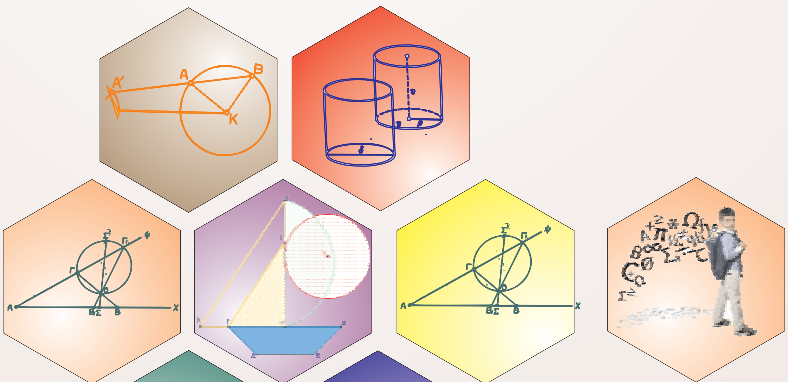
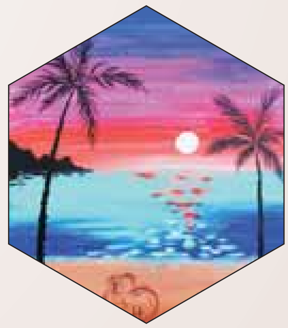
Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο

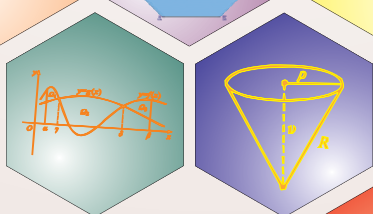
Ευκλείδης Α΄ 124

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2022 ευρώ 3,00

Ενδεικτικά Επαναληπτικά Θέματα Α΄ - Β΄ - Γ΄ Γυμνασίου

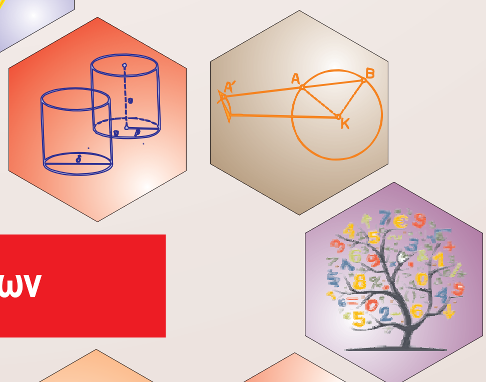




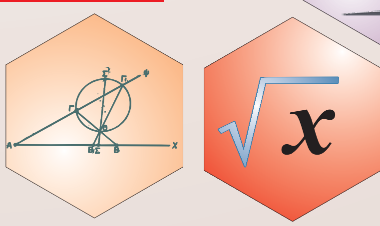


Μαθηματικός εγγραμματισμός και εφαρμογές

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΚΔΟΤΩΝ (Χ+7) ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.



Η ιστορία ορισμένων συμβόλων



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 124
Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2022
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ιωάννης Εμμανουήλ
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

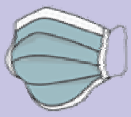
Αγαπητές και αγαπητοί μαθητές και συνάδελφοι, η φετινή σχολική χρονιά 2021-22 ολοκληρώνεται σε λίγες μέρες με τις εξετάσεις σας.

Ευχόμαστε σε όλους καλή επιτυχία στις εξετάσεις και καλά αποτελέσματα. Με επαναληπτική ύλη που δημοσιεύουμε, θέλουμε να βοηθήσουμε όλους τους μαθητές για να έχουν το καλύτερο αποτέλεσμα. Το καλοκαίρι αυτό μαθητές και καθηγητές να αφήσουμε πίσω όλες τις δυσκολίες που αντιμετωπίσαμε αυτά τα χρόνια. Να ξεκουραστούμε και να επιστρέψουμε όλοι με μεγαλύτερο ζήλο για μια νέα δημιουργική χρονιά.

Ευχόμαστε σε όλους ένα ευχάριστο και ξένοιαστο καλοκαίρι.

«Βγάζει η θάλασσα κρυφή φωνή
φωνή που μπαίνει
μες στην καρδιά μας και την συγκινεί
και την ευφραίνει.
Τραγούδι τρυφερό η θάλασσα μας ψάλλει,
τραγούδι που έκαμαν τρεις ποιητές μεγάλοι,
ο ήλιος, ο αέρας και ο ουρανός».

Κ. Π. Καβάφης



Η **ομάδα συντονισμού** του περιοδικού.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
ROTOPRINT (Α. Πρόυσαλη & ΣΙΑ ΕΕ).
ΤΗΛ: 210 6623778 - 358
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Δ. Παπαδόπουλος

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. Όλα τα άθρα υπόκειται σε κρίση

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με **απλή ταχυδρομική επιταγή** σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54 Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

Το καλοκαίρι έφτασε και όλοι το προσμένουμε για να αφεθούμε στην αγκαλιά του Ήλιου.

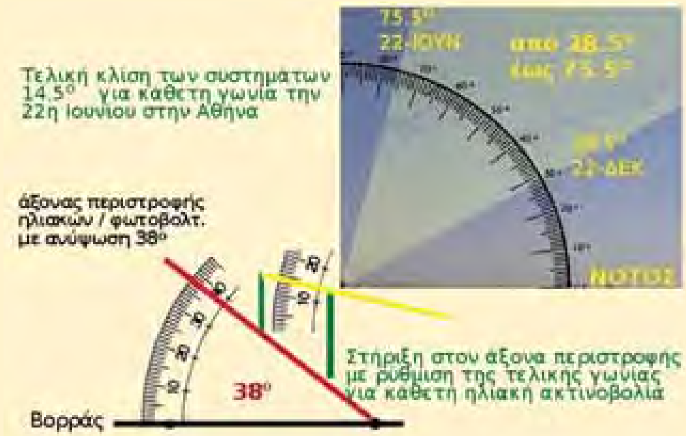
Το αστέρι της ημέρας, μύθοι και λατρεία του ήλιου

Αθανάσιος Π. Χριστόπουλος-Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ήλιε μου και κυρ Ήλιε μου, κοσμοτριγυριστή μου,
εσύ που στα ψηλά γυρνάς και χαμηλά αρμενίζεις.

Λαϊκή ρήση

Χωρίς αμφιβολία, πρώτος μεταξύ όλων των ουρανίων σωμάτων, παρατηρήθηκε και μελετήθηκε ό Ήλιος.



Τις μυστηριώδεις σκέψεις και τις απορίες, τις οποίες θα προκαλούσε η ανατολή στο νου του αρχαίου φιλοσόφου, πολύ καλά περιγράφουν τα ποιήματα τού Ossian.

Μας είναι όμως αδύνατο σήμερα φανταστούμε τα αισθήματα που είχαν οι πρόγονοί μας όταν έβλεπαν τον ήλιο να δύει. Το περιβάλλον άλλαζε όψη, ιδίως της νύχτες που δεν είχε σελήνη. Οι νύχτες του χειμώνα θα ήταν ανυπόφορες. Με πόση λαχτάρα και αγωνία θα περίμεναν την ανατολή της νέας ημέρας για να διώξει το σκοτάδι; Για να αισθανθεί κανείς την παγερή νύχτα πρέπει να είναι μόνος του σε μια ερημική περιοχή στην εξοχή, σε ένα δάσος, μακριά από τα φώτα του πολιτισμού. Εξ αιτίας αυτών των αισθημάτων, ο άνθρωπος εκείνης της εποχής, θεοποίησε την πηγή αυτή του φωτός και της ζωής. Τεκμήρια της λατρείας του Ήλιου βρίσκουμε σε όλα σχεδόν τα έθνη της Γης κατά την αρχαιότητα.

Στις Ινδίες οι Βέδες, τα αρχαία θρησκευτικά κείμενα, περιέχουν ύμνους για τον ουρανό, για την ανατολή και τον Ήλιο. Τους ύμνους αυτούς έψελναν οι ιερείς κατά την ανατολή και την δύση του Ήλιου. Η επωδός των ύμνων είναι η παγκόσμια πάλη μεταξύ του καλού και του κακού όπως συμβολίζεται διά του ανταγωνισμού μεταξύ φωτός και σκότους.

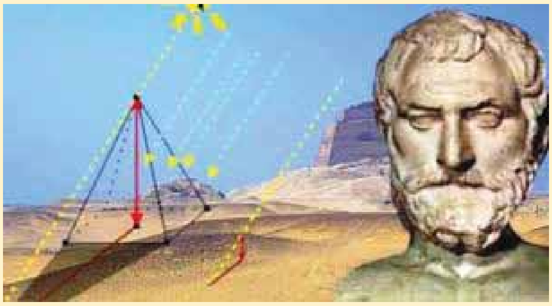
«Θα επανέλθει η ανατολή; Θα ανατείλει και πάλι ο Ήλιος; Οι δυνάμεις του σκότους θα νικηθούν από το θεό του φωτός;»

Στην Αιγυπτιακή μυθολογία έχουμε το μύθο του ηλιακού θεού Ώρου.

Ο θεός αυτός ήταν ηλιακός θεός και τον απεικόνιζαν ως γεράκι. Οι Αιγύπτιοι ονόμαζαν το γεράκι με τη λέξη χορ, ομόηχη μιας άλλης που σημαίνει «ουρανός». Επειδή το γεράκι πετά σε μεγάλα ύψη,

φαντάζονταν τον ουρανό ως θεϊκό γεράκι, με μάτια του τον Ήλιο και τη Σελήνη. Το γεράκι απεικονίζεται σε εξαιρετικά μνημεία της αρχαιότητας ακόμη και σε προϊστορικά. Μάλιστα το ιερογλυφικό το οποίο αντιστοιχεί στην έννοια «θεός», είναι ένα γεράκι που κάθεται πάνω σε ένα ξύλο. Με την πάροδο των ετών στην περιοχή δημιουργήθηκαν περί τις 15 μορφές του Ώρου.

Ενώ οι Βέδες μας μεταφέρουν πίσω περισσότερα από 3.000 χρόνια και μας δίνουν κάποιαν γνώση των τύπων της λατρείας των προγόνων μας, στη χώρα του Νείλου βρίσκουμε στοιχεία ακόμη ποιο παλιά. Οι Αιγύπτιοι δεν λάτρευαν τον Ήλιο μόνον ως την πηγή του φωτός, αλλά διέκριναν σε αυτόν διάφορες μορφές σύμφωνα με τις θέσεις του κατά την ημερήσια πορεία του. Ώρος λεγόταν στην ανατολή, Αμμούν στην μεσημβρινή του δόξα και Όσιρις στη δύση. Ο δύων Ήλιος πηγαίνει στον κάτω κόσμο που Θεός του ήταν ο Τυφώνας. Τον Τυφώνα συμβόλιζαν με τους αστερισμούς του βορείου πόλου επειδή είναι πάντα ορατοί και δεν δύουν όπως ο Ήλιος. Στο μύθο του Όρου οι πρωτόγονοι αυτοί λαοί διατυπώνουν αυτό που αντιλαμβάνονταν. Η παράδοση που χρονολογείται 5000 χρόνια π. Χ., που παριστάνουν σε τοιχογραφίες των ναών, βλέπει τις δυνάμεις του σκότους να μάχονται με το θεό Ήλιο. Σε αυτές τις εικόνες ο Όρος για να εκδικηθεί για τον θάνατο του πατρός του Όσιρη(δύοντα Ήλιο), μάχεται με τον Τυφώνα, που έχει μορφή κροκοδείλου και τον φονεύει. Αστρονομικά η έννοια του μύθου σημαίνει ότι ο Ήλιος που ανατέλλει εξαφανίζει του αστερισμούς του βορείου πόλου που είναι υπεύθυνοι για την δύση (θάνατο) του Ήλιου.



Προσανατολισμός των ναών της Αιγύπτου

Οι πυραμίδες είναι προσανατολισμένες στα τέσσερα σημεία του ορίζοντα και ιδιαιτέρως κατά τις ισημερίες. Όμως τα ερείπια ναών της αρχαίας Αιγύπτου που έγιναν πολλά χρόνια πριν από τις πυραμίδες, έδειξαν ότι ήταν προσανατολισμένα άλλα με την ανατολή και δύση του Ήλιου και αλλά με την ανατολή και δύση διαφόρων ουρανίων σωμάτων. Οι Αιγύπτιοι στους ναούς αυτούς, εκτός από την λατρεία στα ουράνια σώματα, έκαναν και τις παρατηρήσεις τους σε αυτά.

Κατά τους ιστορικούς χρόνους ο πλουτοφόρος Νείλος άρχιζε να πλημμυρίζει στο θερινό ηλιοστάσιο. Βρέθηκε ότι πολλοί ηλιακοί ναοί βλέπουν την ανατολή ή τη δύση του Ήλιου κατά το θερινό ηλιοστάσιο. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι ελλείψει ημερολογίου οι ιερείς έβλεπαν από το ναό πότε θα υψωθούν τα νερά του Νείλου, την βαθμιαία δηλαδή προς βορρά τροπή του Ήλιου. Αυτό ήταν το σπουδαιότερο γεγονός του έτους για τους Αιγύπτιους και αναμφίβολα στους ναούς αυτούς ετελούντο μεγάλες εορτές. Η βαθμιαία τροπή του Ήλιου προς νότο κατά το χειμερινό ηλιοστάσιο, έφερνε μεγάλες νύχτες, άρα έφερνε φόβο για αυτό κάποιοι ναοί ήταν στραμμένοι προς το χειμερινό ηλιοστάσιο.

Οι ναοί του Ήλιου στην Ελλάδα

Η λατρεία του Ήλιου ήταν πολύ οργανωμένη και είχε λαμπρές τελετές όχι μόνο στην Αίγυπτο αλλά και

αλλού αφού ίχνη βρίσκουμε σχεδόν σε κάθε χώρα. Όλοι σχεδόν οι αρχαίοι Ελληνικοί ναοί ήταν τοποθετημένοι με τέτοιο τρόπο ώστε οι ακτίνες του Ήλιου να εισδύουν εντός αυτών κάποια χρονική στιγμή κατά την διάρκεια του έτους. Η καλλιτεχνική φύση των Ελλήνων άλλαξε την Αιγυπτιακή αρχιτεκτονική προσθέτοντας κάλλος και χάρη στους ναούς. Η αρχική όμως σκέψη παρέμεινε αμετάβλητος δηλαδή ο προσανατολισμός είναι τέτοιος ώστε οι Ηλιακές ακτίνες να φτάνουν μέχρι του σηκού και να φωτίζουν το άγαλμα τής θεότητας.

Το άστρο της ημέρας στο Ελληνικό Πάνθεο λέγεται Ήλιος αλλά κατόπιν αφομοιώθηκε μετά τού Φοίβου ’Απόλλωνος. Νεότεροι ποιητές τον φαντάζονταν να κατοικεί σε ένα θαυμάσιο μέγαρο πλησίον τής Κολχίδας. Επέστρεφε δε εκεί κάθε μέρα, οδηγώντας απαστράπτον άρμα στον ουρανό και επί πτερωτής χρυσής λέμβου, δια μέσου της βορείου ακτής του Ευξείνου Πόντου.

Ο Ήλιος απαντάται πολύ συχνά στα δημοτικά άσματα και τις παραδόσεις. Οι Έλληνες τον φαντάζονται ανθρωπόμορφο, αλλά πότε είναι βασιλιάς, πότε γίγας αδηφάγος, αιμοδιψής, τρώει και ανθρώπους ακόμη, πότε είναι οφθαλμός «μάτι του Θεού», παντεπόπτης, αγγελιοφόρος και συμπαθών τους επί της Γης. Αγγελιοφόρο τον φαντάζονταν οι Έλληνες στην αρχαιότητα.

Η λατρεία του Βάαλ

Οι Φοίνικες λάτρευαν τον Ήλιο με το όνομα Βάαλ.

Ο Μολώχ των Αμμωνιτών και ο Χεμώχ των Μοαβιτών ήταν μάλλον άλλα ονόματα τής ιδίας θεότητας. Από τα έθνη αυτά πήραν οι Ισραηλίτες τις ειδωλολατρικές τους συνήθειες. Το Beltane, η αγία πυρά των κελτικών εθνών, επέζησε τής λατρείας του Βάαλ. Πάντως ο Ήλιος λατρευόταν και από αυτούς τους λαούς με ετήσιες εορτές προς τιμήν του.

Οι Δρυΐδες.

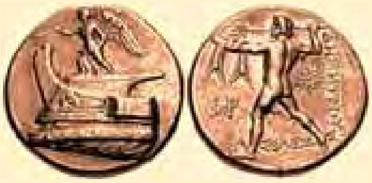
Δρυΐδες ονομάζονταν οι ιερείς μιας θρησκείας στη Δύση που δεν είχαν ναούς αλλά τελούσαν τις ιεροτελεστίες στο ύπαιθρο.

Οι μεγάλοι κύκλοι που σχηματίζονται με όρθιους ογκόλιθους, όπως ο γνωστός κύκλος της Stonehenge(Στόουνχεντζ), στην πεδιάδα του Salisbury της Αγγλίας, δείχνουν κατά πάσαν πιθανότητα ότι είναι ιερά των Δρυΐδων. Η κυκλική τοποθέτηση των λίθων υποδεικνύει, ότι σχετίζονται με την λατρεία του Ήλιου. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την ανακάλυψη ότι ο μεγάλος βράχος που είναι επί της οδού που οδηγεί στην Stonehenge, είναι τοποθετημένος έτσι ώστε, η σκιά του κατά την Ανατολή του Ήλιου στα

μέσα του καλοκαιριού να πέφτει στον κεντρικό βωμό. Με αυτό τον τρόπο όπως και οι Αιγύπτιοι ιερείς προσδιόριζαν το έτος.
Το Stonehenge (Στόουνχεντζ) είναι νεολιθικό μεγαλιθικό μνημείο του 25ου π.Χ. αιώνα. Το όνομα προέρχεται από τις αρχαίες αγγλικές λέξεις Stanhen gist, που σημαίνουν «κρεμαστοί λίθοι».

Σκανδιναβικοί μύθοι

Ο Ήλιος έχει πρωτεύουσα θέση και στην κοσμογονία των βορείων λαών. Κατ' αυτούς από τον ανταγωνισμό των αγρίων ψυχρών δυνάμεων του Βορρά και των γλυκυτέρων, λαμπρών δυνάμεων τού Νότου γεννήθηκε ο κόσμος. Η νύχτα κατάγεται από του γίγαντες και υιός αυτής είναι η ημέρα. Ο Πατήρ του Παντός δίνει σε αυτούς άρματα και ίππους. Ενώ η νύχτα τρέχει στον ουρανό, ο αφρός από το στόμα των αλόγων ραντίζει τη Γη. Ακολουθεί όμως ο ωραίος έφηβος, η μέρα και το φως, το οποίο πηγάζει από τις αστραφτερές χαίτες των αλόγων και φωτίζει τον κόσμο. Περίεργο όμως είναι ότι η Σκανδιναβική μυθολογία αναφέρει ότι το τέλος και η αρχή του κόσμου οφείλονται στο πυρ. Η προσωποποίηση του πυρός είναι ο Loki, ο οποίος στη αρχή ήταν ευεργετικός, αλλά κατέπεσε από την κατάσταση που είχε και έγινε μια καταστρεπτική φλόγα. Οι απόγονοι του θα υπερισχύσουν των άλλων θεοτήτων, «στο Λυκόφως των θεών» καταστρέφοντας τον Ήλιο, τη Σελήνη τα αστέρια, ενώ θα διασπείρει δαυλούς, οι οποίοι θα κάψουν όχι μόνο τον κόσμο αλλά και αυτή την Βαλχάλλαν(εκεί που πηγαίνουν οι πεσόντες ήρωες στις μάχες). Φαίνεται ότι ή λατρεία του πυρός και τού Ήλιου ήταν πολύ διαδεδομένη στους Κέλτες και Σκανδιναβούς.



Λατρεία του Ήλιου στην Περουβία

Όταν οι Ισπανοί κατέκτησαν την μακρινή Περουβία, βρήκαν τους βασιλείς της χώρας να ισχυρίζονται, ότι ήταν τέκνα του Ήλιου και η λατρεία του αποτελούσε την ιδιαίτερη φροντίδα τους. Στην πρωτεύουσα, το Κούσκο, υπήρχε υπέροχος ναός, ο οποίος είχε στο δυτικό τοίχο ολόχρυση εικόνα του Ήλιου. Κατά την ανατολή του Ήλιου, όταν άνοιγαν οι ανατολικές θύρες του ναού, οι ακτίνες φώτιζαν την εικόνα και είχε εκτυφλωτική λάμψη. Όλα τα σκεύη και τα κοσμήματα του ναού ήταν από χρυσό. Ο χρυσός συμβολίζει «τα δάκρυα του Ήλιου».

Προσανατολισμός των Χριστιανικών Εκκλησιών

Γνωρίσαμε πόσο διαδεδομένη ήταν στον κόσμο η λατρεία του Ήλιου. Έτσι μερικές συνήθειες από την λατρεία του Ήλιου θα ήταν αδύνατο να παραμεριστούν εντελώς από τους Χριστιανούς. Διατηρήθηκαν και προσαρμόστηκαν από τους Χριστιανούς. Οι μεσαιωνικές εκκλησίες όπως και οι ναοί της Αιγύπτου και της Ελλάδας είναι στραμμένοι ανατολικά. Η παλαιά βασιλική του Αγίου Πέτρου της Ρώμης έβλεπε ακριβώς την ανατολή ώστε όταν άνοιγαν οι μεγάλες πόρτες κατά την εαρινή ισημερία, οι ακτίνες του Ήλιου διέρχονταν ακριβώς από το μέσο του ναού και φώτιζαν την Αγία Τράπεζα. Από τον 5ο αιώνα μ.Χ. μέχρι την Αναγέννηση η συνήθεια αυτή εφαρμοζόταν σχεδόν παντού. Οι Έλληνες όταν έγιναν χριστιανοί, αντικατέστησαν την λατρεία του Ήλιου διά της εορτής του αγίου Ήλιου. Κάποια μέρη της Ελλάδας ανάβουν φωτιές το βράδι της εορτής του αγίου. Οι ορθόδοξοι ναοί προσανατολίζονται με το ιερό στην ανατολή.

Η ικανότητα μετάφρασης στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

Αλέξανδρος Βαρούχας, Σπύρος Φερεντίνος

Όπως είχαμε τονίσει σε προηγούμενο τεύχος του Ευκλείδη Α΄, κατά καιρούς θα δημοσιεύουμε στο περιοδικό θέματα που τέθηκαν στους μαθητές Γυμνασίου στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ.

Αμέσως παρακάτω θυμίζουμε ορισμένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του διαγωνισμού ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ.

- Ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αποτελεί τη βάση και τον συνδετικό κρίκο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης που καταλήγουν στη συγκρότηση της ελληνικής ομάδας που μετέχει σε διεθνείς Μαθηματικούς διαγωνισμούς, με αποκορύφωμα την Παγκόσμια Ολυμπιάδα των Μαθηματικών.
- Τα θέματα που εξετάζονται στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αντιστοιχούν στις 8 βασικές μαθηματικές ικανότητες (Αριθμητική ικανότητα, Γεωμετρική ικανότητα, Ικανότητα επαγωγικού συλλογισμού, Συνδυαστική ικανότητα, Ικανότητα μετάφρασης, Αλγεβρική ικανότητα, Ικανότητα λύσης προβλήματος και Αλγοριθμική ικανότητα).
- Στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ πρωτεύοντα ρόλο στην αντιμετώπιση των θεμάτων δεν έχει απλά η ανάκληση γνώσεων (ορισμοί, διαδικασίες, τύποι) αλλά ο Μαθηματικός τρόπος σκέψης.
- Τα θέματα είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας με στόχο τη δημιουργία θετικής στάσης, ακόμη και για τους μαθητές που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά. Ταυτόχρονα υπάρχουν θέματα που προκαλούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε μαθητές με υψηλούς στόχους στα Μαθηματικά

Τελικός στόχος του διαγωνισμού είναι να εμπλακούν ΟΛΟΙ οι μαθητές, ασχέτως των γνώσεων, της επίδοσης και του Μαθηματικού υπόβαθρου που κατέχουν, σε Μαθηματικές δράσεις, στις οποίες θα αξιοποιήσουν εκείνες τις ικανότητες που ανήκουν στο ευρύ φάσμα του Μαθηματικού τρόπου σκέψης, καθώς και να συμβάλλει στην απομυθοποίηση της άποψης «ότι τα μαθηματικά είναι μόνο για λίγους και ικανούς και δεν είναι για τον καθένα».

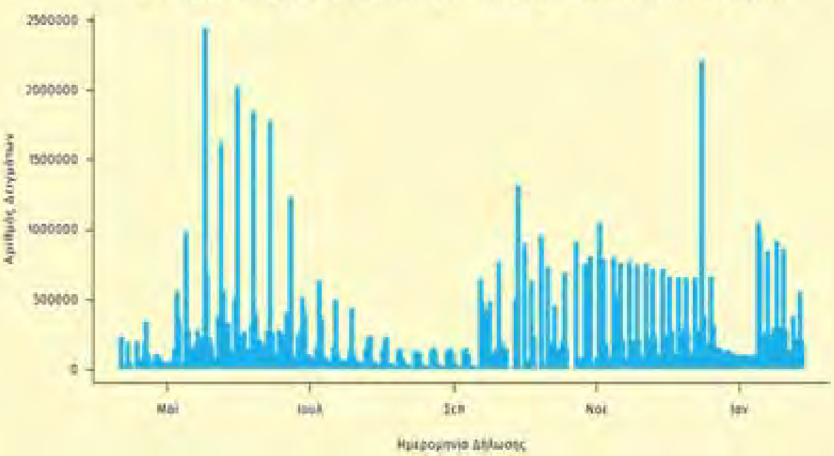
Στο σημερινό τεύχος θα δημοσιευθούν με τις λύσεις τους ορισμένα θέματα που αφορούν την ικανότητα μετάφρασης. Η ικανότητα αυτή αφορά τη μετάφραση δεδομένων από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. Βασικές δραστηριότητες που απαιτούν αυτήν την ικανότητα είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα, από ένα πίνακα ή από μία εικόνα.

Η δυνατότητα ερμηνείας διαγραμμάτων συνδέεται με πλήθος φαινομένων της καθημερινής ζωής, όπως διαγράμματα μεταβολής της θερμοκρασίας ασθενών σε νοσοκομεία, δημοσκοπήσεις, μετεωρολογία, εμπορικές συναλλαγές κλπ. Τα διαγράμματα αποτέλεσαν τη βάση, εκτός των μαθηματικών, και πολλών άλλων επιστημονικών αντικειμένων. Ενδεικτικά αναφέρουμε την ιατρική, την οικονομία, την αστρονομία, τη χαρτογραφία, τη χημεία, τη μηχανική, την ιστορία, την επικοινωνία, τη φυσική κ.ά.».

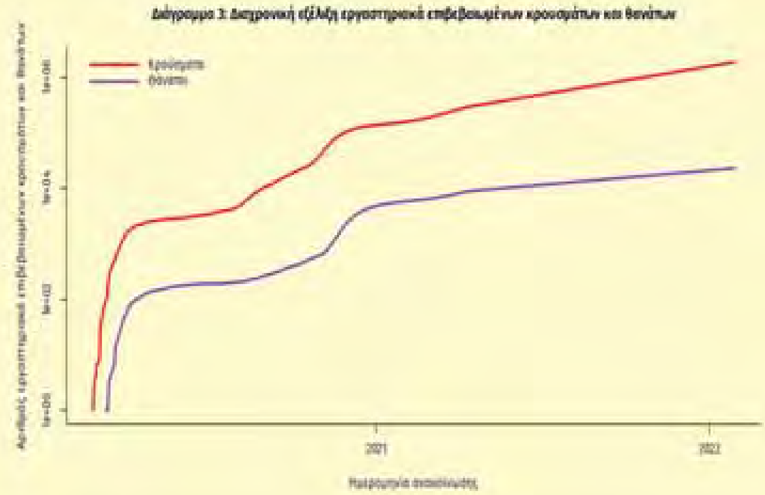
Τα διαγράμματα δεν συνδέονται μόνο με την επιστήμη, αλλά και με άλλες ανθρώπινες δραστηριότητες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η τέχνη, όπου η εξέλιξη της κατανόησης του κόσμου ξεκίνησε από τα πρώτα διαγράμματα που ήταν ζωγραφιές των σπηλαίων.
Ειδικά τη δύσκολη περίοδο της πανδημίας στα ΜΜΕ έχουν εμφανισθεί πλήθος διαγραμμάτων που αφορούν διάφορες πληροφορίες που συνδέονται με την πανδημία που οφείλεται στον COVID-19, όπως διαγράμματα θανάτου ανά εκατομμύριο κατοίκους κλπ. Επομένως είναι πολύ σημαντικό για τον μαθητή να αποκτήσει την ικανότητα της άντλησης πληροφοριών μέσω της ερμηνείας διαγραμμάτων.

Για παράδειγμα, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο οι μαθητές να μπορούν να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν διαγράμματα και πίνακες όπως τα παρακάτω που είναι δημοσιευμένα στην Ημερήσια έκθεση επιδημιολογικής επιτήρησης λοίμωξης από το νέο κορωνοϊό (COVID-19) του ΕΟΔΥ (Εθνικός Οργανισμός Δημόσιας Υγείας – στις 29/01/2022). Η κατανόηση και ερμηνεία διαγραμμάτων και πινάκων αποτελεί ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του μαθηματικού αλφαβητισμού ή εγγραματισμού, δηλαδή της ικανότητας των μαθητών να εφαρμόζουν τις γνώσεις και δεξιότητες που απέκτησαν στα Μαθηματικά, ώστε να επιλύουν και ερμηνεύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής.

Διάγραμμα 6: Ελεγχθέντα δείγματα αυτοδιαγνωστικών ελέγχων COVID-19, 29 Ιανουαρίου 2022



Διάγραμμα 3: Διαχρονική εξέλιξη εργαστηριακά επιβεβαιωμένων κρουσμάτων και θανάτων



Πίνακας 1: Ηλικιακή κατανομή επιβεβαιωμένων κρουσμάτων COVID-19

	Σύνολο κρουσμάτων COVID-19*	Θάνατοι ασθενών με COVID-19	Νοσηλευόμενοι διασωληνωθέντες
Σύνολο			
0 – 17 ετών	378057 (19.8%)	7 (0.0%)	0 (0.0%)
18 – 39 ετών	699750 (36.7%)	189 (0.8%)	24 (4.1%)
40 – 64 ετών	642565 (33.7%)	3839 (16.5%)	243 (41.7%)
65 και άνω	184949 (9.7%)	19240 (82.7%)	316 (54.2%)
Άνδρες			
0 – 17 ετών	195775 (20.7%)	3 (0.0%)	0 (0.0%)
18 – 39 ετών	353711 (37.3%)	142 (1.1%)	14 (4.0%)
40 – 64 ετών	310549 (32.8%)	2527 (19.6%)	159 (45.6%)
65 και άνω	87531 (9.2%)	10221 (79.3%)	176 (50.4%)
Γυναίκες			
0 – 17 ετών	182281 (19.0%)	4 (0.0%)	0 (0.0%)
18 – 39 ετών	346033 (36.1%)	47 (0.5%)	10 (4.3%)
40 – 64 ετών	332001 (34.7%)	1312 (12.6%)	84 (35.9%)
65 και άνω	97412 (10.2%)	9019 (86.9%)	140 (59.8%)

* Τα στοιχεία αφορούν τα κρούσματα εκείνα για τα οποία είναι γνωστή και επιβεβαιωμένη η ηλικία τους

Επίσης διαγράμματα θα συναντήσουμε και στα σχολικά βιβλία σχεδόν όλων των τάξεων του Γυμνασίου. Ένα από αυτά που προέρχεται από το σχολικό βιβλίο της Β' Γυμνασίου, παραθέτουμε αμέσως παρακάτω:

Τα παραδείγματα που θα αναφερθούν αμέσως παρακάτω προέρχονται από τους μέχρι τώρα διαγωνισμούς του ΠΥΘΑΓΟΡΑ που συνδέονται με την ικανότητα μετάφρασης, ελπίζουμε ότι θα επαληθεύσουν την γνωστή έκφραση: «Μία εικόνα ισοδυναμεί με 1000 λέξεις» και θα αποτελέσουν ερέθισμα για περαιτέρω ενασχόληση των μαθητών με το θέμα της ερμηνείας των μαθηματικών διαγραμμάτων και πινάκων.

Η αιτιολόγησης της λύσης των θεμάτων επαφίεται στο μαθητή και για διευκόλυνσή του υπογραμμίζουμε τη σωστή από τις 5 προτεινόμενες επιλογές.

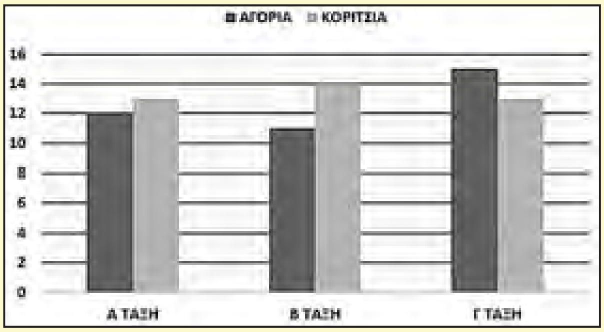
Παράδειγμα 1

Πόσες θήκες θα χρειαστούμε για να συσκευάσουμε όλα τα αυγάπου είναι στα καλάθια;

Α) 2 **<u>Β)</u>** 3 **Γ)** 4 **Δ)** 5 **Ε)** 6

Παράδειγμα 2

Στο παρακάτω διάγραμμα εμφανίζεται το πλήθος των μαθητών (αγοριών και κοριτσιών) στις τρείς τάξεις ενός Γυμνασίου.



Τι από τα παρακάτω ισχύει συνολικά για όλο το Γυμνάσιο;

Α: τα αγόρια είναι περισσότερα από τα κορίτσια

<u>Β</u>: τα κορίτσια είναι περισσότερα από τα αγόρια

Γ: το πλήθος των αγοριών είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών

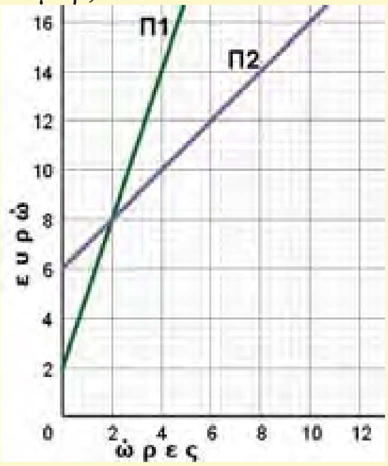
Δ: δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τα πλήθη τους

Ε: σε κάθε δύο αγόρια αντιστοιχεί ένα κορίτσι

Παράδειγμα 3

Το γραφείο ενοικίασης ποδηλάτων Π1 χρεώνει 3€ για κάθε μία ώρα ενοικίασης και 2€ένα πάγιο για το κράνος. Το γραφείο ενοικίασης ποδηλάτων Π2 χρεώνει 1€ για κάθε μία ώρα ενοικίασης και 6€ένα πάγιο για το κράνος.

Ο Ομάρ θέλει να νοικιάσει για 5 ώρες ένα ποδήλατο και να πληρώσει τα λιγότερα χρήματα οπότε έφτιαξε το παρακάτω διάγραμμα. Τι συμπέρασμα θα μπορούσε με βεβαιότητα να βγάλει ο Ομάρ;



Α) Όποιο πρακτορείο και να επιλέξει θα έχει την ίδια χρέωση

Β) Το Π2 συμφέρει οικονομικά περισσότερο

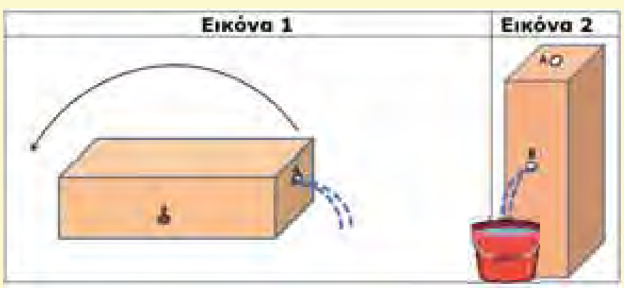
Γ) Τα κράνη του Π2 είναι καλύτερα από αυτά του Π1

Δ) Το Π1 συμφέρει οικονομικά περισσότερο

Ε) Δεν γνωρίζουμε ποιο είναι το πιο οικονομικό για τις 5 ώρες ενοικίασης.

Παράδειγμα 4

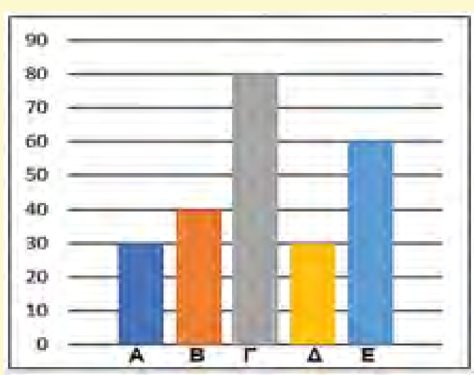
Στο δοχείο του σχήματος υπάρχουν δύο τρύπες που μπορούμε να τις έχουμε κλειστές ώστε να μη χύνεται το νερό ή ανοιχτές. Στην (Εικόνα 1) η τρύπα Α βρίσκεται σε ύψος ίσο με τα 2/3 του ύψους του δοχείου ενώ η άλλη τρύπα, η Β, στο μισό το μήκους του δοχείου.
Το δοχείο είναι αρχικά γεμάτο νερό.
Ανοίγουμε την τρύπα Α κι αφού σταματήσει να χύνεται νερό (Εικόνα 1) την σφραγίζουμε και σηκώνουμε το κουτί όρθιο (Εικόνα 2). Ανοίγουμε τότε τη δεύτερη τρύπα Β και μαζεύουμε το νερό που χύνεται. Τι μέρος της αρχικής ποσότητας είναι το νερό που μαζέψαμε;



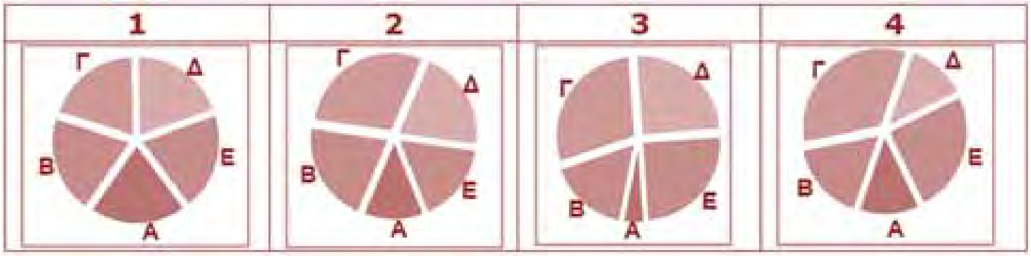
Α) Το $\frac{1}{3}$ **Β)** Το $\frac{1}{6}$ **Γ)** Το $\frac{1}{5}$ **Δ)** Τα $\frac{2}{5}$ **Ε)** Κανένα από τα προηγούμενα.

Παράδειγμα 5

Μία αντιπροσωπεία αυτοκινήτων διαθέτει 5 διαφορετικά μοντέλα αυτοκινήτων, τα Α, Β, Γ, Δ και Ε. Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνονται με στήλες οι πωλήσεις των 5 μοντέλων σε ένα μήνα.



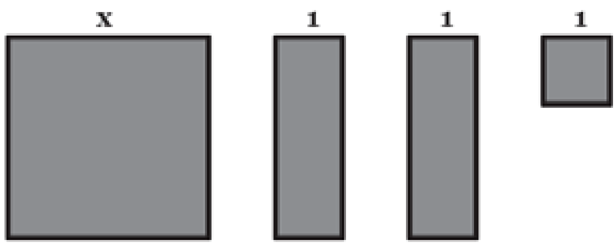
Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα ταιριάζει με το διάγραμμα αυτό;



Α) το 1 και το 3 **Β)** το 2 και το 4
Γ) μόνο το 4 **Δ)** μόνο το 2 **Ε)** Κανένα από τα προηγούμενα

Παράδειγμα 6

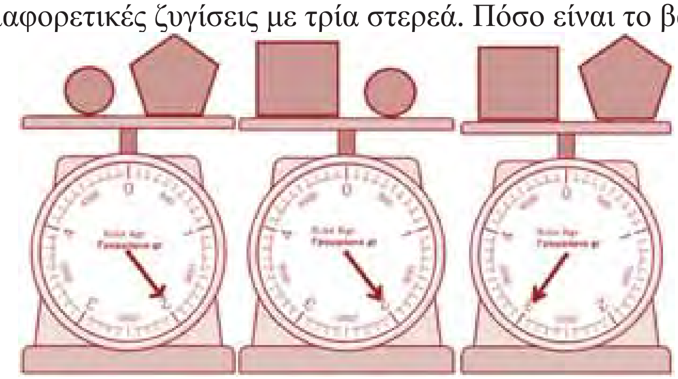
Για την παρακάτω εικόνα υπάρχουν οι εξής πληροφορίες:
α) Υπάρχουν δύο τετράγωνα.
β) Τα δύο ορθογώνια έχουν ύψος ίσο με την πλευρά του ενός τετραγώνου.
Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις εκφράζει πάντα το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων σχημάτων;



Α) $x\cdot(x+1)+1$ **Β)** $(x+1)^2$ **Γ)** x^2+3 **Δ)** $(x+3)\cdot x$ **Ε)** Κανένα από τα προηγούμενα

Παράδειγμα 7

Έχουμε κάνει τρεις διαφορετικές ζυγίσεις με τρία στερεά. Πόσο είναι το βάρος της σφαίρας;



Α) 0,1Kg **Β)** 0,3Kg **Γ)** 0,5Kg **Δ)** 1Kg **Ε)** 2Kg

Παράδειγμα 8

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ψηφοφορίας για πρόεδρο του δεκαπενταμελούς συμβουλίου ενός Γυμνασίου.
Οι μαθητές που ψήφισαν ήταν 180. Πόσους περισσότερους ψήφους πήρε ο πρόεδρος από τον αμέσως επόμενο σε ψήφους μαθητή ή μαθήτρια;

Α) 40 **Β)** 20 **Γ)** 10 **Δ)** 12 **Ε)** δεν μπορούμε να υπολογίσουμε

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών

Προκριματικός Διαγωνισμός 2022

16 Απριλίου 2022

Λύσεις Θεμάτων μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1.

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακεραίους a, b, c, για τους οποίους υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z, ώστε

$$ab+1=x!,\quad bc+1=y!,\quad ca+1=z!.$$

Σημείωση. Για κάθε θετικό ακέραιο n, με $n!$ συμβολίζουμε το γινόμενο $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Λύση. Έχουμε ότι $ab+1>1$, $bc+1>1$, $ca+1>1$, άρα πρέπει $x,y,z\geq 2$. Αν $x,y,z\geq 3$, τότε παρατηρούμε ότι ο 3 δεν μπορεί να διαιρεί κάποιον από τους a, b, c. Πράγματι, αν, για παράδειγμα, $3\mid a$, τότε ο 3 δεν διαιρεί τον $ab+1$, αλλά διαιρεί τον $x!$, άτοπο. Τότε όμως έχουμε τρεις αριθμούς a, b, c που δεν διαιρούνται από το 3, άρα δύο από αυτούς αφήνουν ίδιο υπόλοιπο στην διαίρεση με το 3. Λόγω της συμμετρίας, υποθέτουμε ότι $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,3)$. Τότε, η πρώτη σχέση δίνει

$$x!=ab+1\equiv a^2+1\ (\mathrm{mod} 3).$$

Όμως $3\mid x!$, άρα $3\mid a^2+1$, αδύνατο, αφού για κάθε ακέραιο x έχουμε $x^2\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\,3)$.

Έπεται ότι κάποιος από τους x, y, z είναι μικρότερος του 3, έστω ο x. Τότε $x=2$ και από την πρώτη παίρνουμε $ab+1=2!=2$, άρα $ab=1$, οπότε $a=b=1$. Τότε, από την δεύτερη και τρίτη σχέση παίρνουμε ότι $y=z$. Τελικά οι λύσεις είναι της μορφής $(1,1,y!-1)$ και οι κυκλικές μεταθέσεις αυτής.

2^{ος} Τρόπος. Έστω ότι $x=\min\{x,y,z\}>1$. Είναι $z!\equiv y!\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ x!)$, και

$$(y!-1)a^2=bca^2=(ab)(ca)=(x!-1)(z!-1)\equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ x!)$$

οπότε ο a^2+1 διαιρείται από το $x!$.

Αν $x\geq 3$, τότε $a^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 3)$, άτοπο. Επομένως, $x=2$ και $ab=1$, και άρα $a=b=1$ και $y!=z!=c+1$.

Οι ζητούμενοι αριθμοί a,b,c, λοιπόν, είναι οι $a=1$, $b=1$ και $c=n!-1$ για κάποιο ακέραιο $n\geq 2$ (και οι μεταθέσεις τους).

3^{ος} Τρόπος. Εφόσον οι x, y, z είναι μεγαλύτεροι του 1, θα πρέπει οι $x!$, $y!$, $z!$ να είναι άρτιοι. Επομένως οι a, b, c πρέπει να είναι όλοι περιττοί. Τότε, δύο από αυτούς, έστω οι a, b, πρέπει να είναι ισοϋπόλοιποι modulo 4. Τότε, έχουμε

$$ab+1\equiv a^2+1\ (\mathrm{mod}\,4),$$

άρα αν $x>3$, έχουμε ότι $4\mid a^2+1$, άτοπο, αφού κάθε ακέραιο x έχουμε $x^2\equiv 0,1\ (\mathrm{mod} 4)$. Έπεται ότι $x=2$ ή $x=3$.

- Αν $x=2$, τότε $ab=1$, άρα $a=b=1$ και $y!=z!=c+1$.

- Αν $x = 3$, παίρνουμε ότι $ab = 5$, οπότε κάποιος είναι ίσος με 1 και κάποιος ίσος με 5, έστω ότι $a = 5$ και $b = 1$. Τότε,
$$5c + 1 = z! \text{ και } c + 1 = y!.$$
Με απαλοιφή του c παίρνουμε
$$5y! - 4 = z!.$$
Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι το δεξί μέλος δεν μπορεί να διαιρείται με 5, άρα $z \leq 4$. Για $z = 4$, παίρνουμε $5y! = 28$, αδύνατο. Για $z = 3$, παίρνουμε $y! = 2$, άρα $y = 2$. Τότε παίρνουμε ως λύση την τριάδα $(5, 1, 1)$.

Σε κάθε περίπτωση, οι λύσεις είναι της μορφής $(n! - 1, 1, 1)$ και οι μεταθέσεις αυτής.

Πρόβλημα 2.

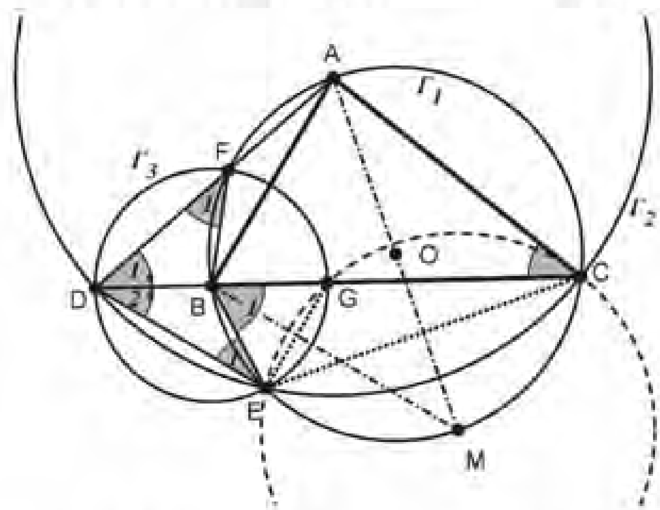
Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ABC, με $AB < AC < BC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ_1 κέντρου O. Ο κύκλος Γ_2, που έχει κέντρο το σημείο A και ακτίνα AC, τέμνει την ευθεία BC στο σημείο D και τον κύκλο Γ_1 στο σημείο E. Η ευθεία AD τέμνει τον Γ_1 στο σημείο F. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου DEF, έστω Γ_3, τέμνει την BC στο σημείο G. Να αποδείξετε ότι:
(α) Το σημείο B είναι το κέντρο του κύκλου Γ_3.
(β) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CEG εφάπτεται στην AC.

Λύση. (α) Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο AFBC και το ισοσκελές τρίγωνο DAC έχουμε $D\widehat{F}B = D\widehat{C}A = A\widehat{D}C = F\widehat{D}B$. Άρα $DB = BF$.

Επίσης, $E\widehat{D}B = C\widehat{D}E = \dfrac{E\widehat{A}C}{2}$, ως εγγεγραμμένη στο τόξο EC του Γ_2. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου DBE και το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABEC, έχουμε

$$D\widehat{E}B = (180^\circ - D\widehat{B}E) - E\widehat{D}B = E\widehat{B}C - \frac{E\widehat{A}C}{2} = E\widehat{A}C - \frac{E\widehat{A}C}{2} = E\widehat{D}B.$$

Άρα $DB = BE$. Συνεπώς, $BE = DB = BF$, δηλαδή το B είναι το περίκεντρο του τριγώνου DEF.



(β) Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}_1$ είναι μεσοκάθετος της EG και διέρχεται από το μέσο, έστω M, του τόξου CE του κύκλου Γ_1. Ισχύουν τώρα οι ισότητες των τμημάτων $OC = OE$ (ακτίνες του κύκλου Γ_1) και $AC = AE$ (ακτίνες του κύκλου Γ_2). Άρα η ευθεία OA είναι μεσοκάθετος της CE, οπότε θα διέρχεται από το μέσο M του τόξου CE του κύκλου Γ_1. Έπεται ότι το σημείο M είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου CEG, διότι από το σημείο αυτό διέρχονται οι μεσοκάθετες των EG και CE. Άρα $CA \perp CM$, οπότε η CA εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου CEG.

$2^{ος}$ Τρόπος για το (β). Θεωρούμε την ημιευθεία ACx και αρκεί να δείξουμε ότι $E\hat{G}C = E\hat{C}x$. Καταρχάς, από το εγγραγραμμένο DEGF παίρνουμε

(1) $$E\hat{G}C = 180^\circ - D\hat{G}E = 180^\circ - D\hat{F}E.$$

Από το εγγεγραμμένο AFEC παίρνουμε

(2) $$D\hat{F}E = A\hat{C}E = 180^\circ - E\hat{C}x.$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε το ζητούμενο.

$3^{ος}$ Τρόπος για το (β). Αρκεί να δείξουμε ότι $G\hat{E}C = A\hat{C}D$. Έστω H το αντιδιαμετρικό σημείο του A στον Γ_1. Είναι $D\hat{E}G = 90^\circ$, αφού η DG είναι διάμετρος του Γ_3 λόγω του (α). Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABEH έχουμε

$$A\hat{B}E = A\hat{B}H + H\hat{B}E = 90^\circ + E\hat{A}H = 90^\circ + \frac{E\hat{A}C}{2} = D\hat{E}G + G\hat{D}E = E\hat{G}C,$$

αφού $E\hat{A}H = E\hat{A}O = \dfrac{E\hat{A}C}{2}$. Αλλά, είναι $B\hat{A}E = B\hat{C}E = G\hat{C}E$, οπότε

$$G\hat{E}C = 180^\circ - E\hat{G}C - G\hat{C}E = 180^\circ - A\hat{B}E - B\hat{A}E = B\hat{E}A = B\hat{C}A,$$

όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3.

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι, ώστε $x + y + z = 4$ και $0 \le x, y, z \le 2$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{2+x} + \sqrt{2+y} + \sqrt{2+z} + \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

Λύση. Έστω $a = \sqrt{2+x} + \sqrt{y+z} = \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}$. Αφού $0 \le x \le 2$, είναι $x(2-x) \ge 0$, οπότε

$$a^2 = (2+x) + (4-x) + 2\sqrt{(2+x)(4-x)} = 6 + 2\sqrt{8 + x(2-x)} \ge 6 + 2\sqrt{8} = (2+\sqrt{2})^2.$$

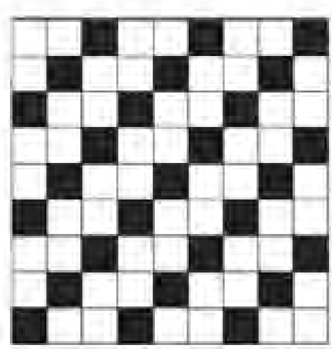
Αφού $a \ge 0$, παίρνουμε $a \ge 2 + \sqrt{2}$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$ ή $x = 2$. Έτσι,

$$A = (\sqrt{2+x} + \sqrt{y+z}) + (\sqrt{2+y} + \sqrt{z+x}) + (\sqrt{2+z} + \sqrt{x+y}) \ge 3(2+\sqrt{2}),$$

με την ισότητα να ισχύει για $(x, y, z) = (2,2,0)$ ή $(2,0,2)$ ή $(0,2,2)$.

Πρόβλημα 4.

Για κάθε θετικό ακέραιο n, θεωρούμε μία $3n \times 3n$ σκακιέρα, της οποίας όλα τα τετράγωνα χρωματίζονται μαύρα και άσπρα ως εξής: Ξεκινώντας από το πάνω αριστερά τετράγωνο, κάθε τρίτη διαγώνιος είναι μαύρη και όλα τα άλλα τετράγωνα είναι άσπρα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε κάθε κίνηση, επιλέγουμε ένα 2×2 τετράγωνο και αλλάζουμε τον χρωματισμό των τετραγώνων του ως εξής: Τα άσπρα τετράγωνα γίνονται πορτοκαλί, τα πορτοκαλί (αν υπάρχουν) μαύρα και τα μαύρα γίνονται άσπρα. Ο στόχος είναι, μετά από πεπερασμένες κινήσεις, να φτάσουμε σε έναν χρωματισμό της σκακιέρας, ώστε όλα τα τετράγωνα που ήταν μαύρα στον αρχικό χρωματισμό να είναι άσπρα και όλα τα τετράγωνα που ήταν άσπρα στον αρχικό



χρωματισμό να είναι μαύρα. Να αποδείξετε ότι:
(α) Δεν μπορούμε να επιτύχουμε τον στόχο για $n = 3$.
(β) Μπορούμε να επιτύχουμε τον στόχο για $n = 2$.

Λύση. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι αν αλλάξουμε το χρώμα ενός τετραγώνου 3 φορές, θα αποκτήσει το χρώμα που είχε αρχικά. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία κίνηση έχει επηρέασει ένα τετράγωνο ακριβώς 0, 1 ή 2 φορές. Επιπλέον, για να φτάσουμε στον ζητούμενο τελικό χρωματισμό, θα πρέπει κάθε άσπρο τετράγωνο να αλλάξει χρώμα $2 \pmod 3$ φορές και κάθε άσπρο τετράγωνο να αλλάξει χρώμα $1 \pmod 3$ φορές.
(α) Αντιστοιχίζουμε κάθε 2×2 τετράγωνο με το πάνω αριστερά μοναδιαίο τετράγωνό του. Θα εξετάσουμε την πρώτη στήλη. Το πρώτο της τετράγωνο είναι άσπρο και περιέχεται σε ακριβώς ένα 2×2 τετράγωνο, άρα το τετράγωνο αυτό πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε 2 κινήσεις. Το δεύτερο τετράγωνο, έστω Β, σε αυτή την στήλη είναι επίσης άσπρο και περιέχεται σε ακριβώς δύο 2×2 τετράγωνο. Το ένα από αυτά είναι το πάνω αριστερά, που γνωρίζουμε ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε δύο κινήσεις. Επομένως το 2×2 τετράγωνο που έχει σαν πάνω αριστερά τετράγωνο το Β πρέπει να χρησιμοποιηθεί 0 φορές. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα επόμενα τέσσερα 2×2 τετράγωνα, που αντιστοιχούν στα μοναδιαία τετράγωνα της πρώτης στήλης, πρέπει να χρησιμοποιηθούν 1, 1, 1 και 0 φορές, αντίστοιχα.

Μετά από αυτά έχουμε ένα άσπρο τετράγωνο, το οποίο δεν έχει χρησιμοποιηθεί, άρα το δικό του 2×2 τετράγωνο πρέπει να χρησιμοποιηθεί 2 φορές. Το επόμενο τετράγωνο είναι άσπρο, άρα το δικό του 2×2 πρέπει να χρησιμοποιηθεί 0 φορές. Αυτό όμως το 2×2 είναι το μοναδικό που περιέχει το κάτω αριστερά μαύρο τετράγωνο. Επομένως αυτό δεν μπορεί να αλλάξει χρώμα, άτοπο.

(β) Εργαζόμενοι όπως στο (α), μπορούμε να γεμίσουμε την σκακιέρα με τους αριθμούς 0, 1, 2, σε κάθε τετραγωνάκι, υποδεικνύοντας πόσες φορές πρέπει να χρησιμοποιηθεί το 2×2 τετράγωνο που αντιστοιχεί στο κάθε τετραγωνάκι.

$2^{ος}$ Τρόπος για το (α). Όπως και στον πρώτο τρόπο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε τετραγωνάκι επηρεάζεται από τις κινήσεις 0, 1 ή 2 σε κάθε τετραγωνάκι αντιστοιχίζουμε αυτή την τιμή.
Ισχυρισμός. Το πλήθος των κινήσεων διαιρείται από 3.
Απόδειξη. Έστω M το πλήθος των κινήσεων και S το συνολικό άθροισμα των ενδείξεων στη σκακιέρα. Αφού σε κάθε κίνηση το S μεταβάλλεται κατά 4, θα έχουμε ότι για το τελικό άθροισμα των ενδείξεων, έστω S_1, ισχύει ότι $S_1 = 4M$.

Αν υποθέσουμε ότι ο στόχος επιτυγχάνεται, κάθε άσπρο τετράγωνο πρέπει να έχει τον αριθμό 2 και κάθε μαύρο τον αριθμό 1. Όμως τα μαύρα τετράγωνα είναι αρχικά 27 και τα άσπρα $81 - 27 = 54$, άρα

$$S_1 \equiv 2 \cdot 54 + 27 \equiv 0 \pmod 3.$$

Επομένως $3 \mid S_1$, οπότε $3 \mid 4M$, άρα $3 \mid M$, που είναι το ζητούμενο. □

Τοποθετούμε τώρα συντεταγμένες σε κάθε τετραγωνάκι. Ξεκινώντας με το $(1,1)$ από το πάνω αριστερά και καταλήγοντας στο $(9,9)$ στο κάτω δεξιά. Ορίζουμε T το σύνολο των τετραγώνων με άρτιες συντεταγμένες και παρατηρούμε ότι σε κάθε κίνηση αλλάζει χρώμα ακριβώς ένα τετράγωνο από το σύνολο T. Επομένως το άθροισμα των αριθμών των τετραγώνων του συνόλου T είναι ίσο με M. Το T περιέχει $4 \cdot 4 = 16$ στοιχεία, από τα οποία 9 είναι μαύρα, αρχικά, και 7 είναι άσπρα. Το άθροισμα των αριθμών σε αυτά τα τετράγωνα θα είναι στο τέλος

$$2 \cdot 7 + 9 \equiv 2 \pmod 3,$$

άτοπο αφού το άθροισμα αυτό είναι ίσο με M και από τον ισχυρισμό το M διαιρείται με 3

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 122

Γ57. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $\gamma(O,R)$. Ο κύκλος γ_1 εφάπτεται των ευθειών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα σημεία Δ, Ε και Ζ, αντίστοιχα, έτσι ώστε η κορυφή Α και τα σημεία Ε, Ζ να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ΒΓ. Αν η ακτίνα του κύκλου γ_1 ισούται με R, να αποδείξετε ότι: $O\Delta \perp EZ$.

Λύση: Από την υπόθεση έχουμε ότι: $R = OT = I_\alpha\Delta$, (1)

όπου Τ είναι το σημείο που η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τον κύκλο $\gamma(O,R)$. Επειδή το σημείο Τ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ, έπεται ότι

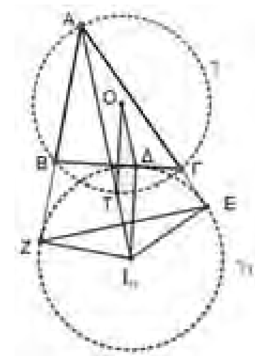
$$OT \perp B\Gamma. \qquad (2)$$

Επειδή ο κύκλος γ_1 εφάπτεται της ευθείας ΒΓ στο σημείο Δ έπεται ότι:

$$I_\alpha\Delta \perp B\Gamma \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έπεται ότι: $OT = I_\alpha\Delta$ και $OT \parallel I_\alpha\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $OTI_\alpha\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως είναι $O\Delta \parallel TI_\alpha$ και αφού η διχοτόμος AI_α που περιέχει το Τ είναι κάθετη προς την ευθεία ΕΖ που ορίζουν τα δύο σημεία επαφής Ε και Ζ. έπεται ότι: $O\Delta \perp EZ$.



Σχήμα 1

Α70. Οι πραγματικοί αριθμοί x,y είναι διάφοροι του 0 και ικανοποιούν την ισότητα: $x^3+y^3+3x^2y^2=x^3y^3$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης $E=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Λύση: Η δεδομένη ισότητα παίρνει τη μορφή: $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3y^3-3x^2y^2 \Leftrightarrow (x+y)^3-x^3y^3=3xy(x+y)-3x^2y^2$

$$\Leftrightarrow (x+y-xy)\left(x^2+2xy+y^2+x^2y+xy^2+x^2y^2\right)=3xy(x+y-xy) \Leftrightarrow (x+y-xy)\left(x^2-xy+y^2+x^2y+xy^2+x^2y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x+y-xy=0 \text{ ή } x^2-xy+y^2+x^2y+xy^2+x^2y^2=0 \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \text{ ή } 2x^2-2xy+2y^2+2x^2y+2xy^2+2x^2y^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \text{ ή } (x-y)^2+x^2(y+1)^2+y^2(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \text{ ή } x=y=-1, \text{ αφού } xy\neq 0.$$

Επομένως, οι δυνατές τιμές της παράστασης $E=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ είναι 1 και -2.

Ασκήσεις για λύση

Γ58. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Θεωρούμε το σημείο Μ συμμετρικό της κορυφής Α ως προς την ευθεία ΕΖ. Να αποδείξετε ότι: **(α)** Τα σημεία Ο, Μ, Γ και Ε είναι ομοκυκλικά.
(β) Τα σημεία Ο, Η, Δ και Μ είναι ομοκυκλικά.

Α71. Οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha,\beta\geq 1\geq\gamma\geq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=3$. Να αποδείξετε ότι:
(α) $2\leq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leq 3$.
(β) $\dfrac{24}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\dfrac{25}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\geq 14$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

Α72. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha\beta\gamma\geq 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3+2\beta^3+6}+\frac{1}{\beta^3+2\gamma^3+6}+\frac{1}{\gamma^3+2\alpha^3+6}\leq\frac{1}{3}.$$

Α73. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma+1}+\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha+1}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+1}\leq 1$.

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{\beta+\gamma+1}+\dfrac{1}{\gamma+\alpha+1}+\dfrac{1}{\alpha+\beta+1}\geq 1$.

Δ15. Χρωματίζουμε τα μοναδιαία τετράγωνα ενός $n\times n$ πίνακα μαύρα ή άσπρα έτσι ώστε κάθε μαύρο τετράγωνο να έχει τουλάχιστον τρία γειτονικά άσπρα τετράγωνα. Δύο τετράγωνα είναι γειτονικά, αν έχουν μία κοινή πλευρά. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό μαύρων τετραγώνων.

Α΄ Τάξη Αριθμοί που γράφονται ως άθροισμα διαδοχικών ακέραιων αριθμών

Αδάμ Αγγελής Ανδρέας Τριανταφύλλου

Το 1960 το ελληνικό τραγούδι «Τα Παιδιά του Πειραιά»[1], σε στίχους και μουσική του Μάνου Χατζιδάκι, κέρδισε το Όσκαρ[2] Καλύτερου Πρωτότυπου Τραγουδιού˙ και έγινε παγκοσμίως γνωστό.

Η πρώτη στροφή του τραγουδιού έχει ως εξής:

Απ' το παράθυρό μου στέλνω
ένα δύο και τρία και τέσσερα φιλιά
που φτάνουν στο λιμάνι
ένα και δύο και τρία και τέσσερα πουλιά.

Και η δεύτερη:

Πώς ήθελα να είχα ένα και δύο
και τρία και τέσσερα παιδιά
που σαν θα μεγαλώσουν όλα
θα γίνουν λεβέντες για χάρη του Πειραιά.

Ένα, δύο και τρία και τέσσερα …: 1, 2, 3, 4˙ τέσσερις αριθμοί ο ένας μετά τον άλλο.

Ένα, τρία, τέσσερα, είκοσι δύο, 1, 3, 4, 22 τέσσερις αριθμοί που ό ένας έπεται του άλλου.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τέσσερις ακέραιους αριθμούς τον έναν μετά τον άλλο **χωρίς να μπορεί να παρεμβληθεί κάποιος ακέραιος** μεταξύ τους. Καθένας δηλαδή είναι ο προηγούμενος αυξημένος κατά μία μονάδα. Αυτοί οι αριθμοί λέγονται **διαδοχικοί (consecutive numbers)**.

Έτσι έχουμε τον ορισμό:

> Δύο ή περισσότεροι ακέραιοι αριθμοί λέγονται **διαδοχικοί** αν η διαφορά οποιουδήποτε από τον αμέσως προηγούμενό του ισούται με την μονάδα.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε τέσσερις αριθμούς στη σειρά, σε τάξη αύξουσα, με τον μεγαλύτερο να έπεται του μικρότερου και υπάρχει η δυνατότητα να παρεμβληθεί άλλος ακέραιος ανάμεσα σε δύο από αυτούς. Σύμφωνα λοιπόν με τον παραπάνω ορισμό δεν μπορούμε να τους χαρακτηρίσουμε ως διαδοχικούς. Απλώς είναι τέσσερις αριθμοί σε μια σειρά που ο μικρότερος ακολουθεί τον μεγαλύτερο.

Αν τώρα θεωρήσουμε τον αριθμό κ ότι είναι ένας ακέραιος τότε ο κ+1 θα είναι ο αμέσως επόμενός του και έτσι ο κ και ο κ+1 είναι δυο διαδοχικοί αριθμοί. Καταλήγουμε λοιπόν, με λίγη

---

[1] https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B1_%CE%A0%CE%B1%CE%B9%CE%B4%CE%B9%CE%AC_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%A0%CE%B5%CE%B9%CF%81%CE%B1%CE%B9%CE%AC

[2] Τα **Όσκαρ** είναι τα βραβεία που απονέμονται από την Αμερικανική Ακαδημία Κινηματογραφικών Τεχνών και Επιστημών

σκέψη, ότι η σειρά των αριθμών: κ, κ+1, (κ+1)+1=κ+2, (κ+2)+1=κ+3, … με κ έναν οποιονδήποτε ακέραιο δημιουργεί μια σειρά από διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς.

Π.χ. για κ=34 έχουμε τους διαδοχικούς αριθμούς 34, 35, 36, 37, 38,…

Ας επιχειρήσουμε τώρα να κάνουμε μια έρευνα χρησιμοποιώντας την ιδέα των διαδοχικών αριθμών. Ίσως μάλιστα οι διαδοχικοί αριθμοί στην ερευνά μας να μάς δώσουν άλλους αριθμούς για διερεύνηση και έτσι να ανακαλύψουμε νέα πράγματα.

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν και ας αναρωτηθούμε αν ένας αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα διαδοχικών αριθμών. Μπορεί για παράδειγμα ο αριθμός 5 ή ο 10 να γραφούν ως άθροισμα διαδοχικών αριθμών; Είναι: 5=2+3 και 10=1+2+3+4.

Άρα πράγματι ένας αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο ή περισσότερων διαδοχικών αριθμών. Να και ο 12=3+4+5.

Μήπως όμως μπορεί ένας αριθμός να γραφεί ως άθροισμα διαφορετικών διαδοχικών αριθμών; Και στο ερώτημά μας αυτό απαντούμε θετικά αφού είναι για παράδειγμα 15=7+8 αλλά και 15=4+5+6 και ακόμη 15=1+2+3+4+5!

Μπορούμε λοιπόν να καταλήξουμε στο **συμπέρασμα:**

κάποιοι ακέραιοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως άθροισμα διαδοχικών ακέραιων αριθμών.

* Ο 4 γράφεται ως άθροισμα διαδοχικών αριθμών;

Καλό είναι πριν συνεχίσουμε να θυμηθούμε μερικές έννοιες που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα τεύχη του Ευκλείδη Α΄.

Πρώτα απ’ όλα να θυμηθούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τους **άρτιους ή ζυγούς (even numbers)** και τους **περιττούς ή μονούς (odd numbers)** αριθμούς. Και έτσι έχουμε τον ορισμό:

Άρτιοι είναι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 2, ενώ **περιττοί** είναι όσοι δεν διαιρούνται με το 2.

Ακόμη να θυμηθούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε γρήγορα αθροίσματα περιττού πλήθους διαδοχικών ακέραιων αριθμών.

Από το κέντρο της Αθήνας τις ημέρες με μονό αριθμό ημερομηνίας μπορούν να διέρχονται τα αυτοκίνητα με μονό αριθμό κυκλοφορίας. Ενώ αυτά που έχουν ζυγό αριθμό τις ημέρες που έχουν ζυγό αριθμό ημερομηνίας.

Είχαμε μάθει λοιπόν ότι αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα **3 διαδοχικών αριθμών** το άθροισμα τους θα είναι πάντα το τριπλάσιο του **μεσαίου αριθμού**

Όχι όμως οποιαδήποτε αθροίσματα, αλλά σαν το παρακάτω άθροισμα.

6 + 7 + 8 = 21 = 3 x 7 στο οποίο…

- ✓ Το πλήθος των αριθμών του είναι **περιττός αριθμός (3)!**
- ✓ Οι προσθετέοι είναι **διαδοχικοί αριθμοί!**

Παρατηρήσαμε ότι: **το άθροισμα** είναι το **τριπλάσιο του μεσαίου αριθμού! Και αυτό ισχύει πάντα.**

Νομίζετε ότι κάτι αντίστοιχο μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε το άθροισμα διαδοχικών αριθμών που **το πλήθος τους όμως είναι περιττός αριθμός**; Δηλαδή,

- το άθροισμα **5 διαδοχικών αριθμών είναι το πενταπλάσιο του μεσαίου αριθμού;**
- το άθροισμα **7 διαδοχικών αριθμών είναι το επταπλάσιο του μεσαίου αριθμού;**
- το άθροισμα **9 διαδοχικών αριθμών θα είναι το εννεαπλάσιο του μεσαίου αριθμού; κ.ο.κ.**

Ας δοκιμάσουμε την περίπτωση **9** διαδοχικών αριθμών.

11+12+13+14+15+16+17+18+19 = 9 (το πλήθος) x 15 (ο μεσαίος) = 135.

Οποιαδήποτε περίπτωση και να δοκιμάσουμε θα δούμε ότι ο ισχυρισμός μας αυτός επαληθεύεται. Μπορούμε, λοιπόν, γενικά να δεχτούμε ότι:

το άθροισμα μιας σειράς διαδοχικών αριθμών με περιττό πλήθος όρων είναι ίσο με τον μεσαίο αριθμό επί το πλήθος των όρων.

Ναι, πράγματι τα παραπάνω ισχύουν.

Μετά από τις παραπάνω υπενθυμίσεις συνεχίζουμε. Συνεχίζουμε παρακινούμενοι από τα δύο παραδείγματα 5 = 2 + 3 και 15 = 7 + 8. Μάλιστα, επειδή αυτοί είναι περιττοί αριθμοί που γράφτηκαν ως άθροισμα 2 διαδοχικών αριθμών, **αναρωτιόμαστε πώς ένας περιττός (μονός) αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα 2 διαδοχικών αριθμών.**

Σκεπτόμαστε λοιπόν ότι αφού θέλουμε ένας περιττός αριθμός να γράφεται ως άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών, αν βρούμε τον ένα από τους δύο θα ξέρουμε και τον άλλον. Για τον 5 π.χ. αρκεί να βρούμε έναν τρόπο, μια μέθοδο δηλαδή, που να μπορούμε να προσδιορίσουμε το 2 ή το 3. Λογικό είναι να σκεφτούμε ότι ο πρώτος διαδοχικός αριθμός που θα χρειαστούμε πρέπει να είναι μικρότερος από το μισό τού αριθμού που θέλουμε να τον γράψουμε ως άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών (γιατί;). Στην προκειμένη περίπτωση μιλάμε για τον 5. Το μισό όμως του 5 δεν είναι ακέραιος (γιατί;). Εύκολα όμως αντιμετωπίζουμε τη δυσκολία αυτή με το να θεωρήσουμε τον 5–1 και αυτόν να διαιρέσουμε με το 2. Έχουμε λοιπόν (5–1)/2 = 2 και οι δύο διαδοχικοί αριθμοί είναι ο 2 και ο 3. Έτσι καταλήγουμε ο περιττός αριθμός 5 να εκφράζεται ως άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών από την ισότητα 5 = 2+3. Με τους ίδιους συλλογισμούς έχουμε για τον 15: (15–1)/2 = 7. Άρα 7 και 8 οι δύο διαδοχικοί αριθμοί και 15 = 7+8.

Αν πειραματιστούμε και με άλλους αριθμούς, π.χ. τον 17 ή τον 135 κ.λπ., θα δούμε ότι η μέθοδος μας «δουλεύει».

* Αν αντί να αφαιρούμε το 1 το προσθέταμε θα είχαμε απάντηση στον προβληματισμό μας;

* Ένας άρτιος (ζυγός) αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών;

Αφού εξετάσαμε το θέμα για έναν αριθμό αν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών, λογικό είναι να αναρωτηθούμε αν ένας αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών, τεσσάρων ή πέντε κ.λπ.

Συνεχίζουμε λοιπόν την ερευνά μας αναζητώντας ακέραιους αριθμούς που μπορούν να γραφούν ως άθροισμα τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών.

Πάλι εδώ σκεφτόμαστε, όπως και παραπάνω, ότι ο ένας από τους διαδοχικούς αριθμούς θα πρέπει να είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με το 1/3 του αριθμού που θέλουμε να εκφράσουμε ως άθροισμα τριών διαδοχικών. Και αυτός θα πρέπει να είναι ο μεσαίος.

Οδηγούμαστε επομένως στη σκέψη ότι πρέπει να εξετάσουμε δύο διακριτές περιπτώσεις. Πρώτη περίπτωση εκείνη που ο αριθμός διαιρείται με το 3 και η δεύτερη εκείνη που ο αριθμός δεν διαιρείται με το 3.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι αριθμός που διαιρείται με το 3 ή το 9.

Ας δούμε πρώτα τους αριθμούς που είναι διαιρετοί με το 3. Τέτοιοι είναι, για παράδειγμα, οι αριθμοί 15 και 21 που αναφέραμε στα προηγούμενα.

Είναι 15/3 = 5 και επομένως 15 = 4+ **5** + 6. Ομοίως 21/3 = 7 και 21 = 6 + **7** + 8. Δηλαδή ο 15 και ο 21, αριθμοί διαιρετοί με το 3, μπορούν να γραφούν σαν άθροισμα τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών και μάλιστα καθένας ισούται με το τριπλάσιο του μεσαίου αριθμού, δηλαδή 15 = 3 x **5** και 21 = 3 x **7**.

Μπορούμε να πειραματιστούμε και με άλλους αριθμούς διαιρετούς με το 3.
Π.χ. για τον αριθμό 36 έχουμε 36 : 3 = **12**, οπότε 36 = 11 +**12** + 13.
Για τον αριθμό 135 έχουμε 135 : 3 = **45**, οπότε 135 = 44 +**45** + 46.
Για το 5832 έχουμε 5832/3 = 1944, οπότε 5832 = 1943+1944+1945.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 3 μπορούν να γραφούν ως άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών. Βρήκαμε κιόλας τον τρόπο που αυτό γίνεται.

Στην προηγούμενη ενότητα μιλήσαμε για περιττούς και άρτιους αριθμούς. Ουσιαστικά μιλήσαμε για αριθμούς που δεν διαιρούνται με το 2 και για αριθμούς που διαιρούνται με το δύο.

Αυτό το τελευταίο είναι εύκολο να απαντηθεί και έτσι το αφήσαμε για τον αναγνώστη. Εύλογο είναι και τώρα, αφού μιλήσαμε για αριθμούς διαιρετούς με το 3 πώς εκφράζονται ως άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών, να αναρωτηθούμε πώς αυτό γίνεται και για αριθμούς που δεν διαιρούνται με το 3. Ας το αφήσουμε όμως αυτό, όπως και άλλες περιπτώσεις (π.χ. αριθμοί που γράφονται ως άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών αριθμών κ.λπ.) να τις διαπραγματευτούμε σε επόμενο τεύχος του *Ευκλείδη Α΄*. Και, ας μελετήσουμε την περίπτωση αριθμών που μπορούν να γραφτούν ως άθροισμα πέντε διαδοχικών αριθμών.

Τώρα τα πράγματα είναι μάλλον πιο εύκολα. Όπως και παραπάνω έχουμε αριθμούς που διαιρούνται με το 5 και αριθμούς που δεν διαιρούνται. Πάλι θα αφήσουμε για επόμενο τεύχος την περίπτωση των αριθμών που δεν διαιρούνται με το 5 και θα εξετάσουμε την περίπτωση εκείνων που διαιρούνται.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ
Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5.

Είδαμε παραπάνω ότι **15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5** και **5 x 3 = 15**

Αν εξετάσουμε το άθροισμα 5 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι ακέραιος αριθμός πενταπλάσιος του μεσαίου

Ο 15 δηλαδή μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα 5 διαδοχικών αριθμών. Έχουμε επομένως, καταρχάς, θετική απάντηση.

Πριν προχωρήσουμε ας θυμηθούμε ότι αν κ είναι ένας ακέραιος, οι αριθμοί κ, κ+1, κ+2,… είναι διαδοχικοί αριθμοί. Ναι αλλά, ας έχουμε κατά νου, ότι και οι αριθμοί …, κ–2, κ–1, κ, κ+1, κ+2,.. είναι διαδοχικοί. Αυτό θα μας βοηθήσει στη συνέχεια.

Συνεχίζουμε με εφαρμογή της μεθόδου μας. Αυτής που διαιρέσαμε με το 3 κ.λπ. Τώρα αφού εξετάζουμε αριθμούς που διαιρούνται με το 5 λέμε να βρούμε το 1/5 του αριθμού που εξετάζουμε. Επίσης, θέλουμε διαδοχικούς αριθμούς που το πλήθος τους θα είναι 5, δηλαδή περιττός αριθμός.

Περιττό το πλήθος των αριθμών άρα υπάρχει μεσαίος. Σε αυτόν τον μεσαίο θα εκχωρήσουμε την τιμή του 1/5 του αριθμού μας. Ακόμη αν αυτό τον μεσαίο τον πούμε κ τότε οι αριθμοί που ζητούμε είναι οι κ–2, κ–1, κ, κ+1, κ+2.

Προχωρούμε, τώρα, σε εφαρμογή των παραπάνω με τον αριθμό 60 που είναι διαιρετός με το 5.

Είναι 60/5 = 12. Άρα κ = 12 και κ–2 = 10, κ–1 = 11, κ+1 = 13, κ+2 = 14.

Επομένως ο 60 εκφράζεται ως άθροισμα 5 διαδοχικών αριθμών των: 10, 11, 12, 13, 14 και είναι:

60 = 10+11+12+13+14 (=5x12).

Ας δούμε άλλη μία περίπτωση με τον αριθμό 605. Μπορεί αυτός να γραφεί ως άθροισμα 5 διαδοχικών ακέραιων αριθμών;

Καταρχάς εξετάζουμε αν διαιρείται με το 5. Ισχύει αφού λήγει σε 5. Βρίσκουμε το 1/5 του κάνοντας τη διαίρεση 605/5. Είναι 605/5 = 121 οπότε ο μεσαίος από τους 5 διαδοχικούς αριθμούς είναι ο 121 και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

(121–2), (121–1), 121, (121+1), (121+2) δηλαδή οι 119, 120, 121, 122, 123 και έτσι έχουμε:

605 = 119 + 120 + 121 + 122 + 123 (= 5x121).

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να τα συνοψίσουμε ως εξής:

Για να εκφράσουμε έναν αριθμό α ως άθροισμα διαδοχικών ακέραιων αριθμών με περιττό πλήθος ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1°: Ελέγχουμε αν ο αριθμός διαιρείται με τον πληθικό αριθμό δ των διαδοχικών αριθμών (δηλαδή με τον 3, ή τον 5, ή τον 7, ή τον 9, κ.λπ.).

2°: Σε θετική απάντηση διαιρούμε τον αριθμό με τον πληθικό αριθμό δ και βρίσκουμε τον μεσαίο όρο κ.

3°: Οι ζητούμενοι διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι …, $\underbrace{\text{κ-2, κ-1, κ, κ+1, κ+2}}_{\text{δ όροι}}$**, …**

Εφαρμογή:

Να γραφεί ο αριθμός 531 ως άθροισμα 9 διαδοχικών ακέραιων αριθμών.

Είναι **α = 531** και **δ = 9.**

Ο **α** διαιρείται με τον **δ** = 9 (κανόνας διαιρετότητας).

Έχουμε **κ = α/δ = 531/9 = 59.**

Επομένως ο μεσαίος από τους ζητούμενους αριθμούς είναι ο κ = 59 και έτσι οι διαδοχικοί αριθμοί είναι οι:

κ–4, κ–3, κ–2, κ–1, κ=59 , κ+1, κ+2, κ+3, κ+4. δηλαδή οι:

55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63

Τελικά είναι: 531 = 55+56+57+58+59+60+61+62+63 (=9x59)

Τι λέτε θα μπορούσατε να βρείτε ποιοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως άθροισμα 7 διαδοχικών αριθμών;

Ο Ευκλείδης Α΄, περιμένει τις απαντήσεις στα Γραφεία της Ε.Μ.Ε. ή ηλεκτρονικά στη διεύθυνση: info@hms.gr με την ένδειξη για το περιοδικό **Ευκλείδης Α΄.**

Β΄ Τάξη Επαναληπτικά Θέματα

Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

Τα θέματα που ακολουθούν στηρίζονται σε θέματα διαγωνισμών της ΕΜΕ αλλά και διαγωνισμών άλλων χωρών. Τα θέματα των διαγωνισμών αυτών έχουν τροποποιηθεί και πολλές φορές επεκταθεί ώστε να αποτελούν υλικό προσαρμοσμένο στα σχολικά εγχειρίδια, ενώ συγχρόνως να δημιουργούν μία βάση πρωτότυπων θεμάτων.

Θέμα 1

Αν υποθέσουμε ότι $\sqrt{2}=α$, $\sqrt{3}=β$, $\sqrt{5}=γ$ να υπολογίσετε:

α) το άθροισμα των τετραγωνικών ριζών των 5 πρώτων ζυγών θετικών αριθμών δηλαδή το $\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{10}$

β) Με βάση το ερώτημα α) να υπολογίσετε το άθροισμα $\sqrt{200}+\sqrt{400}+\sqrt{600}+\sqrt{800}+\sqrt{1.000}$

Θέμα 2

α) Να υπολογίσετε τους ρητούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}-\sqrt{6}}=α\sqrt{27}-β$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $\dfrac{1}{α\sqrt{27}-β}$

Θέμα 3

Δίνονται οι παραστάσεις $Α==\sqrt{27}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}$ και $Β==\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι οι τιμές των Α και Β είναι άρρητοι αριθμοί

β) Να εξετάσετε αν ο λόγος $\dfrac{Β}{Α}$ είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

Θέμα 4

Ο πληθυσμός της γης είναι σήμερα 7,8 δισεκατομμύρια και αυξάνεται κατά 1,3 δισεκατομμύρια περίπου κάθε 16 χρόνια. Θέλουμε να εκτιμήσουμε σε πόσα χρόνια από σήμερα αυτός ο πληθυσμός θα διπλασιαστεί, εφόσον ο ρυθμός αυτός αύξησης διατηρηθεί σταθερός.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση η οποία είναι κατάλληλη για υπολογιστεί ο ζητούμενος χρόνος.

β) Αν υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός της γης δεν πρέπει να υπερβεί τα 12 δισεκατομμύρια ποιο έτος ίσως υπάρξει σημαντικό πρόβλημα υπερπληθυσμού;

Θέμα 5

Μία βιοτεχνία διαθέτει δύο μηχανήματα κατασκευής χάρτινων φακέλων. Η πρώτη έχει ρυθμιστεί να κατασκευάζει 500 φακέλους σε 8 λεπτά. Θέλουν να ρυθμίσουν το δεύτερο μηχάνημα ώστε όταν δουλεύουν και τα δύο μηχανήματα μαζί να κατασκευάζουν 500 φακέλους σε 2 λεπτά. Έστω x ο χρόνος στον οποίο το δεύτερο μηχάνημα θα πρέπει να ρυθμιστεί ώστε να κατασκευάζει 500 φακέλους.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση με άγνωστο x με βάση τα δεδομένα του προβλήματος.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

Θέμα 6

Σε μία συγκέντρωση μαθητών και μαθητριών οι μαθητές ήταν 10 περισσότεροι από τις μαθήτριες. Αν ο αριθμός των μαθητών ήταν 10% μεγαλύτερος τότε στην συγκέντρωση θα υπήρχαν 74 άτομα.

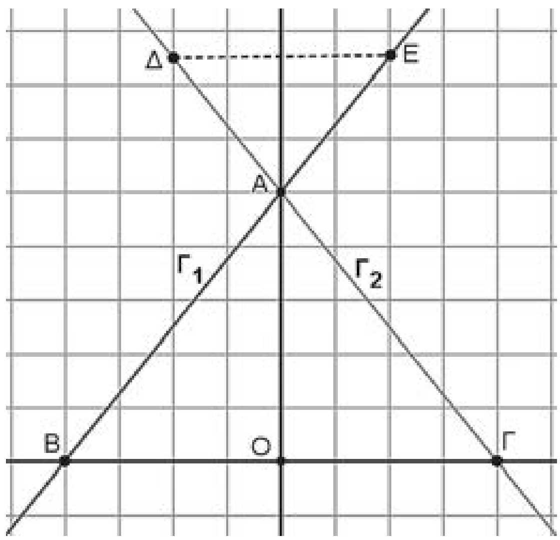
α) Να κατασκευάσετε μία κατάλληλη εξίσωση με άγνωστο x τον αριθμό των μαθητών.
β) Να λύσετε την εξίσωση και να υπολογίσετε τον αριθμό των μαθητριών.
γ) Να εξετάσετε κατά πόσο θα ήταν δυνατόν να ήταν οι μαθητές κατά 5 περισσότεροι από τις μαθήτριες.

Θέμα 7

Σε μία ομάδα Α παιδιών υπάρχουν 600 παιδιά εκ των οποίων το 30% είναι αγόρια. Στην ομάδα Β παιδιών υπάρχουν 400 παιδιά εκ των οποίων το 60% είναι αγόρια. Μερικά παιδιά από την ομάδα Β μεταφέρθηκαν στην ομάδα Α και τώρα το 40% των παιδιών της ομάδας Α και το 60% των παιδιών της ομάδας Β είναι αγόρια.
α) Να κατασκευάσετε μία κατάλληλη εξίσωση με άγνωστο x τον αριθμό των μαθητών που μεταφέρθηκαν από την ομάδα Β στην ομάδα Α..
β) Να λύσετε την εξίσωση.

Θέμα 8

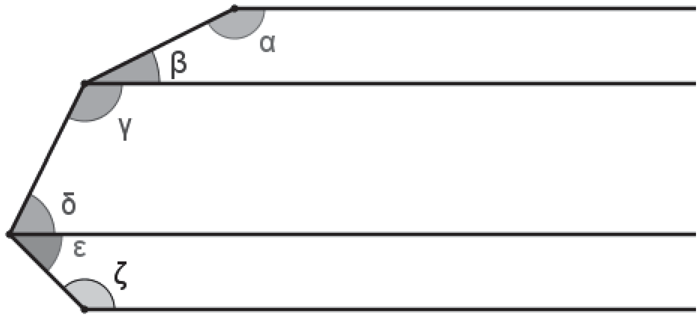
Στο παρακάτω σύστημα αξόνων, με αρχή το Ο, έχουν χαραχτεί δύο ευθείες $Γ_1$ και $Γ_2$ ενώ η πλευρά των ίσων τετραγώνων του πλέγματος είναι 1.



α) Να υπολογίσετε την κλίση κάθε ευθείας
β) Να υπολογίσετε την εξίσωση κάθε ευθείας
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ

Θέμα 9

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{α}+\hat{β}+\hat{γ}+\hat{δ}+\hat{ε}+\hat{ζ}$ των γωνιών που σχηματίζονται μεταξύ των τεσσάρων παραλλήλων ευθειών;



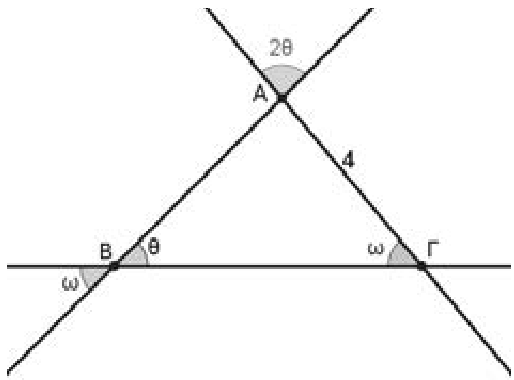
β) Πόσες θα έπρεπε να είναι οι παράλληλες ευθείες ώστε το άθροισμα των γωνιών αυτής της μορφής να είναι ίσο με 7.200^0

γ) Ας υποθέσουμε ότι οι παράλληλες ευθείες ήταν ν. Να εκφράσετε το άθροισμα των αντίστοιχων γωνιών σε σχέση με το ν.

Θέμα 10

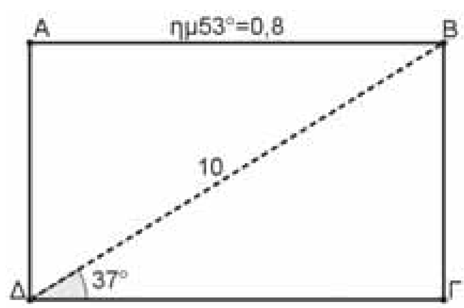
α) Με βάση το παρακάτω σχήμα και τα δεδομένα που υπάρχουν πάνω σε αυτό να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



Θέμα 11

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και ορισμένες αριθμητικές πληροφορίες για τα στοιχεία του.



α) Να εξηγήσετε γιατί οι πληροφορίες που δίνονται είναι αρκετές για να βρούμε όλα τα στοιχεία του ορθογωνίου.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Θέμα 12

Ο κ. Πρασινίδης ξεκίνησε να βάφει ένα διακοσμητικό τετράγωνο πλευράς 2m που είχε στην αυλή του. Χρειάστηκε 10lt μπογιά για να βάψει τους 4 ίσους κυκλικούς τομείς που είχαν κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου.

α) Να υπολογίσετε τον λόγο (κλάσμα) του άβαφτου προς το βαμμένο τμήμα του τετραγώνου. (Να υποθέσετε ότι η τιμή του π είναι 3,14)
β) Να υπολογίσετε πόση μπογιά θα χρειαστεί επιπλέον για να βάψει το άβαφτο τμήμα του τετραγώνου.

Ενδεικτικές απαντήσεις

Θέμα 1. **α)** $3α+2β+α\cdot β+α\cdot γ+2$ **β)** $30α+20β+10α\cdot β+10α\cdot γ+20$

Θέμα 2. **α)** $α=\frac{2}{3}$ και $β=6$ **β)** $\frac{2}{3}\sqrt{3}-1$

Θέμα 3. **α)** $Α=\sqrt{27}$ και $Β=\sqrt{3}$ **β)** $Α=\frac{Β}{Α}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}=\frac{1}{3}$ ρητός αριθμός.

Θέμα 4. **α)** $\frac{x}{16}\cdot 1{,}3=7{,}8$ οπότε x=96 χρόνια **β)** $\frac{x}{16}\cdot 1{,}3=4{,}2$ άρα x=52 (περίπου) οπότε 2022+52=2074

Θέμα 5. **α)** $\frac{500}{8}+\frac{500}{x}=250$ **β)** $\frac{1}{8}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ άρα $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ και $x=\frac{8}{3}$ λεπτά (2΄ και 40΄΄)

Θέμα 6. **α)** $x+\frac{10}{100}x+x-10=74$ **β)** $2x+\frac{x}{10}=84$ άρα $\frac{21x}{10}=84$ οπότε 21x=840 και x=40
γ) αν οι μαθητές ήταν κατά 5 περισσότεροι από τις μαθήτριες τότε η λύση της εξίσωσης θα ήταν δεκαδικός αριθμός πράγμα αδύνατον αφού αναφέρεται σε άτομα.

Θέμα 7. **α)** Ο αριθμός τν αγοριών στην ομάδα Α είναι 180 και στην ομάδα Β είναι 240, άρα συνολικά θα υπάρχουν 420 αγόρια. Έστω x ο αριθμός των μαθητών που μεταφέρθηκαν από την ομάδα Β στην ομάδα Α, τότε θα ισχύει $\frac{60}{100}(400\text{-}x)+\frac{40}{100}(600+x)=420$
β) Η εξίσωση έχει λύση x=300

Θέμα 8. **α)** Η κλίση της ευθείας $Γ_1$ είναι ίση με $\frac{5}{4}=1{,}25$ ενώ η κλίση της ευθείας $Γ_2$ είναι -1,25
β) η εξίσωση της ευθείας $Γ_1$ είναι $y=1{,}25x+5$ και η εξίσωση της ευθείας $Γ_2$ είναι $y=-1{,}25x+5$
γ) οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι (-2 , 7,5) και επομένως το ύψος του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με 2,5 ενώ η βάση του είναι ίση με 4 άρα το εμβαδόν του είναι ίσο με 5 τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα 9. **α)** 540^0 **β)** 41 **γ)** $(ν\text{-}1)\cdot 180^0$

Θέμα 10. **α)** Ορθογώνιο και ισοσκελές **β)** η περίμετρος είναι ίση με $8+4\sqrt{2}$

Θέμα 11. **α)** στο ορθογώνιο ΒΓΔ γνωρίζουμε την υποτείνουσα, μία οξεία γωνία του και το ημίτονο της γωνίας αυτής, επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη οξεία γωνία του τριγώνου και τις δύο κάθετες πλευρές του.
β) $ΓΔ=10\cdot 0{,}8=8$ και $ΒΓ^2=10^2\text{-}8^2=36$ και επομένως ΒΓ=6. Με αυτούς του υπολογισμούς μπορούμε να βρούμε την περίμετρο 28 μονάδες μήκους και το εμβαδόν 48 τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα 12. **α)** Το βαμένο μέρος είναι ένας ολόκληρος κύκλος και ο ζητούμενος λόγος θα είναι $\frac{4\text{-}π}{π}=\frac{0{,}86}{3{,}14}=\frac{43}{157}$ **β)** $\frac{43}{157}\times 10lt=2{,}75lt$ περίπου.

Γ΄ Τάξη

Ασκήσεις και προβλήματα κατανόησης – επανάληψης

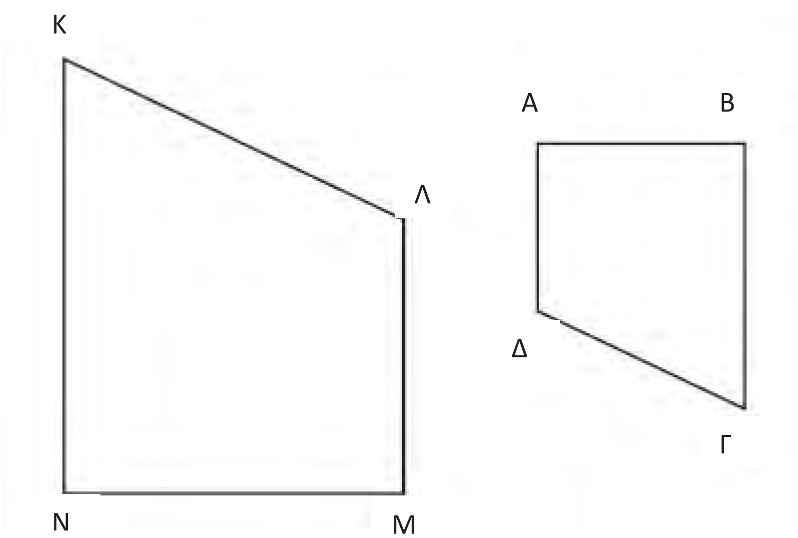
Βαρβάρα Γεωργιάδου – Καμπουρίδη

Λόγοι και αναλογίες

1. Η συνταγή αναφέρει πως με 4 κούπες αλεύρι παρασκευάζονται 64 μπισκότα. Ποιος είναι ο λόγος $\frac{\chi}{\psi}$ που συνδέει τα δύο μεγέθη, κούπες αλεύρι (ψ) και μπισκότα (χ);

α) 0, 6 **β)** 4 **γ)** 64 **δ)** 16

2. Το τραπέζιο ΚΛΜΝ είναι όμοιο με το τραπέζιο ΑΒΓΔ.

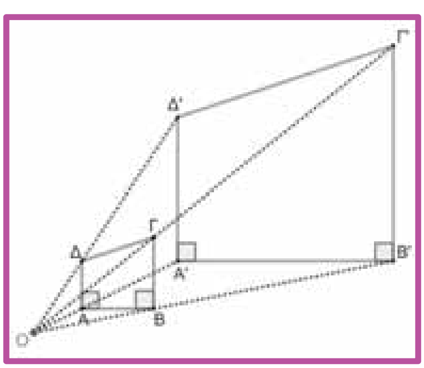


Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν:

α) $\frac{ΚΛ}{ΓΔ} = \frac{ΓΒ}{ΚΝ}$ **β)** γωνία ΝΚΛ=γωνία ΒΓΔ

γ) $\frac{ΚΛ}{ΑΒ} = \frac{ΛΜ}{ΒΓ}$ **δ)** γωνία ΝΚΛ=γωνία ΔΑΒ

(*Υπενθύμιση για τα όμοια σχήματα*):



α) $\frac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = \frac{ΓΒ}{Γ'Β'}$

β) γωνία Β΄Γ΄Δ΄=γωνία ΒΓΔ

γ) $\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Δ'Γ'}{ΒΓ}$

δ) γωνία ΒΑΔ=γωνία Δ΄Γ΄Β

3. Η αναλογία αγοριών – κοριτσιών στην Α' τάξη του Γυμνασίου μας είναι 2 προς 3. Αν τα κορίτσια είναι 54, πόσοι είναι όλοι οι μαθητές της Α' τάξης;

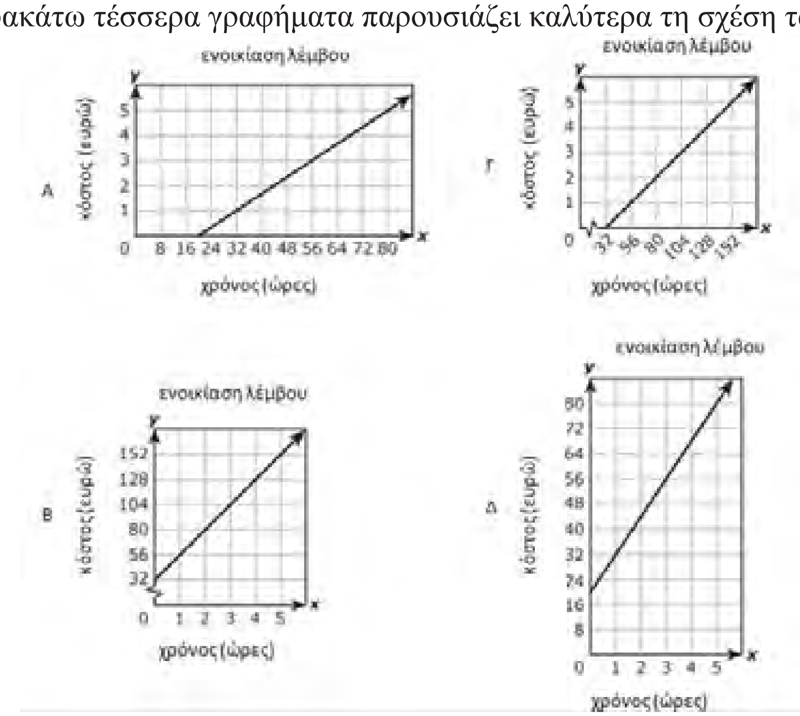
α) 108 **β)** 80 **γ)** 100 **δ)** 90

4. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η σχέση μεταξύ του κόστους ενοικίασης μιας λέμβου (ψ) και του χρόνου ενοικίασής της (x).

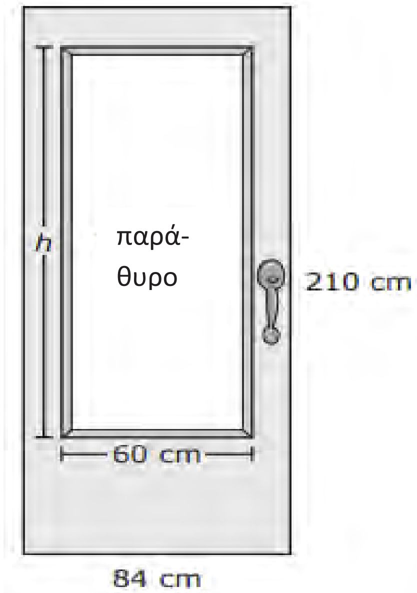
Κόστος ενοικίασης λέμβου

χρόνος χ	κόστος ψ
1	32
3	56
5	80
7	104

Ποιο από τα παρακάτω τέσσερα γραφήματα παρουσιάζει καλύτερα τη σχέση των χ και ψ;



5. Στην παρακάτω εικόνα η πόρτα και το παράθυρό της είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα όμοια μεταξύ τους. Οι διαστάσεις τους αναγράφονται στην εικόνα.



Ποιο είναι το ύψος του παραθύρου σε cm;

α) 66
β) 186
γ) 150
δ) κανένα από τα παραπάνω

6. Μια ομάδα παιδιών έκαναν κύκλο για να παίξουν κάποιο παιχνίδι. Ο κύκλος είχε μήκος περίπου 13,50 μέτρα και η διάμετρός του είναι 4,3 μ. Ποιος από τους παρακάτω λόγους εκφράζει το π.

α) $\frac{13,50}{2,15}$ **β)** $\frac{2,15}{13,50}$ **γ)** $\frac{13,50}{4,3}$ **δ)** $\frac{4,3}{13,50}$

Εξισώσεις

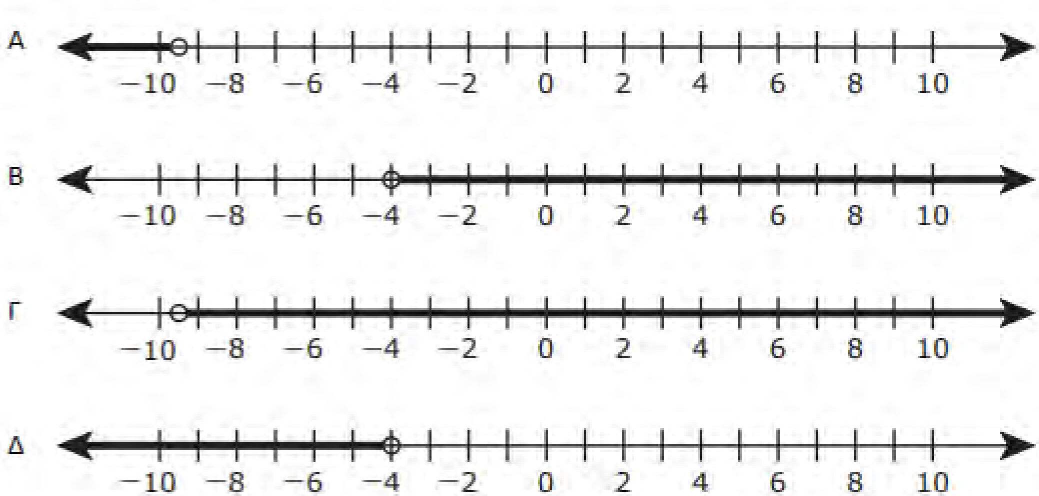
1. Το τυρί φέτα κοστίζει 8,50 ευρώ το κιλό. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει τη σχέση του συνολικού κόστους ψ των χ κιλών φέτας;

α) x = 8,50 + ψ **β)** x = 8,50.ψ **γ)** ψ = 8,50 + x **δ)** ψ = 8,50 •.x

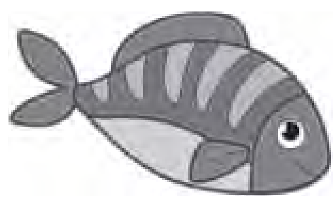
2. Ποια είναι η λύση της ανίσωσης : $-5x - 13 \leq 2$

α) $x \leq -3$ **β)** $x \geq -3$ **γ)** $x \leq 2$ **δ)** $x \geq 2$

3. Ποια αριθμογραμμή αναπαριστά τη λύση της ανίσωσης $3{,}3 \cdot α - 9 > -22{,}2$

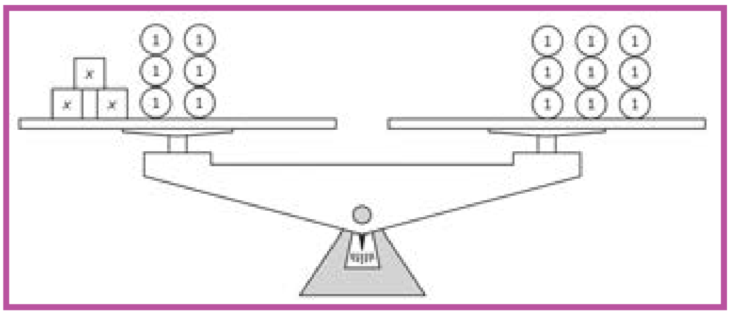


4. Ένα ψάρι κολυμπά με σταθερό ρυθμό προς τον πάτο του ωκεανού και η κατάστασή του εκφράζεται από την εξίσωση ψ = –7x –3, όπου ψ είναι το βάθος σε μέτρα κάτω από την επιφάνεια του ωκεανού που βρίσκεται το ψάρι και x είναι ο αριθμός των δευτερολέπτων που έχει κολυμπήσει το ψάρι. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις εκφράζει την παραπάνω κατάσταση:



Α. Ξεκινώντας από τα 7 μέτρα κάτω από την επιφάνεια του ωκεανού, το ψάρι κατεβαίνει 3 μέτρα/δευτερόλεπτο.
Β. Ξεκινώντας από τα 7 μέτρα κάτω από την επιφάνεια του ωκεανού, το ψάρι ανεβαίνει 3 μέτρα/δευτερόλεπτο.
Γ. Ξεκινώντας από τα 3 μέτρα κάτω από την επιφάνεια του ωκεανού, το ψάρι κατεβαίνει 7 μέτρα/δευτερόλεπτο.
Δ. Ξεκινώντας από τα 3 μέτρα κάτω από την επιφάνεια του ωκεανού, το ψάρι ανεβαίνει 7 μέτρα/δευτερόλεπτο.

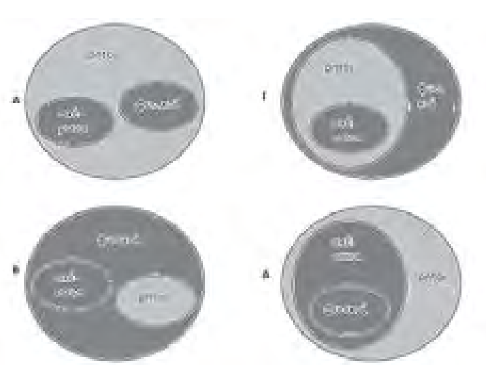
5. Η εικόνα αναπαριστά μια εξίσωση. Ποια είναι η τιμή του x;



α) x = 3 **β)** x = 15 **γ)** x = 5 **δ)** x = 1

6. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις εκφράζει η ανίσωση: $240 \leq 24z + 42$
Α. Η Γεωργία έχει στη συλλογή της 24 γραμματόσημα. Θα συλλέγει 42 γραμματόσημα το χρόνο για z χρόνια. Για ποιες τιμές του z η Γεωργία θα έχει τουλάχιστον 240 γραμματόσημα;
Β. Η Γεωργία έχει στη συλλογή της 42 γραμματόσημα. Θα συλλέγει 24 γραμματόσημα το χρόνο για z χρόνια. Για ποιες τιμές του z η Γεωργία θα έχει τουλάχιστον 240 γραμματόσημα;
Γ. Η Γεωργία έχει στη συλλογή της 42 γραμματόσημα. Θα συλλέγει 24 γραμματόσημα το χρόνο για z χρόνια. Για ποιες τιμές του z η Γεωργία θα έχει το πολύ 240 γραμματόσημα;
Δ. Η Γεωργία έχει στη συλλογή της 24 γραμματόσημα. Θα συλλέγει 42 γραμματόσημα το χρόνο για z χρόνια. Για ποιες τιμές του z η Γεωργία θα έχει το πολύ 240 γραμματόσημα;

7. Εάν κ = –25, ποια από τις παρακάτω ισότητες ισχύει;
α) $3κ – 25 = – 50$
β) $– 63 + 4κ = 37$
γ) $\frac{K}{5} + 27 = 22$
δ) $\frac{K}{5} + 12,5 = 2,5$



8. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα Venn αναπαριστά τη σχέση μεταξύ φυσικών, ακεραίων και ρητών αριθμών;

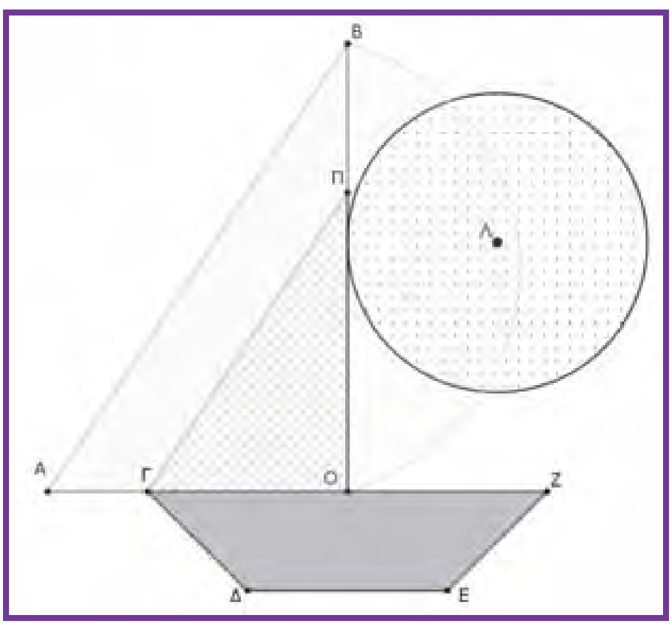
Γ΄ Τάξη Ασκήσεις επανάληψης

Μαρία Ρουσούλη

Μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν
(Δεν υπάρχει βασιλικός (σύντομος) δρόμος για να μάθεις γεωμετρία)
Ευκλείδης, 4ος-3ος π.χ. Αλεξανδρινός Μαθηματικός

Από το παρακάτω εξώφυλλο ενός βιβλίου με ασκήσεις Μαθηματικών απομονώνουμε την Γεωμετρική σύνθεση η οποία περιέχει 2 τρίγωνα, ένα τραπέζιο, έναν κύκλο και ένα κυκλικό τμήμα.

Ένας τρόπος για να μελετήσουμε την σύνθεση αυτή είναι να θεωρήσουμε ότι ανήκει σε ένα σύστημα αξόνων.
Στο σχήμα μας το Ο είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ και ΟΒ βρίσκονται επάνω στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.



Άσκηση 1η

Δίνονται τα σημεία Γ(-4,0) , Δ(-2,-2) και τα Ζ, Ε συμμετρικά των Γ και Δ ως προς τον άξονα y΄y, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΓΖΕΔ.

Άσκηση 2η

Στο τρίγωνο ΑΒΟ τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΟ και ΒΟ είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-15x+54=0$

Α) Να υπολογίσετε:

α) τα ΑΟ και ΒΟ

β) την ΑΒ με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου

γ) το εμβαδόν και την περίμετρο του τριγώνου ΑΟΒ

δ) τα ημΑ, ημΒ και την εφΒ

ε) το ύψος ΟΗ του τριγώνου ΑΟΒ

Β) Φέρνουμε την ΠΓ//ΒΑ ώστε ΓΑ=2cm. Να υπολογίσετε

α) τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΠ και ΠΟ.

β) τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $\dfrac{(\text{ΑΟΒ})}{(\text{ΓΟΠ})}$

Γ) Να υπολογίσετε την πλευρά τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το $\dfrac{1}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΟ.

Άσκηση 3η

Η διάμετρος δ του κύκλου με κέντρο Λ είναι ίση με την τιμή της παράστασης:

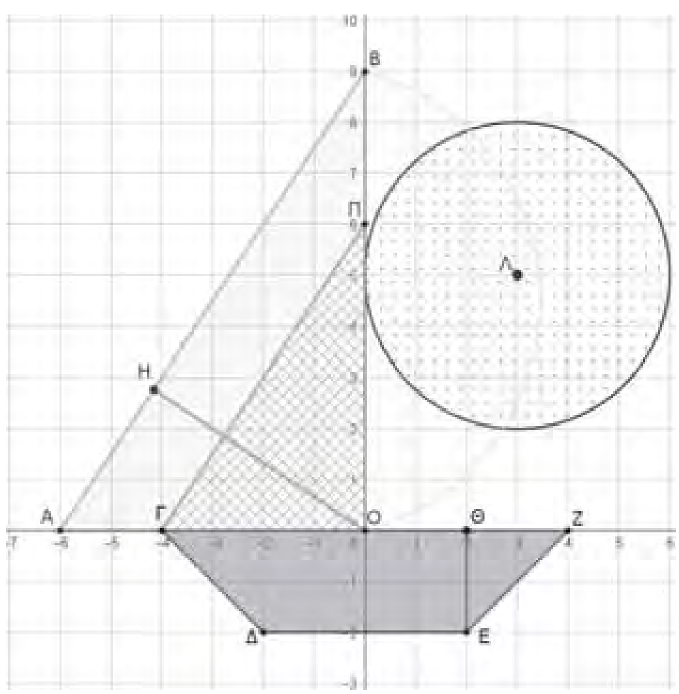
$$A=(2\cdot 8-3^2)-5(2^3-6)-10:(-2)+4\cdot 13^0 \text{ σε cm.}$$

Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (Λ, ρ) όπου ρ η ακτίνα του και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Λ, ρ)

Άσκηση 4η

Το τόξο $\overset{\frown}{BO}=150^\circ$ και ανήκει σε κύκλο ακτίνας ρ=4,66cm. Να υπολογίσετε το μήκος του.

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ



Άσκηση 1η

Z(4,0) , E(2,-2) Το ΓΖΕΔ είναι τραπέζιο άρα (ΓΖΕΔ)=$\frac{ΓΖ+ΔΕ}{2}\cdot ΕΘ=\frac{8+4}{2}\cdot 2=12\,cm^2$

Άσκηση 2η

Α) $x^2-15x+54=0$ $Δ=(-15)^2-4\cdot 1\cdot 54=225-216=9$ $x_1=\frac{15+\sqrt{9}}{2}=9$ και $x_2=\frac{15-\sqrt{9}}{2}=6$

α) ΑΟ=6 και ΒΟ=9

β) Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΟΒ : $ΑΒ^2=ΑΟ^2+ΟΒ^2=6^2+9^2=36+81=117$ συνεπώς

$$ΑΒ=\sqrt{117}\approx 10,8$$

γ) (ΑΟΒ)= $\frac{ΑΟ\cdot ΒΟ}{2}=\frac{6\cdot 9}{2}=27$ τ.μ. π=ΑΟ+ΒΟ+ΑΒ=6+9+10,8=25,8

δ) ημΑ=$\frac{ΒΟ}{ΑΒ}=\frac{9}{10,8}=\frac{1}{1,2}=\frac{5}{6}$ ημΒ=$\frac{ΑΟ}{ΑΒ}=\frac{6}{10,8}=\frac{1}{1,8}=\frac{5}{9}$ εφΒ=$\frac{ΑΟ}{ΒΟ}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

ε) (ΑΟΒ)=$\frac{ΑΒ\cdot ΟΗ}{2}=\frac{10,8\cdot ΟΗ}{2}$ =27 άρα $10,8\cdot ΟΗ=54$ συνεπώς ΟΗ=$\frac{54}{10,8}=5$

Β) α) Από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει :

$\frac{ΓΑ}{ΟΑ}=\frac{ΠΒ}{ΟΒ}$ άρα $\frac{2}{6}=\frac{x}{9}$ ή $2\cdot 9=6$ ή $x=\frac{18}{6}$ δηλαδή ΠΒ=3 και ΠΟ=9-3 $\Leftrightarrow$ ΠΟ=6

β) $\frac{(ΑΟΒ)}{(ΓΟΠ)}=\frac{\frac{ΑΟ\cdot ΟΒ}{2}}{\frac{ΓΟ\cdot ΟΠ}{2}}=\frac{6\cdot 9}{4\cdot 6}=\frac{9}{4}$ ή τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΠ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

λ=$\frac{3}{2}$

Συνεπώς $\frac{(ΑΟΒ)}{(ΓΟΠ)}=\lambda^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

Γ) Έστω α η πλευρά του τετραγώνου, τότε

$$Ε_{τετρ}=α^2=\frac{2}{3}(ΑΒΟ)=\frac{1}{3}27=9$$

Άρα $α^2=9$ συνεπώς α=3

Άσκηση 3η

Α=$(2\cdot 8-3^2)-5(2^3-6)-10:(-2)+4\cdot 13^0$=(16-9)-5(8-6)+5+4·1=7-5·2+5+4·1=7-10+5+4=6

άρα δ=3cm και ρ=$\frac{δ}{2}=\frac{6}{2}=3$ συνεπώς L=2πρ=$2\cdot 3,14\cdot 3=18,84$ cm και

Ε=$πρ^2=3,14\cdot 3^2=3,14\cdot 9=28,26cm^2$

Άσκηση 4η

$l=2πρ\cdot\frac{μ}{360}=\frac{πρμ}{180}=\frac{3,14\cdot 4,66\cdot 150}{180}\approx 12,19$cm

Μαθηματικός εγγραμματισμός και εφαρμογές

Φωτεινή Μπαραλή

Με τον όρο “εγγραμματισμός” ορίζεται η ικανότητα του ατόμου να κατανοεί και να εφαρμόζει ευέλικτα και δημιουργικά της ποικίλης φύσης γλωσσικές και γνωστικές δεξιότητές του που έχει αποκτήσει ώστε να αναλύει, να συλλογίζεται και να επικοινωνεί αποτελεσματικά για να πετύχει στόχους που αφορούν τις λεκτικές πράξεις του προφορικά λόγου καθώς και την κατανόηση, χρήση, κριτική αλλά και την παραγωγή κειμένων διαφορετικής κοινωνικής λειτουργίας.

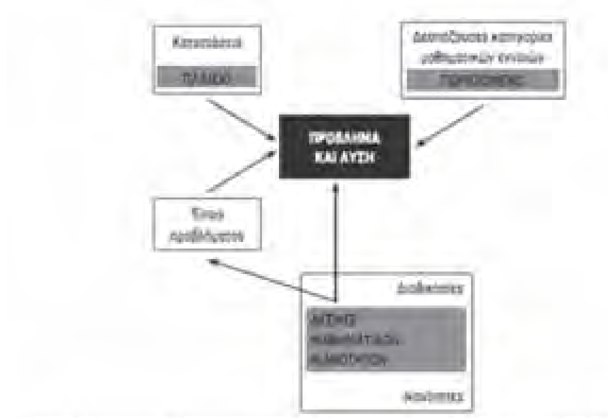
Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι ο εγγραμματισμός ως έννοια υπάρχει πέρα από τη βασική ικανότητα ανάγνωσης και γραφής και εστιάζει στη δυνατότητα του ατόμου να λειτουργεί δυναμικά σε διαφορετικά περιβάλλοντα, αξιοποιώντας για τη διεκπεραίωση διαφόρων αναγκών τα ποικίλα είδη προφορικού και γραπτού λόγου.

Στη σημερινή εποχή των ραγδαίων εξελίξεων σε κάθε τομέα γίνεται περισσότερο αντιληπτό η επιτακτική ανάγκη για εκπαίδευση των μελλοντικών πολιτών με τρόπους τέτοιους ώστε να είναι ικανοί να κατανοούν και να διαχειρίζονται έναν ολοένα και πιο πολύπλοκο κόσμο, καθώς και για τον ρόλο που θα κληθούν να διαδραματίσουν στην κοινωνία που θα ζήσουν μαθαίνοντας να επιλύουν πραγματικά προβλήματα που απαιτούν ικανότητες, τις οποίες απέκτησαν από το σχολείο και ανέπτυξαν με βάση τις εμπειρίες της καθημερινότητάς τους.

Καθοριστική συμβολή σε αυτή την κατεύθυνση έχουν τα μαθηματικά και κατά συνέπεια η μαθηματική εκπαίδευση των νεαρών μαθητών, ώστε να είναι εγγράμματοι. Ο μαθηματικός εγγραμματισμός αποτελεί μια πρόκληση για τη βασική μαθηματική εκπαίδευση και ένα από τα ζητήματα που απασχολούν πλέον συχνά τους ερευνητές.

Η έννοια του μαθηματικού εγγραμματισμού αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ταυτίζεται με την ικανότητα χρήσης αποτελεσματικών μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων για την αντιμετώπιση των καθημερινών προκλήσεων της ζωής με σκοπό οι αυριανοί πολίτες να μπορούν να συμμετέχουν στην κοινωνία που ζουν, αξιοποιώντας τις λειτουργίες και τα εργαλεία της μαθηματικής σκέψης που ανέπτυξαν στο σχολείο, ως κριτικά σκεπτόμενα μέλη της.

Τα συστατικά στοιχεία του εγγραμματισμού στα Μαθηματικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Το πλαίσιο, στο οποίο εμπεριέχονται τα προβλήματα, περιλαμβάνει προσωπικές, εκπαιδευτικές, επαγγελματικές, κοινωνικές και επιστημονικές καταστάσεις άλλοτε πιο απλές και άλλοτε πιο σύνθετες.

Στο μαθηματικό περιεχόμενο εντάσσονται όλα όσα απαιτούνται σχετικά με την επίλυση ενός προβλήματος και προσδιορίζεται από τέσσερις κυρίαρχες ομάδες μαθηματικών εννοιών:

- Χώρος και Σχήμα
- Μεταβολή και Σχέσεις
- Ποσότητα
- Αβεβαιότητα

Οι νοητικές διαδικασίες συνδέονται με τις αποκτημένες μαθηματικές ικανότητες και ομαδοποιούνται σε τρεις δέσμες:

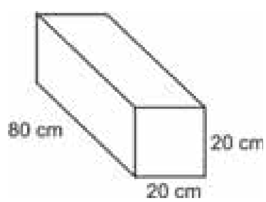
- τη δέσμη αναπαραγωγής,
- τη δέσμη συνδέσεων και
- τη δέσμη αναστοχασμού

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο εφαρμογές στις οποίες γίνεται χρήση του μαθηματικού εγγραμματισμού σε προβλήματα της καθημερινότητας.

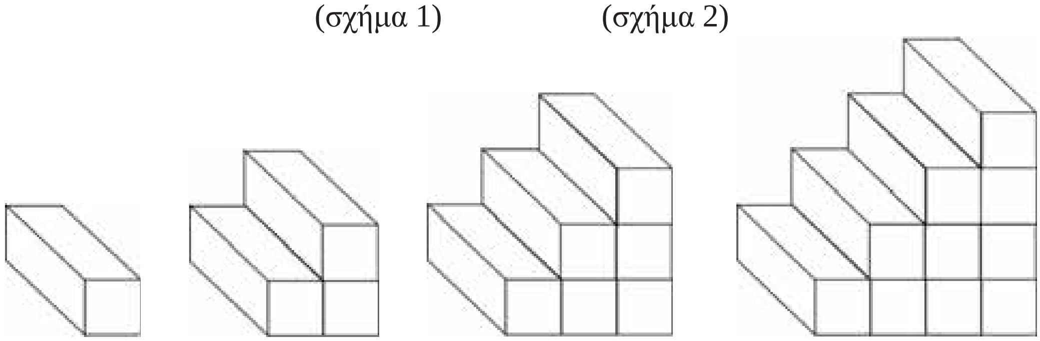
Εφαρμογή 1.

Ο Αχιλλέας θέλει να κατασκευάσει το σχέδιο μιας εξωτερικής σκάλας για να ανεβαίνει από την αυλή του σπιτιού του στο μπαλκόνι του (σχήμα 1) χρησιμοποιώντας για σκαλοπάτια ορθογώνια παραλληλεπίπεδα από μάρμαρο με διαστάσεις 80 cm, 20 cm και 20 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Η σκάλα έχει ύψος 2 m και 80 cm. Για να το επιτύχει αυτό θα χρησιμοποιήσει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (μάρμαρο) για το πρώτο σκαλοπάτι, τρία για τα δύο σκαλοπάτια, έξι για τα τρία σκαλοπάτια και 10 για τα τέσσερα σκαλοπάτια, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

(σχήμα 1)



(σχήμα 2)



1^o σκαλοπάτι 2^o σκαλοπάτι 3^o σκαλοπάτι 4^o σκαλοπάτι

(σχήμα 3)

(σχήμα 4)

Ερώτηση 1. Πόσα μάρμαρα θα χρησιμοποιήσει για τα 5 πρώτα σκαλοπάτια;

Ερώτηση 2. Πόσα μάρμαρα θα χρησιμοποιήσει για τα 7 πρώτα σκαλοπάτια;

Ερώτηση 3. Πόσα μάρμαρα θα χρησιμοποιήσει για το τελευταίο σκαλοπάτι;

Ερώτηση 4. Αν η σκάλα έχει ν το πλήθος σκαλοπάτια πόσα μάρμαρα θα χρειαστούν;

Ερώτηση 5. Πόση είναι η ολική επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (μαρμάρου);

Ερώτηση 6. Πόσος είναι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (μαρμάρου);

Ερώτηση 7. Πόσο κοστίζει το κάθε σκαλοπάτι αν η αξία του κυβικού μέτρου (m^3) του μαρμάρου είναι 1.410 ευρώ;

Ερώτηση 8. Για να κολλήσει τα μάρμαρα θα χρειαστεί δύο σακιά κόλλα των 25 κιλών το καθένα που το ένα κιλό κοστίζει 0,82 ευρώ. Πόσα χρήματα θα πληρώσει για την κόλλα;

Ερώτηση 9. Πόσο κοστίζουν τα υλικά της σκάλας;

Ερώτηση 10. Ποιες γεωμετρικές γνώσεις χρειάστηκαν για το πρόβλημα αυτό;

Ερώτηση 11. Ποιες αλγεβρικές γνώσεις χρειάστηκαν για το πρόβλημα αυτό;

Ερώτηση 12. Να σχεδιάσετε κατάλληλα το δοθέν ορθογώνιο καθώς και την ανάπτυξή του στο σχήμα 4.

Απαντήσεις

Απάντηση 1
Για το πέμπτο σκαλοπάτι θα χρειαστούν 15 μάρμαρα.
Έχουμε: 1+2+3+4+5=15

Απάντηση 2
Για το έβδομο σκαλοπάτι θα χρειαστούν 28 μάρμαρα.
Έχουμε: 1+2+3+4+5+6+7=28

Απάντηση 3
Για το τελευταίο σκαλοπάτι θα χρειαστούν 105 μάρμαρα.
Αφού το μπαλκόνι έχει ύψος 2 m και 80 cm, το τελευταίο σκαλοπάτι θα έχει ύψος 2 m και 80 cm = 200 cm +80 cm = 280 cm. Όμως, το ένα σκαλοπάτι έχει ύψος 20 cm οπότε θα χρειαστούν για την τελευταία σειρά 280:20=14 μάρμαρα. Επομένως, συνολικά θα χρειαστούν 1+2+3+…+14=105 μάρμαρα.

Απάντηση 4
Για τα ν σκαλοπάτια θα χρειαστούν $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ μάρμαρα.

Έχουμε: $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Απάντηση 5
Η ολική επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 720 cm^2.
Η ολική επιφάνεια ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β και γ δίνεται από τον τύπο: $E=2(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)=2(80\cdot20+20\cdot20+20\cdot80)=2\cdot360=720\ cm^2$.

Απάντηση 6
Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 32.000 cm^3=0,032 m^3 .
Ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β και γ δίνεται από τον τύπο:

$$V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=80\cdot20\cdot20=32.000\ cm^3.$$

Απάντηση 7

Το κάθε σκαλοπάτι μαρμάρου στοιχίζει 45,12 ευρώ.
Αφού το ένα κυβικό μέτρο (m^3) μαρμάρου κοστίζει 1.410 ευρώ, τα 32.000 cm^3 =0,032 m^3 θα κοστίζουν 45,12 ευρώ.

Απάντηση 8

Για την κόλλα θα πληρώσει 41 ευρώ.

Το ένα σακί κόλλας κοστίζει 0,82.25=20,50 ευρώ. Οπότε τα δύο κοστίζουν 2·20,50= 41 ευρώ.

Απάντηση 9

Τα υλικά της σκάλας κοστίζουν 4778,6 ευρώ.

Τα μάρμαρα κοστίζουν 105·45,12=4737,6 ευρώ και η κόλλα 41 ευρώ. Οπότε 4737,6+41= 4778,6 ευρώ.

Απάντηση 10

Οι γεωμετρικές γνώσεις που χρειάστηκαν για το πρόβλημα είναι:

1) Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
2) Μονάδες μέτρησης μήκους, επιφάνειας και όγκου
3) Εμβαδόν ολικής επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου Ε=2(α·β+β·γ+γ·α)
4) Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου V=α·β·γ
5) Ανάπτυξη της ολικής επιφάνειας γεωμετρικών στερεών

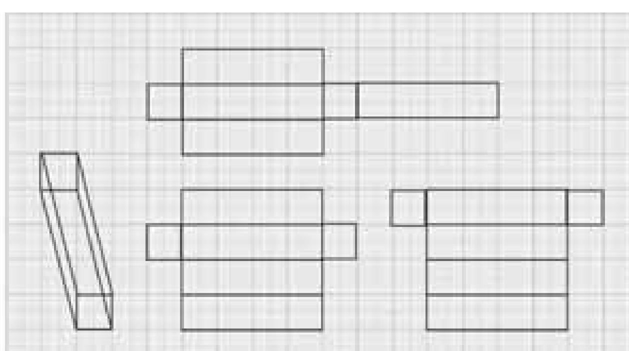
Απάντηση 11

Οι αλγεβρικές γνώσεις που χρειάστηκαν για το πρόβλημα είναι:

1) Στοιχειώδεις πράξεις δεκαδικών αριθμών
2) Υπολογισμός του αθροίσματος $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Απάντηση 12

Το δοθέν ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καθώς και η ανάπτυξή της επιφάνειάς του δίνονται στο παρακάτω σχέδιο (σχήμα 5). Εκτός από τα ενδεικτικά αυτά σχήματα υπάρχουν και άλλα. Ο αναγνώστης μπορεί να σχεδιάσει και άλλους τρόπους ανάπτυξης της επιφάνειας του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (Να σχεδιαστούν).

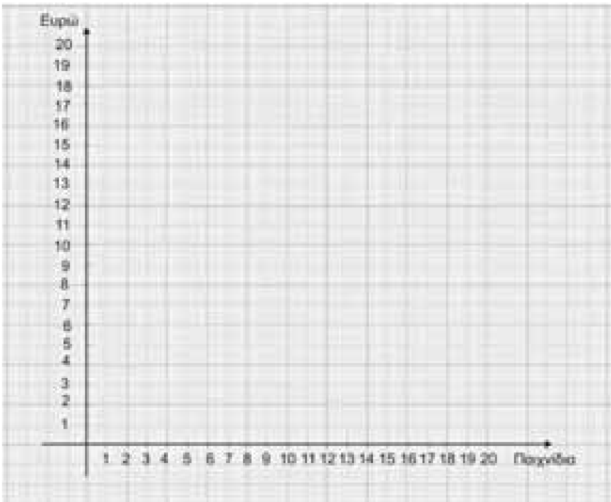


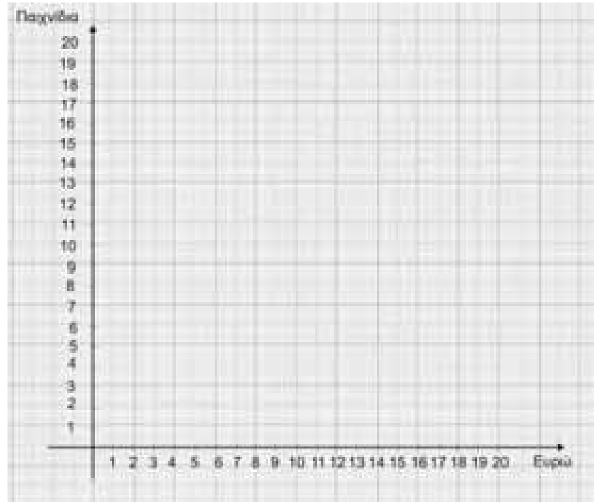
(σχήμα 5)

Εφαρμογή 2

Στην Αθήνα υπάρχουν δύο Λούνα–Παρκ. Στο πρώτο Λούνα –Παρκ (Α) για να μπορεί να παίξει ένα παιδί πληρώνει είσοδο 3 ευρώ και για κάθε παιχνίδι που θα παίξει 2 ευρώ. Στο δεύτερο Λούνα –Παρκ (Β) πληρώνει είσοδο 8 ευρώ και για κάθε παιχνίδι που θα παίξει 1 ευρώ.
Ερώτηση 1. Για τη λύση του θέματος προτείνονται τα παρακάτω ορθογώνια συστήματα αξόνων

(σχήμα 5). Ποιο επιλέγετε;





(σχήμα 5)

Ερώτηση 2. Μπορείτε να κατασκευάσετε την κατάλληλη συνάρτηση για το πρώτο Λούνα – Παρκ (Α) αν κάποιο παιδί παίξει x παιχνίδια;

Ερώτηση 3. Μπορείτε να κατασκευάσετε την κατάλληλη συνάρτηση για το δεύτερο Λούνα – Παρκ (Β), αν κάποιο παιδί παίξει x παιχνίδια;

Ερώτηση 4. Μπορείτε να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων της Ερώτησης 1 που επιλέξατε;

Ερώτηση 5. Σε ποιο Λούνα –Παρκ συμφέρει να παίξει κάποιο παιδί, αν παίξει 3 παιχνίδια;

Ερώτηση 6. Σε ποιο Λούνα –Παρκ συμφέρει να παίξει κάποιο παιδί, αν παίξει 8 παιχνίδια;

Ερώτηση 7. Σε ποιο Λούνα –Παρκ συμφέρει να παίξει κάποιο παιδί, αν παίξει λιγότερα από 5 παιχνίδια;

Ερώτηση 8. Σε ποιο Λούνα –Παρκ πληρώνει περισσότερα κάποιο παιδί, αν παίξει 8 παιχνίδια;

Ερώτηση 9. Πόσα παιχνίδια χρειάζεται να παίξει ένα παιδί και στα δύο Λούνα –Παρκ για να πληρώσει το ίδιο ποσό χρημάτων;

Ερώτηση 10. Τι θα έπρεπε να γίνει ώστε και στα δύο Λούνα –Παρκ το κόστος για κάθε παιδί να ήταν το ίδιο;

Ερώτηση 11. Μπορείτε να προτείνετε έναν τρόπο τιμολόγησης των παιχνιδιών έτσι ώστε: α) το κόστος που θα πληρώνει κάθε παιδί να είναι το ίδιο για τον ίδιο αριθμό παιχνιδιών και στα δύο Λούνα –Παρκ και β) το Λούνα –Παρκ (Α) να είναι ακριβότερο κατά 2 ευρώ από το Λούνα – Παρκ (Β). Πόσοι τέτοιοι τρόποι υπάρχουν;

Ερώτηση 12. Πόσες λύσεις υπάρχουν στο πρόβλημα της ερώτησης 11 και ποια είναι γραφικά η σχέση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων; Να δώσετε ένα παράδειγμα και να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεών τους (άσκηση).

Απαντήσεις

Απάντηση 1

Επιλέγω το $2^{ο}$ επειδή η μεταβλητή x (οριζόντιος άξονας) εκφράζει το πλήθος των παιχνιδιών και η μεταβλητή y (κατακόρυφος άξονας) τα ευρώ που θα πληρώσει.

Απάντηση 2

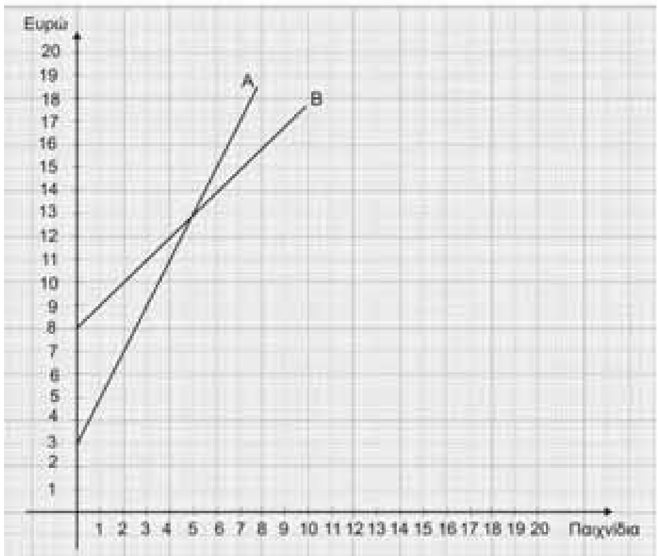
Αν x είναι το πλήθος των παιχνιδιών τότε τα ευρώ που θα πληρώσει το παιδί δίνονται από τη σχέση $y_A = 2x+3$.

Απάντηση 3

Αν x είναι το πλήθος των παιχνιδιών τότε τα ευρώ που θα πληρώσει το παιδί δίνονται από τη σχέση $y_B = 1x+8$.

Απάντηση 4

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων 2 και 3 δίνονται στο παρακάτω (σχήμα 6).



(σχήμα 6)

Απάντηση 5

Για 3 παιχνίδια συμφέρει να παίξει στο Λούνα – Παρκ (Α).

Πράγματι στο Λούνα –Παρκ (Α) θα πληρώσει $y_A = 2\cdot 3+3 = 9$ ευρώ ενώ στο Λούνα –Παρκ (Β) θα πληρώσει $y_B = 1\cdot 3+8 = 11$ ευρώ. Η απάντηση αυτή δίνεται και από τη γραφική παράσταση.

Απάντηση 6

Για 8 παιχνίδια συμφέρει να παίξει στο Λούνα – Παρκ (Β).

Πράγματι στο Λούνα – Παρκ (Α) θα πληρώσει $y_A = 2\cdot 8+3 = 19$ ευρώ ενώ στο Λούνα –Παρκ (Β) θα πληρώσει $y_B = 1\cdot 8+8 = 16$ ευρώ. Η απάντηση αυτή δίνεται και από τη γραφική παράσταση.

Απάντηση 7

Για 4 παιχνίδια που είναι λιγότερα από τα 5 συμφέρει να παίξει στο Λούνα – Παρκ (Α).

Πράγματι στο Λούνα – Παρκ (Α) θα πληρώσει $y_A = 2\cdot 4+3 = 11$ ευρώ ενώ στο Λούνα – Παρκ (Β) θα πληρώσει $y_B = 1\cdot 4+8 = 12$ ευρώ.

Η απάντηση αυτή δίνεται και από τη γραφική παράσταση.

Από το σχήμα των γραφικών παραστάσεων έχουμε: $y_A < y_B \Rightarrow 2x+3 < 1x+8 \Rightarrow x < 5$.

Επομένως, για λιγότερα από 5 παιχνίδια συμφέρει να παίξει στο Λούνα – Παρκ (Α).

Απάντηση 8

Για 8 παιχνίδια που είναι περισσότερα από τα 5 θα πληρώσει περισσότερα χρήματα αν παίξει στο Λούνα –Παρκ (Α).

Πράγματι στο Λούνα –Παρκ (Α) θα πληρώσει $y_A = 2\cdot 8+3 = 19$ ευρώ ενώ στο Λούνα – Παρκ (Β) θα πληρώσει $y_B = 1\cdot 8+8 = 16$ ευρώ.

Η απάντηση αυτή δίνεται και από τη γραφική παράσταση.
Από το σχήμα των γραφικών παραστάσεων έχουμε:

$$y_A > y_B \Rightarrow 2x+3>1x+8 \Rightarrow x>5.$$

Επομένως, για περισσότερα από 5 παιχνίδια θα πληρώσει περισσότερα χρήματα αν παίξει στο Λούνα –Παρκ (Α).

Απάντηση 9

Για 5 παιχνίδια ένα παιδί θα πληρώσει το ίδιο ποσό και στα δύο στο Λούνα – Παρκ.

Πράγματι στο Λούνα – Παρκ (Α) θα πληρώσει $y_A = 2\cdot 5+3=13$ ευρώ και στο Λούνα – Παρκ (Β) θα πληρώσει $y_B = 1\cdot 5+8=13$ ευρώ.

Η απάντηση αυτή δίνεται και από τη γραφική παράσταση.

Από το σχήμα των γραφικών παραστάσεων έχουμε:

$$y_A = y_B \Rightarrow 2x+3=1x+8 \Rightarrow x=5$$

Επομένως, για 5 παιχνίδια θα πληρώσει το ίδιο και στα δύο Λούνα –Παρκ (Α).

Απάντηση 10

Για να έχουμε και στα δύο Λούνα – Παρκ το ίδιο κόστος θα πρέπει να έχουμε την ίδια είσοδο κα την ίδια τιμή για κάθε παιχνίδι.

Πράγματι:
Έστω α_A και α_B οι τιμές των παιχνιδιών στα Λούνα – Παρκ (Α) και Λούνα – Παρκ (Β) και ε_A και ε_B οι είσοδοι αντίστοιχα. Τότε θα έχουμε: $y_A = \alpha_A x + \varepsilon_A$ και $y_B = \alpha_B x + \varepsilon_B$
Για να είναι το ίδιο κόστος και στα δύο Λούνα – Παρκ θα πρέπει:

$$y_A = y_B \Rightarrow \alpha_A x + \varepsilon_A = \alpha_B x + \varepsilon_B \quad (1)$$

Για να ισχύει η σχέση (1) θα πρέπει $\alpha_A = \alpha_B$ και $\varepsilon_A = \varepsilon_B$.
Επομένως, και στα δύο Λούνα – Παρκ πρέπει να έχουμε την ίδια είσοδο κα την ίδια τιμή για κάθε παιχνίδι.

Απάντηση 11

Θα πρέπει και στα δύο Λούνα – Παρκ το κόστος για κάθε παιχνίδι να είναι το ίδιο και η είσοδος στο Λούνα – Παρκ (Α) ακριβότερη κατά δύο ευρώ από το Λούνα –Παρκ (Β).

Πράγματι:

$$y_A = y_B + 2 \Rightarrow \alpha_A x + \varepsilon_A = \alpha_B x + \varepsilon_B + 2 \Rightarrow \alpha_A x + \varepsilon_A = \alpha_B x + (\varepsilon_B + 2) \quad (2)$$

Για να ισχύει η σχέση (2) θα πρέπει $\alpha_A = \alpha_B$ και $\varepsilon_A = \varepsilon_B + 2$.

Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Απάντηση 12

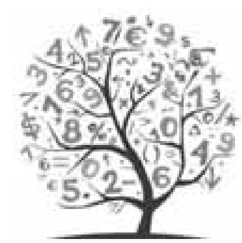
Στο πρόβλημα αυτό έχουμε άπειρες λύσεις και οι ευθείες που παριστάνουν το κόστος για κάθε παιχνίδι είναι παράλληλες.

Πράγματι:

Οι ευθείες είναι παράλληλες γιατί $\alpha_A = \alpha_B$ δηλαδή, οι ευθείες έχουν την ίδια κλίση.

Επιπλέον, επειδή $\varepsilon_A = \varepsilon_B + 2$ είναι $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$ οπότε οι ευθείες δεν ταυτίζονται.

Ειδικά θέματα για τους μαθητές των Β΄ – Γ΄ Γυμνασίου



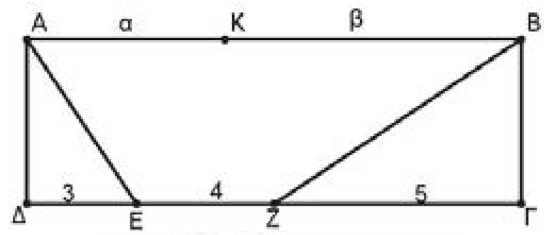
Επιμέλεια Στέφανος Κεΐσογλου

Β΄ Γυμνασίου

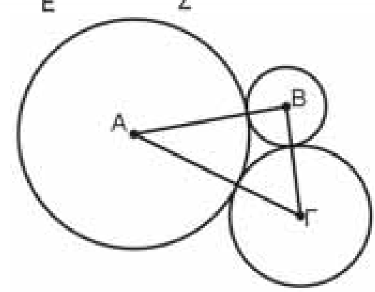
1) Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει 1,5α=0,04β να υπολογίσετε την τιμή του κλάσματος $\dfrac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}$.

2) Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ ισχύει: ΑΕ=ΑΚ=α και ΒΖ=ΒΚ=β. Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

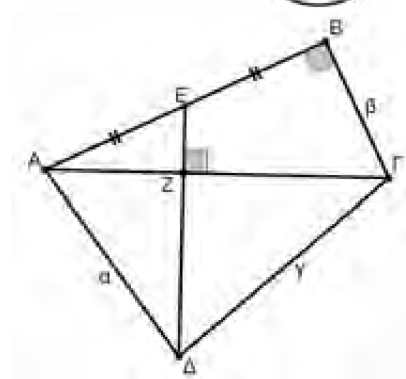
Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ισότητα $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$.



3) Στο παρακάτω σχήμα οι τρεις κύκλου εφάπτονται ανά δύο (ο καθένας με τους άλλους δύο). Αν οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη α, β, γ αντίστοιχα να υπολογίσετε τις ακτίνες των τριών κύκλων.



4) Με βάση τις πληροφορίες που υπάρχουν σημειωμένες στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$



5) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{7}{144}+\ldots+\dfrac{17}{5.184}+\dfrac{19}{8.100}$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\dfrac{3}{4}=1-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{5}{36}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{7}{144}=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{16}$ κ.λ.π

Απαντήσεις Θεμάτων τεύχους 123

1) Ας ονομάσουμε την ταχύτητα του διαδρόμου v_δ και την ταχύτητα βαδίσματος του Ερμή v_E. Επιπλέον θα χρειαστεί να ονομάσουμε το μήκος του διαδρόμου d οπότε $(v_\delta + v_E)\cdot 24=d$ (1) και $v_E\cdot 60=d$ (2). Ο συνδυασμός αυτών των δύο θα μας δώσει τον χρόνο t που θα χρειαστεί ο Ερμής να διασχίσει τον διάδρομο όταν λειτουργεί ο διάδρομος αλλά ο Ερμής παραμένει ακίνητος πάνω σε αυτόν. Είναι φανερό ότι $v_\delta\cdot t=d$ επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε τον λόγο $\dfrac{d}{v_\delta}$.

Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (1) και (2) θα πάρουμε $v_\delta + v_E = \frac{d}{24}$ και $v_E = \frac{d}{60}$ επομένως

$v_\delta = \frac{d}{24} - \frac{d}{60}$ άρα $v_\delta = \frac{3d}{120} = \frac{d}{40}$ από όπου προκύπτει ότι $\frac{d}{v_\delta} = 40$.

2) Για να είναι τέλειο τετράγωνο ο αριθμός της μορφής ααββ θα πρέπει να υπάρχει ακέραιος ν ώστε $ααββ = ν^2$. Είναι προφανές ότι οι αριθμοί α, β είναι μονοψήφιοι φυσικοί αριθμοί με $α \neq 0$ και επιπλέον $ν \geq 32$ και $ν \leq 99$.

Ας αξιοποιήσουμε την δεκαδική ανάλυση του αριθμού: $α\cdot 1000 + α\cdot 100 + β\cdot 10 + β = ν^2$ δηλαδή $1100α + 11β = ν^2$ επομένως $11\cdot(100α+β) = ν^2$ άρα ο $ν^2$ είναι πολλαπλάσιο του 11 οπότε υποχρεωτικά και ο ν θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 11.

Με βάση τους περιορισμούς θα έχουμε ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει ο ν είναι:

33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 από όπου προκύπτει ότι ν=88 καθώς $ν^2 = 7744$.

3) Ας υποθέσουμε ότι θα πρέπει ο αγγειοπλάστης να κατασκευάσει ν βάζα σε t ημέρες. Ο συνολικός αριθμός των βάζων, δηλαδή το γινομενο $ν\cdot t$, παραμένει σταθερό και επομένως θα πρέπει: $(ν+2)\cdot(t-3) = ν\cdot t$ και $(ν+4)\cdot(t-5) = ν\cdot t$. Μετά τις πράξεις προκύπτει ότι:

$2t - 3ν = 6$

$4t - 5ν = 20$ η λύση του συτήματος αυτού δίνει ν=8 και t=15.

4) Αν ονομάσουμε Σ το άθροισμα των 9 αυτών αριθμών τότε ο μεσαίος αριθμός θα είναι ίσος με $\frac{Σ}{9}$ αφού ισούται με τον μέσο όρο τους. Σύμφωνα με τα δεδομένα ο μέσος όρος των 5 μεγαλύτερων αριθμών είναι 68 και επομένως το άθροισμά τους είναι ίσο με 5×68=340, ενώ ο μέσος όρος πέντε μικρότερων είναι είναι 44 και επομένως το άθροισμά τους θα είναι ίσο με 5×44=220. Αν τώρα προσθέσουμε το 340 με το 220 θα πάρουμε το άθροισμα των 9 αριθμών, σηλαδή το Σ, αλλά και 2 φορές τον μεσαίο. Με βάση αυτή τη σκέψη, και εφόσον ο μεσαίος αριθμός είναι ίσος με $\frac{Σ}{9}$, θα έχουμε $Σ + \frac{Σ}{9} = 340 + 220 = 560$. Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι Σ=504

5) Θα πρέπει να υπολογίσουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς, δηλαδή όλες τις δυνατές επτάδες, στις οποίες το άθροισμα των αριθμών (επιδόσεων) δίνει 30.

Ο ασφαλέστερος τρόπος είναι να οργανώσουμε συστηματικά την μέτρηση σε έναν πίνακα.

	Βαθμός	Βαθμός	Βαθμός	Βαθμός	Βαθμός	Βαθμός	Βαθμός	Σύνολο
$1^{ος}$ συνδυασμός	5	5	5	5	5	5	0	30
$2^{ος}$ συνδυασμός	5	5	5	5	5	3	2	30
$3^{ος}$ συνδυασμός	5	5	5	5	5	4	1	30
$4^{ος}$ συνδυασμός	5	5	5	5	4	4	2	30
$5^{ος}$ συνδυασμός	5	5	5	5	4	3	3	30
$6^{ος}$ συνδυασμός	5	5	5	4	4	4	3	30
$7^{ος}$ συνδυασμός	5	5	4	4	4	4	4	30

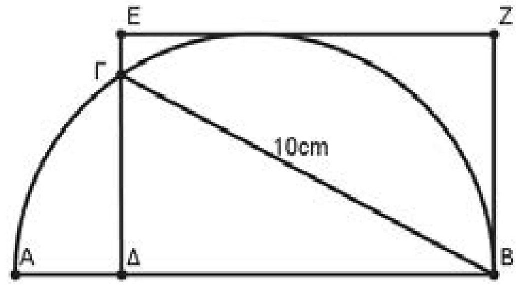
Εδώ έχει προτεραιότητα το πλήθος της βαθμολογίας 5 καθώς ο αριθμός που θα πρέπει να προκύψει στο άθροισμα είναι πολλαπλάσιο του 5. Επιπλέον το πλήθος της βαθμολογίας 3 είναι περιορισμένο.

Γ΄ Γυμνασίου

1) Να υπολογίστε τις τιμές των ακεραίων αριθμών **α, β, γ** για τους οποίους ισχύει:

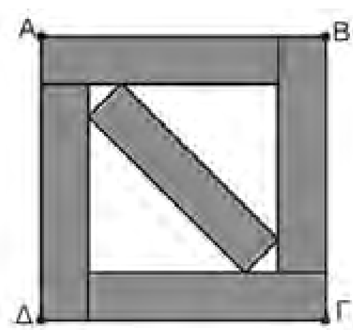
$$\alpha+\beta=1-\gamma \quad \text{και} \quad \alpha^3+\beta^3=1-\gamma^2 \quad \text{και} \quad \gamma\neq 1.$$

2) Στο ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ η χορδή ΒΓ έχει μήκος 10cm. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΔΕΖΒ είναι ανεξάρτητο από την ακτίνα του ημικυκλίου. Να θεωρήσετε ότι η ΕΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



3) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)^3+(\beta^2-\gamma^2)^3+(\gamma^2-\alpha^2)^3}{(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3}$

4) Τι μέρος του τετραγώνου ΑΒΓΔ καλύπτουν τα 5 ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα;



5) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z και α, β, γ με $\alpha^2\neq\beta^2$, $\beta^2\neq\gamma^2$, $\alpha^2\neq\gamma^2$ ισχύει:

$\dfrac{x}{\alpha^2-\beta^2}=\dfrac{y}{\beta^2-\gamma^2}=\dfrac{z}{\gamma^2-\alpha^2}$ να αποδείξετε ότι x=y=z.

Απαντήσεις Θεμάτων τεύχους 123

1) Η στρατηγική των αφαιρέσεων κατά μέλη φαίνεται να είναι η πλέον κατάλληλη, καθώς γίνεται απαλοιφή του ενός αγνώστου.

$\alpha^3+\alpha^2x+\alpha y+z=0$ (1)
$\beta^3+\beta^2x+\beta y+z=0$ (2)
$\gamma^3+\gamma^2x+\gamma y+z=0$ (3)

Από (1)–(2) και (1)–(3) προκύπτει το σύστημα:

$(\alpha^3-\beta^3)+(\alpha^2-\beta^2)x+(\alpha-\beta)y=0$
$(\alpha^3-\gamma^3)+(\alpha^2-\gamma^2)x+(\alpha-\gamma)y=0$

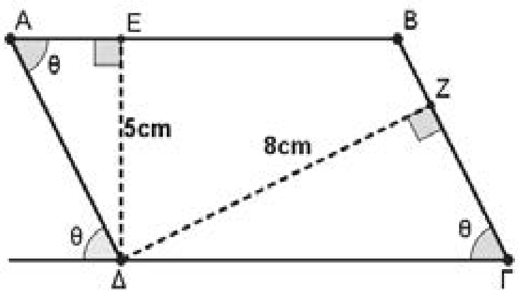
Από τα δεδομένα έχουμε $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)\neq 0$ που σημαίνει ότι μπορούμε να απλοποιήσουμε την πρώτη με (α–β) και την δεύτερη με (α–γ) οπότε προκύπτει το σύστημα:

$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha+\beta)x+y=0$
$(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)+(\alpha+\gamma)x+y=0$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη προκύπτει $(\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta^2-\gamma^2)+(\beta-\gamma)x=0$ οπότε:

$$x=-\frac{\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta^2-\gamma^2}{\beta-\gamma}=-(\alpha+\beta+\gamma),\ \ y=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \ z=-\alpha\beta\gamma$$

2) Το πρόβλημα μας δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και τα δύο ύψη του και μας ζητά μία από τις γωνίες του.



Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι ίσο με $\Delta\Gamma\cdot 5cm=50cm^2$ άρα $\Delta\Gamma=10cm$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΓ έχουμε:
$\eta\mu\theta=\frac{8}{\Delta\Gamma}=\frac{8}{10}=0{,}8$. Καταφεύγοντας σε έναν τριγωνομετρικό πίνακα διαπιστώνουμε ότι η γωνία θ θα πρέπει να είναι ίση με 54^0 (με μεγάλη προσέγγιση)

3) Για το άθροισμα α+β των δύο αριθμών παρατηρούμε ότι προκύπτει ένας αριθμός που όλα τα ψηφία του είναι 1.
Πράγματι:

α= 0,123451234512345…………
<u>β= 0,987659876598765…………</u>
1,11111111111111……

Ας ασχοληθούμε με το δεκαδικό μέρος, δηλαδή με τον αριθμό 0,111111111……

Αφού $\frac{1}{3}=0{,}333333333.......$ προκύπτει ότι $0{,}111111111.......=\frac{1}{3}:3=\frac{1}{9}$ από όπου τελικά

προκύπτει ότι: $1{,}11111111111111......=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$

4) Από τη σχέση $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$ προκύπτει ότι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}-\frac{1}{\gamma}$ από όπου μετά τις πράξεις προκύπτει ότι $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}=\frac{-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\gamma}$ και στη συνέχεια οι πράξεις μας οδηγούν στη σχέση:

$\gamma\cdot(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta)+\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)=0$ και τελικά $(\alpha+\beta)\cdot(\beta+\gamma)\cdot(\gamma+\alpha)=0$ οπότε $\alpha=-\beta$ ή $\beta=-\gamma$ ή $\gamma=-\alpha$.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha=-\beta$ τότε για κάθε περιττό αριθμό ν ισχύει $\alpha^\nu=-\beta^\nu$ και $\frac{1}{\alpha^\nu}=-\frac{1}{\beta^\nu}$ οπότε είναι φανερό ότι ισχύει η $\frac{1}{\alpha^\nu}+\frac{1}{\beta^\nu}+\frac{1}{\gamma^\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu}$.

Αν σκεφτούμε όμοια η συγκεκριμένη σχέση ισχύει και στις περιπτώσεις που $\beta=-\gamma$ και $\gamma=-\alpha$.

5) Ο εργαζόμενος μετακινείται 2 φορές την ημέρα με κάποιο από τα δύο μέσα μεταφοράς (τραίνο ή λεωφορείο), άρα σε κάθε ημέρα αντιστοιχούν 2 μέσα μεταφοράς. Με βάση το πρόβλημα έχει χρησιμοποιήσει λεωφορείο 8+15=23 φορές λεωφορείο και 9 φορές το τραίνο, δηλαδή 23+9=32 συνολικά μετακινήσεις. Επειδή σε κάθε εργάσιμη ημέρα αντιστοιχούν 2 μετακινήσεις άρα οι εργάσιμες ημέρες είναι 32:2=16.

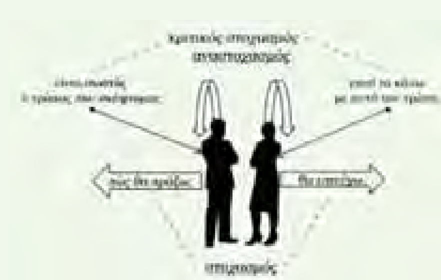
Η μετασχηματίζουσα τον μαθητή μάθηση

Στέλιος Μπακούλας– Νίκος Μπακούλας

Ο ρόλος του γονιού και του δάσκαλου για τον μαθητή είναι αποφασιστικής σημασίας για την πορεία που θα χαράξει στη ζωή του. Στην πολύ σημαντική σχέση μεταξύ μαθητή και δασκάλου μπορούμε να διακρίνουμε τρεις καθοριστικές περιπτώσεις συνεργασίας. Στην πρώτη ο δάσκαλος επηρεάζει καθοριστικά τον μαθητή και τον οδηγεί προς τη μεγάλη πορεία της σκέψης και της γνώσης και αργότερα της επιστήμης και της έρευνας. Στη δεύτερη, ο δάσκαλος μπορεί να μεταφέρει στο μαθητή κάποιες γνώσεις, χωρίς όμως να τον βοηθήσει ουσιαστικά, χωρίς να τον εμπνεύσει και χωρίς να του δώσει κίνητρο για την επίτευξη υψηλών στόχων. Η τρίτη περίπτωση είναι να αποθαρρύνει τον μαθητή από την ωραία γνωστική διαδικασία, γεγονός που θα επηρεάσει αρνητικά την εξέλιξή του τα επόμενα χρόνια. Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις ο δάσκαλος εφαρμόζει, σε μικρό ή μεγάλο βαθμό, τη μεθοδολογία της *μετασχηματίζουσας μάθησης*. «*Η μετασχηματίζουσα μάθηση αναφέρεται στη διεργασία κατά την οποία μετασχηματίζουμε δεδομένα πλαίσια αναφοράς (νοητικές συνήθειες, νοηματοδοτικές προοπτικές, νοητικά σύνολα) έτσι ώστε αυτά να γίνουν πιο περιεκτικά, πολυσχιδή, ανοικτά, συναισθηματικά έτοιμα για αλλαγή και στοχαστικά, προκειμένου να παραγάγουν πεποιθήσεις και απόψεις που θα αποδειχθούν περισσότερο αληθινές ή πιο ικανές να δικαιολογήσουν την παρώθηση σε δράση.*» (Merizow, 1990 & 2007). Τα *πλαίσια αναφοράς*, που αναφέρονται παραπάνω, είναι οι πολιτισμικές και γλωσσικές δομές μέσω των οποίων ο άνθρωπος δίνει νόημα στις εμπειρίες του. Στην καθημερινότητά του ο άνθρωπος βιώνει πολλές εμπειρίες, αλλά αυτές αποκτούν σημασία όταν τις αξιολογεί με βάση τις γνώσεις του, τα συναισθήματά του και άλλες εμπειρίες που ήδη έχει. Επίσης, πολύ σημαντικό ρόλο κατέχει ο διάλογος τον οποίο αναπτύσσει ο άνθρωπος με άλλα άτομα τα οποία έχουν και αυτά τις δικές τους *απόψεις*, εμπειρίες και συναισθήματα. Κατά αυτόν τον τρόπο, ο κάθε ένας δημιουργεί προδιαθέσεις με βάση τις οποίες οριοθετεί τη «*γραμμή δράσης*» του, με αποτέλεσμα να αποκτά ισχυρή τάση να απορρίπτει νέες εμπειρίες και ιδέες που εμφανίζονται στη ζωή του, οι οποίες δεν συμβαδίζουν με αυτές τις προδιαθέσεις. Ένα πλαίσιο αναφοράς, λοιπόν, έχει δύο διαστάσεις. Η μία είναι οι *νοητικές συνήθειες* και η άλλη είναι οι *απόψεις* που πηγάζουν από αυτές. Οι *νοητικές συνήθειες* είναι οι προδιαθέσεις σκέψης, συναίσθησης και δράσης που διαμορφώνει ο άνθρωπος καθώς στην καθημερινότητά του επηρεάζεται από πολιτισμικούς, κοινωνικούς, οικονομικούς, πολιτικούς, ψυχολογικούς και άλλους παράγοντες μέσα από τις εμπειρίες που βιώνει, τα άτομα με τα οποία συναναστρέφεται και τα πρότυπα που έχει. Οι *νοητικές συνήθειες* έχουν ως λογικό επακόλουθο τη διαμόρφωση απόψεων από τον κάθε άνθρωπο οι οποίες είναι καθοριστικές για το παρόν και το μέλλον του και συνήθως δύσκολα μπορεί να τις αναθεωρήσει.

Τη θεωρία της μετασχηματίζουσας μάθησης ο Mezirow την εφάρμοσε σε προγράμματα που αφορούσαν στην εκπαίδευση ενηλίκων. Πώς εμείς ως εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μπορούμε να εφαρμόσουμε στο μέγιστο βαθμό τη μετασχηματίζουσα μάθηση στους μαθητές μας;

Με τον όρο «ενήλικος» ο Mezirow εννοεί το οποιοδήποτε άτομο είναι αρκετά μεγάλο ηλικιακά ώστε να θεωρείται υπεύθυνο για τις πράξεις του, να είναι σε θέση να κατανοήσει διάφορα ζητήματα και να παίρνει τις δικές του αποφάσεις. Οι μαθητές, λοιπόν, στις τάξεις του γυμνασίου και ακόμα περισσότερο στις τάξεις του λυκείου, ειδικά στις μέρες μας, που έχουν πολλές διαφορετικές πηγές ενημέρωσης και πολλά περισσότερα από ένα πρότυπα χάρη στο ίντερνετ και τα μέσα κοινωνικής δικτύωσης, έχουν αναπτύξει τη δική τους «γραμμή δράσης». Οι μαθητές που φοιτούν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν έχουν την ωριμότητα που έχει ένας τελειόφοιτος φοιτητής, ένας εργαζόμενος ή ένας γονιός αλλά βρίσκονται σε μία πολύ κρίσιμη καμπή της ζωής τους κατά την οποία διαμορφώνουν σε ένα σημαντικό βαθμό την προσωπικότητά τους, έχοντας όμως αναπτύξει ήδη ορισμένες νοητικές συνήθειες και έχοντας προσωπική άποψη για πολλά ζητήματα.



Επομένως, οι συνθήκες στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι ιδανικές για την εφαρμογή της μεταχηματίζουσας μάθησης διότι οι δάσκαλοι με τη σχεδόν καθημερινή επαφή με τους μαθητές τους, έχουν τη δυνατότητα να τους επηρεάσουν σημαντικά, προκαλώντας κάποια θετική αλλαγή στις νοητικές τους συνήθειες. Ο Mezirow αναφέρει πως η βίωση μίας θετικής εμπειρίας μπορεί να αλλάξει κάποια από τις *απόψεις* του ανθρώπου αλλά όχι απαραίτητα και τις νοητικές του συνήθειες, ωστόσο ο δάσκαλος μπορεί να μεταμορφώσει προς το καλύτερο τις συνήθειες και τη νοοτροπία των μαθητών του, προσφέροντάς του θετικά βιώματα σε καθημερινή βάση.

Για τη μετασχηματίζουσα μάθηση, λοιπόν, δίνεται ένας εναλλακτικός ορισμός: *«Αυτή η μάθηση μπορεί να ορισθεί ως εκείνη που προκαλεί αλλαγή της προσωπικότητας ή αλλαγές στην οργάνωση του εαυτού και χαρακτηρίζεται από την ταυτόχρονη αναδόμηση όλων των σχημάτων και προτύπων του μαθητή»* (Illeris, 2009). Αυτή η μέθοδος μάθησης επιφέρει ρήγμα, αλλαγή στη νοοτροπία του νέου και στην όλη δομή του προγράμματός του προς το καλύτερο. Στη ζωή του πλέον τίθενται νέοι στόχοι και η σημαντική αυτή αλλαγή βιώνεται από τον μαθητή μέσα από την προσπάθεια ως ένα αίσθημα ικανοποίησης, κατάκτησης και αυτοπεποίθησης. Πιο συγκεκριμένα, στην προεφηβική και στην εφηβική ηλικία μπορούμε και πρέπει να παρέχουμε σε όλους τους νέους «κανονικές» και επαρκείς συνθήκες αυτοανακάλυψης και προόδου. Τα μαθηματικά, η γλώσσα και τα υπόλοιπα μαθήματα δεν μαθαίνονται με το λίγο διάβασμα, το οποίο περιορίζεται σε εφαρμογές τύπων και αποστήθιση πληροφοριών. Η απόκτηση στέρεης γνώσης απαιτεί επαναλήψεις, ενδιαφέρον και σοβαρή προσπάθεια. Αυτό ο μαθητής μπορεί να το πετύχει με την επίδραση του γονιού του, ενός φίλου του και με τη βοήθεια ενός δασκάλου του. Μπορεί να επηρεαστεί από ένα βιβλίο βιογραφικής ιστορίας ή της ιστορίας των Ελλήνων του 5ου π.Χ. αιώνα, ή από τη λύση πολλών ασκήσεων μαθηματικών κλιμακούμενης δυσκολίας κ.α.. Στην περίπτωση του δασκάλου, είναι υποχρέωσή του να προκαλέσει το ενδιαφέρον του μαθητή, να αναδείξει τη χρησιμότητα του αντικειμένου που διδάσκει και να εμπλέκει το μαθητή σε δραστηριότητες στις οποίες θα έχει ο ίδιος ενεργό ρόλο. Έτσι, βαθμιαία γίνεται ο μετασχηματισμός στη σκέψη του και η στροφή του προς τα πνευματικά ενδιαφέροντα. Επιπρόσθετα, αν ασχοληθεί με τη γυμναστική ατομικά ή συγκεκριμένα με κάποιο άθλημα, αρχικά σε μικρό βαθμό και στη συνέχεια με την πάροδο του χρόνου όλο και περισσότερο, χωρίς να παραμελεί το διάβασμα, θα έχει θεαματικά αποτελέσματα και σίγουρη ωφέλεια για τη σωματική, την πνευματική και την ψυχική υγεία του. Παρόμοια δυναμική μπορεί να έχει η ενασχόληση με τη μουσική, με τη ζωγραφική, τη συγγραφή και άλλα δημιουργικά χόμπυ. Έτσι, λοιπόν, ο μαθητής υιοθετεί έναν τρόπο ζωής με έντονο και ευχάριστο καθημερινό πρόγραμμα, το οποίο θα έχει ως οδηγό για το υπόλοιπο της ζωής του. Επίσης, αν και μία μεμονωμένη θετική εμπειρία δεν είναι ικανή να αλλάξει ολοκληρωτικά τις συνήθειες και την νοοτροπία ενός ανθρώπου, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για μία μεγάλη αλλαγή. Για παράδειγμα, μια διάκριση σε ένα τομέα, είτε ένα αρνητικό βίωμα, μια κατάσταση που θα τον αναγκάσει να ενεργοποιήσει κρυμμένες δυνάμεις του για να ανταπεξέλθει και να βγει νικητής, είναι εμπειρίες που προκαλούν στο νέο έντονα συναισθήματα. Έτσι, **οι δυνατότητές του βαθμιαία μετατρέπονται σε ικανότητες** και η αλλαγή του προς το καλύτερο είναι βέβαιη. Η ικανοποίηση που παίρνει ο μαθητής από την πνευματική ή σωματική κατάκτηση, είναι πολύ περισσότερη από ό,τι παίρνει από επουσιώδεις ενασχολήσεις του. Ο δάσκαλος, ο γονιός, το σχολείο, πέρα από το ήθος και την καλή συμπεριφορά που διδάσκουν επίμονα, μπορούν και πρέπει να επιδιώκουν τη μετασχηματίζουσα τον μαθητή μάθηση. **Μπορούν μάλιστα να το έχουν και σαν μέτρο της αυτοαξιολόγησής τους**, να βλέπουν δηλαδή ότι η προσπάθειά τους μετασχηματίζει ουσιαστικά τον ή τους πολλούς μαθητές τους προς ψηλότερα επίπεδα στοχασμού και δράσης, τα οποία σπανίως αποχωρίζονται στη ζωή τους. Είναι ένα μεγάλο ζητούμενο η διαρκής βελτίωση του μαθητή με τη συνακόλουθη ικανοποίηση του, χωρίς κανένα άγχος, χωρίς να απομακρύνεται από ένα δημιουργικό πρόγραμμα. Στη ζωή του πλέον θέτει νέους στόχους και έχει πετύχει μία σημαντική αλλαγή. Ειδική αναφορά πρέπει να γίνει στην αξία της συμβολής του δασκάλου στο μετασχηματισμό του μαθητή την εποχή του κορωνοϊού. Οι μαθητές την τελευταία διετία, συνήθισαν σε ένα διαφορετικό τρόπο ζωής, ο οποίος βασίστηκε κατά κύριο λόγο στα τεχνολογικά μέσα. Παρά τις λύσεις που προσέφεραν σε μία πολύ ιδιαίτερη και δύσκολη περίοδο, μέσω αυτών τα παιδιά, και πολύ περισσότερο οι μαθητές που δυσκολεύονταν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του σχολείου, βρήκαν νέους τρόπους διασκέδασης, ψυχαγωγίας και εκπαίδευσης, οι οποίοι όμως είναι «εικονικοί» και δεν μπορούν να αντικαταστήσουν εκείνους που στηρίζονται στην επικοινωνία, το διάλογο και την ανάπτυξη προσωπικών σχέσεων. Με δεδομένες αυτές τις συνθήκες αποτελεί ζητούμενο η στροφή των νέων σε μορφές συνεχούς και σημαντικής προσπάθειας στη Σκέψη, στη Γνώση και στην Άθληση, χωρίς να αποχωρίζονται τα επί μέρους αντικείμενα που τους αρέσουν. Η βιωματική δραστηριότητα πρέπει και μπορεί να αποτελέσει αντίδοτο στην καλπάζουσα εικονική πραγματικότητα της τεχνολογίας, η οποία παρά τα σημαντικά οφέλη της, πολλές φορές παγιδεύει τους νέους με καταστροφικά αποτελέσματα για την πρόοδό τους και την κοινωνικοποίησή τους.

Βιβλιογραφία: Illeris, K. (2009). *Σύγχρονες Θεωρίες Μάθησης.* Εκδ. Μεταίχμιο, Αθήνα.
Mezirow, J. (1990). *Fostering critical reflection in adulthood.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
Mezirow, J. (2007). *Η μετασχηματίζουσα μάθηση.* Εκδ. Μεταίχμιο, Αθήνα.

Η ιστορία ορισμένων συμβόλων

Φώτης Κουνάδης

Στην Παλαιά Διαθήκη γίνεται αναφορά στους κατοίκους της Μεσοποταμίας που θέλησαν να κατασκευάσουν ένα κτίριο τόσο ψηλό που θα έφτανε στον ουρανό, με σκοπό να αποκτήσουν φήμη και δύναμη. Το κτίριο αυτό ήταν **ο Πύργος της Βαβέλ.**

Η αλαζονική αυτή συμπεριφορά όμως θεωρήθηκε βλασφημία προς το Θεό.

Ως συνέπεια οι κατασκευαστές άρχισαν να μιλούν σε διαφορετικές γλώσσες με αποτέλεσμα να καταστεί αδύνατη η συνεννόηση μεταξύ τους και η ολοκλήρωση του έργου.

Η αναφορά αυτή επιχειρεί να εξηγήσει από θρησκευτικής άποψης την ποικιλία των γλωσσών στον κόσμο.

Υπάρχει πάντως μια διεθνής γλώσσα συννενόησης μεταξύ των ανθρώπων, ίσως η πλέον διαδεδομένη και δεν είναι άλλη από την συναρπαστική γλώσσα των συμβόλων.

Ας δούμε ένα παράδειγμα: Ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του. Στο γινόμενο προσθέτουμε το 10 και στη συνέχεια διαιρούμε το αποτέλεσμα δια του 5. Από το πηλίκο που προκύπτει αφαιρούμε το 7. Η μεταφορά της παραπάνω πρότασης με μαθηματικά σύμβολα είναι: $\frac{x^2+10}{5}-7$. Και αν χρειαζόταν να γράψουμε την αρχική πρόταση 2 ή 3 φορές; Σίγουρα η μαθηματική της απόδοση είναι πιο συμφέρουσα.

Τα σύμβολα « + » και « – »

Το σύμβολο « + » που συνδέει δύο ή περισσότερους προσθετέους (όρους) στην πράξη της πρόσθεσης φαίνεται να χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Γερμανό μαθηματικό Johannes Widmann το 1489 στο έργο του με τίτλο «Γρήγοροι και εύχρηστοι υπολογισμοί για όλους τους εμπόρους», όπου πιθανότατα το συγκεκριμένο σύμβολο παριστάνει το κέρδος.

Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το « + » προέρχεται από το αρχικό γράμμα **p** της Αγγλικής λέξης **p**lus (συν) που ύστερα από μερικές τροποποιήσεις πήρε τη γνωστή σημερινή του μορφή:

p → p → → +


72
4 + 5 Wiltu das wyssen oder desgleychen / So summier
4 — 17
3 + 30
4 — 19 die zentner und
3 + 44 lb unnd was auß
3 + 22 —ist / das ist mi-
zentner 3 — 11 lb nus dz setz besonder unnd werden
3 + 50
4 — 16 4539 lb (So
3 + 44 du die zendener
3 + 29 zů lb gemachet
3 — 12 hast unnd das /
3 + 9 + das ist mer
darzů Addierest) und 75 minus. Nun
sole du für holz abschlahen allweeg für
ain legel 24 lb. Und das ist 13 mal 24.
und macht 312 lb darzů addier das —
das ist 75 lb und werden 387. Dye subtrahier von 4539. Und bleyben 4152
lb. Nun sprich 100 lb das ist ein zentner
pro 4 ft 5/? wie kumen 4152 lb und kumē
171 ft 5 ß 4 heller ? Und ist recht gmacht

Pfeffer

Ο ίδιος μαθηματικός εισάγαγε και το **σύμβολο « – »** της αφαίρεσης για να δηλώσει τη ζημιά. Ενδεχομένως προηγούμενα να χρησιμοποιήθηκε το γράμμα **m**, αρχικό της λατινικής λέξης ***minus*** (μείον) και να είχε στην πορεία την ακόλουθη εξέλιξη:

Τα σύμβολα «•» και « : »

Τα σύμβολα αυτά χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Αρχικά για τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο « x ». Επειδή αυτό όμως το χρησιμοποιούμε και ως γράμμα για την ονομασία μιας άγνωστης ποσότητας, ο Γερμανός μαθηματικός Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1710) το αντικατέστησε με τη γνωστή μας τελεία ενώ για τη διαίρεση εισάγει τις δύο τέλειες. Πάντως τα σύμβολα « x » για τον πολλαπλασιασμό και « / » για τη διαίρεση χρησιμοποιούνται ακόμη τόσο σε βιβλία όσο και στα πληκτρολόγια των αριθμομηχανών.

Τα σύμβολα « = » και « ≠ »

Ο Ουαλός γιατρός και μαθηματικός Robert Record, 16^{ος} αιώνας, θεωρείται ότι εισήγαγε την Άλγεβρα στην Αγγλία. Προφανώς κουράστηκε να επαναλαμβάνει συνέχεια τις λέξεις «ισούται με», οπότε σε ένα σύγγραμμά του τις αντικατέστησε με το γνωστό μας σύμβολο με τις δύο παράλληλες και ίσες γραμμούλες: « = ». Πράγματι ο συμβολισμός αυτός που περιέχει μία σαφή ισότητα μεταξύ δύο τμημάτων αποδίδει ικανοποιητικά τη σχέση ισότητας μεταξύ δύο ποσοτήτων. Άμεσα προκύπτει ότι ένα διαγραμμένο « = », δηλαδή το σύμβολο « ≠ », μπορεί να εκφράσει τη διαφορετικότητα μεταξύ δύο μεγεθών.

Τα σύμβολα « < » και « > »

Τα σύμβολα αυτά χρησιμοποιούνται στις ανισοτικές σχέσεις. Το « < » για το μικρότερο και το « > » για το μεγαλύτερο εισάγονται για πρώτη φορά από τον Άγγλο μαθηματικό και αστρονόμο Thomas Harriot (1560-1621). Παρατηρούμε ότι το « < » μεγαλώνει προς τα δεξιά ενώ το « > » μεγαλώνει προς τα αριστερά.

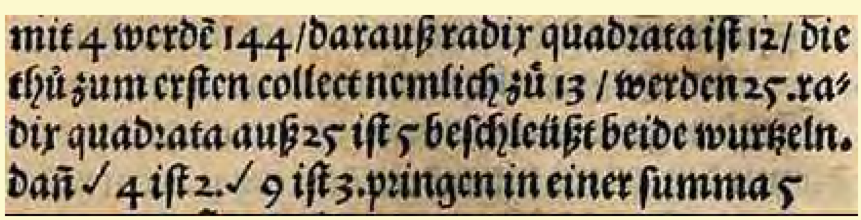
Το σύμβολο « $\sqrt{\ }$ » της τετραγωνικής ρίζας

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός x που όταν υψωθεί στο τετράγωνο θα μας δώσει τον αριθμό α.

Δηλαδή αν $\sqrt{\alpha} = x$, τότε $x^2 = \alpha$ με $\alpha,\ x \geq 0$.

Ο Γερμανός μαθηματικός Christoph Rudolff το 1525 εισήγαγε το γνωστό μας σύμβολο της ρίζας. Η προέλευση του συμβόλου προέρχεται από το αρχικό γράμμα **r** της λέξης ***radix*** (ρίζα).

r → r → $\sqrt{\ }$


mit 4 werdē 144/darauß radix quadrata ist 12/ die
thů zum ersten collect nemlich zů 13 / werden 25. ra-
dix quadrata auß 25 ist 5 beschleüßt beide wurtzeln.
dañ √ 4 ist 2. √ 9 ist 3. pringen in einer summa 5

Καταλήγουμε ότι τα σύμβολα απλοποιούν σε μεγάλο βαθμό την μαθηματική μεταφορά λεκτικών σχημάτων. Η κατάχρησή τους όμως περιέχει τον κίνδυνο να αλλοιωθεί η ίδια η γλώσσα και να καταστήσει τα μαθηματικά λιγότερο ελκυστικά.

Το παράδειγμα είναι από ένα εξαιρετικό βιβλίο Άλγεβρας Β΄ Λυκείου του 1978:

Ορισμός: $\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_o = \nu_o(\varepsilon): |\alpha_\nu| < \varepsilon\ \forall \nu \geq \nu_o$. Τι καταλάβατε;

Στις μέρες μας τα σχολικά βιβλία επιχειρούν να περιορίσουν τη χρήση των μαθηματικών συμβόλων στα απολύτως απαραίτητα και να χρησιμοποιούν περισσότερο λέξεις όπως «οπότε», «άρα», «τότε και μόνο τότε», «για κάθε», «υπάρχει», κ.λ.π.

Τα μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Ουδέν ούτω δύναμιν έχει παίδειον μάθημα μεγάλην ως η περί τους αριθμούς διατριβή. Το δε μέγιστον ότι τον νυστάζοντα και αμαθή φύσει εγείρει και ευμαθή και αγχίνουν απεργάζεται.
Πλάτων, Νόμος *747b.*

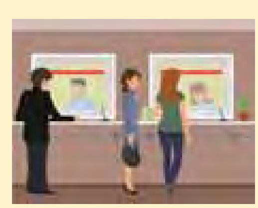
Σε μετάφραση: *Κανένα μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο η ενασχόληση με τους αριθμούς. Το πιο σημαντικό απ' όλα είναι ότι τον κοιμισμένο στο μυαλό, τον χωρίς κλίση για μάθηση τον διεγείρει και τον κάνει να μαθαίνει και του αυξάνει την αντιληπτική ικανότητα.*

Γνωρίζετε ότι:

- Ο Ερατοσθένης ήταν ξεχωριστή προσωπικότητα. Ήταν αθλητής, Αστρονόμος, Γεωμέτρης, ποιητής, ρήτορας. Είναι ο πρώτος που μέτρησε την ακτίνα της Γης. Σπούδασε στην Ακαδημία της αρχαίας Αθήνας, υπήρξε διευθυντής της μεγάλης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και στενός φίλος του Αρχιμήδη. Κατά τη διάρκεια ταξιδιού του στο Νείλο προσβλήθηκε από ασθένεια των ματιών και τυφλώθηκε. Έτσι δεν μπορούσε πλέον να βλέπει τον ουρανό και να παρατηρεί τ΄ αστέρια. Κλεισμένος στη βιβλιοθήκη του, στερούσε τον εαυτό του από την τροφή και πέθανε.
- Ο Μπλέζ Πασκάλ (1623-1662) ήταν ένα παιδί θαύμα; Γεννήθηκε στο Κλερμόν της Γαλλίας. Σε ηλικία 3 ετών έχασε τη μητέρα του. Ο πατέρας του ήταν φοροεισπράκτορας, ερασιτέχνης μαθηματικός και του είχε απαγορεύσει τη μελέτη μαθηματικών βιβλίων πριν γίνει 15 ετών! Όμως ότι είναι απαγορευμένο εξάπτει την περιέργεια, έτσι ο Πασκάλ δώδεκα ετών έδειξε μεγάλη πρόοδο στη Γεωμετρία και ο πατέρας του αναγκάστηκε να του επιτρέψει τη μελέτη στο έργο, Στοιχεία του Ευκλείδη. Ως έφηβος κατασκεύασε την πρώτη αριθμομηχανή που ονομάστηκε «Πασκαλίνα».
- Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) διατύπωσε τη διάκριση μεταξύ των λέξεων **γνώση** και **γνώμη**. Θεώρησε δηλαδή ότι η γνώση αφορά σε κάτι **που είναι** σωστό ή λάθος, ενώ η γνώμη σε κάτι **που μπορεί να είναι** σωστό ή λάθος. Έδωσε επίσης τις έννοιες του **τυχαίου**, του απροσδόκητου και της **σχετικής συχνότητας**. Θεωρούσε όμως ότι το τυχαίο δεν είναι επιστημονική έννοια, αλλά οφείλεται στη δική μας αδυναμία να ερμηνεύσουμε τα φαινόμενα.
- Το τυχαίο χρησιμοποιήθηκε στην Αθηναϊκή πολιτεία. Στη νομοθεσία του Δράκοντα (624 ή 621 π.Χ.) η επιλογή των αρχόντων (βουλευτές, στρατηγοί) γινόταν με κλήρο και όχι με εκλογή. Όμως όσοι κληρώνονταν για μια θητεία δεν μετείχαν στην επόμενη κλήρωση.
- Η λέξη κλίμα(το κλίμα ενός τόπου) προήλθε από την κλίση των ακτινών του ήλιου στο συγκεκριμένο τόπο.
- Τα πρόβατα που θάβονται από χιονοστιβάδες, μπορούν να επιζήσουν μέχρι και 2 εβδομάδες;
- Οι Εσκιμώοι χρησιμοποιούν ψυγεία για να προστατεύσουν το φαγητό τους από το ψύχος κρατώντας το σε σταθερή θερμοκρασία μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος;

ΓΡΙΦΟΙ

Τα πουλιά: Κάποιος αγόρασε με 30 Ευρώ 30 πουλιά (Καναρίνια, Παπαγάλους, Περιστέρια). Τρία Καναρίνια αξίζουν 2 Ευρώ. Επίσης 2 Παπαγάλοι και 1 Περιστέρι αξίζουν 2 Ευρώ. Πόσα πουλιά πήρε από κάθε είδος;

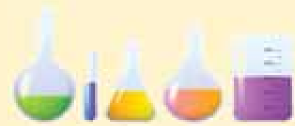


Το λάθος του ταμία: Η Αργυρώ πήγε στην τράπεζα και εξαργύρωσε μια επιταγή. Ο ταμίας όμως κατά λάθος το ακέραιο μέρος του ποσού το πλήρωσε σε λεπτά και το δεκαδικό σε Ευρώ. Η Αργυρώ, αγόρασε ένα καπέλο και πλήρωσε 9,20 Ευρώ αλλά πρόσεξε ότι τα χρήματα που της περίσσεψαν είναι διπλάσια από αυτά που έγραφε η επιταγή. Μήπως μπορείτε να βρείτε πιο ποσό έγραφε η επιταγή;

Αλλαγή χρημάτων: Ένας πελάτης μπαίνει σε μία τράπεζα, δίνει στον ταμία 2 χαρτονομίσματα των 100 Ευρώ το καθένα και λέει: Θέλω να μου αλλάξεις αυτά τα 200 Ευρώ σε νομίσματα του ενός και δύο Ευρώ και σε χαρτονομίσματα των 5 Ευρώ, αλλά τα 2ευρα να είναι δεκαπλάσια από αυτά του ενός Ευρώ. Πόσα χρήματα από το κάθε είδος θα δώσει ο ταμίας;

Μάντεψε τι νούμερο παπούτσια φοράει: Ζητήστε από το φίλο σας να γράψει σε ένα χαρτί το νούμερο των παπουτσιών του (π.χ.42) να το πολλαπλασιάσει επί 5, να προσθέσει 50 μονάδες στη συνέχεια να πολλαπλασιάσει με το 20 στο αποτέλεσμα να προσθέσει 1022 και τέλος να αφαιρέσει το έτος γέννησης του. Από το αποτέλεσμα μαντέψτε τώρα την ηλικία του. Μπορείτε

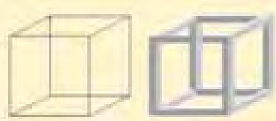
Η σειρά των αριθμών: Ένας μαθητής έγραψε τους αριθμούς από το 4 μέχρι το 23, τον έναν δίπλα στον άλλο. Ο φίλος του με τον ίδιο τρόπο έγραψε τους αριθμούς από το 2 μέχρι το 22 . Μπορείτε να μετακινήσετε δύο αριθμούς ώστε οι δύο αυτές σειρές να γίνουν ίδιες;



Ο όγκος: Ένα λίτρο λάδι έχει βάρος 0,911 γραμμάρια. Ένα λίτρο Οινόπνευμα έχει βάρος 0,790 γραμμάρια. Έχω 500 γραμμάρια λάδι και 500 γραμμάρια οινόπνευμα, πιο έχει το μεγαλύτερο όγκο;

Το μπουκάλι: Έχω ένα μπουκάλι που γεμίζει με 800 γραμμάρια νερό. Αν στο μπουκάλι αυτό βάλω 800 γραμμάρια οινόπνευμα θα γεμίσει ή όχι;

Ο αριθμός: Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό μεταξύ των αριθμών 5 και 6 που να γράφεται με τα ίδια ψηφία και ένα ακόμα μαθηματικό σύμβολο;



Βλέπω τον κύβο: Σε ένα κύβο πόσες το πολύ πλευρές του μπορούμε να δούμε από κάποια θέση;

Απαντήσεις στους γρίφους τ. 123

Τα θέματα: Αν το πλήθος των θεμάτων είναι Θ και η ταχύτητα απάντησης από τα παιδιά $υ_Δ$, $υ_Τ$, $υ_Σ$, τότε στον ίδιο χρόνο έχουμε για τη Δήμητρα Θ:$υ_Δ$, για τον Τάκη 18:$υ_Τ$ και τη Σοφία 15:$υ_Σ$ δηλαδή Θ:$υ_Δ$ = 18:$υ_Τ$ =15:$υ_Σ$ και όταν τελείωσε ο Τάκης Θ:$υ_Τ$=20:$υ_Σ$. Άρα Θ:20=$υ_Τ$:$υ_Σ$ και από την προηγούμενη $υ_Τ$:$υ_Σ$ =18:15 συνεπώς Θ:20=18:15 ή Θ=24 θέματα είχε ο διαγωνισμός.

Το πλαίσιο: Είναι ορθογώνιο αν έχει ίσες διαγώνιες. Μπορώ να τις συγκρίνω με μια κλωστή.

Ο Κύβος και το Τετράγωνο: *Είναι ο 64 = 8^2 = 4^3. Τριψήφιος είναι ο 729 = 27^2 = 9^3*

Με 5 5ντάρια: $1=555^{5-5}$
2=5-(5+5+5)/5
3=5-5/5-5/5
4=(5+5+5+5)/5
5=5+(5-5)/55
6=5+(5+5-5)/5
7=5+5/5+5/5
8=5+(5+5+5)/5
9=ριζα5χ5+5-5/5
10=55/5-5/5

Ένα μεγάλο έργο: Ότι ισχύει για μια μπάλα μπάσκετ και για ένα μπαλάκι του τένις το ίδιο και για τη Γη (όταν θεωρείται σφαίρα).
Ας το δούμε λίγο. Το μήκος του κύκλου μας το δίνει ο μαθηματικός τύπος $\boxed{L=2πρ}$, όπου: L: το μήκος του κύκλου π: ο αριθμός (3,14159…) και ρ: η ακτίνα του κύκλου . Παρατηρούμε όμως ότι τα μεγέθη L και **ρ** είναι ευθέως ανάλογα.

Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα στο μπαλάκι διπλασιάζεται το μήκος της περιφέρειας στο μπαλάκι, ή αν διπλασιάσουμε το μήκος της περιφέρειας της Γης διπλασιάζεται η ακτίνα της.

Αυξάνουμε τώρα ένα μέτρο το μήκος του κύκλου $\boxed{L=2\pi\rho}$ και έχουμε $\boxed{L+1=2\pi\rho'}$.

Τότε το $\rho'=\frac{L+1}{2\pi}=\frac{L}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}=\rho+\frac{1}{2\pi}=\rho+$ περίπου 0,16. Βλέπουμε ότι η ακτίνα μεγαλώνει κατά 0,16 μέτρα όταν αυξάνουμε το μήκος της περιφέρειας 1 μέτρο. Ανεξάρτητη από το μέγεθος (Γη, μπάλα, μπαλάκι). Άρα ο δρόμος είναι από Α μέχρι Β είναι 1/8x40.000.000=5.000 χιλιόμετρα. Το καλώδιο 4μέτρα:0,16=25μέτρα και 25:8=3,125 άρα 5.000 χιλ+3,125μέτρα. Η γραμμή μετρό 8μέτρα:0,16=50μέτρα και 50:8=6,25 μέτρα. Άρα η γραμμή μετρό 5.000χιλ-6,25μέτρα.

Το 222 και ο 3ψήφιος: Το άθροισμά τους είναι: 735+753+375+357+537+573=
=2(7+3+5).100+ 2(7+3+5).10+2(7+3+5)=2(7+3+5)(100+10+1)=2.15.111=3330=
=222.15= 222x(άθροισμα των ψηφίων του αριθμού).

Κόψτον σε κύβους: Οι αριθμοί $153=1^3+5^3+3^3$ και $371=3^3+7^3+1^3$

Υπάρχουν και άλλοι όπως $407=4^3+0^3+7^3$

$16^3+50^3+33^3=165033$

$166^3+500^3+333^3=166500333$

$1666^3+5000^3+3333^3=166650003333$

Τα Αρνιά: Είχε x+14 πρόβατα μείον 14 που έφαγε ο Λύκος έμειναν x από αυτά πήρε $\frac{x}{2}$ αρνιά.

Όμως παίρνει $\left(\frac{x}{2}-50\right)\cdot 2+50=200$ λίτρα γάλα. Άρα x=250 δηλαδή έχει 125 αρνιά.

Τα Γενέθλια: Σύμφωνα με τα δεδομένα τα γενέθλια του Μιχάλη είναι την Πέμπτη.

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
			Μιχάλης	

Τα γενέθλια του Γιώργου είναι κάποιες μέρες πριν από του Μιχάλη, επομένως του Γιώργου είναι τη Δευτέρα είτε την Τρίτη είτε την Τετάρτη.
Τα γενέθλια του Βασίλη είναι μετά του Αδάμ. Επομένως τα γενέθλια του Αδάμ δεν μπορεί να είναι Παρασκευή.
Ο Γιάννης είναι δύο μέρες μεγαλύτερος από τον Αδάμ. Επομένως ο Αδάμ δεν μπορεί να έχει γενέθλια Δευτέρα ή Τρίτη. Οπότε τα γενέθλια του Αδάμ είναι Τετάρτη.

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
		Αδάμ	Μιχάλης	

Λόγω του ότι ο Γιάννης είναι δύο μέρες μεγαλύτερος από τον Αδάμ, ο Γιάννης έχει γενέθλια τη Δευτέρα

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Γιάννης		Αδάμ	Μιχάλης	

Τα γενέθλια του Βασίλη είναι μετά του Αδάμ. Άρα ο Βασίλης έχει γενέθλια την Παρασκευή

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Γιάννης		Αδάμ	Μιχάλης	Βασίλης

Οπότε υποχρεωτικά του Γιώργου είναι την Τρίτη. Δηλαδή του Γιάννη είναι τη Δευτέρα, του Γιώργου την Τρίτη, του Αδάμ την Τετάρτη, του Μιχάλη την Πέμπτη και του Βασίλη την Παρασκευή.

Ο 3ψήφιος: Το ψηφίο των εκατοντάδων του αριθμού είναι οκτώ μονάδες μικρότερο από το ψηφίο των δεκάδων του, το ψηφίο των εκατοντάδων του πρέπει να είναι 1 και το ψηφίο των δεκάδων του οκτώ μονάδες μεγαλύτερό του, δηλαδή 9. Καθώς το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού είναι έξι μονάδες περισσότερο από το ψηφίο των μονάδων του, το ψηφίο των μονάδων του αριθμού είναι $9-6=3$. Άρα ο αριθμός είναι ο 193.

Ο Στόχος: Μπορούμε τις 10 ζώνες του στόχου να τις βαθμολογήσουμε με αυξανόμενη αξία πόντων αρχίζοντας από την εξωτερική με 1 πόντο, μετά 2, 3 κ.λπ. μέχρι 10 πόντοι στο κέντρο.

Πράγματι, τότε ο παίχτης Α συγκεντρώνει: 1+2+3+4+5+5+7+8+9+10=55 πόντους. Επομένως ο παίχτης Β σκοράρει 5+7+8+9=29 πόντους.

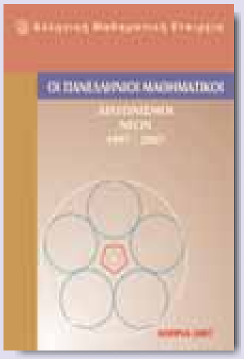
Οι κορύνες: Με δοκιμές παρατηρούμε ότι 33+39+48=120. Οπότε πρέπει να κτυπηθούν 3 κορύνες με τους παραπάνω αριθμούς.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές

Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Νέα τιμή βιβλίου: 15€

Διαγωνισμοί

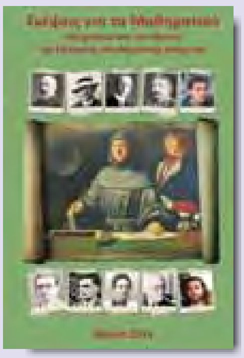
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ

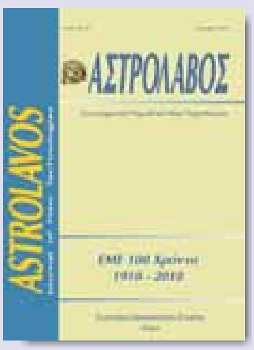
Τιμή βιβλίου: 18€



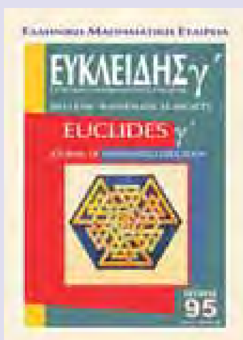
Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

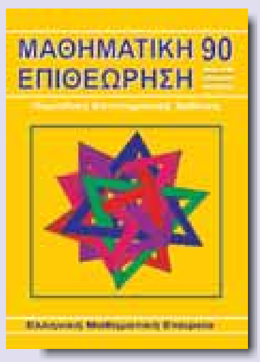
Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr