ένα sar (ίσο με περίπου 36 τετραγωνικά μέτρα).

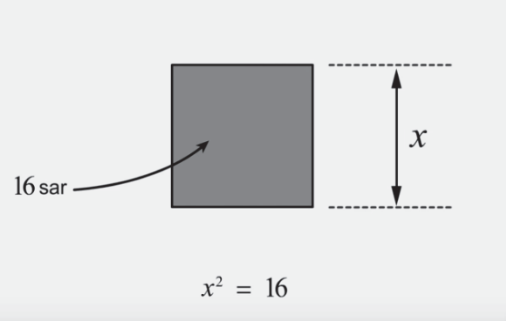




Ένα πρόβλημα που οι Βαβυλώνιοι ίσως χρειαζόταν να λύσουν, θα ήταν να βρουν το μήκος των πλευρών ενός τετραγωνικού θαλάμου αποθήκευσης έκτασης 16 sar.

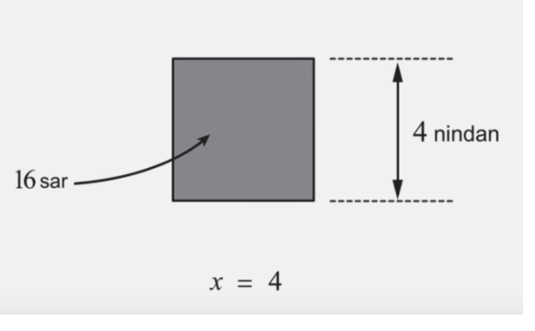


Σε σύγχρονους αλγεβρικούς όρους, θα μπορούσαμε να εκφράσουμε αυτό το πρόβλημα με την εξίσωση $x^2 = 16$, όπου το x εκφράζει το άγνωστο μήκος της πλευράς του θαλάμου.

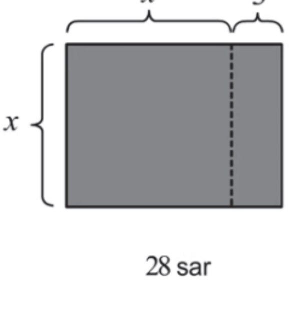


Αυτό ισοδυναμεί με την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2–16 = 0$.

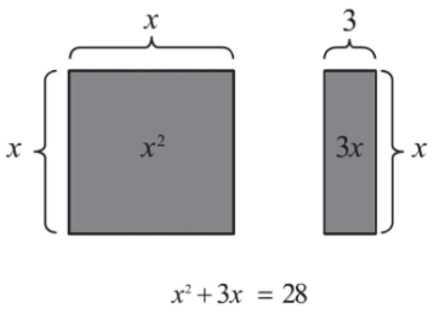
Σε αυτήν την περίπτωση και με δεδομένο ότι το μήκος πρέπει πάντα να είναι θετικό, η τιμή του x μπορεί να βρεθεί λαμβάνοντας την τετραγωνική ρίζα του 16, κάτι που οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι έκαναν συμβουλευόμενοι πίνακες που είχαν κατασκευάσει με τα τετράγωνα των αριθμών σε πήλινες πινακίδες ή πάπυρους.



Ένα πιο δύσκολο πρόβλημα θα μπορούσε να είναι να βρεθεί το μήκος των πλευρών ενός τετραγωνικού θαλάμου αποθήκευσης με μια επιπλέον επέκταση 3 nindan, όπου η συνολική περιοχή αποθήκευσης πρέπει να είναι 28 sar.



Αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να εκφράζεται από την εξίσωση $x^2 + 3x = 28$,



ή αφαιρώντας το 28 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης, αυτή θα μπορούσε να γραφτεί $x^2 + 3x - 28 = 0$.

Η επίλυση της συγκεκριμένης δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι πιο περίπλοκη από την απλή λήψη τετραγωνικής ρίζας, οπότε έπρεπε να αναπτυχθούν διαδικασίες από τους Βαβυλώνιους για την επίλυση γενικότερων τύπων δευτεροβάθμιων εξισώσεων όπως αυτή.

Στο πέρασμα των χρόνων η δευτεροβάθμια εξίσωση αποτέλεσε πρόκληση για πολλούς μαθηματικούς. Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη κάθε κατασκευή με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη είναι ισοδύναμη με τη λύση διαδοχικών δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Στα «Αριθμητικά», ο Διόφαντος χρησιμοποιεί δευτεροβάθμιες εξισώσεις για την αντιμετώπιση προβλημάτων, χωρίς όμως να τις υπολογίζει.

Ο Πέρσης Al–Khwarizmi(πατέρας της Άλγεβρας μιας και η λατινοποίηση του ονόματος του Al–jabr σημαίνει Άλγεβρα), μετά από μελέτη πολλών Ελληνικών μαθηματικών κειμένων, κατηγοριοποίησε σε έξι τύπους τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Τα αλγεβρικά εργαλεία και οι μέθοδοι που ανέπτυξε αποτέλεσαν το πρώτο βήμα για την περαιτέρω ανάπτυξη της Άλγεβρας.

Έτσι στη σύγχρονη εποχή και μετά την επινόηση πολλών μεθόδων υπολογισμού, η πιο ευρέως διαδεδομένη μέθοδος επίλυσης εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού είναι αυτή που περιγράφεται παρακάτω.

Πριν όμως από την ανάλυση της διαδικασίας αυτής ας δούμε την εννοιολογική αποσαφήνιση των όρων που εμπλέκονται στην πορεία επίλυσής της.

Δευτεροβάθμια εξίσωση ή εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$.

Οι αριθμοί α, β,γ ονομάζονται συντελεστές της εξίσωσης.

Στην επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης σημαντικό ρόλο παίζει η παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ που ονομάζεται διακρίνουσα της εξίσωσης.

Το πλήθος των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης εξαρτάται από τις τιμές της διακρίνουσας Δ.

Συγκεκριμένα:

- Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει 2 άνισες λύσεις τις: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει 1 διπλή λύση την $x_0 = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

Εφαρμογή

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x^2–5x+2=0$
β) $5x^2=2x$
γ) $x^2–16=0$
δ) $x^2–2x+1=0$
ε) $5^2+2x+1=0$
στ) $x^2–(1-\sqrt{7})x–\sqrt{7}=0$

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=25-24=1>0$

Επομένως έχει δύο λύσεις άνισες: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot3}=\dfrac{5\pm1}{6}$

Άρα $x_1=\dfrac{5+1}{6}=1$ ή $x_2=\dfrac{5-1}{6}=\dfrac{2}{3}$

β) Η εξίσωση μπορεί να γραφεί $5x^2-2x=0$

1ος τρόπος (χρήση διακρίνουσας)

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot5\cdot0=4>0$

Επομένως έχει δύο λύσεις άνισες: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{4}}{2\cdot5}=\dfrac{2\pm2}{10}$

Άρα $x_1=\dfrac{2+2}{10}=\dfrac{2}{5}$ ή $x_2=0$

2ος τρόπος (χρήση παραγοντοποίησης)

Έχουμε $5x^2-2x=0$ ή $x(5x-2)=0$ έτσι $x=0$ ή $5x-2=0$ οπότε $x=\dfrac{2}{5}$

γ) 1ος τρόπος(χρήση διακρίνουσας)

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0^2-4\cdot1\cdot(-16)=64>0$

Επομένως έχει δύο λύσεις άνισες: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-0\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\dfrac{\pm8}{2}$. Άρα $x_1=4$ ή $x_2=-4$

2ος τρόπος (χρήση παραγοντοποίησης)

Έχουμε $x^2-16=0$ άρα $(x-4)(x+4)=0$ οπότε $x-4=0$ ή $x+4=0$ άρα $x=4$ ή $x=-4$.

3^{ος} τρόπος (χρήση μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$)

Έχουμε $x^2 - 16 = 0$ άρα $x^2 = 16$ οπότε $x = \sqrt{16}$ ή $x = -\sqrt{16}$ δηλαδή $x = 4$ ή $x = -4$

δ) 1^{ος} τρόπος(χρήση διακρίνουσας)

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot1 = 4 - 4 = 0$ άρα έχει μια διπλή λύση την $x_0 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-(-2)}{2\cdot1} = 1$

2^{ος} τρόπος (χρήση ταυτότητας)

Έχουμε $x^2 - 2x + 1 = 0$ οπότε $(x-1)^2 = 0$ άρα $x - 1 = 0$ δηλαδή $x = 1$

ε) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot5\cdot1 = 4 - 20 = -16 < 0$ άρα είναι αδύνατη.

στ) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(1-\sqrt{7}\right)^2 + 4\sqrt{7} = 1^2 - 2\sqrt{7} + \sqrt{7}^2 + 4\sqrt{7} = 1^2 + 2\sqrt{7} + \sqrt{7}^2 = (1+\sqrt{7})^2 > 0$

Επομένως έχει δύο λύσεις άνισες: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \Delta}{2\alpha} = \dfrac{\left(1-\sqrt{7}\right) \pm \sqrt{\left(1+\sqrt{7}\right)^2}}{2\cdot1} = \dfrac{1-\sqrt{7} \pm \left(1+\sqrt{7}\right)}{2}$

Άρα $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}+1+\sqrt{7}}{2}$ ή $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{7}-1-\sqrt{7}}{2}$ άρα $x_1 = \dfrac{2}{2}$ ή $x_2 = \dfrac{-2\sqrt{7}}{2}$ οπότε $x_1 = 1$, $x_2 = -\sqrt{7}$

Ένα μεγάλο μέρος της Άλγεβρας είναι αφιερωμένο στην παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων λόγω της χρησιμότητάς της. Η αλγεβρική παράσταση δευτέρου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ (τριώνυμο), με τη βοήθεια της διακρίνουσας μπορεί να παραγοντοποιηθεί σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Πλήθος λύσεων	Λύσεις	Παραγοντοποίηση
$\Delta > 0$	2 άνισες λύσεις	$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$\alpha(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	1 διπλή λύση	$x_0 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$	$\alpha(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	Δεν έχει λύσεις	–	Δεν παραγοντοποιείται

Εφαρμογές

1) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο: $7x^2 - 9x + 2$

Λύση

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-9)^2 - 4\cdot7\cdot2 = 81 - 56 = 25 > 0$

έτσι υπάρχουν δύο άνισες λύσεις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 7}=\frac{9\pm 5}{14} \text{ οπότε } x_1=1 \text{ ή } x_2=\frac{2}{7}.$$

Επομένως προκύπτει: $7x^2-9x+2=7\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{2}{7}\right)=(x-1)\cdot(7x-2)$

2) Να βρεθούν οι τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A=\frac{3x-1}{3x^2-4x+1}$ και στη συνέχεια να απλοποιηθεί.

Λύση

Η παράσταση ορίζεται όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές που δεν μηδενίζουν τον παρονομαστή. Επομένως θα πρέπει να ισχύει: $3x^2-4x+1\neq 0$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 1=16-12=4>0$, ρίζες 1 και $\frac{1}{3}$

Επομένως η παράσταση Α ορίζεται για $x\neq 1$ και $x\neq\frac{1}{3}$.

Στη συνέχεια για να απλοποιηθεί η παράσταση Α πρέπει να παραγοντοποιηθεί ο αριθμητής και ο παρονομαστής της, έτσι προκύπτει:

$$A=\frac{3x-1}{3x^2-4x+1}=\frac{3x-1}{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3x-1}{(x-1)(3x-1)}=\frac{1}{x-1} \text{ με } x\neq 1 \text{ και } x\neq\frac{1}{3}.$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2^{ου} βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της Οικονομίας, της Φυσικής κ.τ.λ. Για να μαθηματικοποιήσουμε και στην συνέχεια να επιλύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα εργαζόμαστε ως εξής:

1^{ο} βήμα: Ονομάζουμε x το ζητούμενο μέγεθος.
Στη περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα από ένα ζητούμενα επιλέγουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε x και εκφράζουμε τα υπόλοιπα με τη βοήθεια αυτού.

2^{ο} βήμα: Δημιουργούμε μια ισότητα με άγνωστο x με βάση τις εκφράσεις του προβλήματος.

3^{ο} βήμα: Λύνουμε την εξίσωση που προέκυψε.

4^{ο} βήμα: Δεχόμαστε μόνο τις λύσεις που ικανοποιούν το πρόβλημα.

Εφαρμογές

1) Ας δούμε πως λύνεται στη σύγχρονη εποχή με τη βοήθεια των τύπων το πρόβλημα των Βαβυλωνίων. Ονομάζουμε x nindan το μήκος του θαλάμου αποθήκευσης και επομένως είναι $x+3$ nindan το πλάτος του. Αφού το εμβαδόν του θαλάμου είναι 28 sar προκύπτει η εξίσωση: $x(x+3)=28$ ή $x^2+3x=28$ ή $x^2+3x-28=0$ Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=121$ Επομένως έχουμε δύο λύσεις: $x_1=4$ ή $x_2=-7$. Επομένως δεκτή είναι μόνο η λύση $x=4$.

2) Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια φαρμακοβιομηχανία για να κατασκευάσει x εμβόλια για τον covid19 ξοδεύει $\left(\frac{1}{10}x^2-4x-4200\right)$€.

Η φαρμακοβιομηχανία θέλει να πουλήσει το εμβόλιο προς 10€ το ένα σε κάθε κάτοικο του χωριού Κολοκοτρωνίτσι και να κερδίσει 3000€. Πόσοι είναι οι κάτοικοι του χωριού Κολοκοτρωνίτσι με δεδομένο ότι θα εμβολιαστούν όλοι;

Λύση

Θεωρούμε ότι το Κολοκοτρωνίτσι έχει x κατοίκους. Αφού θα εμβολιαστούν όλοι, θα χρειαστούμε x εμβόλια. Η φαρμακοβιομηχανία θα εισπράξει $10\cdot x$ €, οπότε θα κερδίσει:

$10x-\left(\frac{1}{10}x^2-4x-4200\right)$€. Επειδή θέλουμε το κέρδος να είναι 3000€ έχουμε την εξίσωση:

$10x-\left(\frac{1}{10}x^2-4x-4200\right)=3000 \quad 10x-\frac{1}{10}x^2+4x+4200-3000=0$ ή $-\frac{1}{10}x^2+14x+1200=0$ Η εξίσωση έχει Δ= 676>0 Έτσι x_1=–60 και x_2=200. Δεκτή είναι μόνο η λύση x=200.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

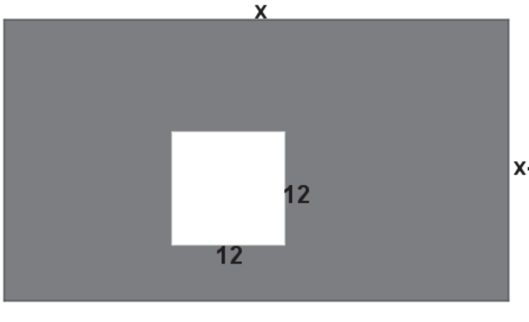
   α) $x^2=5x$ β) $\frac{1}{5}x^2-x+\frac{4}{5}=0$ γ) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{10}=0$

2. Να βρεθεί πότε ορίζονται και στη συνέχεια να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

   $A=\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ και $B=\frac{x^2-5x}{x^2-6x+5}$

3. Να βρεθούν δύο διαδοχικοί ακέραιοι που το γινόμενο τους είναι 30.
4. Κεφάλαιο 50.000€ κατατέθηκε στην τράπεζα με ανατοκισμό ανά έτος και ύστερα από 2 έτη έγινε μαζί με τους τόκους 51.005€. Να βρεθεί το επιτόκιο.
5. Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $q_1=2\cdot10^{-6}$Cb και $q_2=4\cdot10^{-6}$Cb βρίσκονται σε απόσταση R μεταξύ τους. Εάν τα φορτία αλληλεπιδρούν με δύναμη μέτρου 180N, να υπολογίσετε την απόσταση R στην οποία βρίσκονται τα φορτία. Δίνεται: $K=9\cdot10^9\ N\frac{m^2}{Cb^2}$

6. Στο εξοχικό του ο Διόφαντος θέλει να στρώσει τον κήπο με χλοοτάπητα. Το οικόπεδο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x m και πλάτος x–6 m και περιέχει ένα τετράγωνο κτίσμα πλευράς 12m . Ο χλοοτάπητας κοστίζει μαζί με την τοποθέτηση του 8€ το τετραγωνικό μέτρο. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του οικοπέδου αν γνωρίζουμε ότι το κόστος κατασκευής του χλοοτάπητα είναι 4608€.



Βιβλιογραφία:

- Struik D. J. (2008).*Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών*, Αθήνα, Δαίδαλος (Ζαχαρόπουλος).
- Χριστιανίδης, Γ. (2003). *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά*. Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Simon, D. (2005). *Solving quadratic equations using reduced unimodular quadratic forms*. Mathematics of Computation.

Ένας τρόπος εξάσκησης στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων μιας μεταβλητής με χρήση πινάκων

Ελένη Νικολακάρου

Η επιμεριστική ιδιότητα είναι η βάση των αλγεβρικών πράξεων στην Γ' Γυμνασίου και η μήτρα των σημαντικών τύπων (αξιοσημείωτες ταυτότητες) αλλά και δεξιοτήτων (ανάπτυξη–παραγοντοποίηση).

Εκτός από την ίδια την εφαρμογή του τύπου για τη μετατροπή του γινομένου σε ανάπτυγμα, ο/η μαθητής/ήτρια, θα πρέπει στη συνέχεια να προχωρήσει στο "συμμάζεμα" των μονωνύμων που έχουν προκύψει από τους πολλαπλασιασμούς, αυτό που ονομάζουμε "αναγωγή ομοίων όρων". Διακρίνουμε δηλαδή σε όλη τη διαδικασία δύο καθαρά διακριτές φάσεις:

Η πρώτη φάση είναι αυτή των πολλαπλασιασμών ενός προς ένα των μονωνύμων που απαρτίζουν τα πολυώνυμα ώστε η αλγεβρική παράσταση από μορφή γινομένου πολυωνύμων να περάσει σε μορφή αθροίσματος μονωνύμων, η αλγεβρική μας παράσταση δηλαδή μετατρέπεται από γινόμενο σε άθροισμα, είναι η φάση της "ανάπτυξης".

Η δεύτερη φάση είναι αυτή της εκτέλεσης όσων πράξεων πρόσθεσης μπορούν να εκτελεσθούν, αυτών δηλαδή μεταξύ των ομοίων μονωνύμων, είναι η φάση της "αναγωγής ομοίων όρων" αλλά και ταυτόχρονα τοποθέτησης των τελικών μονωνύμων κατά φθίνουσα σειρά ως προς το βαθμό τους.

Όλη αυτή η εργασία γίνεται βέβαια σε μία διάσταση, αυτήν της γραμμής του τετραδίου στην οποία εργαζόμαστε, πρόκειται για μια αρκετά σύνθετη διαδικασία η οποία απαιτεί εξοικείωση με τη χρήση των μεταβλητών, καλή γνώση των ιδιοτήτων των δυνάμεων και, φυσικά, άνεση στις πράξεις.

Η χρήση πινάκων που προτείνεται σε αυτό το άρθρο έχει ως στόχο ακριβώς να δώσει και μία δεύτερη διάσταση στη διαδικασία αυτού του αλγορίθμου ώστε να αποκτήσουν υπόσταση τα μονώνυμα που προκύπτουν από την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας, να παραμείνουν διακριτές οι δύο φάσεις της όλης περιπέτειας και, εν τέλει, μετά από κάποια εξάσκηση σε αυτήν, οι μαθητές/ήτριες να έχουν μια ολοκληρωμένη αντίληψη σχετικά με τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων μιας μεταβλητής.

Η μέθοδος λειτουργεί σε αρχείο Excel από το οποίο αξιοποιεί απλά και μόνο την διάταξη σε κελιά πίνακα, δεν αξιοποιείται δηλαδή ως λογιστικό φύλλο για την εκτέλεση πράξεων.

Στη συνέχεια αυτού του εγγράφου έχουν επικολληθεί τμήματα αυτού.

Καλή εφαρμογή!

–Ένας τρόπος εξάσκησης στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων μιας μεταβλητής με χρήση πινάκων

Εξασκούμαι στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων αξιοποιώντας τα κελιά ενός πίνακα

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό των διωνύμων 4x–3 και 1–5x.

***1η ενέργεια:** ετοιμάζω τον πίνακα του πολλαπλασιασμού*

Τοποθετώ στη σειρά τα μονώνυμα που συνθέτουν τα δύο διώνυμα κατά φθίνοντα βαθμό από αριστερά προς τα δεξιά για το οριζόντιο και από κάτω προς τα πάνω για το κατακόρυφο.

+1		
–5x		
×	4x	–3

ή

–3		
4x		
×	–5x	+1

Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι αντιμεταθετική οπότε δεν έχει σημασία η σειρά.
Επομένως οποιοσδήποτε από τους δύο πίνακες θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.
Ας επιλέξω τον πρώτο.

***2η ενέργεια:** ξεκινάει η πράξη : επιμεριστική ιδιότητα*

+1	+4x	–3
–5x	$-20x^2$	+15x
×	4x	–3

Δηλαδή:

$4x\cdot(-5x) = -20x^2$	$4x\cdot 1 = +4x$
$-3\cdot(-5x) = +15x$	$-3\cdot 1 = -3$

Στο τέλος αυτής της ενέργειας έχω εμφανίσει όλα τα μονώνυμα της αναπτυγμένης μορφής του γινομένου των πολυωνύμων (εδώ διωνύμων) που επεξεργάζομαι.
Έχω δηλαδή εμφανίσει το εξής: $(4x-3)\cdot(1-5x) = 4x - 20x^2 - 3 + 15x$ (αν έκανα την πράξη "στο χέρι")

***3η ενέργεια:** ολοκλήρωση της διαδικασίας: αναγωγή ομοίων όρων*

+1	+4x	–3
–5x	$-20x^2$	+15x
×	4x	–3

+4x	–3		
$-20x^2$	+15x		
=	$-20x^2$	**+19x**	**–3**

Στο τέλος αυτής της ενέργειας έχω κάνει και την αναγωγή ομοίων όρων: +4x+15x=+19x
Η πράξη μου έχει τελειώσει, έχω το αποτέλεσμα.

$$(4x-3)(1-5x) = -20x^2 + 19x - 3$$

Δώστε μεγάλη προσοχή στην τοποθέτηση των διωνύμων οριζόντια και κατακόρυφα.

α) $(4x-5)\cdot(7-x)$ **β)** $(x-6)\cdot(3x+1)$ **γ)** $(11-x)\cdot(2x-3)$ **δ)** $(-2x-5)\cdot(4x-1)$

– Ένας τρόπος εξάσκησης στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων μιας μεταβλητής με χρήση πινάκων

							Τα βέλη δείχνουν **Πρόσθεση**
×				$(4x-5)(7-x)=$			

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε μόνο που αυτή τη φορά το ένα από τα δύο πολυώνυμα είναι 2ου βαθμού.
Η φόρμα είναι φτιαγμένη έτσι ώστε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού να τοποθετηθεί οριζοντίως.

α) $(4x-5)\cdot(2x^2+x-1)$ **β)** $(3x^2-6x+2)\cdot(3x+1)$ **γ)** $(11-3x)\cdot(x^2-x+2)$ **δ)** $(-2x-5)\cdot(4x^2-3)$

Τα βέλη δείχνουν ***Πρόσθεση***

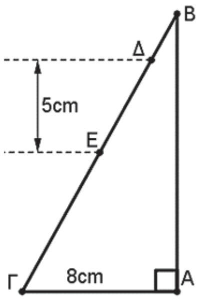
-5	$-10x^2$	$-5x$	$+5$		$-10x^2$	$-5x$	$+5$		
$4x$	$8x^3$	$+4x^2$	$-4x$		$8x^3$	$+4x^2$	$-4x$		
×	$2x^2$	$+x$	-1		$(4x-5)(2x^2+x-1) =$	$8x^3$	$-6x^2$	$-9x$	$+5$
Απάντηση:		$(4x-5)\cdot(2x^2+x-1) = 8x^3-6x^2-9x+5$							

Γ΄ Γυμνασίου
Προχωρημένα θέματα για όλους.

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

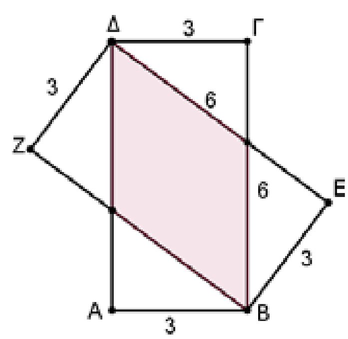
1) Δίνεται η παράσταση $\Pi = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2021}+\dfrac{1}{2022}+\dfrac{1}{2023}+\dfrac{1}{2024}+\dfrac{1}{2025}}$. Αν εκτελεστούν οι πράξεις στην παράσταση αυτή θα προκύψει ένας θετικός αριθμός. Να υπολογίσετε το ακέραιο μέρος του αριθμού αυτού.
Σημείωση: ακέραιο μέρος ενός αριθμού x είναι ένας ακέραιος αριθμός α για τον οποίο ισχύει: $\alpha \le x < \alpha+1$. Για παράδειγμα, το ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού 3,015 είναι το 3.

2) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΔΕ=2ΔΒ και $ΕΓ=\dfrac{3}{2}ΔΕ$.



Οι παράλληλες από τα Δ και Ε προς την ΑΓ απέχουν 5cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

3) Τα δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΒΕΔΖ είναι ίσα. Οι πλευρές τους έχουν μήκη 3 και 6 μονάδες μήκους. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας, δηλαδή της επιφάνειας της περιοχής επικάλυψης των δύο ορθογωνίων.



4) Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=3x+\kappa \end{array}\right\}$ Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού κ το σύστημα έχει μία μόνο λύση, δηλαδή ένα μόνο ζεύγος αριθμών (x, y).

5) Αν α είναι μία λύση της εξίσωσης $x^2-3x+1=0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{2\alpha^5-5\alpha^4+2\alpha^3-8\alpha^2}{\alpha^2+1}$$

Απαντήσεις Θεμάτων τεύχους 117

1) Στο σύστημα $\left.\begin{array}{l} x+x\cdot y+y=2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2=6 \end{array}\right\}$ θα πρέπει να γίνει σύνθεση κάποιου τετραγώνου. Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $2x\cdot y=4+6\cdot\sqrt{2}-2(x+y)$. Αν αυτή προστεθεί κατά μέλη με την δεύτερη εξίσωση του συστήματος θα έχουμε: $(x+y)^2=10+6\cdot\sqrt{2}-2(x+y)$ από όπου προκύπτει ότι $(x+y)^2+2(x+y)+1=11+6\cdot\sqrt{2}$ και επομένως $(x+y+1)^2=(3+\sqrt{2})^2$ άρα $x+y=2+\sqrt{2}$ …

2) Σημείωση: Εκ παραδρομής στο τεύχος 117 ο περιορισμός για το x γράφηκε x>9. Το σωστό είναι x>0.

Με βάση τη σχέση $x^2+80\cdot\sqrt{x}=36$ προσπαθούμε να δημιουργήσουμε τετράγωνα. Παρατηρούμε ότι $36=100-64=10^2-8^2$.

Αρχικά έχουμε ότι $x^2=36-80\cdot\sqrt{x}$ και προσθέτουμε στα δύο μέλη κατάλληλες ποσότητες για τη δημιουργία τετραγώνων.

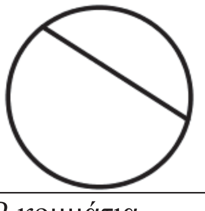
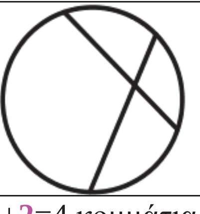
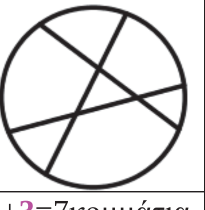
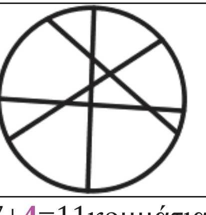
Συγκεκριμένα $x^2+16x+64=36-80\cdot\sqrt{x}+16x+64$ όπου με κατάλληλο μετασχηματισμό προκύπτει: $x^2+16x+64=36-2\cdot 40\cdot\sqrt{x}+16x+64$ ή $(x+8)^2=100-2\cdot 40\cdot\sqrt{x}+\left(4\cdot\sqrt{x}\right)^2$ και τελικά ή $(x+8)^2=\left(4\cdot\sqrt{x}-10\right)^2$. Εδώ τώρα είναι αναγκαίο να διακρίνουμε περιπτώσεις για την ποσότητα $4\cdot\sqrt{x}-10$.

Αν $4\cdot\sqrt{x}-10>0$, δηλαδή $\sqrt{x}>2{,}5$ οπότε $x>6{,}25$, τότε ισχύει $x+8=4\cdot\sqrt{x}-10$ ή $x-4\cdot\sqrt{x}+18=0$ που ισοδυναμεί με την $y^2-4y+18=0$ $(y>0)$, ή με την $(y-2)^2+14=0$ που είναι αδύνατη.

Άρα θα πρέπει $4\cdot\sqrt{x}-10<0$ άρα $\sqrt{x}<2{,}5$ οπότε $x<6{,}25$ οπότε θα ισχύει: $x+8=10-4\cdot\sqrt{x}$ δηλαδή $x+4\cdot\sqrt{x}-2=0$ που ισοδυναμεί με την εξίσωση $y^2+4y-2=0$ $(0<y<2{,}5)$. Η εξίσωση αυτή μετασχηματίζεται σε $(y+2)^2=6$ από όπου προκύπτει, με βάση τους περιορισμούς, $y=\sqrt{6}-2$ δηλαδή $\sqrt{x}=\sqrt{6}-2$ και $x=10-4\sqrt{6}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $4\sqrt{x}-x=4(\sqrt{6}-2)-10+4\sqrt{6}=\underline{8\sqrt{6}-18}$

3) Ας παραστήσουμε τα 4 πρώτα βήματα

1 ΤΟΜΗ	**2** ΤΟΜΕΣ	**3** ΤΟΜΕΣ	**4** ΤΟΜΕΣ
			
2 κομμάτια	2+**2**=4 κομμάτια	4+**3**=7κομμάτια	7+**4**=11κομμάτια

Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα, στα προηγούμενα κομμάτια προστίθενται τόσο κομμάτια όσες είναι οι ευθείες (τομές) που φέρνουμε στο συγκεκριμένο βήμα. Αυτό σημαίνει ότι για 5 τομές θα έχουμε 11+5=16 κομμάτια για 6 τομές 16+6=22 κομμάτια, για 7 τομές 22+7=29 κομμάτια, για 8 τομές 29+8=37 κομμάτια, για 9 τομές 37+9=46 κομμάτια και τέλος για 10 τομές 46+10=56 κομμάτια.

4) Έχουμε $(x-8)\cdot(x+10)\cdot(x+8)\cdot(x-10)=(x^2-64)\cdot(x^2-100)=x^4-164x^2+6.400$. Αυτή η παράσταση έχει τη μορφή τριωνύμου οπότε ας δημιουργήσουμε ένα τετράγωνο, δηλαδή ας μετασχηματίσουμε το $x^4-164x^2+6.400$ σε $x^4-2\cdot 82\cdot x^2+82^2-82^2+6.400$ που παίρνει την τελική μορφή $(x^2-82)^2-324$. Εδώ παρατηρούμε ότι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση είναι τελικά η -324 (γιατί;).

5) Αφού $x^2-13x+1=0$ αυτό σημαίνει ότι $x\neq 0$ επομένως μπορούμε να διαιρέσουμε με x και έτσι να δημιουργήσουμε την παράσταση $x+\frac{1}{x}$ που είναι το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό του $x^4+\frac{1}{x^4}$. Πράγματι $x+\frac{1}{x}=13$ επομένως $x^2+\frac{1}{x^2}=169-2=167$ (γιατί;).

Στη συνέχεια θα έχουμε $x^4+\frac{1}{x^4}=167^2-2$ αυτό σημαίνει ότι το ψηφίο των μονάδων της αριθμητικής τιμής της παράστασης $x^4+\frac{1}{x^4}$ είναι 7 (γιατί;)

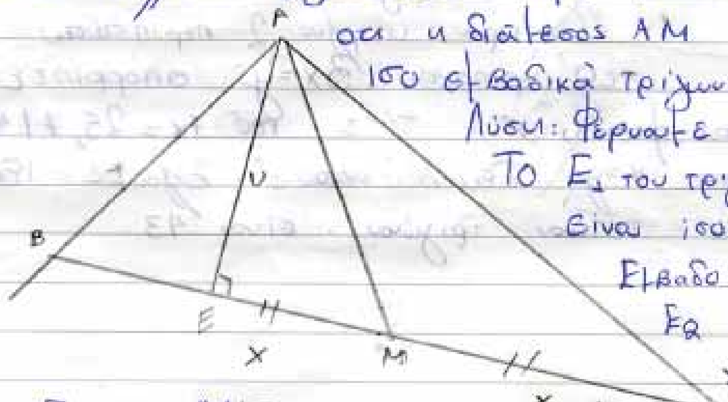
«Προχωρημένα θέματα για όλους».

ΛΥΣΕΙΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΤΕΥΧΟΣ 117

Από την **Αγγελική Ζαμπούνη** μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου του 3ου Γυμασίου Καλαμαριάς, Θεσσαλονίκη, πήραμε λύσεις για τα θέματα 1), 3) και 4).

Αγαπητη Αγγελική
Συγχαρητήρια για την πολύ αναλυτική και τεκμηριωμένη λύση για το Θέμα 4) που μας έστειλες. Έχεις αναφερθεί και στο (γιατί;) που περιέχει η προτεινόμενη λύση που παραθέτουμε.
Μελέτησε τις λύσεις που προτείνουμε στα θέματα 1) και 3).

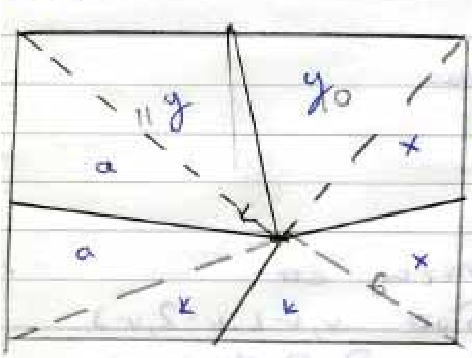
Αγγελική Ζαμπούνη Β' Γυμνασίου 3ο Γυμνάσιο Καλαμαριάς
Β' Γυμνασίου Προχωρημένα Θέματα Για όλους
Θέμα 4ο)
Με σκοπό την επίλυση της άσκησης εφάρμοσα το εξής θεώρημα.
Έστω ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΜ διάμεσος, να δειχθεί ότι η διάμεσος ΑΜ το χωρίζει σε 2 ισοεμβαδικά τρίγωνα.



Λύση: Φέρνουμε το ύψος ΑΕ. Το E_1 του τριγώνου ΑΒΜ και είναι ίσο με $\frac{xυ}{2}$. Το Εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ E_2 είναι ίσο με $\frac{2xυ}{2} = xυ$

Άρα το E_3 του ΑΜΓ είναι ίσο με $E_1 - E_2 \Rightarrow xυ - \frac{xυ}{2} \Rightarrow E_3 \Leftrightarrow \frac{xυ}{2}$ άρα $E_1 = E_2$. Οπότε η διάμεσος ενός τυχαίου τριγώνου το χωρίζει σε 2 ισοεμβαδικά τρίγωνα.

Θέμα 4



Να βρεθεί το α+κ

$\begin{cases} y+x=10 \ (1) \\ x+κ=6 \ (2) \end{cases}$ με αφαίρεση κατά μέλη της σχέσης (1) με της σχέσης (2)

$y+α=11$ (3) έπεται ότι:

$y+x-(x+κ)=4 \Rightarrow y+x-x-κ=4$
$\Rightarrow y-κ=4 \Rightarrow y=κ+4$.

Κάνοντας αντικατάσταση στην σχέση (3) έχω
$α+κ+4=11 \Rightarrow α+κ=7$

Άρα το Ε α+κ=7

Από την **Χριστίνα Σπίγγου**, λάβαμε λύση για το θέμα 2) της Γ΄ τάξης

«… *Ευχαριστώ για το χρόνο που διαθέσατε, θα παραθέσω κάποιες σκέψεις μου για την άσκηση και για τη λύση που προτείνετε.*

$x^2+80\sqrt{x}=36$ **(1)**. Προφανώς x>0 και από την ισότητα $x^2=36-80\sqrt{x}$ προκύπτει

$36-80\sqrt{x}>0$ $\quad 36>80\sqrt{x}$ $\quad \sqrt{x}<\dfrac{36}{80}$ $\quad \sqrt{x}<0,45$ x<0,2025 που καλύπτει και τη συνθήκη

$36-x^2>0$ δηλαδή 0<x<6. Οπότε στη λύση σας θεωρείτε απευθείας ότι $4\sqrt{x}-10<0$.

Παρακάτω δίνω και άλλη μια λύση. Έστω $\sqrt{x}=\alpha+\beta\sqrt{\gamma}$ με α,β,γ ρητούς β≠0 και γ>0. Τότε

$x=\left(\alpha+\beta\sqrt{\gamma}\right)^2=\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{\gamma}+\beta^2\gamma$ και $x^2=\left(\alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{\gamma}+\beta^2\gamma\right)^2=$

$=\alpha^4+4\alpha^2\beta^2\gamma+\beta^4\gamma^2+4\alpha^3\beta\sqrt{\gamma}+4\alpha\beta^3\gamma\sqrt{\gamma}+2\alpha^2\beta^2\gamma$.

Αντικαθιστώντας στην **(1)** έχουμε: $\alpha^4+6\alpha^2\beta^2\gamma+\beta^4\gamma^2+80\alpha+(4\alpha^3\beta+4\alpha\beta^3\gamma+80\beta)\sqrt{\gamma}=36$

οπότε $\alpha^4+6\alpha^2\beta^2\gamma+\beta^4\gamma^2+80\alpha=36\,(2)$ και $4\alpha^3\beta+4\alpha\beta^3\gamma+80\beta=0$ (3) Διαιρώντας την **(3)** δια

$4\beta\neq 0$ έχουμε $\alpha^3+\alpha\beta^2\gamma+20=0$ (4) και $\beta^2\gamma=\dfrac{-20-\alpha^3}{\alpha}$(5) $\alpha\neq 0$ διότι αν $\alpha=0$ τότε από την

(4) 20=0 άτοπο. Αντικαθιστώ στην (2) το $\beta^2\gamma\alpha^4+6\alpha^2\dfrac{\left(-20-\alpha^3\right)}{\alpha}+\dfrac{(-20-\alpha^3)^2}{\alpha^2}+80\alpha=36$ κάνω

απαλοιφή $\alpha^6-120\alpha^3-6\alpha^6+400+40\alpha^3+\alpha^6+80\alpha^3-36\alpha^2=0$ $-4\alpha^6-36\alpha^2+400=0$

ή $\alpha^6+9\alpha^2-100=$ που έχει λύσεις το -2 και το 2 οπότε κάνοντας τη διαίρεση

$(\alpha^6+9\alpha^2-100):(\alpha^2-4)$ βρίσκουμε πηλίκον $\alpha^4+4\alpha^2+25\neq 0$.

Δέχομαι α=–2 διότι από την **(5)** αν α = 2 θα έχουμε ότι $\beta^2\gamma=-14$ *άτοπο διότι* $\beta^2\gamma>0$. Άρα

$\beta^2\gamma=6$ *από* την (5) για α=–2 άρα $\beta\sqrt{\gamma}=\sqrt{6}$ οπότε $\sqrt{x}=-2+\sqrt{6}$,

$x=\left(\sqrt{6}-2\right)^2=6-4\sqrt{6}+4=10-4\sqrt{6}$ και

$4\sqrt{x}-x=4\left(-2+\sqrt{6}\right)-10+4\sqrt{6}=-8+4\sqrt{6}-10+4\sqrt{6}=-18+8\sqrt{6}$ ».

Αγαπητή Χριστίνα

Πολύ καλή η προσπάθεια που κατέβαλες επιχειρώντας να λύσεις το θέμα 2). Να συνεχίσεις έτσι, με ζήλο και επιμονή.

24η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων

9 έως 13 Σεπτεμβρίου 2020

Διαδικτυακή Διοργάνωση από Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Η **24η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων** πραγματοποιήθηκε από 9 έως 13 Σεπτεμβρίου 2020 ***για πρώτη φορά διαδικτυακά,*** καθώς η διοργάνωση ήταν προσαρμοσμένη στις συνθήκες που επέβαλε η πανδημία από τον Covid-19 και τηρήθηκαν όλα τα σχετικά πρωτόκολλα. Κάθε μια από τις συμμετέχουσες χώρες διαγωνίστηκε στην έδρα της ακολουθώντας ειδικούς αυστηρούς κανόνες για το αδιάβλητο του διαγωνισμού αλλά και την ασφάλεια των συμμετεχόντων. Την ευθύνη της διοργάνωσης είχε η Μαθηματική Εταιρεία της Νοτιοανατολικής Ευρώπης (MASSEE), μέσω τριμελούς Οργανωτικής Επιτροπής που αποτελείτο από τον Πρόεδρο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.) κ. Ανάργυρο Φελλούρη και τους Zoran Kadelburg (Σερβία), Emil Kolev (Βουλγαρία). Σημαντική ήταν η συμβολή της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας που φιλοξένησε το διαγωνισμό και συμμετείχε σε όλα τα στάδια της διοργάνωσης και κυρίως στη διαδικασία βαθμολόγηση των γραπτών με τους συναδέλφους

Δημήτριο Κοντοκώστα (Πρόεδρος Επιτροπής επιλογής προβλημάτων), Σιλουανό Μπραζιτίκο (Αντιπρόεδρος Επιτροπής επιλογής προβλημάτων), Ανδρέα Βαρβεράκη, Ευάγγελο Ζώτο, Αθανάσιο Μάγκο, Ευάγγελο Μουρούκο, Κωνσταντίνο Μπραζιτίκο, Ανδρέα Πούλο, Ιάσονα Προδρομίδη, Μιχάλη Ροκίδη, Αλέξανδρο Συγκελάκη, Αχιλλέα Συνεφακόπουλο, Γιάννη Τυρλή και Ευάγγελο Ψύχα.

Σπουδαίες ήταν οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών για μια ακόμη φορά σε Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Οι έξι Έλληνες μαθητές, που συμμετείχαν στην 24η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων κατάφεραν να πάρουν **δύο Χρυσά, δυο Αργυρά και δυο Χάλκινα Μετάλλια** σε ένα **πολύ δύσκολο διαγωνισμό**, συνεχίζοντας τη μεγάλη παράδοση των επιτυχιών των Ελληνικών ομάδων στις Βαλκανικές και Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Συγκεκριμένα:

Κωνσταντινίδης Κωνσταντίνος	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Χρυσό Μετάλλιο**
Φωτιάδης Πρόδρομος	**Μουσικό Γυμνάσιο Δράμας**	**Χρυσό Μετάλλιο**
Τζαχρήστας Γεώργιος	**1ο Γυμνάσιο Ιωαννίνων**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Λιάμπας Παναγιώτης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Πετράκης Εμμανουήλ	**4ο Γυμνάσιο Αγρινίου**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Θέμελης Στυλιανός	**9ο Γυμνάσιο Τρικάλων**	**Χάλκινο Μετάλλιο**

Αρχηγός και υπαρχηγός της ομάδας μας ήταν οι μαθηματικοί **Αγγελική Βλάχου και Ευαγγελία Λώλη**, αντίστοιχα.

Στην Βαλκανιάδα συμμετείχαν δέκα χώρες της περιοχής της Νοτιοανατολικής Ευρώπης και οκτώ ακόμη φιλοξενούμενες χώρες από Ασία και Ευρώπη. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία **συγχαίρει θερμά τους μαθητές της Ελληνικής ομάδας**, οι οποίοι δημιουργούν υψηλές προσδοκίες για ακόμη μεγαλύτερες επιτυχίες τα επόμενα χρόνια και σημαντικές επιδόσεις στα Μαθηματικά

Τα προβλήματα

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν όλες οι τριάδες πραγματικών αριθμών (α,b,c) που αποτελούν λύση του συστήματος των εξισώσεων: $\alpha+b+c=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ **και** $\alpha^2+b^2+c^2=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Λύση: Ας παρατηρήσουμε αρχικά πως τα α,b,c είναι διαφορετικά του μηδενός και πως αν (α,b,c) λύση, τότε και $(-\alpha,-b,-c)$ λύση, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε $\alpha bc>0$. Από την πρώτη σχέση έχουμε: $$\alpha+b+c=\frac{\alpha b+bc+c\alpha}{\alpha bc}. \quad (1)$$

Από τις δοσμένες σχέσεις παίρνομε επίσης: $(\alpha+b+c)^2-(\alpha^2+b^2+c^2)=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

και μετά από πράξεις: $$\alpha b+bc+c\alpha=\frac{\alpha+b+c}{\alpha bc}. \quad (2)$$

Τα $\alpha+b+c$ και $\alpha b+bc+c\alpha$ είναι διαφορετικά του 0, διότι διαφορετικά, από τις (1), (2) θα ήταν και τα δυο τους 0, οπότε $\alpha^2+b^2+c^2=(\alpha+b+c)^2-2(\alpha b+bc+c\alpha)=0-0=0$ και θα έπρεπε $\alpha=b=c=0$, άτοπο.

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε: $(\alpha+b+c)(\alpha b+bc+c\alpha)=\frac{(\alpha+b+c)(\alpha b+bc+c\alpha)}{(\alpha bc)^2}$

και αφού $(\alpha+b+c)(\alpha b+bc+c\alpha)\neq 0$, είναι $(\alpha bc)^2=1$, και καθώς $\alpha bc>0$, παίρνουμε $\alpha bc=1$ (3)
οπότε οι (1) και (2) μετασχηματίζονται αμφότερες στην $\alpha b+bc+c\alpha=\alpha+b+c.$ (4)

Τότε: $(\alpha-1)(b-1)(c-1)=\alpha bc-(\alpha b+bc+c\alpha)+(\alpha+b+c)-1\overset{(3),(4)}{=}1-(\alpha+b+c)+(\alpha+b+c)-1=0.$

Άρα λοιπόν τουλάχιστον ένας από τους α,b,c είναι ο 1, και από την (3) οι υπόλοιποι δύο είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου. Συνεπώς η διατεταγμένη τριάδα (α,b,c) θα πρέπει να είναι η $\left(t,\frac{1}{t},1\right)$ με $t\neq 0$ ή μια μετάθεση αυτής. Τετριμμένα, κάθε τέτοια τριάδα ικανοποιεί τις αρχικές σχέσεις, οπότε αποτελεί μια από τις ζητούμενες λύσεις. Σύμφωνα με την αρχική μας παρατήρηση, όλες οι ζητούμενες λύσεις είναι οι παραπάνω τριάδες μαζί με αυτές που προκύπτουν θεωρώντας τους αντίθετους αριθμούς σε καθεμιά, οπότε συνολικά όλες οι λύσεις είναι οι $\left(t,\frac{1}{t},1\right)$ και $\left(t,\frac{1}{t},-1\right)$ με $t\neq 0$ και όλες οι μεταθέσεις αυτών.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $B\hat{A}C=90^0$ και E το ίχνος της κάθετης από την κορυφή A προς την πλευρά BC του τριγώνου. Δίνεται σημείο Z, διαφορετικό του σημείου A, στην ευθεία AB, τέτοιο ώστε AB=BZ. Ονομάζουμε (c) τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο AEZ. O κύκλος (c) και η ZC τέμνονται ξανά στο σημείο D και έστω F το αντιδιαμετρικό σημείο του D στον κύκλο (c). Οι ευθείες FE και CZ τέμνονται στο σημείο P. Αν η εφαπτομένη του κύκλου (c) στο σημείο Z τέμνει την ευθεία PA στο σημείο T, να αποδείξετε ότι τα σημεία T,E,B,Z είναι ομοκυκλικά.

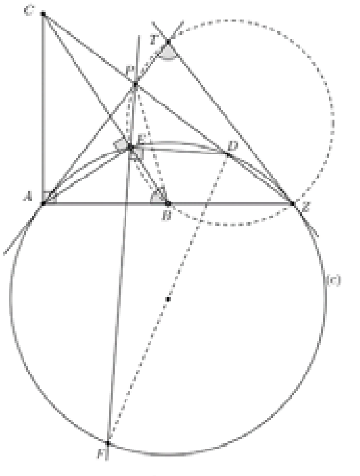
Λύση

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η PA είναι εφαπτόμενη στον (c) στο σημείο A.

Αφού E,D,Z,A ομοκυκλικά, είναι $\angle EDC=\angle EAZ=\angle EAB$. Και αφού τα τρίγωνα EBA, ABC είναι όμοια, έχουμε και $\angle EAB=\angle BCA$. Οπότε $\angle EDC=\angle BCA.$ (1)

Και αφού $\angle FED=90^0$, είναι και $\angle PED=90^0$, οπότε $\angle EPD=90^0-\angle EDC\overset{(1)}{=}90^0-\angle BCA=\angle EAC$, άρα τα E,A,P,C είναι ομοκυκλικά με συνέπεια το τρίγωνο APB να είναι ορθογώνιο στο P, και καθώς B μέσω του AZ προκύπτει $\angle ZPB=\angle PZB.$ (2).

Επίσης, $\angle EPD=\angle EAC=\angle CBA=\angle EBA$, από όπου έχουμε τα P,E,B,Z ομοκυκλικά.



Σχήμα 1

Έτσι: $\angle PAE\overset{E,A,P,C\ \text{ομοκυκλικά}}{=}\angle PCE=\angle ZPB-\angle PBE\overset{(2)}{=}\angle PZB-\angle PZE$ και ισοδυνάμως, η PA είναι εφαπτόμενη στον (c) στο σημείο A, όπως ισχυριστήκαμε.

Από την επαφή των PA, (c) έχουμε $TA=TZ$, οπότε:

$$\angle PTZ = 180^0 - 2\angle TAB = 180^0 - 2(\angle PAE + \angle EAB) = 180^0 - 2(\angle ECP + \angle ACB)$$
$$= 180^0 - 2(90^0 - \angle PZB) = 2\angle PZB = \angle PZB + \angle BPZ = \angle PBA.$$

Άρα τα T, P, B, Z είναι ομοκυκλικά και καθώς και τα P, E, B, Z είναι ομοκυκλικά, έχουμε και πως τα T, E, B, Z είναι ομοκυκλικά όπως ζητείται.

Πρόβλημα 3

Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το παρακάτω παιγνίδι:
Η Αλίκη επιλέγει το σύνολο $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, για κάποιον θετικό ακέραιο $n \geqslant 2$. Στη συνέχεια ξεκινώντας με τον Βασίλη διαλέγουν ο ένας μετά τον άλλο έναν αριθμό από το σύνολο A σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:
Αρχικά ο Βασίλης επιλέγει έναν οποιοδήποτε αριθμό, στη συνέχεια και σε κάθε επόμενο βήμα ο επιλεγμένος αριθμός πρέπει να είναι διαφορετικός από τους ήδη επιλεγμένους αριθμούς και πρέπει επίσης να διαφέρει κατά 1 από έναν ήδη επιλεγμένο αριθμό. Το παιγνίδι τελειώνει όταν έχουν επιλεγεί όλοι οι αριθμοί του συνόλου A.
Η Αλίκη κερδίζει το παιγνίδι, όταν το άθροισμα των αριθμών που έχει επιλέξει είναι σύνθετος αριθμός, διαφορετικά κερδίζει ο Βασίλης το παιγνίδι.
Ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης;

Λύση: Το να ισχυριστούμε πως η Αλίκη έχει στρατηγική νίκης θα σήμαινε πως μπορεί να βρει κάποιον n για να φτιάξει το σύνολο A, ώστε να μπορεί να απαντήσει καταλλήλως όλες τις επιλογές του Βασίλη για να έχει στο τέλος έναν σύνθετο αριθμό ως άθροισμα όλων των δικών της επιλογών. Αν τέτοιος n δεν υπάρχει, αυτό θα σημαίνει πως αντιθέτως, ο Βασίλης είναι αυτός που έχει κάποια στρατηγική νίκης.

Η Αλίκη μπορεί πρώτα να ελέγξει μικρές τιμές του n. Πράγματι, αυτό δίνει την ακόλουθη στρατηγική νίκης για αυτή: αρχικά επιλέγει $n = 8$ και απαντάει σε όλες τις δυνατές επιλογές του Βασίλη όπως στη λίστα που ακολουθεί. Στη λίστα αυτή, σε κάθε γραμμή δίνονται εναλλάξ οι επιλογές του Βασίλη και της Αλίκης, ξεκινώντας με τον Βασίλη.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	4	5	6	7	8
2	3	4	1	5	6	7	8
3	2	1	4	5	6	7	8
3	2	4	5	1	6	7	8
3	2	4	5	6	1	7	8
4	5	3	6	2	1	7	8
4	5	3	6	7	8	2	1
4	5	6	7	3	2	1	8
4	5	6	7	3	2	8	1
4	5	6	7	8	3	2	1
5	4	3	2	1	6	7	8
5	4	3	2	6	7	1	8
5	4	3	2	6	7	8	1
5	4	6	3	2	1	7	8
5	4	6	3	7	8	2	1
6	7	5	4	3	8	2	1
6	7	5	4	8	3	2	1
6	7	8	5	4	3	2	1
7	6	8	5	4	3	2	1
7	6	5	8	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1

Σε κάθε περίπτωση, το άθροισμα των αριθμών της Αλίκης είναι είτε κάποιος άρτιος μεγαλύτερος του 2, είτε το 15 ή το 21, δηλαδή πάντοτε σύνθετος και η Αλίκη κερδίζει.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί p και q έτσι ώστε ο αριθμός $1 + \dfrac{p^q - q^p}{p + q}$ να είναι πρώτος.

Λύση: Φανερά $p \neq q$. Θέτουμε $1 + \dfrac{p^q - q^p}{p + q} = r$ και έχουμε: $p^q - q^p = (r-1)(p+q)$. (1)

Είναι $(r-1)(p+q) \equiv (r-1)q \,(\operatorname{mod} p)$, ενώ από το μικρό Θεώρημα του Fermat γνωρίζουμε $p^q - q^p \equiv -q \,(\operatorname{mod} p)$, οπότε η (1) δίνει $-q \equiv (r-1)q \,(\operatorname{mod} p)$, δηλαδή $0 \equiv rq \,(\operatorname{mod} p)$, οπότε $p \mid r$ και αφού οι p, r είναι πρώτοι, αυτό σημαίνει $p = r$. Έτσι η (1) γίνεται: $p^q - q^p = (p-1)(p+q)$. (2)

Θα δείξουμε πως $p = 2$. Πράγματι, αν p περιττός, από το μικρό Θεώρημα του Fermat και πάλι: $p^q - q^p \equiv p \,(\operatorname{mod} q)$ και αφού $(p-1)(p+q) \equiv (p-1)p \,(\operatorname{mod} q)$, η (2) δίνει $p(p-2) \equiv 0 \,(\operatorname{mod} q)$. Άρα $q / p(p-2) \overset{(p,q=1)}{\Rightarrow} q / p-2$ από όπου: $q \leq p - 2 < p$. (3)

Από την (2) παίρνουμε: $p^q - q^p \equiv 0 \operatorname{mod}(p-1) \Rightarrow 1 - q^p \equiv 0 \operatorname{mod}(p-1) \Rightarrow q^p \equiv 1 \operatorname{mod}(p-1)$. (4)

Όμως $(q, p-1) = 1$ και αν ονομάσουμε $k =$ τη μικρότερη δύναμη του q που είναι ισοϋπόλοιπη με $1 \operatorname{mod}(p-1)$, είναι γνωστό πως $k < p$ και πως η (4) δίνει $k \mid p$, άρα $k = 1$, από όπου έπεται ότι $p - 1 \mid q - 1 \Rightarrow p - 1 \leq q - 1 \Rightarrow p \leq q$, άτοπο λόγω της (3). Επομένως, πράγματι $p = 2$ και η (2) γράφεται: $2^q = q^2 + q + 2$. (5) Τετριμμένα με επαγωγή, μπορούμε να βεβαιωθούμε πως για φυσικούς $n \geq 6$ είναι $2^n > n^2 + n + 2$, κι έτσι η (5) συνεπάγεται $q \leq 5$. Η μόνη λύση της (5) είναι η $q = 5$, οπότε η μόνη λύση του προβλήματος είναι η $(p, q) = (2, 5)$.

81^{ος} Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά "Ο ΘΑΛΗΣ", 6 Νοεμβρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right).$$

Λύση

Έχουμε
$$A=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right)$$
$$=\left(\frac{(-6)^{16}(-6)^1}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{15}(-12)}{6^{15}}+2^0\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)$$
$$=\left((-6)\cdot\left(\frac{-6}{-3}\right)^{16}+(-12)\cdot\left(\frac{-12}{6}\right)^{15}+2^0\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)$$
$$=\left((-6)\cdot 2^{16}+(-12)\cdot(-2)^{15}+2^0\right)\cdot\left((-2)^{31}+2^{31}+2020\right)$$
$$=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)\cdot(-2)^{15}+1\right)\cdot\left(-2^{31}+2^{31}+2020\right)$$
$$=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)^{16}+1\right)\cdot(0+2020)=(0+1)\cdot 2020=2020.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Οι ομάδες μπάσκετ δώδεκα Γυμνασίων της Αθήνας παίρνουν μέρος σε ένα σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ. Κάθε μία ομάδα θα παίξει μία μόνο φορά με όλες τις υπόλοιπες ομάδες. Σε κάθε αγωνιστική ημέρα οι ομάδες θα παίζουν την ίδια ώρα ανά ζεύγη και θα έχουμε 6 αγώνες. Μετά το τέλος κάθε αγωνιστικής θα βγαίνει η βαθμολογία σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με τους βαθμούς που θα έχει κάθε ομάδα. Στο σύστημα βαθμολογίας των ομάδων η νίκη παίρνει έναν βαθμό, η ήττα μηδέν βαθμούς και δεν υπάρχει ισοπαλία. Υπάρχει αγωνιστική ημέρα μετά το τέλος της οποίας η βαθμολογία που θα βγει θα δίνει σε κάθε ομάδα διαφορετικούς βαθμούς από όλες τις άλλες ομάδες.

Λύση

Για να έχουν οι δώδεκα ομάδες διαφορετικούς βαθμούς στον πίνακα της βαθμολογίας, δεδομένου ότι ο μέγιστος αριθμός παιγνιδιών και βαθμών είναι 11, η μοναδική δυνατή βαθμολογία είναι η παρακάτω:

Ο1	Ο2	Ο3	Ο4	Ο5	Ο6	Ο7	Ο8	Ο9	Ο10	Ο11	Ο12
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

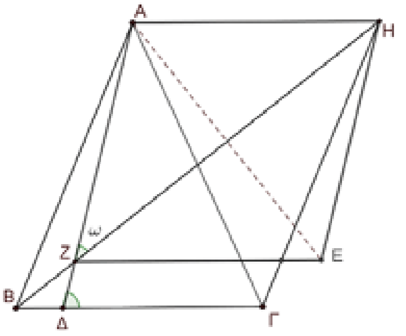
Επομένως, αν υπάρχει τέτοια αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες, αυτή θα είναι η ενδέκατη.

Η απάντηση αυτή θα είναι αποδεκτή, εφόσον αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να προκύψει η παραπάνω βαθμολογία στο τέλος της ενδέκατης αγωνιστικής ημέρας. Πράγματι, η παραπάνω βαθμολογία είναι εφικτή, αν υποθέσουμε ότι κάθε ομάδα έχει κερδίσει όλα τα παιγνίδια με ομάδες που βρίσκονται κάτω από αυτή στη βαθμολογία, δηλαδή η Ο1 θα κερδίσει όλες τις υπόλοιπες ομάδες, η Ο2 θα κερδίσει τις Ο3, Ο4, …Ο12, κοκ. Επομένως, η αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες είναι η ενδέκατη.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΗΓ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες. Το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΗ τέμνονται

στο σημείο Ζ έτσι ώστε να ισχύει: ΑΖ = ΒΓ. Επίσης οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες. Αν $A\hat{Z}H = \omega$, τότε:



Σχήμα 1

(α) Να βρείτε τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}Z$ συναρτήσει του ω.
(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.
Λύση: (α) Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΓΗ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή έχουμε $B\Gamma = AH$. Όμως από υπόθεση ΑΖ = ΒΓ, οπότε θα είναι και ΑΖ = ΑΗ. Επομένως το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε θα έχει τις δύο γωνίες της βάσης του ίσες, δηλαδή

$$A\hat{H}Z = A\hat{Z}H = \omega. \qquad (1)$$

Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΗ έχουμε ότι:

$$Z\hat{A}H = 180^0 - 2\cdot A\hat{Z}H = 180^0 - 2\omega. \qquad (2)$$

Τέλος, επειδή $AH \parallel B\Gamma$ που τέμνονται από την ΑΔ, έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$\Gamma\hat{\Delta}Z + Z\hat{A}H = 180^0. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι: $180^0 - 2\omega + \Gamma\hat{\Delta}Z = 180^0 \Rightarrow \Gamma\hat{\Delta}Z = 2\omega$.

(β) Επειδή οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΖΕΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΗ = ΖΕ και ΑΖ = ΗΕ. Όμως, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α) είναι ΑΖ = ΑΗ, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΕΗ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Άρα οι διαγώνιες του ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathbf{A = \left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}} + \frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}} + 20^0\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}} + \frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}} + 2021\right).}$$

Λύση

$$A = \left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}} + \frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}} + 20^0\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}} + \frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}} + 2021\right) = \left(\frac{(-6)^6}{(-3)^7} + \frac{(+12)^7}{(-6)^8} + 1\right)\cdot\left(\frac{(+5)^{35}}{(-10)^{35}} + \frac{(-11)^{35}}{(-22)^{35}} + 2021\right)$$

$$= \left(\frac{(-6)^6}{(-3)^6(-3)} + \frac{12^7}{(-6)^7\cdot(-6)} + 1\right)\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{35} + \left(+\frac{1}{2}\right)^{35} + 2021\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-6}{-3}\right)^6 - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{12}{6}\right)^7 + 1\right)\cdot\left(-\left(+\frac{1}{2}\right)^{35} + \left(+\frac{1}{2}\right)^{35} + 2021\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^6 - \frac{1}{6}\cdot(-2)^7 + 1\right)\cdot(0 + 2021) = \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^6 - \frac{(-2)}{6}\cdot(-2)^6 + 1\right)\cdot 2021$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^6 + \frac{1}{3}\cdot(-2)^6 + 1\right)\cdot 2021 = (0+1)\cdot 2021 = 1\cdot 2021 = 2021.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

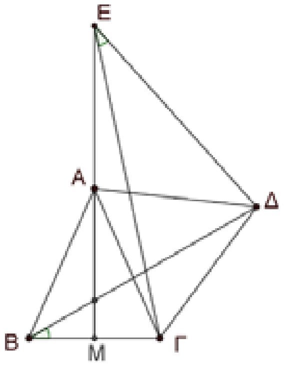
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma > B\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α κατά τμήμα ΑΕ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι: $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{\Gamma E\Delta} = 30°$.

(*Σημείωση:* *Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα*)

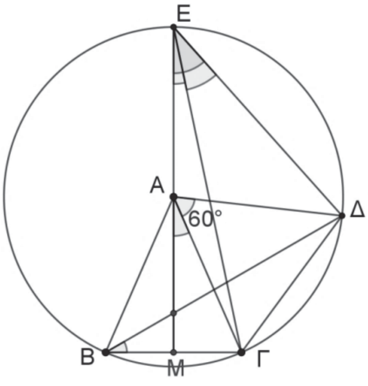
Λύση 1^{ος} τρόπος

Έστω $\hat{A} = \hat{x}$ και $\widehat{AB\Delta} = \hat{B}_2 = \hat{y}$. Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ (ΑΒ=ΑΔ) έχουμε

$\widehat{A\Delta B} = \hat{\Delta}_1 = \hat{y}$ και $2\hat{y} + \hat{x} + 60° = 180° \Leftrightarrow 2\hat{y} + \hat{x} = 120°$ (1). Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) έχουμε: $2\left(\hat{y} + \hat{B}_1\right) + \hat{x} = 180° \Leftrightarrow 2\hat{y} + 2\hat{B}_1 + \hat{x} = 180° \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{B}_1 = 60° \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 30°$. Για τη γωνία $\Gamma\hat{E}\Delta$ παρατηρούμε ότι: $\Gamma\hat{E}\Delta = A\hat{E}\Delta - A\hat{E}\Gamma$ (2) Έχουμε ότι $M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{x}{2}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = 60^0$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Επιπλέον τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΑΓ είναι ισοσκελή, αφού $EA = AB = A\Gamma = A\Delta$.

Για τις εξωτερικές γωνίες τους $M\hat{A}\Delta$ και $M\hat{A}\Gamma$ έχουμε: $M\hat{A}\Delta = \frac{\hat{x}}{2} + \Gamma\hat{A}\Delta = \frac{\hat{x}}{2} + 60^0$, αφού ΑΓΔ ισόπλευρο τρίγωνο και $M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{x}{2}$, αφού η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος. Επομένως, έχουμε

$M\hat{A}\Delta = \frac{\hat{x}}{2} + 60^0 = 2 \cdot A\hat{E}\Delta \Rightarrow A\hat{E}\Delta = \frac{\hat{x}}{4} + 30^0$ και $M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{x}}{2} = 2 \cdot A\hat{E}\Gamma \Rightarrow A\hat{E}\Gamma = \frac{\hat{x}}{4}$.

Επομένως, έχουμε $\Gamma\hat{E}\Delta = A\hat{E}\Delta - A\hat{E}\Gamma = \frac{\hat{x}}{4} + 30^0 - \frac{\hat{x}}{4} = 30^0$.

2ος τρόπος: Επειδή $EA = AB = A\Gamma = A\Delta$ ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε. Οι γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $\Gamma\hat{E}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο χορδής ΓΔ, οπότε θα είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{E}\Delta = \frac{\Gamma\hat{A}\Delta}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Σε μία παρέα κάποια μέλη της αποτελούν την ομάδα Μ που αγαπάει τα Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα μέλη αποτελούν την ομάδα Φ που αγαπάει τη Φυσική. Ο μέσος όρος των ηλικιών των μελών που αγαπούν τα Μαθηματικά είναι 25 χρόνια, ενώ αυτών που αγαπούν τη Φυσική είναι 35 χρόνια. Όμως δύο μέλη της ομάδας Φ δήλωσαν ότι πλέον άλλαξαν προτίμηση και ζήτησαν να ενταχθούν στην ομάδα Μ. Τότε ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Μ έγινε 27, ενώ ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Φ έγινε 37. Να βρείτε πόσα μέλη είχε συνολικά η παρέα και να δώσετε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας παρέας.

Λύση: Έστω ότι η ομάδα Μ έχει μ μέλη και η ομάδα Φ έχει φ μέλη. Τότε το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι 25μ, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι 35φ και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι $25\mu + 35\varphi$.

Με την αλλαγή προτίμησης των 2 μελών της ομάδας Φ, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι $27(\mu + 2)$, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι $37(\varphi - 2)$ και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι $27(\mu+2)+37(\varphi-2)$.

Επομένως, έχουμε την εξίσωση

$$25\mu + 35\varphi = 27(\mu + 2) + 37(\varphi - 2) \Leftrightarrow 25\mu + 35\varphi - 27\mu - 37\varphi = 54 - 74 \Leftrightarrow -2\mu - 2\varphi = -20 \Leftrightarrow \mu + \varphi = 10,$$

οπότε η παρέα είχε συνολικά 10 μέλη.

Ένα παράδειγμα τέτοιας παρέας είναι το εξής:

Ομάδα Μ: 4 μέλη με ηλικίες 25 έτη και μέσο όρο ηλικιών τα 25 έτη. Ομάδα Φ: 6 μέλη από τα οποία 4 έχουν ηλικία 37 έτη και τα δύο έχουν ηλικία με ηλικίες 31 έτη. Μέσος όρος ηλικιών: $\frac{2\cdot 31+4\cdot 37}{6}=\frac{62+148}{6}=\frac{210}{6}=35$ έτη. Αν αλλάξουν προτίμηση τα μέλη με την ηλικία των 31 ετών, τότε στην ομάδα Μ έχουμε μέσο όρο ηλικιών $\frac{4\cdot 25+2\cdot 31}{6}=\frac{162}{6}=27$ έτη, ενώ στην ομάδα Φ έχουμε μέσο όρο ηλικιών $\frac{4\cdot 37}{4}=37$ έτη.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 117

Α64. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$.

Να αποδείξετε ότι: $$\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha+2}+\frac{\alpha\gamma\delta}{\beta+2}+\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma+2}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta+2}<\frac{1}{13}.$$

Λύση. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β,γ έχουμε: $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\le\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\Rightarrow\alpha\beta\gamma\le\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3\Rightarrow$

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta+2}\le\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3\frac{1}{\delta+2}<\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3}\right)^3\frac{1}{\delta+2}=\frac{1}{27(\delta+2)}<\frac{1}{54}.$$

Εργαζόμενοι ομοίως και για τα υπόλοιπα κλάσματα, λαμβάνουμε τελικά

$$\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha+2}+\frac{\alpha\gamma\delta}{\beta+2}+\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma+2}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta+2}<4\cdot\frac{1}{54}<\frac{1}{13}.$$

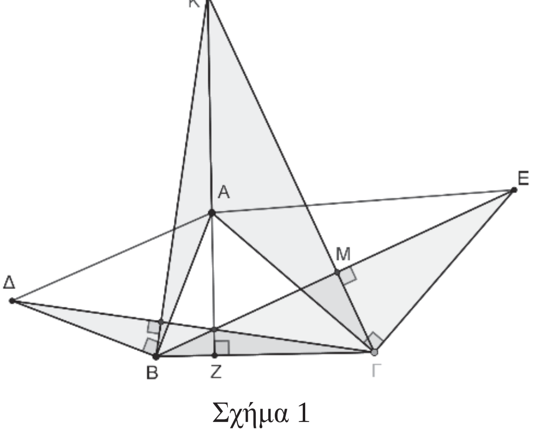
Α65. Να βρείτε τον κύβο του αριθμού: $A=\sqrt{5\sqrt{2\sqrt{5\sqrt{2...}}}}$.

Λύση. Με ύψωση στο τετράγωνο δύο φορές καταλήγουμε στη σχέση $A^2=5\sqrt{2\sqrt{5\sqrt{2...}}}$

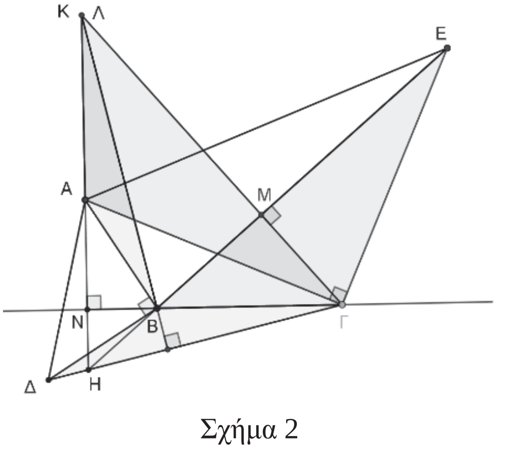
και στη συνέχεια $A^4=50\sqrt{5\sqrt{2...}}=50A$, οπότε με απλοποίηση λαμβάνουμε $A^3=50$.

Γ45. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε εξωτερικά του τριγώνου έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ να είναι ισοσκελή και ορθογώνια με ορθή γωνία στην κορυφή Β και Γ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ και ΒΕ τέμνονται πάνω στην ευθεία του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α.

Λύση: Φέρουμε την ευθεία τους ύψους ΑΖ. Ξεκινάμε με την περίπτωση που είναι : $\hat{\Gamma}\le\hat{B}<90^0$. Τότε η κάθετη από το σημείο Β προς την ευθεία ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΖ στο σημείο Κ. Έστω επίσης η κάθετη από το Γ προς την ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ΑΖ στο σημείο Λ. Τότε τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΑΚ είναι ίσα, γιατί έχουν: (1) ΒΔ = ΒΑ, (2) $\Gamma\hat{B}\Delta=90^0+\hat{B}=B\hat{A}K$ (η γωνία $B\hat{A}K$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΖ), (3) $B\hat{\Delta}\Gamma=90^0-B\hat{A}K=A\hat{B}K$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Επομένως, έχουμε και την ισότητα πλευρών: ΒΓ = ΑΚ. (1)

Εργαζόμενοι ομοίως διαπιστώνουμε ότι και τα τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΑΛ είναι ίσα με συνέπεια την ισότητα:

ΒΓ = ΑΛ (2)

Από τις (1) και (2) έπεται ότι ΑΚ = ΑΛ, οπότε τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται. Πράγματι, επειδή στην περίπτωση $\hat{\Gamma} \le \hat{B} < 90^0$ οι γωνίες $K\hat{B}\Gamma > A\hat{B}\Gamma$ και $\Lambda\hat{\Gamma}B > A\hat{\Gamma}B$ είναι οξείες, οι ευθείες ΒΚ και ΓΛ τέμνονται πάνω στην ευθεία του ύψους ΑΖ προς το μέρος του Α έτσι ώστε το σημείο Α να είναι μεταξύ του σημείου τομής και του ίχνους του ύψους.

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μόνο το σημείο Κ, να αποδείξουμε όπως πριν ότι τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΑΚ είναι ίσα με συνέπεια την ισότητα ΒΓ = ΑΚ. Τότε όμως εύκολα συμπεραίνουμε και ότι τα τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΑΚ είναι ίσα, από το κριτήριο Π-Γ-Π. Έτσι καταλήγουμε στην ισότητα γωνιών: $\Gamma\hat{B}M = \Gamma\hat{B}E = A\hat{K}\Gamma = 90^0 - K\hat{\Gamma}B \Rightarrow B\hat{M}\Gamma = 180^0 - \Gamma\hat{B}M - M\Gamma B = 180^0 - \left(90^0 - K\hat{\Gamma}B\right) - K\hat{\Gamma}B = 90^0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η ΓΚ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΕ. Επομένως οι ευθείες ΒΕ, ΓΔ και ΑΖ είναι οι ευθείες των υψών του τριγώνου ΒΓΚ.

Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που μία από τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία (σχήμα 2).

Αν $\hat{B} = 90^0$ ή $\hat{\Gamma} = 90^0$, τότε η απάντηση είναι προφανής.

Ν41. Να αποδείξετε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο ν, ο αριθμός $A_\nu = 2^\nu + 3^\nu + 5^\nu + 6^\nu$ δεν είναι τέλειος κύβος.

Λύση. Για την απόδειξη τέτοιων ερωτημάτων είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε κλάσεις υπολοίπων ως προς κάποιον κατάλληλο θετικό ακέραιο. Εδώ λόγω της παρουσίας των ακέραιων 2, 3, 5 και 6 σκεπτόμαστε να χρησιμοποιήσουμε τον μικρότερο ακέραιο μετά το 6 που είναι πρώτος, δηλαδή το 7. Θα βρούμε τα δυνατά υπόλοιπα ενός θετικού ακεραίου modulo 7 και θα λάβουμε υπόψη ότι τα δυνατά υπόλοιπα ενός τέλειου κύβου modulo7 είναι: 0, 1, -1.

Πράγματι, έχουμε: $(7\kappa)^3 \equiv 0(\bmod 7), (7\kappa+1)^3 \equiv (7\kappa+2)^3 \equiv (7\kappa+4)^3 \equiv 1(\bmod 7)$

$$(7\kappa+3)^3 \equiv (7\kappa+5)^3 \equiv (7\kappa+6)^3 \equiv -1(\bmod 7).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι: $2^6 = 4^3 \equiv 1(\bmod 7),\ 3^6 = 9^3 \equiv 1(\bmod 7),$

$$5^6 = (-2)^6 \equiv 2^6 \equiv 1(\bmod 7), 6^6 = (-1)^6 \equiv 1(\bmod 7),$$

οπότε θα έχουμε $2^{6\kappa} \equiv 3^{6\kappa} \equiv 5^{6\kappa} \equiv 6^{6\kappa} \equiv 1(\bmod 7), \kappa$ μη αρνητικός ακέραιος.

Έτσι, αν θέσουμε $\nu = 6\kappa + \upsilon,\ \upsilon \in \{0,1,2,3,4,5\}$, τότε θα έχουμε:

$$2^\nu = 2^{6\kappa} \cdot 2^\upsilon \equiv 2^\upsilon (\bmod 7),\ 3^\nu = 3^{6\kappa} \cdot 3^\upsilon \equiv 3^\upsilon (\bmod 7),$$

$$5^\nu = 5^{6\kappa} \cdot 5^\upsilon \equiv 5^\upsilon (\bmod 7),\ 6^\nu = 6^{6\kappa} \cdot 6^\upsilon \equiv 6^\upsilon (\bmod 7).$$

Επομένως, θα είναι $A_\nu = 2^\nu + 3^\nu + 5^\nu + 6^\nu \equiv \left(2^\upsilon + 3^\upsilon + 5^\upsilon + 6^\upsilon\right)(\bmod 7) \equiv A_\upsilon (\bmod 7),\ \upsilon \in \{0,1,2,3,4,5\}$,

όπου $A_0 \equiv 4(\bmod 7),\ A_1 \equiv 2(\bmod 7), A_2 \equiv 4(\bmod 7),$

$$A_3 \equiv 5(\bmod 7), A_4 \equiv 2(\bmod 7), A_5 \equiv 4(\bmod 7),$$

οπότε σε καμία περίπτωση δεν προκύπτει υπόλοιπο 0 ή ± 1 modulo 7 και επομένως ο αριθμός $A_\nu = 2^\nu + 3^\nu + 5^\nu + 6^\nu$ δεν μπορεί να είναι τέλειος κύβος.

Ασκήσεις για λύση

Α66. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y, z που ικανοποιούν την εξίσωση:

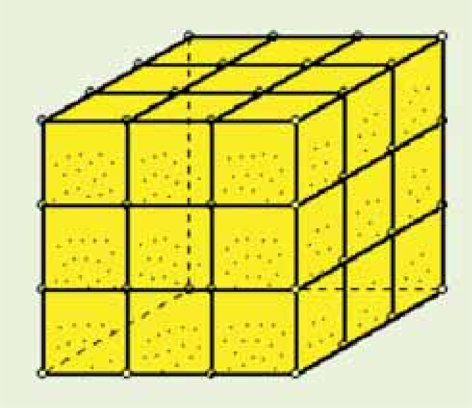
$$\frac{1}{(x-y)(x+y)} + \frac{1}{(y-z)(y+z)} + \frac{1}{(z-x)(z+x)} = 0.$$

Ν42. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν οι οποίοι έχουν περισσότερους από $\frac{\nu}{2}$ θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

Γ46. Οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι τέτοιο ώστε η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$ να ισούται με την πλευρά ΑΒ. Πάνω στη διχοτόμο ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $A\hat{E}\Delta = B\hat{\Gamma}A$. Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΔΓ.

Ας βάψουμε έναν κύβο

Βαρβάρα Γεωργιάδου–Καμπουρίδη



Ο διπλανός μεγάλος κύβος έχει διαστάσεις 3 x 3 x 3.
Αποτελείται από 27 ίδιους μικρούς κύβους
(3 κύβους σε κάθε μία από τις 3 σειρές ή αλλιώς
3 κύβους σε κάθε μία από τις 3 στήλες) .
Οι μικροί κύβοι έχουν διαστάσεις 1 x 1 x 1.

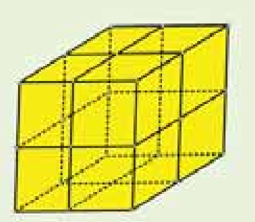
Ο μεγάλος κύβος είναι βαμμένος σε όλη την εξωτερική του επιφάνεια.

Ερώτημα 1ο: Πόσοι από τους κύβους έχουν βαμμένες:

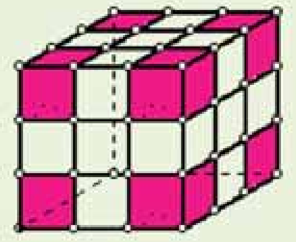
- 3 πλευρές
- 2 πλευρές
- 1 πλευρά
- καμία πλευρά

Ας σκεφτούμε. Αν ο μεγάλος κύβος είχε διαστάσεις 2 x 2 x 2, πώς θα απαντούσαμε στο παραπάνω ερώτημα:

Παρατηρούμε ότι και οι 8 μικροί κύβοι έχουν από 3 πλευρές βαμμένες



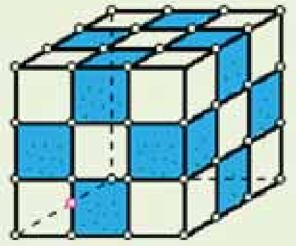
Επιστρέφουμε τώρα στον αρχικό μεγάλο κύβο 3 x 3 x 3.
Ο μεγάλος κύβος αποτελείται από 3 x 3 x 3 = 27 μικρούς κύβους.

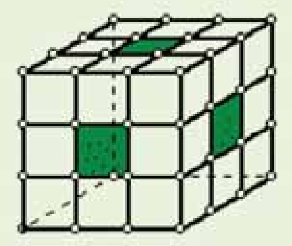


Παρατηρούμε ότι κι εδώ οι 8 μικροί κύβοι (ροζ) που είναι στις άκρες του μεγάλου κύβου έχουν βαμμένες τις 3 πλευρές.

Τι γίνεται με τους υπόλοιπους κύβους;

Υπάρχουν 12 μικροί κύβοι (μπλε) που έχουν βαμμένες 2 πλευρές.
Είναι 4 μικροί κύβοι σε κάθε πλευρά του μεγάλου αλλά είναι κοινοί ανά δύο πλευρές. Γι αυτό υπολογίζουμε 4 x 3 = 12 μικροί κύβοι



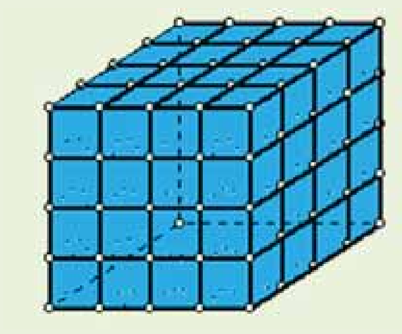


Υπάρχουν 6 μικροί κύβοι (πράσινοι) που έχουν μόνο 1 πλευρά βαμμένη.

$8 + 12 + 6 = 26$ $27 - 26 = 1$ μικρός κύβος

Τέλος, υπάρχει 1 μικρός κύβος στο εσωτερικό του μεγάλου που δεν έχει πλευρά βαμμένη.

Ερώτημα 2ο: Έχω έναν μεγάλο κύβο διαστάσεων 4 x 4 x 4.



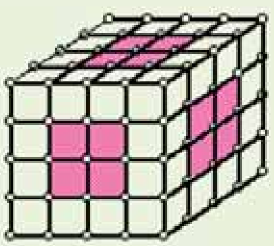
Ο μεγάλος κύβος αποτελείται από 4 x 4 x 4 = 64 μικρούς κύβους.

Πόσοι από τους μικρούς κύβους έχουν βαμμένες:

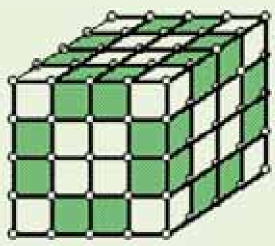
- 3 πλευρές
- 2 πλευρές
- 1 πλευρά
- καμία πλευρά

Παρατηρούμε και μετρούμε:

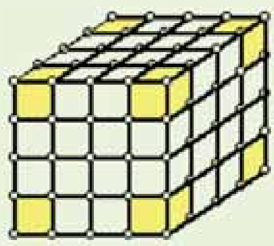
1 πλευρά βαμμένη



2 πλευρές βαμμένες



3 πλευρές βαμμένες



1 πλευρά βαμμένη: 24 κύβοι (4 κύβοι x 6 πλευρές)

2 πλευρές βαμμένες: 24 κύβοι (8 κύβοι σε κάθε πλευρά αλλά είναι κοινοί σε 2 πλευρές, οπότε έχουμε 8 κύβους x 3 πλευρές)

3 πλευρές βαμμένες: 8 μικροί κύβοι

$24 + 24 + 8 = 56$ μικροί κύβοι

Άρα $64 - 56 = 8$ κύβοι δεν έχουν πλευρά βαμμένη.

Και τώρα ας δοκιμάσουμε να δούμε αν μπορούμε να φανταστούμε απάντηση στην ερώτηση για μεγάλο κύβο διαστάσεων 5 x 5 x 5

Ο μεγάλος κύβος έχει 125 μικρούς κύβους.

Οι μικροί κύβοι με 3 βαμμένες πλευρές είναι σε κάθε μεγάλο κύβο 8. Επομένως,

3 πλευρές βαμμένες: 8 μικροί κύβοι

2 πλευρές βαμμένες: 36 μικροί κύβοι (12 κύβοι x 3 πλευρές) + (6 κύβοι x 2 πλευρές)

1 πλευρά βαμμένη: 54 μικροί κύβοι (9 κύβοι x 6 πλευρές)

Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 1: Οι μικροί κύβοι με 3 βαμμένες πλευρές είναι 8 σε κάθε μεγάλο κύβο.

Παρατήρηση 2: Στον κύβο 4 x 4 x 4 η κάθε πλευρά έχει 4 μικρούς κύβους με 1 πλευρά βαμμένη (2 x 2) . Άρα στον κύβο 5 x 5 x 5 η κάθε πλευρά έχει 9 μικρούς κύβους με 1 πλευρά βαμμένη (3 x 3)

8 + 36 + 54 = 98 μικροί κύβοι

125– 98 = 27 μικροί κύβοι δεν έχουν πλευρά βαμμένη

Παρατήρηση 3: Στον κύβο 4 x 4 x 4, μικροί κύβοι με 0 βαμμένες πλευρές: $8 = 2^3$

Στον κύβο 5 x 5 x 5, μικροί κύβοι με 0 βαμμένες πλευρές: $27 = 3^3$

Ερώτημα 3ο: Μπορούμε να βρούμε ένα μοντέλο για να απαντούμε στο 1ο ερώτημα, όσο μεγάλος κι αν είναι ο κύβος, χωρίς να χρειάζεται να μετράμε στο σχήμα;

Ας τοποθετήσουμε τα ευρήματά μας σε έναν πίνακα:

Διαστάσεις μεγ. κύβου	μικροί κύβοι			
	0 πλευρές βαμμένες	1 πλευρά βαμμένη	2 πλευρές βαμμένες	3 πλευρές βαμμένες
2 x 2 x 2	0	0	0	8
3 x 3 x 3	1	6	12	8
4 x 4 x 4	8	24	24	8
5 x 5 x 5	27	54	36	8
ν x ν x ν	$\mathbf{(\nu-2)^3}$	$\mathbf{6\cdot(\nu-2)^2}$	$\mathbf{12\cdot(\nu-2)}$	**8**

0 πλευρές βαμμένες : Από την Παρατήρηση 2, ο κύβος 4 x 4 x 4 έχει $8 = 2^3$ μικρούς κύβους δηλαδή $(4-2)^3$ και ο κύβος 5 x 5 x 5 έχει $27 = 3^3$ μικρούς κύβους δηλαδή $(4-2)^3$.

Άρα ο κύβος ν x ν x ν έχει $(\nu-2)^3$ μικρούς κύβους με 0 βαμμένες πλευρές

1 πλευρά βαμμένη: $6 = 6 \cdot 1 = 6 \cdot 1^2 = 6 \cdot(3-2)^2$

$24 = 6 \cdot 4 = 6 \cdot 2^2 = 6 \cdot(4-2)^2$

$54 = 6 \cdot 9 = 6 \cdot 3^2 = 6 \cdot(5-2)^2$

Άρα ο κύβος ν x ν x ν έχει $6 \cdot(\nu-2)^2$ μικρούς κύβους με 1 βαμμένη πλευρά

2 πλευρές βαμμένες $12 = 12 \cdot 1 = 12 \cdot (3-2)$

$24 = 12 \cdot 2 = 12 \cdot (4-2)$

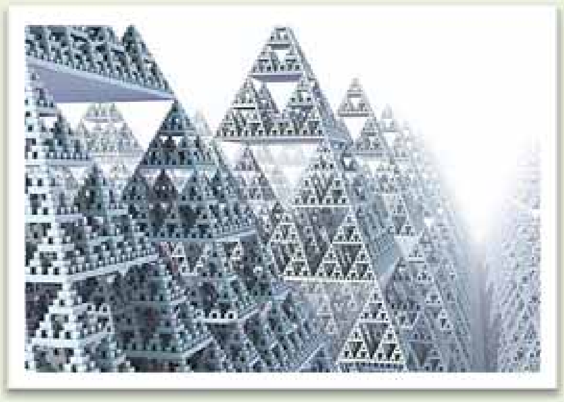
$36 = 12 \cdot 3 = 12 \cdot (5-2)$

Άρα ο κύβος ν Χ ν Χ ν έχει $12 \cdot(\nu-2)$ μικρούς κύβους με 2 βαμμένες πλευρές

Διαστάσεις μεγ. κύβου	μικροί κύβοι			
	0 πλευρές βαμμένες	1 πλευρά βαμμένη	2 πλευρές βαμμένες	3 πλευρές βαμμένες
ν x ν x ν	$\mathbf{(\nu-2)^3}$	$\mathbf{6\cdot(\nu-2)^2}$	$\mathbf{12\cdot(\nu-2)}$	**8**

Η μαγεία των fractals

Καλλιόπη Κωστοπούλου – 2ο Γυμνάσιο Τρίπολης



"Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line" ***Benoit Mandelbrot***

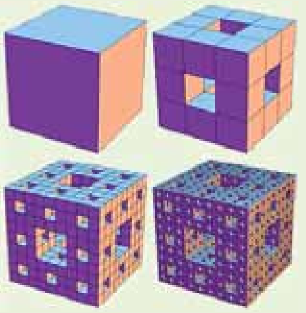
"Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακτές δεν είναι κύκλοι, και ο φλοιός του δέντρου δεν είναι ομαλός, ούτε η αστραπή ταξιδεύει σε μια ευθεία γραμμή.." (από την εισαγωγή του βιβλίου του "*The Fractal Geometry of Nature*")

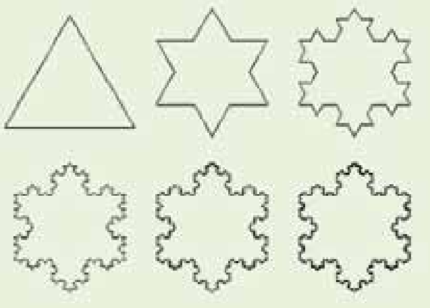
Παρόλο που τα μαθηματικά και η τέχνη φαίνεται να είναι δύο διακριτά κεφάλαια του ανθρώπινου πολιτισμού, οι καθηγήτριες του 2ου Γυμνασίου Τρίπολης, Έλενα Διαμαντοπούλου και Καλλιόπη Κωστοπούλου, προσπαθούν τα τελευταία χρόνια να τα συνδυάσουν, αναλαμβάνοντας πολιτιστικά προγράμματα. Κύριος στόχος είναι η αλλαγή της στάσης των μαθητών απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών μέσω ερεθισμάτων που προκύπτουν από τον συγκερασμό των δύο αυτών πεδίων. Με έναυσμα πάντα μια συγκεκριμένη διδακτική ενότητα από το σχολικό βιβλίο των μαθηματικών και αρωγό την τέχνη οι μαθητές βιώνουν την περιπέτεια της γνώσης έξω από το αυστηρό διδακτικό θεσμοθετημένο πλαίσιο.

Η ενότητα της Γ΄ Γυμνασίου που αποτέλεσε την αφόρμηση για το συγκεκριμένο πρόγραμμα «Η μαγεία των fractals» είναι αυτή της «Ομοιότητας». Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Ένα fractal όμως είναι ένα πολύπλοκο γεωμετρικό σχήμα που η δομή του χαρακτηρίζεται από αυτό- ομοιότητα (όλα τα μέρη του είναι όμοια μεταξύ τους καθώς και με το αρχικό) και υποδιαιρετότητα. Και ενώ τα στοιχεία της παραδοσιακής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως η ευθεία, ο κύκλος, το τρίγωνο είναι ορατά και επεξεργάσιμα, τα στοιχεία της Fractal γεωμετρίας είναι αλγόριθμοι που μπορούν να μετασχηματιστούν μέσα σε σχήματα μόνο με τη βοήθεια των υπολογιστών.

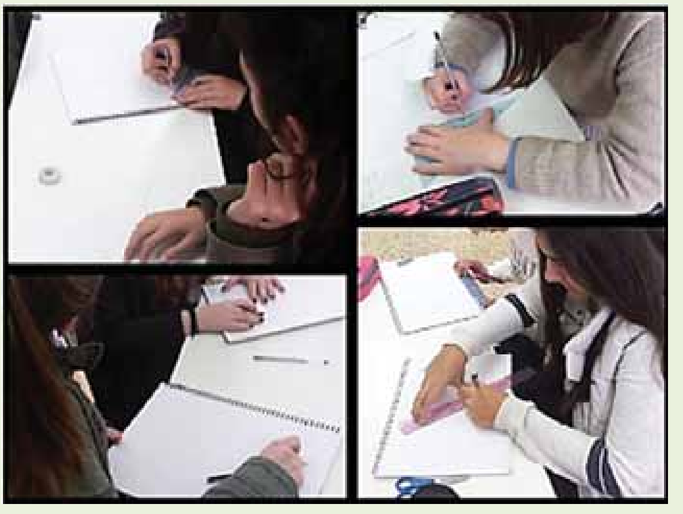
Μετά την αποσαφήνιση όλων των εμπλεκόμενων εννοιών οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα ανέλαβε να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο εκδηλώνεται η αυτόομοιότητα στη Φύση.

Η δεύτερη ομάδα διερεύνησε τα μαθηματικά fractals: το τρίγωνο του Sierpinski (ή Sierpinski Sieve), το Χαλί του Sierpinski (Sierpinski Carpet), το Σφουγγάρι του Menger, τη Χιονονιφάδα του Koch (Koch Snowflake).

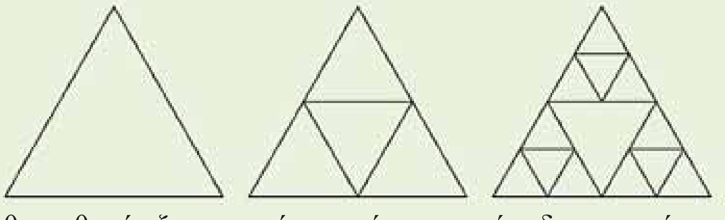




Από κοινού αποφασίστηκε οι μαθητές να ασχοληθούν περαιτέρω με την κατασκευή το τριγώνου Sierpinski, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:



1. Ξεκίνησαν έχοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο και σημείωσαν πάνω στα μέσα των πλευρών του.
2. Έπειτα, με κορυφές τα μέσα των πλευρών του δημιούργησαν ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς το μισό της αρχικής πλευράς του αρχικού τριγώνου.
3. Στη συνέχεια, έκαναν το ίδιο για κάθε τρίγωνο, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



4. Ζωγράφισε ο κάθε μαθητής ξεχωριστά το σχήμα που είχε δημιουργήσει.
5. Τέλος, διέταξαν τα τρίγωνα με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθεί ένα μορφόκλασμα όμοιο με τα αρχικό.

Παρατηρήσαμε ότι το αυτό-όμοιο τρίγωνο που δημιουργήθηκε παρέμεινε αναλλοίωτο στην αλλαγή κλίμακας. Οι μαθητές θέλησαν να διερευνήσουν τις ιδιότητες των fractals στον χώρο. Για τον λόγο αυτό κατασκεύασαν τρισδιάστατα τρίγωνα Sierpinski.

Αντί επιλόγου

Εκεί που ο κόσμος παύει να είναι η σκηνή για τις προσωπικές ελπίδες και επιθυμίες, εκεί που εμείς σαν ελεύθερα όντα, τον παρατηρούμε με απορία, αναρωτιόμαστε για αυτόν και μελετάμε εκεί είναι η είσοδος στο βασίλειο της τέχνης και της επιστήμης. Εάν μεταφράσουμε αυτό που νιώσαμε και παρατηρήσαμε με τη γλώσσα της λογικής, τότε κάνουμε επιστήμη, αν το δείξουμε με μορφές των οποίων οι σχέσεις δεν είναι προσιτές στην ενσυνείδητη σκέψη αλλά αναγνωρίζονται με τη διαίσθηση ως μεστές νοήματος τότε κάνουμε τέχνη. Το κοινό στοιχείο και στην τέχνη και στην επιστήμη είναι η αφοσίωση σε κάτι που υπερβαίνει το προσωπικό, που κείται πέρα από την περιοχή της αυθαιρεσίας. ***A. Einstein***

Πηγές: Καρακώστας, Α. (2005). *Η αναγκαιότητα της διδασκαλίας των fractals στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, (22), 299-310.

Falconer, K. (2004). *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons.

Fraboni, M., & Moller, T. (2008). Fractals in the classroom. *The Mathematics Teacher*, *102*(3), 197-199.

Mandelbrot, B. B., & Frame, M. (1987). Fractals. *Encyclopedia of physical science and technology*, *5*, 579-593.

Prusinkiewicz, P., & Lindenmayer, A. (2012). *The algorithmic beauty of plants*. Springer Science & Business Media.

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Τα **διασκεδαστικά μαθηματικά**, τους γρίφους και τα πρώτα μαθηματικά παιχνίδια, μας τα κληροδότησαν οι Αρχαίοι Έλληνες με πρώτο το Διόφαντο. Μια συλλογή από προβλήματα και επιγράμματα διαφόρων εποχών είναι η « Ελληνική Ανθολογία». Το 16^{o} αιώνα ο αριθμός αυτών των προβλημάτων ήταν σημαντικός. Λίγα χρόνια μετά εγκαταλείφθηκε η μελέτη τέτοιων προβλημάτων, αλλά άρχισαν σιγά– σιγά να κυκλοφορούν διάφορες συλλογές, του Chuquet «Ανακαλύψεις αριθμών» (1484) στη Γαλλία, του Clavius (1608), του Claude–Gaspard Bachet (1626), του Ozanam "Διασκεδαστικά των Μαθηματικών και της Φυσικής» (1692) κ.ά. Άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Λεονάρδο της Πίζας ή Fibonacci, ο Euler, ο Newton, έχουν προσθέσει και τα δικά τους προβλήματα σ' αυτό το σύνολο των διασκεδαστικών μαθηματικών που μεγαλώνει με το πέρασμα των αιώνων.

Γρίφοι

1) Η γιαγιά και τα εγγόνια

Η κυρία Σοφία και ο κύριος Αρτέμης έχουν τρία εγγόνια, τη Χριστίνα, το Βασίλη και την Ελισάβετ. Οι ηλικίες που έχουν είναι δύο, τριών και πέντε χρόνων. Η γιαγιά είχε 40 € και την πρωτοχρονιά έδωσε στην Χριστίνα ποσό 3πλάσιο από την ηλικία της, στο Βασίλη 4πλάσιο της ηλικίας του συν 2€ ακόμα και στην Ελισάβετ 5πλάσιο της ηλικίας της. Τελικά δεν περίσσεψαν χρήματα στη γιαγιά. Τι ηλικία έχει το κάθε παιδί;

2) Τα γενέθλια

Τέσσερα παιδιά είναι συμμαθητές στην Α΄ τάξη. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν και τα τέσσερα παιδιά γενέθλια καθημερινή ημέρα που λειτουργεί το σχολείο;

3) Ένα λίτρο

Έχουμε ένα μπουκάλι νερού που γεμίζει με δύο λίτρα νερό. Μπορείτε να βάλετε στο μπουκάλι ένα λίτρο νερό; (Δεν διαθέτουμε τίποτα άλλο από το μπουκάλι, τη βρύση και ένα μαρκαδόρο).

4) Τα μελομακάρονα

Η Βασιλική τις γιορτές αγόρασε 25 μελομακάρονα, την πρώτη μέρα έφαγε αρκετά, τις επόμενες ημέρες έτρωγε ένα λιγότερο κάθε μέρα και σε 5 μέρες τα είχε φάει όλα. Πόσα έφαγε την πρώτη μέρα;

5) Το 2021

Το 2021 μπορεί να γραφεί 43 επί 47. Μπορείτε α) να τον γράψετε ως διαφορά τετραγώνων; β) να τον γράψτε με χρήση μόνο των ψηφίων 2,3,5 γ) να το γράψετε με χρήση μόνο των ψηφίων 2,5.

Απαντήσεις των Γρίφων του τεύχους 117

1) Ποιος είναι μεγαλύτερος;

Είναι 0,9>0,10 και 0,100=0,1000

2) Ο δάσκαλος

Ο δάσκαλος είχε υπ΄ όψη του το κριτήριο διαιρετότητας με 11.

Στο 12859 η διαφορά ($1^{ου}+3^{ου}+5^{ου}$)– ($2^{ου}+4^{ου}$) είναι 11, στο 9812 το άθροισμα ($1^{ο}+3^{ο}$) είναι ίδιο με ($2^{ο}+4^{ο}$).

Κριτήριο διαιρετότητας με 11

Ένας αριθμός διαιρείται με 11 αν τα αθροίσματα των ψηφίων $1^{ου}+3^{ου}+5^{ου}$ +… είναι το ίδιο με το άθροισμα των $2^{ου}+4^{ου}+6^{ου}$ +… από αριστερά ψηφίου, ή η διαφορά τους να είναι 11.

- Αν σε έναν 4ψήφιο μετακινήσουμε το ψηφίο των χιλιάδων στις μονάδες και τον αριθμό που δημιουργείται τον προσθέσουμε στον αρχικό, το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 11.
- Αν σε έναν 5ψήφιο αριθμό αλλάξουμε θέση στο πρώτο και τελευταίο ψηφίο η διαφορά των αριθμών διαιρείται με 11.
  π.χ. 52341–12345=39996:11=3636, ή 57613–37615=19998:11=1818.
- Το ίδιο και σε 3ψήφιο αν αλλάξουμε θέση στο πρώτο και τελευταίο ψηφίο και αφαιρέσουμε τους αριθμούς η διαφορά διαιρείται με 11.
  π.χ. 793–397=396:11=36, 321–124=198:11=18.

3) Ο κορωνοϊός

Αν ήταν x άτομα στη σειρά πίσω από την κυρία Αλίκη μπροστά ήταν 2x.

Όταν έφυγε ο πρώτος και άλλαξε θέση η κυρία Αλίκη έχουμε x+1 άτομα πίσω και 2x–2 μπροστά. Αλλά 2x–2=x+1 ή x=3. Άρα τώρα περιμένουν 9 άτομα με $5^{η}$ την κυρία Αλίκη.

4) Οι σελίδες

Με τη βοήθεια του αθροίσματος των ν πρώτων φυσικών αριθμών βρίσκουμε ότι έχει 62 σελίδες, δύο φορές προστέθηκε η σελίδα 45.

5) Μάντεψε το άθροισμα

Ο αριθμός των χαρτιών που τοποθέτησαν πάνω στα πέντε είναι 10x5 —Σ, όπου Σ είναι το ζητούμενο άθροισμα. Έτσι έχουμε 10x5–**Σ+5=52–μ**, όπου **μ** είναι τα χαρτιά που απέμειναν. Τελικά **Σ=11x5+μ–52=55–52+μ=3+μ**. Δηλαδή προσθέστε τον αριθμό 3 στον αριθμό των χαρτιών πού απέμειναν και θα έχετε το άθροισμα των 5 χαρτιών.

6) Μαντέψτε τον αριθμό που σκέφτηκε ο φίλος σας

Στον αριθμό που σας ανακοίνωσε προσθέστε 4 και ύστερα αφού διαιρέσετε το αποτέλεσμα με 4 έχετε τον αριθμό που σκέφτηκε ο φίλος σας.