ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

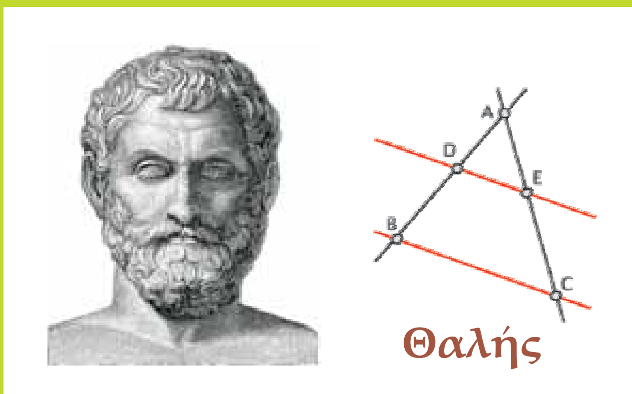
123

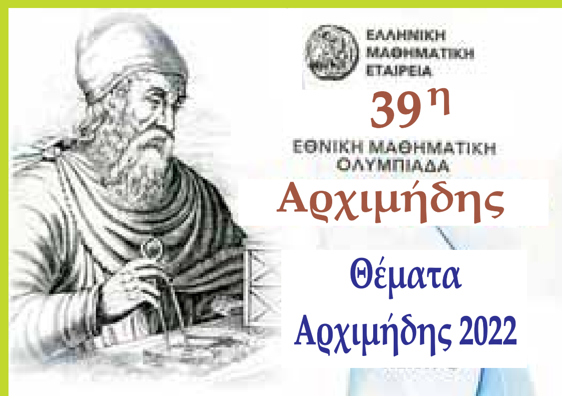
ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2022 ευρώ 3,5





Αρχαία Ολυμπία

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Κ+7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 123 - Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2022 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη

Γενικά Θέματα

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	5 Νοεμβρίου	2021
Ευκλείδης:	Δεν έγινε	
Αρχιμήδης:	26 Φεβρουαρίου	2022

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,
με ψυχολογία ζωής
και ανάτασης στην αισιοδοξία,
μένουμε
πεισματικά ανειροπόλοι,
στην ελπίδα
της βελτίωσης από παντού,
στην καθημερινότητα
της απλότητας και του φυσιολογικού...
και όπως λέει και ο "ποιητής"...
γιατί υπάρχει σ' όλους κάτι
που δε χάνεται
υπάρχει σ' όλους κάτι
που το κρατάει σφιχτά η ζωή
στα δύο της χέρια (...)
αγαπάς
όλες τις γεωμετρίες των άστρων
αγαπάς
την κίνηση, τη ζωή, τον άνθρωπο (...)

Τίτος Πατρίκιος [1928 -]
ποιητής, ποιήματα Ι [1948-1954]

Η επιτροπή σύνταξης
Του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, η **επικαιρότητα**, μαζί με τις **δυσκολίες** της έκδοσης, έκαναν την προσπάθεια αυτή να φαίνεται όλο και πιο μακρινή ...

Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Εμμανουήλ Ιωάννης
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.** Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Αρχαία Ήλις. Η Γενέτειρα των Ολυμπιακών Αγώνων

Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

Η Ήλιδα ή Ήλις ήταν η πρωτεύουσα της ομώνυμης πόλης- κράτους της αρχαίας Ηλείας, κτισμένη, κατά τον Παυσανία[1], στην αριστερή όχθη του Πηνειού ποταμού. Ο Στράβων[2] επίσης αναφέρει ότι διαρρέεται από τον Πηνειό. Είναι πανάρχαια και ϊστορική, και απέκτησε τη μεγαλύτερη αίγλη ως διοργανώτρια πόλις - κράτος των Πανελλήνιων Αγώνων «τα Ολύμπια», των οποίων είχε την εποπτεία πλέον των 1200 ετών, από το 776 π.Χ. έως το 393 μ.Χ. Ο πληθυσμός της πόλης, κατά την ιστορική εποχή, ξεπερνούσε τις 60.000 κατοίκους.

Κάποια ερείπια της Ήλιδος ήταν ορατά μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα. Το 1968 οι εργασίες για να περάσει ένας αρδευτικός αγωγός έφεραν στο φως έναν αρχαιολογικό θησαυρό. Η ανασκαφή που ακολούθησε έφερε στο φως μέρος της αρχαίας πόλης που έσφυζε από ζωή, οργάνωση, δρόμους, ευρήματα πάσης φύσεως (μαρμάρινα, χάλκινα, πήλινα με νομίσματα).

Η Ήλις ανέδειξε πολλές προσωπικότητες του αρχαίου κόσμου κατά την περίοδο της ακμής της όπως ο **Ιππίας ο Ηλείος**[3] (5ος αι. π.Χ.), σοφιστής (το όνομα του οποίου φέρει το Παράρτημα Ηλείας της ΕΜΕ), ο Πύρρων (365-275 π.Χ.), σκεπτικός φιλόσοφος, ο μαθητής του Σωκράτη Φαίδων, ο φιλόσοφος της Μεγαρικής Σχολής Αλεξίνος και ο μαθητής του Πλάτωνα Φορμίων.

Ανέδειξε επίσης προσωπικότητες του αθλητισμού όπως ο ολυμπιονίκης ο **Κόροιβος ο Ηλείος** και ο Ίφιτος (9ος ή 8ος αι. π.Χ.), διοργανωτής των Ολυμπιακών αγώνων και εμπνευστής της ολυμπιακής εκεχειρίας. Παρακάτω γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε δύο από τις προσωπικότητες αυτές, το φιλόσοφο Πύρρωνα και τον ολυμπιονίκη Κόροιβο.

Πύρρων ο Ηλείος

Ο Πύρρων ο Ηλείος (Ήλιδα, περ. 360 π.Χ. – 270 π.Χ.) ήταν γιος του Πλειστάρχου, είχε δε και μιαν αδελφή την Φιλίστα, η οποία ήταν μαία. Ξεκίνησε ως ζωγράφος και στη συνέχεια μαθήτευσε στον Στίλπωνα[4]. Υπηρέτησε στον στρατό του Μεγάλου Αλεξάνδρου, παίρνοντας μέρος στην εκστρατεία των Ινδιών, όπου ήρθε σε επαφή με θεωρίες Ινδών σοφών, που είχαν το χαρακτηριστικό να φορούν λιτή περιβολή (Γυμνοσοφιστών), και Μάγων. Το γεγονός αυτό άλλαξε τη ζωή του, διαμορφώνοντας τη φιλοσοφία του που πήρε τη μορφή ενός **αγνωστικισμού**. Ο ίδιος ο Πύρρων δεν άφησε κανένα φιλοσοφικό σύγγραμμα η συλλογή πληροφοριών για τη διδασκαλία του έγινε από τους μαθητές του και, ιδιαίτερα, τον Τίμωνα και τον Φλιάσιο (320-230 π.Χ.). Τις πληροφορίες για τη ζωή

---

[1] Ο Παυσανίας (110μ.Χ. – 180μ.Χ.): ήταν Έλληνας περιηγητής και γεωγράφος από τη Λυδία της Μικράς Ασίας.
[2] Στράβων (63π.Χ. – 23μ.Χ.): Έλληνας γεωγράφος, φιλόσοφος και ιστορικός από την Αμάσεια της Μικράς Ασίας.
[3] Δείτε περισσότερα στο τεύχος **102** του **Ευκλείδη Β΄.**
[4] Αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος, (360 π.Χ. - 280 π.Χ.) από τα Μέγαρα.

του μας τις δίνει ο Διογένης Λαέρτιος[5]. Ο Πύρρων ήταν ξακουστός **για την ψυχική του γαλήνη**, συμπαθούσε την απλότητα των Κυνικών και επηρεασμένος από τον **Δημόκριτο** και το σκεπτικισμό των Σοφιστών, κήρυττε μία αδιατάρακτη ηρεμία μέσω της διαρκούς αμφιβολίας και της παραιτήσεως διδάσκοντας ότι η σιγουριά δεν είναι απόλυτη.

Η **αμφιβολία** είναι προφανές ότι είναι το πρώτο σκαλί της γνώσης, καθώς χωρίς αυτήν δεν υπάρχει αμφισβήτηση. Όταν κάποιος είναι βέβαιος για κάτι ποτέ δεν το ερεύνησε ούτε αύξησε τη γνώση του γι’ αυτό. Ο ακραίος σκεπτικισμός, όμως, του Πύρρωνος επιχείρησε να υποσκάψει τα θεμέλια όχι μόνο της γνώσης αλλά και της ηθικής.

Η βασική θέση της φιλοσοφίας του Πύρρωνος (Πυρρωνισμός) ήταν ότι δεν μπορούμε να γνωρίσουμε τίποτα και ότι καμία πίστη δεν μπορεί να στηριχτεί λογικά καθώς πάντα θα υπάρχει η αντίθετή της, αρνούνταν τη δυνατότητα γνώσης, **υποστήριζε** ότι δεν μπορούμε με βάση **τη λογική να επιλέξουμε** πώς θα πράξουμε, αλλά τα έθιμα και οι συμβάσεις είναι αυτές **που ορίζουν το καλό ή κακό**, το ωραίο ή αισχρό, το δίκαιο ή άδικο καθώς η ανθρώπινη συμπεριφορά ρυθμίζεται από τη συμβατικότητα, «νόμω και έθει», δηλαδή από την καθιερωμένη συνήθεια και το έθιμο: *«ουδέν γιγνώσκομεν ασφαλώς· ούτε η αίσθησις ούτε η λογική σκέψις παρέχουσι βεβαιότητα, η μεν αίσθησις δεικνύει τα όντα ουχί πως έχουσιν αληθώς, αλλά πως εις ημάς φαίνονται, η δε λογική βασίζεται επί συνηθείας και νόμου»*[6].

Ο Πύρρων ζούσε σύμφωνα με τη φιλοσοφία του. Είναι γνωστό ότι δεν εμπιστευόταν τις αισθήσεις του, με αποτέλεσμα να μη δίνει σημασία σε τίποτε: άμαξες, απότομα βράχια, σκυλιά μπορεί να έθεταν σε κίνδυνο τη ζωή του. Λέγεται ότι τον **θαύμαζαν** τόσο πολύ οι συμπατριώτες του **στην Ήλιδα**, ώστε τον έκαναν ιερέα, ενώ χάρη σ’ αυτόν ψήφισαν να απαλλαγούν όλοι οι φιλόσοφοι από τη φορολογία.

Βασικό αξίωμα των Σκεπτικών οπαδών του Πύρρωνος είναι γενικά η **«Αρρεψία» (αμφιβολία)** για τη δυνατότητα και το κύρος της γνώσης. Ως το μόνο πραγματικό αγαθόν αναγνωρίζεται η **Αρετή**. Οι Πυρρωνιστές ανέτρεπαν όλα τα δόγματα των υπόλοιπων σχολών, χωρίς οι ίδιοι να προτείνουν κάτι άλλο (μηδέν ορίζοντες). Για πρώτη φορά στην Ιστορία της **φιλοσοφίας** η αμφιβολία παύει να **είναι δημιουργική**, αφορμή για έρευνα και αναζήτηση και δεν αναζητεί την αλήθεια, η αμφιβολία δεν μπορεί να γνωρίσει τίποτα. Ο Bertrand Russell[7] αναφερόμενος στο πέρασμα του Πύρρωνος από τη φιλοσοφία, ασκεί οξεία κριτική χαρακτηρίζοντας τον Σκεπτικισμό του τελευταίου ως την «παρηγοριά του τεμπέλη, γιατί έδειχνε ότι ο αμαθής ήταν το ίδιο σοφός όσο και οι λεγόμενοι μορφωμένοι».

---

[5] Διογένης Λαέρτιος (180 – 240μ.Χ.) Ιστορικός, Βιογράφος, Φιλόσοφος.

[6] Από το βιβλίο του Γεωργίου Παπανδρέου Δ. Φ. Γυμνασιάρχου «Η Ηλεία δια μέσου των αιώνων».

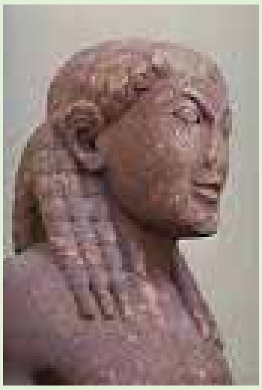
[7] Μπέρτραντ Άρθουρ Γουίλιαμ Ράσελ (Bertrand Arthur William Russell, (1872 – 1970): Βρετανός φιλόσοφος, μαθηματικός και ειρηνιστής.

Η φιλοσοφία του Πύρρωνος δεν είχε διάρκεια στην αρχαιότητα και έσβησε ως φιλοσοφία. Ο Πυρρωνισμός, δεχόμενος οτιδήποτε συμφωνεί με τους νόμους και τις συμβάσεις σίγουρα δεν μπορεί να αλλάξει την κοινωνία: Μια φιλοσοφία που παύει να αναζητεί την αλήθεια, που δεν εδραιώνει τις αξίες ούτε την ηθική, θα δικαιολογούσε τον ρατσισμό, τη δουλεία, τον εθνικισμό, τον αποκλεισμό της γυναίκας από τη μόρφωση, την εργασία, την πολιτική, όταν αυτά συνηθίζονται ή ορίζονται από τους νόμους. Ο Πυρρωνισμός θέτοντας ως μοναδικό σκοπό της ζωής **την προσωπική «αταραξία»** οδηγεί το άτομο στη ματαιότητα της ηθικής και από φιλοσοφία γίνεται συμπεριφορά.

Στον Πύρρωνα αποδίδεται και η φράση ότι «ουδέν διαφέρει ζην ή τεθνάναι» (δε διαφέρει σε τίποτα η ζωή από το θάνατο) και όταν κάποιος τον ρώτησε «γιατί λοιπόν δε πεθαίνεις», απάντησε: «διότι ουδέν διαφέρει» (Ιωαν. Στοβαίος τόμος 4 περί ζωής και θανάτου).

Εν τέλει, βλέποντας τα καθ’ ημάς, μήπως η φιλοσοφία του Πύρρωνος είχε διάρκεια; Μήπως είναι η φιλοσοφία του 21ου αιώνα; Μια φιλοσοφία χωρίς οικουμενικές αξίες, όπου το νόμιμο είναι και ηθικό; Τα συμπεράσματα δικά σας.

Κόροιβος ο Ηλείος



Ο Κόροιβος ο Ηλείος (8^{ος} αι. π.Χ.) ήταν φούρναρης στο επάγγελμα και αθλητής από την Ήλιδα, που κέρδισε τον αγώνα δρόμου ενός σταδίου στους πρώτους καταγεγραμμένους Ολυμπιακούς Αγώνες, το 776 π.Χ.. Ο αγώνας αυτός, **το «στάδιον»,** ήταν το πρώτο αγώνισμα που καθιερώθηκε και αποτελούσε το μοναδικό **αγώνισμα** στίβου στις πρώτες **13 Ολυμπιάδες.** Ο Κόροιβος υπήρξε ο πρώτος καταγεγραμμένος ολυμπιονίκης. Η τιμή του ολυμπιονίκη ήταν τόσο μεγάλη ώστε η εκάστοτε Ολυμπιάδα έπαιρνε την ονομασία της από τον νικητή σταδιοδρόμο. Έτσι, ο Κόροιβος χάρισε το όνομά του στην πρώτη Ολυμπιάδα το **776 π.Χ.,** η οποία ονομάστηκε Κοροιβιάς. Σύμφωνα με την παράδοση, ο Ηρακλής, **πρόγονος του γενάρχη των Ηλείων**, ήταν ο πρώτος που συνέλαβε την ιδέα του αγωνίσματος της ταχύτητας δρόμου και όρισε το μήκος του σταδίου στην Ολυμπία σε 600 πόδια, στεφάνωνε δε τον νικητή με κλαδί αγριελιάς.

Ο τάφος του Κοροίβου, κατά τον Παυσανία, βρισκόταν στα σύνορα της Ήλιδας και πάνω του υπήρχε επιγραφή αναφερόμενη στη νίκη του αυτή. Τάφος που έχει ανασκαφεί, κοντά στην συμβολή Αλφειού και Ερύμανθου, εικάζεται ότι ήταν ο τάφος του Κοροίβου.

Το πέρασμα των αιώνων δε στάθηκε ικανό να ξεχαστεί ο Κόροιβος ο οποίος αποτέλεσε έμπνευση αθλητικού ιδεώδους σε πολλά **σωματεία** με μεγαλύτερο παράδειγμα τον **Ολυμπιακός Πειραιώς** που, κατά μία άποψη, στο έμβλημά του απεικονίζεται δαφνοστεφανομένος ο Κόροιβος. Αλλά και οι σύγχρονοι Ηλείοι τιμούν το μεγάλο Ολυμπιονίκη δίνοντας το όνομα «Κόροιβος» σε ένα χωριό κοντά στην πατρίδα του την Ήλιδα καθώς και στο γνωστό Αθλητικό Σύλλογο «Κόροιβος Αμαλιάδας».

Πηγές:

- https://el.wikipedia.org/wiki/Πύρρων
- https://www.philenews.com/f-me-apopsi/paremvaseis-ston-f/article/697165/pyrron-o-ileios-mia-filosofia-choris-axies
- «Η Ηλεία δια μέσου των Αιώνων». Γ. Παπανδρέου Δ. Φ. Γυμνασιάρχου [Βιβλιοπανόραμα 2010]
- https://korivos.gr/
- https://el.wikipedia.org/wiki/Ηλιδα
- http://odysseus.culture.gr/h/3/gh351.jsp?obj_id=2400

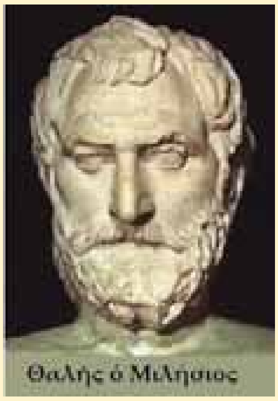
Αρχαία Ιωνία - Μίλητος

Γιώργος Α. Κουσινιώρης - Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

*Το 2022 συμπληρώνονται **εκατό χρόνια** από τη **Μικρασιατική Καταστροφή** που οδήγησε στον ξεριζωμό των Ελλήνων από την πατρίδα τους στην οποία κατοικούσαν και διέπρεπαν από αιώνες. Πάνω από 1.500.000 Έλληνες αναγκάστηκαν να εγκαταλείψουν τις εστίες των προγόνων τους και να έρθουν σαν πρόσφυγες στην Ελλάδα, αφήνοντας πίσω τους περισσότερους από 600.000 νεκρούς. Σύμφωνα με τα στοιχεία που έδωσε ο Ελ. Βενιζέλος με το υπόμνημά του στη Συνδιάσκεψη της Ειρήνης του Παρισιού, στη Μικρά Ασία ζούσαν 1.694.000 Έλληνες. Στη Θράκη και την περιοχή της Κωνσταντινούπολης 731.000. Στην περιοχή της Τραπεζούντας 350.000 και στα Άδανα 70.000. **Σύνολο 2.845.000 Έλληνες** που αποτελούσαν το 20% του πληθυσμού της περιοχής που κυριαρχούσε οικονομικά, είχε δε καταφέρει να διατηρήσει την πολιτιστική του κληρονομιά παρ' ότι αποτελούσε μειονότητα σε εχθρικό περιβάλλον. Στην περιοχή της Ιωνίας έζησαν από αιώνες πολλοί και σημαντικοί φιλόσοφοι – επιστήμονες. Οι σημαντικότεροι Ίωνες φιλόσοφοι ήταν οι προσωκρατικοί. **Ο Θαλής ο Μιλήσιος** ήταν ένας από τους σημαντικότερους. Σημαντικοί επίσης, που διακρίθηκαν στον επιστημονικό τομέα, υπήρξαν ο Αναξίμανδρος, ο Αναξαγόρας, ο Εμπεδοκλής, ο Δημόκριτος, ο Ηράκλειτος, ο Εύδοξος, ο Φιλόλαος, ο Αναξιμένης, ο Ξενοφάνης κ.α. Στις **Χαμένες Πατρίδες** αφιερώνεται το παρόν άρθρο.*

Θαλής ο Μιλήσιος (~ 624 π.Χ. - 546 π.Χ.)

Ο Θαλής ήταν αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος και μαθηματικός, ο πρώτος από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας[1] γεννήθηκε **στη Μίλητο της Μικράς Ασίας το 624 π.Χ** Ήταν γιος του Εξαμύου και της Κλεοβουλίνης και καταγόταν από αριστοκρατική οικογένεια γεγονός που του επέτρεψε να πραγματοποιήσει πολλά ταξίδια στην Ασία, την Κρήτη και την Αίγυπτο. Ο Διογένης Λαέρτιος[2] αναφέρει δύο εναλλακτικές θεωρίες σχετικά με την οικογενειακή κατάσταση του Θαλή. Σύμφωνα με τη μια από αυτές ο Θαλής ήταν παντρεμένος και είχε ένα γιο που ονομαζόταν Κύβισθος ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη, που είναι και η επικρατέστερη, δεν είχε παντρευτεί ποτέ και ο **Κύβισθος** ήταν ανιψιός του και τον είχε υιοθετήσει. Η παράδοση λέει ότι όταν η μητέρα του τον παρακινούσε να παντρευτεί αυτός της ανταπαντούσε πως είναι μικρός για γάμο, ενώ όταν πέρασαν τα χρόνια της ανταπαντούσε πως είναι μεγάλος πια για γάμο!!



Σύμφωνα με άλλη παράδοση, που αναφέρει ο Πλούταρχος[3], όταν τον επισκέφτηκε ο Σόλωνας και τον ρώτησε γιατί δεν παντρεύεται να αποκτήσει διάδοχους, αυτός απάντησε: *από αγάπη για τα παιδιά.* Ταξίδεψε στην Αίγυπτο και στην Βαβυλώνα, γνωρίζοντας από κοντά τους αρχαίους πολιτισμούς των λαών αυτών. Συναναστράφηκε δε με διάφορους ιερείς – σοφούς της Αιγύπτου.

Σε όλη τη διάρκεια της ζωής του ο Θαλής παρέμεινε αφοσιωμένος στην θεωρητική και πρακτική **ενασχόληση με τη φιλοσοφία** και τις άλλες επιστήμες. Ήταν δε τόση η αφοσίωσή του στην επιστήμη που, σύμφωνα με την παράδοση, ενώ περπατούσε κοιτάζοντας τον ουρανό παρατηρώντας τα άστρα δεν είδε το πηγάδι που ήταν μπροστά του και έπεσε μέσα τον έσωσε δε μια πολύ όμορφη και έξυπνη υπηρέτρια από τη Θράκη που τον περιγέλασε λέγοντας του ότι από τη δίψα του να μελετήσει τον ουρανό δεν βλέπει τι βρίσκεται μπροστά στα πόδια του!!

Ήταν μια πολύπλευρη προσωπικότητα. Για τα επιστημονικά του επιτεύγματα λέγονται πολλά και είναι δύσκολο να ξεχωρίσει κανείς πόσα από αυτά δεν οφείλονται στον θρύλο που δημιουργήθηκε γύρω από την προσωπικότητά του. Αναδείχτηκε σε οξυδερκή διανοητή και πολιτικό. Σε καίριες στιγμές παρενέβη στα πολιτικά πράγματα, όπως όταν συνέστησε στους Μιλήσιους να μη συμμαχήσουν με τον Κροί-

[1] Θαλής ο Μιλήσιος - Πιττακός ο Μυτιληναίος - Βίας ο Πριηνεύς - Κλεόβουλος ο Ρόδιος - Σόλων ο Αθηναίος - Περίανδρος ο Κορίνθιος - Χίλων ο Λακεδαιμόνιος

[2] Διογένης Λαέρτιος (180 – 240μ.Χ.) Ιστορικός, Βιογράφος, Φιλόσοφος

[3] Ο Πλούταρχος (45 – 120 μ.Χ.) ήταν Έλληνας ιστορικός, βιογράφος, φιλόσοφος και δοκιμιογράφος

σο[4] ή όταν συμβούλευσε τις ιωνικές πόλεις να συμμαχήσουν μεταξύ τους για να αντιμετωπίσουν τους κοινούς πιθανούς εχθρούς.

Ο Θαλής προσπάθησε να κατανοήσει τον κόσμο μέσα από τα μάτια της επιστήμης και να εξηγήσει φυσικά φαινόμενα όπως για παράδειγμα την Έκλειψη Ηλίου, χωρίς να χρησιμοποιεί αναφορές στην μυθολογία, όπως γινόταν μέχρι την εποχή του.

Είναι ένας από τους πρώτους φιλόσοφους που απέρριψαν όλες τις μυθολογικές εξηγήσεις των φυσικών φαινομένων (όπως λ.χ. το μύθο της αρπαγής της Περσεφόνης ως ερμηνεία της εναλλαγής των εποχών) και χάρη στο θεμέλιο λίθο που έθεσε η δική τους θεώρηση των πραγμάτων, η ανθρωπότητα άρχισε να αναζητά την αλήθεια μακριά από θρησκευτικές πεποιθήσεις, ανοίγοντας τον δρόμο στην, έστω και πρωτόγονη, επιστημονική έρευνα.

Θεωρείται ως ο Ιδρυτής της **Ιωνικής Σχολής**, ή της σχολής της Μιλήτου, διότι έθεσε πρώτος το πρόβλημα μιας γενικής αρχής όλων των πραγμάτων. Η αρχή αυτή ήταν **το ύδωρ**.

Η κυριότερη προσφορά του Θαλή στην επιστήμη ήταν **η εισαγωγή της αποδείξεως** μια πρότασης, ανοίγοντας έτσι το δρόμο από την προ-Επιστήμη, που ήταν κυρίως εμπειρική, σε παραγωγική Επιστήμη (συμπερασματική, αποδεικτική).

Ο Θαλής αναφέρεται ως σπουδαίος γεωμέτρης γιατί ασχολήθηκε κυρίως με τη **Γεωμετρία** κάτι που του εξασφάλισε τον τίτλο του «**Πατέρα της Γεωμετρίας**». Έθεσε τις βάσεις της Θεωρητικής Γεωμετρίας εισάγοντας την αποδεικτική διαδικασία καθιστώντας έτσι για πρώτη φορά τη Γεωμετρία ως μια συμπερασματική επιστήμη. Γνωστό είναι το Θεώρημα που φέρει το όνομά του ως *"Θεώρημα του Θαλή"* και αναφέρεται στις παράλληλες ευθείες. Οι εργασίες του στη Γεωμετρία ασχολούνται κυρίως με τις αναλογίες και την ομοιότητα των σχημάτων και αποτελούν το θεμέλιο της Τριγωνομετρίας που αναπτύχθηκε πολύ αργότερα (3ο αι π.Χ. - 2 αι μ.Χ.).

Στο Θαλή, εκτός από το θεώρημα που φέρει το όνομά του, αποδίδονται από τους αρχαίους συγγραφείς πέντε αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων που είναι οι ακόλουθες:

- Η διάμετρος κύκλου διχοτομεί τον κύκλο.
- Οι κατά κορυφή γωνίες είναι ίσες.
- Οι παρά τη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.
- Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες, είναι και μεταξύ τους ίσα *(κριτήριο Γ-Π-Γ)*.
- Η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο γωνία είναι ορθή.

Ο Θαλής κέρδισε τον θαυμασμό του **βασιλιά της Αιγύπτου Άμασι** και των Αιγυπτίων της εποχής του **υπολογίζοντας το ύψος των πυραμίδων**, χρησιμοποιώντας την αναλογία που ισχύει μεταξύ των πλευρών δύο όμοιων τριγώνων, από το μήκος της σκιάς τους και το μήκος της σκιάς μιας ράβδου που έμπηγε στο έδαφος.

Ο μεγάλος Ίωνας φιλόσοφος ως πολύπλευρη προσωπικότητα έχει ασχοληθεί και με άλλους τομείς τη επιστήμης της εποχής του. Όπως:

- Με τη **Θεολογία**

  Διατύπωσε την άποψη ότι ο κόσμος είναι γεμάτος θεούς (*πάντα πλήρη θεών είναι*) ή την άποψη ότι το παλαιότερο από όλα τα όντα είναι ο Θεός, γιατί είναι άναρχος και ατελεύτητος (*Πρεσβύτατον των όντων Θεός, αγέννητον γαρ και μήτε αρχήν έχον, μήτε τελετήν*).

- Με την **Κοσμολογία**

  Στο Θαλή αποδίδονται δύο κοσμολογικές απόψεις:
  - Η Γη έχει τη μορφή ενός κυκλικού δίσκου που στηρίζεται στο νερό.
  - Το νερό είναι η αρχή των πάντων.

  Υπήρξε ο πρώτος που προσπάθησε να εξηγήσει τα φυσικά φαινόμενα με βάση φυσικές διαδικασίες. Χαρακτηριστική ήταν η προσπάθεια του να εξηγήσει το φαινόμενο των σεισμών. Κατά την άποψη

---

[4] Κροίσος (596 π.Χ. – 546 π.Χ.): Ήταν ο τελευταίος βασιλιάς της Λυδίας.

του η Γη επιπλέει στο νερό και οι σεισμοί προκαλούνται όταν η Γη κλυδωνίζεται από τα κύματα του νερού.
Στην κοσμολογία του φιλόσοφου σημαντικό ρόλο παίζει το νερό (ύδωρ). Θα πρέπει μάλλον να κατέληξε σ᾽ αυτή την αντίληψη επειδή παρατήρησε ότι η τροφή των πάντων είναι υγρή και η βάση της φύσεως των υγρών πραγμάτων είναι το νερό.

- Με τη **Φυσική - Αστρονομία.**
Ανακάλυψε τις τροπές (ηλιοστάσια), το ετερόφωτο της Σελήνης και κατά τον Ηρόδοτο[5] είχε προβλέψει ένα χρόνο πριν την ακριβή της ημερομηνία την έκλειψη Ηλίου που συνέβη στις 28 Μαΐου 585 π.Χ. στηριζόμενος στις παρατηρήσεις που είχαν κάνει επί αιώνες οι Βαβυλώνιοι και είχαν ανακαλύψει ότι οι ηλιακές εκλείψεις επαναλαμβάνονται κάθε 223 συνοδικούς μήνες[6], χωρίς ωστόσο να μπορέσει να δώσει την πραγματική εξήγηση τόσο των ηλιακών όσο και των σεληνιακών εκλείψεων. Υπολόγισε πρώτος την διάρκεια του έτους σε 365 ημέρες και ότι η διάμετρος του Ηλίου ήταν το 1/720 της φαινόμενης τροχιάς του γύρω από τη Γη καθώς και ότι η ίδια σχέση υπάρχει και μεταξύ της διαμέτρου της Σελήνης και της τροχιάς της γύρω από τη Γη. Χρησιμοποίησε τον αστερισμό της **Μικρής Άρκτου** για να εντοπίσει τον πολικό αστέρα, το αστέρι που βρίσκεται στο βορά, με τη βοήθεια του οποίου συμβούλευσε τους ναυτικούς να αρμενίζουν.
Ανακάλυψε επίσης τον **ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό**, από τις ελκτικές ιδιότητες του ορυκτού μαγνητίτη και του ήλεκτρου (κεχριμπάρι).
Ο Θαλής πέθανε από ηλίαση παρακολουθώντας αθλητικούς αγώνες την περίοδο της 58ης Ολυμπιάδας (548-545 π.Χ.) σε ηλικία 78 ετών. Στον τάφο του στη Μίλητο, γράφτηκε το επίγραμμα: «*Ἦ ὀλίγον τοδί σῆμα -τὸ δὲ κλέος οὐρανόμηκες- τῷ πολυφροντίστῳ τούτῳ Θάλητος ὅρη*» (Ο τάφος αυτός είναι μικρός για να χωρέσει η μέχρι τον ουρανό δόξα του σοφού Θαλού)

Στο σοφό Θαλή, αποδίδονται, επίσης, ορισμένα αποφθέγματα, όπως:
– «*Γνώθι σ' αυτόν*» - Γνώρισε τον εαυτό σου (να έχεις αυτογνωσία)
– «*Μέτρω χρω*» - Να έχεις μέτρο.
– «*Κάλλιστον κόσμος ποίημα γαρ θεού*» - Το καλύτερο είναι ο κόσμος γιατί είναι δημιούργημα θεού.
– «*Εάν ά τοις άλλοις επιτιμώμεν, αυτοί μη δρώμεν* » - Μη κάνουμε αυτά για τα οποία κατηγορούμε τους άλλους.
– «*Τι κοινότατον; Ελπίς. Και γαρ οις άλλο μηδέν, αύτη παρέστη* » - Τι είναι το πιο συνηθισμένο; Η ελπίδα. Ακόμα και αν όλα έχουν χαθεί, αυτή μένει.
– «*Δύσκολον τον εαυτόν γνώναι, εύκολον τω άλλω υποτίθεσθαι*»- Το να γνωρίζεις τον εαυτό σου είναι δύσκολο, αλλά εύκολο να συμβουλεύεις τους άλλους.
– «*Κρατίστην είναι δημοκρατίαν την μήτε πλουσίους άγαν μήτε πένητας έχουσαν πολίτας*»- Άριστη δημοκρατία είναι εκείνη που δεν έχει ούτε πάρα πολύ πλούσιους ούτε πάρα πολύ φτωχούς πολίτες.
– «*Τάχιστον νους δια παντός γαρ τρέχει*»- Ο νους είναι το ταχύτερο από όλα, διότι τρέχει διαπερνώντας τα πάντα
– Για τρία πράγματα ευχαριστώ την τύχη: πρώτα γιατί γεννήθηκα άνθρωπος και όχι θηρίο, δεύτερο γιατί γεννήθηκα άνδρας και όχι γυναίκα και τρίτο γιατί γεννήθηκα Έλλην και όχι βάρβαρος.
Σχόλιο στο τελευταίο: Δε νομίζω ότι ο Θαλής υπήρξε μισογύνης λέγοντας ότι είναι τυχερός που γεννήθηκε άνδρας και όχι γυναίκα. Την εποχή που έζησε οι γυναίκες δεν είχαν τη δυνατότητα για μόρφωση και ταξίδια όπως οι άνδρες οπότε ως γυναίκα **δε θα μπορούσε** να ασχοληθεί με την επιστήμη και να κάνει όλα όσα σπουδαία έκανε.

[5] Ηρόδοτος (484π,Χ – 425π.Χ.): Έλληνας ιστορικός, πολιτικός και συγγραφέας από την Αλικαρνασσό της Μ. Ασίας
[6] Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών όμοιων φάσεων της Σελήνης, το οποίο ισούται με περίπου 29,5 ημέρες.

Η μέτρηση του ύψους της πυραμίδας

Λίγη ιστορία και χαρακτηριστικά της πυραμίδας.

Η Πυραμίδα του Χέοπα[7] είναι η αρχαιότερη και η μεγαλύτερη από τις τρεις πυραμίδες (οι άλλες δύο είναι του Χεφρίν[8] και του Μυκερίνου[9]) που βρίσκονται στη Νεκρόπολη της Γκίζας στην Αίγυπτο στις όχθες του ποταμού Νείλου.

Άρχισε να κατασκευάζεται το 2560 πΧ και ολοκληρώθηκε το 2540 πΧ. και προοριζόταν για τάφος του Φαραώ Χέοπα.

Είχε ύψος 146,60 μ. και τέλεια τετράγωνη βάση με πλευρά 230,35 μ. ενώ οι παράπλευρες ακμές της ήταν 193,07μ.. Οι πλευρές της βάσεις έχουν τέλειο προσανατολισμό στη διεύθυνση Ανατολή-Δύση και Βορράς-Νότος ενώ η γωνία που σχηματίζουν οι παράπλευρες έδρες της με τη βάση της είναι $51^{o}\ 50'$. Σήμερα λείπουν από την κορυφή της περίπου 10μ η οποία όπως λέγεται ήταν από χρυσό ή διαμάντι. Έχει όγκο 2.521.000 κυβικά μέτρα, καλύπτει επιφάνεια 54 στεμμάτων και το υπολογιζόμενο βάρος της φθάνει τους 6,5 εκατομμύρια τόνους. Είναι το μοναδικό σωζόμενο από τα Επτά Θαύματα του αρχαίου κόσμου[10]. Κατά τον Ηρόδοτο για την αποπεράτωσή της χρειάστηκαν 20 χρόνια δουλειάς από 100.000 εργάτες-δούλους, πολλοί από τους οποίους πέθαναν κατά τη διάρκεια κατασκευής της. Το μνημείο σήμερα συγκινεί τους επισκέπτες της Αιγύπτου για το μεγαλείο του και την τεχνική του και **προβληματίζει** τους σύγχρονους ειδικούς για το πώς μπόρεσαν να λύσουν τα τόσα προβλήματα μηχανικής και στατικής οι αρχαίοι συνάδελφοί τους. Εξωτερικά, η πυραμίδα του Χέοπα είναι επιστρωμένη με πλάκες από γρανίτη. Το εσωτερικό ήταν λαβύρινθος από διαδρόμους και δωματιάκια, που εμπόδιζαν **την εύκολη** διείσδυση στον **κύριο χώρο**, όπου βρισκόταν η **σαρκοφάγος** του Φαραώ.

Η μέτρηση του ύψους της πυραμίδας

Δύο είναι οι επικρατέστερες μέθοδοι σύμφωνα με τις οποίες ο σοφός Μιλήσιος μέτρησε το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα.

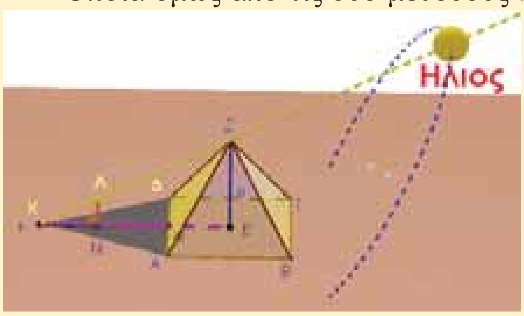
Η πρώτη αναφέρεται από το Διογένη Λαέρτιο ο οποίος μας πληροφορεί ότι μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας τη στιγμή κατά την οποία η σκιά η δική του έγινε ίση με το ύψος του.

Η δεύτερη αναφέρεται από τον Πλούταρχο και σύμφωνα με αυτήν ο Θαλής τοποθέτησε το μπαστούνι του στο άκρο της σκιάς της πυραμίδας έχοντας έτσι σχηματίσει δύο τρίγωνα και απέδειξε ότι ο λόγος της πυραμίδας προς τη ράβδο ισούται με το λόγο της σκιάς της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου.

Η πρώτη από τις εκδοχές αυτές είναι ίσως και η επικρατέστερη, όμως απαιτεί πολύ ειδικές περιπτώσεις γιατί το γεωγραφικό πλάτος της Γκίζας, όπου βρίσκεται η πυραμίδα, είναι $29^{o}57'$ βόρεια του Ισημερινού. Αυτό επιτρέπει στις ακτίνες του ήλιου να σχηματίζουν γωνία 45^{o} με το έδαφος δύο φορές κάθε χρόνο στις 21 Νοεμβρίου και στις 20 Ιανουαρίου, οπότε ο Θαλής θα έπρεπε να περιμένει τις συγκεκριμένες ημερομηνίες για να κάνει τις μετρήσεις του.

Η δεύτερη εκδοχή, ίσως όχι τόσο πιθανή, έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή που η πυραμίδα έχει σκιά.

Όποια όμως από τις δύο μεθόδους και αν χρησιμοποίησε ο Θαλής είχε να λύσει ένα ακόμα πρόβλημα αφού το μήκος της σκιάς της πυραμίδας πρέπει να μετρηθεί από το κέντρο της βάσης της στο οποίο προφανώς δεν είχε πρόσβαση.



Στη συνέχεια δίνουμε μια περιγραφή της δεύτερης εκδοχής χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα.

Τοποθέτησε ο Θαλής το ραβδί του ΛΝ κατακόρυφα έτσι που η σκιά του ΝΡ να βρίσκεται πάνω στο ύψος ΚΜ του τρι-

[7] Φαραώ της Αιγύπτου από 2589 π.Χ. έως 2566 π.Χ

[8] Γιός του Χέοπα

[9] Εγγονός του Χέοπα, γιός του Χεφρήνου

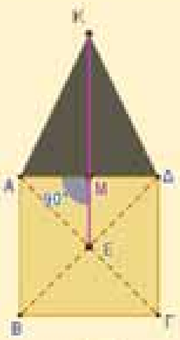
[10] Τα κλασικά επτά θαύματα: Η Πυραμίδα του Χέοπα • Οι Κρεμαστοί Κήποι της Βαβυλώνας • Το Άγαλμα του Ολυμπίου Διός • Ο Ναός της Αρτέμιδος στην Έφεσο • Το Μαυσωλείο της Αλικαρνασσού • Ο Κολοσσός της Ρόδου • Ο Φάρος της Αλεξάνδρειας.

γώνου ΚΑΔ και το άκρο της Ρ να συμπέσει με το άκρο Κ της σκιάς της πυραμίδας.

Έτσι είναι $\frac{\text{Ύψος πυραμίδας}}{\text{Ύψος ράβδου}} = \frac{\text{Σκιά πυραμίδας}}{\text{Σκιά ράβδου}}$ ή

$\frac{ZE}{\Lambda N} = \frac{KE}{KN}$ από όπου είναι $ZE = \frac{KE}{KN} \cdot \Lambda N$ **(1)**. Προφανώς ο Θαλής μπορούσε εύκολα να μετρήσει τη σκιά ΚΝ και το μήκος ΛΝ της ράβδου.

Για να βρει το μήκος ΚΕ της σκιάς της πυραμίδας έπρεπε να περιμένει τη χρονική στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο ΚΑΔ γίνεται ισοσκελές, όπως φαίνεται στη κάτοψη (Εικ. 1), και αυτό συμβαίνει όταν το σημείο Κ βρεθεί στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΔ, την οποία θα μπορούσε να χαράξει, οπότε τότε είναι ΚΕ = ΚΜ + ΜΕ.



Εικ. 1

Το τμήμα ΚΜ μπορούσε να το μετρήσει. Για το τμήμα ΕΜ της σκιάς είναι $EM = \frac{AB}{2}$, δηλαδή το μισό της πλευράς της βάσης της πυραμίδας την οποία επίσης μπορούσε να μετρήσει και συνεπώς υπολόγισε το μήκος ΚΕ και από τη σχέση (1) το ύψος ΖΕ της πυραμίδας.

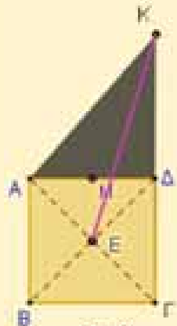
Μάλιστα αναφέρεται ότι ως μέτρο χρησιμοποίησε το δικό του ύψος και βρήκε ότι η πυραμίδα είναι 85 Θαλήδες. Όπως είπαμε παραπάνω η πυραμίδα έχει ύψος 146,60 μέτρα συνεπώς το ύψος του Θαλή ήταν 146,60/85 = 1,72 μέτρα.

Αν το τρίγωνο ΚΑΔ δεν είναι ισοσκελές (Εικ 2) τότε ο Θαλής δυστυχώς δεν μπορούσε να κάνει τίποτα!!

Παρατήρηση 1: Είναι προφανές ότι η ράβδος ΛΝ θα μπορούσε να τοποθετηθεί κατακόρυφα σε οποιαδήποτε άλλη θέση στο έδαφος και όχι αναγκαστικά εκεί που την τοποθέτησε ο Θαλής.

Παρατήρηση 2: Η διαδικασία που περιγράψαμε μπορεί να πραγματοποιηθεί αν η κλίση των ηλιακών ακτίνων είναι μικρότερη από $51^o 50'$ που είναι η κλίση των παράπλευρων εδρών της πυραμίδας, αυτό συμβαίνει κυρίως τους χειμερινούς μήνες που ο ήλιος διαγράφει μικρό τόξο κατά την ημερήσια κίνησή του οπότε η πυραμίδα έχει σκιά. Τους θερινούς μήνες που ο ήλιος πλησιάζει το ζενίθ[11] της τοποθεσίας της πυραμίδας η πυραμίδα δεν έχει σκιά.

Για μια διαδραστική εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας επισκευθήτε το σύνδεσμο: https://www.geogebra.org/m/YqzfAyt4



Εικ. 2

Πηγές

- Denis Guedj: *The theoreme du perroquet (Το θεώρημα του παπαγάλου)*
- *μτφ: Τεύκρος Μιχαηλίδης (Εκδ. ΠΟΛΙΣ)*
- Βαγγέλης Σπανδάγος – Ρούλα Σπανδάγου - Δέσποινα Τραυλού:
- *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας (εκδ. ΑΙΘΡΑ)*
- Sir Thomas L. Health: *Ιστορία Των Ελληνικών Μαθηματικών* – Τόμος 1 (εκδ. Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ)
- *https://el.wikipedia.org/wiki/Θαλής*
- *http://www.gnomikologikon.gr/authquotes.php?auth=145*
- *https://el.wikipedia.org/wiki/Διογένης_ο_Λαέρτιος*
- *https://el.wikipedia.org/wiki/Πλούταρχος*
- *https://www.gnomikologikon.gr/authquotes.php?auth=145*
- *https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%98%CE%B1%CE%BB%CE%AE%CF%82*
- *https://www.hallofpeople.com/gr/index-proQuotesXrono.php*
- https://el.wikipedia.org/wiki/Μικρασιατική_Καταστροφή
- http://users.sch.gr/ekyriakoul/wordpress/wp-content/uploads/2015/02/2015/02/Ιωνες-Φιλόσοφοι.pdf
- https://el.wikipedia.org/wiki/Θαύματα_του_κόσμου

[11] Ζενίθ: Το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη ευθεία του τόπου ΄΄τέμνει΄΄ την ουράνια σφαίρα.

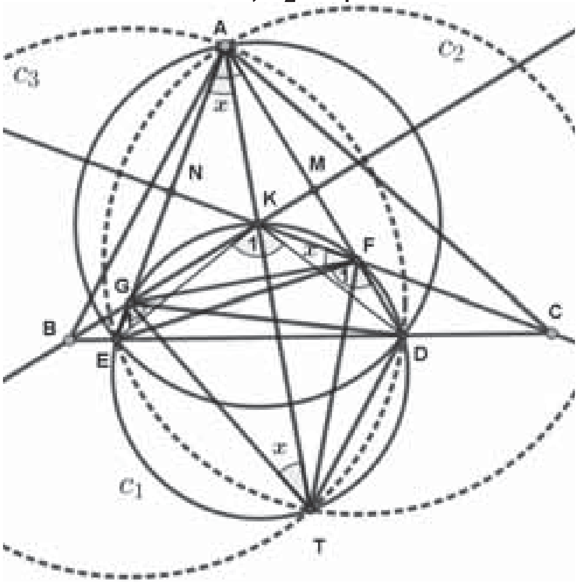
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες
Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

39η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022
Λύσεις των θεμάτων των μεγάλων τάξεων

1. Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στο ευθύγραμμο τμήμα BC θεωρούμε τα σημεία D, E ώστε $BD = BA$ και $CE = CA$. Αν K είναι το περίκεντρο του τριγώνου ADE, F είναι η τομή των ευθειών AD, KC και G είναι η τομή των ευθειών AE, KB, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KDE, έστω c_1, ο κύκλος με κέντρο το σημείο F και ακτίνα FE, έστω c_2, και ο κύκλος με κέντρο το σημείο G και ακτίνα GD, έστω c_3, περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία AK.

Λύση: Έστω M το μέσο του AD. Από τις υποθέσεις του προβλήματος τα σημεία B, G, K, M είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AD. Επιπλέον ο κύκλος c_3 περνάει από το A, αφού $GD = GA$.

Ομοίως, αν N είναι το μέσο του AE, τα σημεία G, F, K, N είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AE. Επιπλέον ο κύκλος c_2 περνάει από το A, αφού $FA = FE$.



Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία G, F ανήκουν στο περιγεγραμμένο κύκλο c_1 του τριγώνου KDE. Από τα ισοσκελή τρίγωνα ADG και AFE, έχουμε;

$$\hat{G}_1 = E\hat{G}D = 2 \cdot G\hat{A}D = 2 \cdot E\hat{A}F = \hat{F}_1 \qquad (1)$$

Επίσης, η γωνία $E\hat{A}D$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ADE με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\hat{K}_1 = G\hat{K}F$, οπότε

$$\hat{K}_1 = 2 \cdot E\hat{A}D \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\hat{G}_1 = \hat{F}_1 = \hat{K}_1$, οπότε τα σημεία D, E, F, G, K είναι ομοκυκλικά και ανήκουν στο κύκλο c_1.

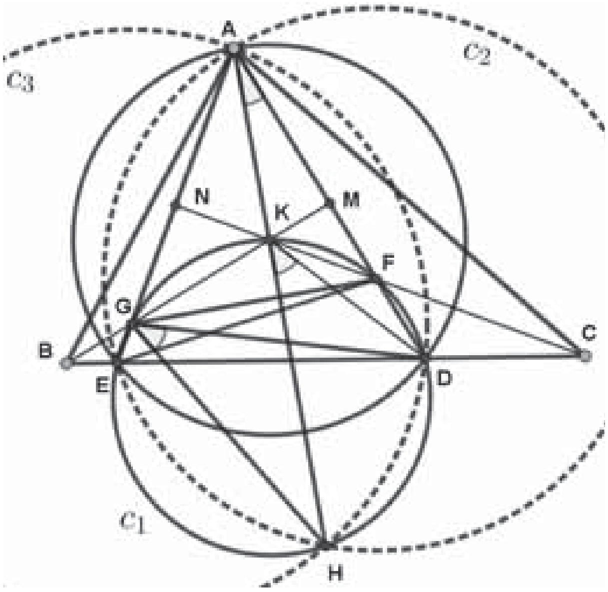
Έστω T το σημείο τομής των κύκλων c_2, c_3. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία A, K, T είναι συνευθειακά και ότι το T ανήκει στον ίδιο κύκλο με τα σημεία D, E, F, G, K. Πράγματι, η κοινή χορδή AT των κύκλων c_2 και c_3 είναι κάθετη προς τη διακεντρική ευθεία τους FG και επίσης η ευθεία AK είναι κάθετη προς την ευθεία FG, αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF. Επίσης, επειδή $GA = GD = GT$ έχουμε τις ισότητες γωνιών:

$$G\hat{A}T = G\hat{T}A = x \,, \qquad (3)$$

και αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF

$$G\hat{A}T = G\hat{F}K = 90 - A\hat{G}F \qquad (4)$$

Άρα έχουμε $G\hat{T}K = G\hat{T}A = G\hat{F}K$, οπότε τα σημεία F, G, K, T είναι ομοκυκλικά.



Σχήμα 2

2ος τρόπος

Αφού BD = BA και KA = KD, η BK είναι η μεσοκάθετη του AD, οπότε GA=GD. Έχουμε $\widehat{KGD} = \widehat{KGA} = 90° - \widehat{EAD} = \widehat{AFK}$, οπότε τα σημεία K, F, D, G είναι ομοκυκλικά.

Όμοια βγάζουμε $\widehat{KFE} = \widehat{AGK}$, οπότε τα σημεία K, F, E, G είναι ομοκυκλικά.

Από τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα έχουμε ότι τα K, F, E, G και D είναι ομοκυκλικά.

Έστω τώρα ότι η AK τέμνει τον κύκλο c_1 στο H. Τότε

$$\widehat{HGD} = \widehat{HKD} = 2 \cdot \widehat{HAD} \qquad (5)$$

Επομένως το G ανήκει στη μεσοκάθετη του AD και επιπλέον ισχύει η σχέση (5), οπότε το G είναι το περίκεντρο του τριγώνου AHD, δηλαδή ο κύκλος c_3 περνάει από το H.

Όμοια, ο κύκλος c_2 περνάει από το H, οπότε το ζητούμενο έπεται.

2. Δίνεται ένας θετικός ακέραιος n>4, που διαιρείται από τον αριθμό 4. Συμβολίζουμε με A_n το άθροισμα όλων των θετικών περιττών διαιρετών του n. Συμβολίζουμε με B_n το άθροισμα όλων των θετικών άρτιων διαιρετών του n, εξαιρουμένου του n. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $f(n) = B_n - 2A_n$, για τις διάφορες τιμές του n. Για ποιους θετικούς ακεραίους n επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή;

Λύση: Συμβολίζουμε με $d_1, \ldots, d_k$ τους περιττούς διαιρέτες του n. Τότε οι αριθμοί $2d_1, \ldots, 2d_k$ είναι άρτιοι διαιρέτες του n. Επίσης, καθένας από αυτούς δεν διαιρείται από 4, επομένως, άρα κανένας από αυτούς δεν μπορεί να ισούται με n. Τέλος, κανείς από αυτούς δεν ισούται με 4, και ο 4 είναι ένας άρτιος διαιρέτης του n. Συνοψίζοντας έχουμε ότι,

$$A_n = d_1 + \cdots + d_k \text{ και } B_n = 2d_1 + 2d_2 + \cdots + 2d_k + 4.$$

Επομένως, έχουμε $$B_n - 2A_n \geq 4.$$

Πράγματι, η τιμή 4 είναι η ελάχιστη τιμή, αφού για $n = 8$, έχουμε:

$$A_n = 1, B_n = 2 + 4 = 6, B_n - 2A_n = 4.$$

Τώρα μένει να βρούμε όλους τους θετικούς ακεραίους n με την ιδιότητα: $B_n - 2A_n = 4$. Η ισότητα, σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει όταν $B_n = 2d_1 + \cdots + 2d_k$. Αν τώρα p είναι ένας περιττός πρώτος διαιρέτης του n, τότε ο $4p$ είναι άρτιος διαιρέτης του n και δεν συμπεριλαμβάνεται στο $2d_1 + \cdots + 2d_k$. Επομένως για να ισχύει $B_n = 2d_1 + \cdots + 2d_k + 4$, πρέπει $n = 4p$. Πράγματι, τότε

$$B_n - 2A_n = (2 + 4 + 2p) - 2(1 + p) = 4.$$

Αν τώρα ο n δεν έχει περιττό πρώτο διαιρέτη, τότε είναι δύναμη του 2, δηλαδή $n = 2^{k+1}$, οπότε $A_n = 1$, $B_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = \frac{2^{k+1}-2}{2-1} = 2^{k+1} - 2$ και $B_n - 2A_n = 2^{k+1} - 4$. Άρα $B_n - 2A_n = 4$, αν και μόνον, αν $k = 2$. Επομένως $n = 4p$, όπου p πρώτος.

3. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β,γ,δ ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} = 18.$$

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α.

Λύση (1ος τρόπος): Με κατάλληλη χρήση της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\alpha + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} = \alpha + \left(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}\right) \geq \alpha + 4\cdot\sqrt[4]{\beta\gamma\cdot\gamma\delta\cdot\delta\beta\cdot\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}} = \alpha + \frac{4}{\sqrt[4]{\alpha}}$$

Αν θέσουμε $x = \sqrt[4]{\alpha}$ και λάβουμε υπόψη τη δεδομένη ισότητα, καταλήγουμε στην ανίσωση

$$x^4 + \frac{4}{x} \leq 18,\ x > 0 \Leftrightarrow x^5 - 18x + 4 \leq 0,\ x > 0. \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x) = x^5 - 18x + 4$, οπότε καταλήγουμε στην παραγοντοποίηση $\mathrm{P}(x) = x^5 - 18x + 4 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2)$,

οπότε έχουμε τελικά την ανίσωση: $(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2) \leq 0$. $\qquad (2)$

Αν υποθέσουμε ότι $x > 2$, τότε $(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2) > 0$, οπότε η ανίσωση (2) δεν επαληθεύεται. Επομένως, πρέπει να είναι $0 < x \leq 2$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 2$, είναι $\alpha = 16$ και η σχέση (2) ισχύει ως ισότητα. Κατά τα γνωστά από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αυτό ισχύει όταν

$$\beta\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} \Leftrightarrow \beta = \gamma = \delta \text{ και } \beta^2 = \frac{1}{16\beta^6} \Leftrightarrow \beta = \gamma = \delta \text{ και } \beta^8 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α είναι το 16.

2ος τρόπος: Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ παίρνουμε:

$$a + bc + cd + db + \frac{1}{ab^2c^2d^2} = \frac{a}{32} + \cdots + \frac{a}{32} + bc + cd + db + \frac{1}{ab^2c^2d^2} \geq$$
$$36\sqrt[36]{\frac{a^{32}}{32^{32}}\cdot bc\cdot cd\cdot db\cdot\frac{1}{ab^2c^2d^2}} = 36\sqrt[36]{\frac{a^{31}}{32^{32}}}.$$

Άρα έχουμε $a^{31} \leq \frac{32^{32}}{2^{36}} = 2^{124}$ και επομένως $a \leq 2^4 = 16$, κλπ.

4. Έστω $\mathbf{Q_n}$ το σύνολο των n-άδων $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n})$ με $\mathbf{x_i} \in \{0, 1, 2\}, \mathbf{i} = 1, 2, \dots, \mathbf{n}$. Μία τριάδα $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, όπου $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$, $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n)$, διακεκριμένων στοιχείων του $\mathbf{Q_n}$ λέγεται καλή, αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{i} \in \{1, 2, \dots, \mathbf{n}\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα συνόλων: $\{\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i}, \mathbf{z_i}\} = \{0, 1, 2\}$. Ένα υποσύνολο Α του $\mathbf{Q_n}$ λέγεται καλό, αν οποιαδήποτε τρία στοιχεία του Α σχηματίζουν μια καλή τριάδα. Να αποδείξετε ότι κάθε καλό υποσύνολο του $\mathbf{Q_n}$ έχει το πολύ $2\left(\frac{3}{2}\right)^{\mathbf{n}}$ στοιχεία.

Λύση: Θα αποδείξουμε το ζητούμενο επαγωγικά ως προς n. Η περίπτωση $n = 1$ είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_{n-1} έχει το πολύ $2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ στοιχεία. Έστω $A_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : x_n \neq 0\}$ και ορίζουμε τα σύνολα A_1, A_2 όμοια, δηλαδή

$A_1=\{(x_1,\dots,x_n)\in A\ :x_n\neq 1\}$ και $A_2=\{(x_1,\dots,x_n)\in A\ :x_n\neq 2\}$.

Αφού το A είναι *καλό* σύνολο και το A_0 είναι υποσύνολό του, το A_0 είναι επίσης *καλό*. Έτσι, τρία οποιαδήποτε στοιχεία του έχουν μια συντεταγμένη που διαφέρουν ανά δύο. Αυτή η συντεταγμένη δεν μπορεί να είναι η τελευταία, διότι το 0 δεν μπορεί να εμφανιστεί εκεί. Συνεπώς, το σύνολο $A_0{}'$ που προκύπτει από τα στοιχεία του A_0 διαγράφοντας την τελευταία συντεταγμένη είναι καλό υποσύνολο του Q_{n-1}.

Παρατηρούμε επιπλέον ότι, αν $|A_0|\geq 3$, τότε $|A_0'|=|A_0|$.

Πράγματι, αν ίσχυε το αντίθετο, τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο $a\in A_0'$ έτσι ώστε $x,y\in A_0$, όπου τα x,y προκύπτουν από το a προσθέτοντας τα στοιχεία 1 και 2, αντίστοιχα, ως τελευταία συντεταγμένη. Αλλά τότε, αν z είναι ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του A_0, αυτό δεν μπορεί να έχει ως τελευταία συντεταγμένη το 0, οπότε τα x,y,z δεν θα σχημάτιζαν μία καλή τριάδα, άτοπο. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$|A_0|\leq \max\{2,|A_0'|\}\leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

Ομοίως, παίρνουμε ότι : $|A_1|,|A_2|\ \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. Όμως, κάθε στοιχείο του A εμφανίζεται σε ακριβώς δύο από τα A_0,A_1,A_2, οπότε: $|A|=\frac{1}{2}(|A_0|+|A_1|+|A_2|)\leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$.

Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 122

N53. Για τους πρώτους θετικούς ακέραιους p,q,r δίνεται ότι οι αριθμοί $pq+1, pr+1$ και $qr-p$ είναι τέλεια τετράγωνα. Να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $p+2qr+2$ είναι επίσης τέλειο τετράγωνο.

Ουκρανία 2013-14

Λύση: Έστω ότι $pq+1=a_2$ και $pr+1=b^2$. Τότε

$$pq=a^2-1=(a-1)(a+1)\Rightarrow\begin{Bmatrix}a-1=1\\a+1=pq\end{Bmatrix}\text{ ή }\begin{Bmatrix}a-1=p\\a+1=q\end{Bmatrix}\text{ ή }\begin{Bmatrix}a-1=q\\a+1=p\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow a=2,\ pq=3(\text{αδύνατη})\ \text{ ή }\ |p-q|=2\Rightarrow p=q-2\ \text{ή}\ p=q+2.$$

Από τη σχέση $pr+1=b^2\Leftrightarrow pr=b^2-1$, ομοίως προκύπτει ότι: $|p-r|=2\Rightarrow p=r-2$ ή $p=r-2$.

Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

(1) $p=q-2=r+2$, **(2)** $p=q+2=r-2$, **(3)** $q=r=p\pm 2$.

Στις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε τρεις διαδοχικούς περιττούς πρώτους αριθμούς, οπότε θεωρώντας τη διαιρετότητα των αριθμών με το 3 καταλήγουμε ότι ο ένας από αυτούς θα ισούται με το 3, δηλαδή προκύπτουν οι τριάδες

$$(p,\ q,\ r)=(5,\ 3,\ 7)\text{ ή }(p,\ q,\ r)=(5,\ 7,\ 3).$$

Και στις δύο περιπτώσεις διαπιστώνουμε ότι: $p+2qr+2=49=7^2$

Στην περίπτωση (3) προκύπτουν οι τριάδες $(p,\ p-2,\ p-2)$ ή $(p,\ p+2,\ p+2)$ οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις $pq+1, pr+1$ και καμία τους δεν περιέχει τον πρώτο αριθμό 2.

Αν $q=r=p-2$, τότε $qr-p=q^2-q-2=m^2$ (από υπόθεση) $m^2<q^2\Rightarrow m<q\Rightarrow m\leq q-1$ και $q^2-q-2=m^2\leq(q-1)^2=q^2-2q+1\Rightarrow q\leq 3$. παρατηρούμε ότι ο $q=3$ ικανοποιεί τη συνθήκη, οπότε έχουμε την τριάδα $(p,\ q,\ r)=(5,\ 3,\ 3)$. Τότε $p+2qr+2=25=5^2$.

Αν $q=r=p+2$, τότε $qr-p=q^2-q+2=m^2$ (από υπόθεση)$\Rightarrow q\leq -1$ (άτοπο).

Δ23. Η Άντα και ο Βύρωνας παίζουν ένα παιγνίδι. Πρώτα η Άντα επιλέγει έναν πραγματικό αριθμό $\alpha\neq 0$ και τον ανακοινώνει. Τότε ο Βύρωνας επιλέγει έναν πραγματικό αριθμό $b\neq 0$ και τον ανακοινώνει. Τότε η Άντα επιλέγει έναν πραγματικό αριθμό $c\neq 0$ και τον

ανακοινώνει. Τελικά ο Βύρωνας επιλέγει ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού του οποίου οι τρεις συντελεστές είναι οι $\alpha, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ με κάποια σειρά.

(α) Με την υπόθεση ότι ο Βύρωνας κερδίζει όταν το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα και η Άντα κερδίζει σε κάθε άλλη περίπτωση, να προσδιορίσετε ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

(β) Με την υπόθεση ότι η Άντα κερδίζει όταν το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα και ο Βύρωνας κερδίζει σε κάθε άλλη περίπτωση, να προσδιορίσετε ποιος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.

Simon Marais Mathematics Competition 2018

Λύση: (α) Ο Βύρωνας έχει δυνατότητα επιλογής του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου και ενός συντελεστή του που μπορεί να τον τοποθετήσει σε όποια θέση επιθυμεί. Επειδή η διακρίνουσα του πολυωνύμου $P(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$ είναι $\Delta=\lambda^2-4\kappa\mu$ και πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το 0 για να κερδίσει ο Βύρωνας, πρέπει αυτός να επιλέξει το συντελεστή b έτσι ώστε να είναι ετερόσημος από το συντελεστή a που θα επιλέξει η Άντα. Τότε ο Βύρωνας έχει στρατηγική νίκης, γιατί στη συνέχεια μπορεί να επιλέξει το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^2+cx+b$ που έχει διακρίνουσα $\Delta=c^2-4ab>0$ οπότε αυτό έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

(β) Στο ερώτημα αυτό πρέπει η Άντα να μπορέσει να εξασφαλίσει να είναι θετική η διακρίνουσα του τριωνύμου που θα επιλέξει ο Βύρωνας. Υπάρχουν 6 δυνατές επιλογές τριωνύμου οι οποίες οδηγούν σε τρεις διαφορετικές διακρίνουσες της μορφής:

$$b^2-4ac,\quad c^2-4ab,\quad a^2-4bc.$$

Θυμίζουμε ότι η Άντα επιλέγει πρώτη το a, ύστερα ο Βύρωνας επιλέγει το b και μετά η Άντα επιλέγει το c. Επομένως, για τις παραπάνω διακρίνουσες, ως προς την επιλογή του c έχουμε:

1. $b^2-4ac\geq 0 \Leftrightarrow ac\leq \dfrac{b^2}{4}$, οπότε, αν γίνει η επιλογή του $a=1$, τότε αρκεί $c\leq \dfrac{b^2}{4}$.
2. $c^2-4ab\geq 0 \Leftrightarrow c^2\geq 4ab \Leftrightarrow \begin{cases} c\in\mathbb{R}^*, & \text{αν } ab<0 \\ c\geq 2\sqrt{ab}, & \text{αν } ab>0 \end{cases}$
3. $a^2-4bc\geq 0 \Leftrightarrow bc\leq \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} c\leq \dfrac{a^2}{4b}, & \text{αν } b>0, \\ c\geq \dfrac{a^2}{4b}, & \text{αν } b<0. \end{cases}$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση η Άντα έχει στρατηγική νίκης

Ασκήσεις για λύση

Γ59. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ, αντίστοιχα. Η ευθεία ε περνάει από το Α και έστω Κ και Λ οι ορθές προβολές των Β και Γ πάνω στην ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε το Α να βρίσκεται μεταξύ των Κ και Λ. Έστω Τ το σημείο τομής των ευθειών ΚΕ και ΖΛ. Να αποδείξετε ότι $\Delta T\perp\varepsilon$.

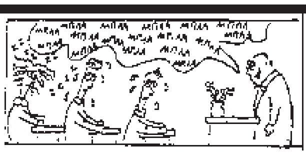
Γ60. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Έστω Κ η ορθή προβολή του Α στην ευθεία ΔΕ και Λ η ορθή προβολή του Β στην ευθεία ΕΖ. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ = ΒΛ.

Α65. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x,y) για τα οποία:

$$2^x+\log_3 x=y^2 \text{ και } 2^y+\log_3 y=x^2.$$

Α66. Έστω $a>0$ πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$a^{\sin x}\cdot(a+1)^{\cos x}\geq a, \text{ για κάθε } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$



HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

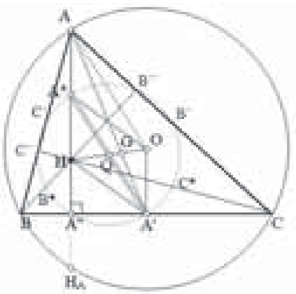
I. τι είναι τα Μαθηματικά

πρόλογος, στα επόμενα τεύχη θα σας παρουσιάζουμε την απάντηση σπουδαίων επιστημόνων, μαθηματικών και μη, στο ερώτημα «τί είναι τα Μαθηματικά»

1η άποψη: ***σύμφωνα με τον φιλόσοφο Αριστοτέλη, οι λεγόμενοι Πυθαγόρειοι καταπιάστηκαν πρώτοι με τα Μαθηματικά και όχι μόνο τα ανάπτυξαν αλλά καθώς αυτά τους έγιναν δεύτερη φύση, θεώρησαν ότι οι αρχές τους είναι οι αρχές των όντων.***

II. Γεωμετρία αγάπη μου

Ένα θριαμβευτικό μήνυμα για την Γεωμετρία, λάβαμε από τον μεγάλο γεωμέτρη Ανδρέα Χατζηπολάκη: «*Μπορεί η* ***Ευκλείδεια Γεωμετρία*** *να έχει παραγκωνιστεί στην εκπαίδευση διεθνώς, αλλά δεν έχει πεθάνει και δε θα πεθάνει ποτέ ("ώσπου να στέκει ο Απάνω Κόσμος!"). Σήμερα "****καλλιεργείται****" όχι μόνο από μαθηματικούς, αλλά και από άλλους θετικούς επιστήμονες, που το κύριο γνωστικό τους αντικείμενο δεν είναι τα Μαθηματικά (φυσικοί, μηχανικοί κλπ). Δύο παραδείγματα από τη Βενεζουέλα, που δεν "βγάζει" μόνο καλλονές, αλλά και σπουδαίους επιστήμονες !*



1. Luis González *Μηχανικός. Από τους πιο δραστήριους στη Γεωμετρία στον ιστότοπο* ***AoPS*** *https://artofproblemsolving.com/community/user/56597*

2. César Eliud Lozada, *Φυσικός. Από τους βασικούς εισφορείς στην Εγκυκλ. Κέντρων του Τριγώνου (ETC). Έχω την τύχη να συνεργάζομαι μαζί του σε τακτική βάση στη λίστα μου Γεωμετρίας Euclid*»

(δες και στο: «ειδήσεις και .ειδήσεις», το λήμμα: «4η. το πρόβλημα Γεωμετρίας που έθεσε ο πρωθυπουργός της Ρωσίας»)

III. Αυτό το ξέρατε;

Δίνεται η πρόταση: «Σε δεδομένο τρίγωνο να εγγραφούν τρεις κύκλοι εφαπτόμενοι μεταξύ των και ο καθένας να εφάπτεται συγχρόνως στις δυο πλευρές του τριγώνου». Με ποιο όνομα είναι γνωστή, στην κλασική Γεωμετρία, αυτή η γεωμετρική κατασκευή; *(η απάντηση στο τέλος της στήλης)*

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. *Ο αντιστασιακός δασκαλάκος* ***του χωριού, Χρήστος Παπακυριακόπουλος, που θα γινόταν ο περιβόητος «Πάπα» του Πρίνστον! (μέρος β΄)***

Προλεγόμενα. Συνεχίζουμε με το δεύτερο (και τελευταίο) μέρος της βιογραφίας του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού, που έμεινε στην ιστορία του πανεπιστημίου του Πρίνστον ως ο "*«Πάπα» του Πρίνστον*"

«Παρά το γεγονός ότι η απόδειξη του Παπακυριακόπουλου αποδείχθηκε λανθασμένη, ο καθηγητής του Πρίνστον εκτίμησε τη διάνοιά του και τον κάλεσε αμέσως κοντά του, μιας και είχε βάλει στόχο να μαζέψει δίπλα του όλα τα φιντάνια της **γεωμετρικής Τοπολογίας**. Μέσα σε αυτά φαινόταν πως υπήρχε κι ένας Έλληνας, κι έτσι το 1948 τον καλεί επισήμως στις ΗΠΑ, χορηγώντας του και μια υποτροφία για να μη χρειάζεται να σκεφτεί πώς θα τα έβγαζε πέρα στην άλλη πλευρά του Ατλαντικού.

Με εξαίρεση μια ολιγοήμερη παραμονή του στην Ελλάδα το 1952 για να θάψει τον πατέρα του, ο Παπακυριακόπουλος δεν θα επέστρεφε ποτέ σε μια πατρίδα που τον είχε τόσο πικράνει.

Και δεν βρέθηκε Έλληνας να τον υπερασπιστεί παρά το ίδιο το αμερικανικό πανεπιστήμιο, το οποίο είχε κάνει άλλωστε το ίδιο για κάποιον Αλβέρτο Αϊνστάιν λίγο παλιότερα αλλά και για τον Τόμας Μαν…

Ο «Πάπα» του Πρίνστον και η Εικασία του Πουανκαρέ

Καταφθάνοντας στον Νέο Κόσμο το 1949, ο Παπακυριακόπουλος βρήκε επιτέλους το ασφαλές περιβάλλον που χρειαζόταν για να λάμψει. Άρχισε αμέσως τη δουλειά του ως μεταπτυχιακός φοιτητής και διακεκριμένος ερευνητής αργότερα στο πανεπιστήμιο και ξεχώρισε γρήγορα για την πρωτοτυπία του έργου του.

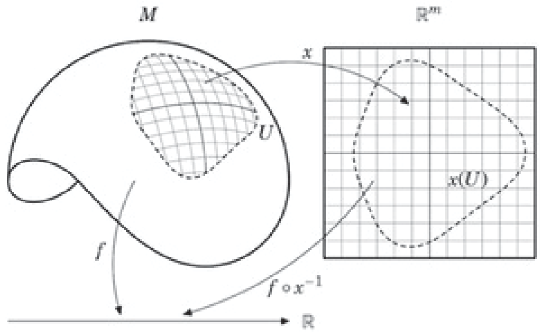
Η ζωή του όμως δεν άλλαξε και πολύ. Κλεισμένος στο γραφείο ήταν στην Ελλάδα, κλεισμένος και στην Αμερική. Ο επίμονος Έλληνας έλυσε τελικά το αινιγματικό "***Λήμμα του Ντεν***" και ανταμείφθηκε με θέση ερευνητή, αρχικά στο περιβόητο "*Ινστιτούτο Προχωρημένων Σπουδών*", το «**σπίτι**» του **Αϊνστάιν,** του Οπενχάιμερ και πολλών ακόμα προσωπικοτήτων της επιστήμης, και στη "*Μαθηματική Σχολή*" αργότερα.

Παρά τη φήμη που αποκτούσε ολοένα και περισσότερο στη μαθηματική κοινότητα, παρέμενε πάντα **ταπεινός ερευνητής**, καθώς ένιωθε ότι οποιαδήποτε ακαδημαϊκή θέση και διδακτικό καθήκον θα του έτρωγαν χρόνο από τα Μαθηματικά του. Πανεπιστημιακή εξέλιξη δεν θα είχε λοιπόν, γιατί έτσι το είχε αποφασίσει ο εκκεντρικός μαθηματικός, που δεν έπιανε άλλωστε φιλίες με κανέναν. Τίποτα δεν έκανε που θα του στερούσε έστω και μερικά λεπτά από τη μελέτη του, εκτός φυσικά από κείνη τη σύντομη μεσημεριανή ανάπαυση.

Οι τόσοι θρύλοι του Πρίνστον που αφορούν τον ιδιαίτερο αυτό Έλληνα μας λένε πως ακόμα κι όταν πήγαινε για τον καφέ του στην αίθουσα των καθηγητών, καθόταν πάντα παράμερα σε μια γωνιά και έκανε τα πάντα για να αποθαρρύνει τις ανούσιες συζητήσεις. Ερημίτης σωστός, πέρασε 25 ολόκληρα χρόνια στις ΗΠΑ σε κείνο το καμαράκι του ξενοδοχείου που πρωτοκατέλυσε, διατηρώντας τα λιγοστά υπάρχοντά του στη βαλίτσα της μετανάστευσης.

Γι' αυτό και ο Παπακυριακόπουλος είναι ουσιαστικά το έργο του, μια κολοσσιαία συμβολή στη γεωμετρική Τοπολογία που θα τον έκανε αστέρα των μαθηματικών στη διεθνή κοινότητα. Η συμβολή του στην Τοπολογία των «*τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων*» θεωρείται εμβληματική, μια έρευνα που θα έφερνε τελικά τον «Πάπα» πλέον στο **κατώφλι του Πουανκαρέ**.

Η Εικασία του οποίου ήταν τέτοιας δυσκολίας που ούτε ο ίδιος, πατέρας του κλάδου και τρισμέγιστος μαθηματικός, δεν μπόρεσε ποτέ να αποδείξει! Τόσο αυτός όσο και οι επίγονοί του στον κλάδο παραμέρισαν έτσι την ενοχλητική αυτή λεπτομέρεια για αργότερα, γεννώντας ένα από τα πλέον επίμονα μυστήρια των Μαθηματικών.



Το μόνο ουσιαστικό βήμα έλαβε χώρα το 1910, όταν ο Γερμανός μαθηματικός Μαξ Ντεν απέδειξε το Λήμμα του, στο οποίο βασίστηκε όλη η πρόοδος της Τοπολογίας. Το 1929 ήρθε ωστόσο η ολοκληρωτική καταστροφή, όταν ένας συμπατριώτης του Ντεν ανακάλυψε ένα θεμελιώδες σφάλμα στην απόδειξή του, κάτι που όχι μόνο ακύρωνε το Λήμμα του αλλά και όλη την κατοπινή γνώση!

ο Παπακυριακόπουλος και το Λήμμα του Ντεν

Γι' αυτό και είναι εδώ ογκόλιθος ο Παπακυριακόπουλος, ο οποίος από την εποχή που πρωτομπήκε στο βασίλειο της Τοπολογίας, φοιτητής ακόμα, βρήκε όλους τους μαθηματικούς να ψάχνουν μανιωδώς την απόδειξη του Λήμματος του Ντεν. Ήταν όμως αυτός που βρήκε τη λύση, εννιά χρόνια είχαν περάσει εντωμεταξύ ψάχνοντάς τη, ανοίγοντας διάπλατα τις πύλες για τη μαθηματική κατανόηση του χώρου στον οποίο ζούμε.

Πλάι στη σπουδαία του απόδειξη, κατέληξε σε δύο ακόμα σημαντικότατες μαθηματικές προτάσεις ("*Θεώρημα **του Βρόχου***" και "*Θεώρημα **της Σφαίρας***") στα τέλη της δεκαετίας του 1950, με τις οποίες λύθηκαν οριστικά τα προβλήματα που ταλάνιζαν τη γεωμετρική Τοπολογία εδώ και πενήντα κοντά χρόνια.

Ακόμα και στον ούτως ή άλλως δυσνόητο κόσμο των Μαθηματικών όμως ο «Πάπα» ασχολήθηκε με ιδέες που λίγοι μπορούσαν να καταλάβουν στην εποχή του. Κι έτσι η φήμη του στη μαθηματική κοινότητα ήταν μεν τεράστια, είχε περιορισμένη ωστόσο απήχηση στα χρόνια του. Όλοι πάντως αναγνώρισαν ποιος ήταν το 1964, όταν του απονεμήθηκε η ύψιστη μαθηματική διάκριση του κόσμου για αξιοσημείωτες **ανακαλύψεις στη γεωμετρία** (Βραβείο **Βέμπλεν**), η οποία δινόταν μάλιστα για πρώτη φορά.

Τακτοποιώντας τις βάσεις της "*Εικασίας του Πουανκαρέ*", «νομιμοποίησε» πια τους πάντες να ασχοληθούν σοβαρά με την Τοπολογία και τις Πολλαπλότητες. Κάτι που έκανε εξάλλου και ο ίδιος, αφιερώνοντάς της το μυαλό και την ψυχή του. Δεν ξέρουμε αν και τι θα κατάφερνε αν δεν τον προλάβαινε ο θάνατος στα 62 του χρόνια, γνωρίζουμε πάντως ότι οποιαδήποτε αναφορά τόσο στην Εικασία όσο και την ίδια την Τοπολογία δεν μπορεί να τον παραλείπει. Και δεν το κάνει ποτέ! Πάνω στις δικές του βάσεις πάτησε εξάλλου ο Ρώσος Γκριγκόρι Πέρελμαν για να λύσει την "*Υπόθεση του Πουανκαρέ*", κι αυτό μόλις το 2002.

Ως στυλοβάτης της γεωμετρικής Τοπολογίας και πρωτοπόρος των Μαθηματικών πέρασε αυτά τα 25 σπαρτιάτικα χρόνια στο Πρίνστον, μαλώνοντας συχνά με τις πρυτανικές αρχές καθώς δεν ήθελε καμία ακαδημαϊκή εξέλιξη! Μετά κόπων και βασάνων τον έπεισαν να δεχτεί να γίνει μέλος του "*Ινστιτούτου Προχωρημένων Σπουδών*" του Πρίνστον, αν και εμφανιζόταν στις συνεδριάσεις πάντα με μούτρα.

Οι επιστημονικές του εργασίες διακρίνονταν για τις εμπνεύσεις και την αρτιότητά τους. Η πρόοδος του ερευνητικού του έργου, και ειδικά η εργασία του «*Για τα πέρατα των κομβικών ομάδων*» (1955), μελετήθηκαν εξονυχιστικά. Το Πανεπιστήμιο του Πρίνστον τον τίμησε σε ειδική τελετή το 1976 και δημοσίευσε τόσο τα μαθηματικά άπαντά του όσο και κάποιες έρευνες που δεν είχαν δει το φως της δημοσιότητας.

Η Ελλάδα παρέμενε γι' αυτόν κάτι που τον πονούσε και μάλιστα πολύ. Και θα έπρεπε αυτός ο μεγάλος Έλληνας να περιμένει την πτώση της Χούντας των Συνταγματαρχών ώστε να του αποδοθεί ξανά η ελληνική υπηκοότητα, όταν και προγραμμάτιζε πλέον το πρώτο του ταξίδι στην πατρίδα από το 1952 με το όνομά του αποκατεστημένο.

$$L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Η "*Ακαδημία των Αθηνών*" είχε προλάβει να τον χρίσει αντεπιστέλλον μέλος της. Όσο για το Πανεπιστήμιο Αθηνών, είχε τώρα την τιμή να έχει στις βιβλιοθήκες **του την πρώτη στην ιστορία των Μαθηματικών** διδακτορική διατριβή πάνω στην **Τοπολογία!**

Αυτό το ταξίδι στην πατρίδα δεν θα το πραγματοποιούσε όμως ποτέ, καθώς θα έχανε τη μάχη με τον καρκίνο στις 29 Ιουνίου 1976, πριν πακετάρει ξανά εκείνη τη βαλιτσούλα και πάρει τον δρόμο για την Ελλάδα…

2ο θέμα. «Τι 50 τι 60 τι 70», του Δημήτρη Λεκάτη

προλεγόμενα. *από το φίλο της στήλης, συνάδελφο Δημήτρη Λεκάτη [Σάμος], λάβαμε ένα σύντομο κείμενο με αναμνήσεις του από τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών όταν ήταν μαθητής. Μια ματιά διεισδυτική που φέρνει στο φως πολλά και χρήσιμα. Μακάρι, να έχουμε πολλές τέτοιες δημοσιεύσεις. Φόρο τιμής σ' αυτούς που μας άνοιξαν τα φτερά να πετάξουμε στον μαγευτικό κόσμο των Μαθηματικών.*

«Όχι, δεν πρόκειται για το νοσταλγικό τραγούδι του Νίκι Γιάκοβλεφ «Τι 30 τι 40 τι 50…» αλλά για τις αναμνήσεις μου από τα γυμνασιακά χρόνια σε Σχολείο της Αθήνας στα 1960-70, μετά από παρατήρησή μου ότι λείπουν τέτοια δημοσιεύματα.

Λοιπόν, μετά την αποφοίτηση μου από το δημοτικό και ένα ξένοιαστο καλοκαίρι επιτέλους γυμνασιόπαις με μακρύ παντελόνι, παρακαλώ, και χρήματα στην τσέπη για το εισιτήριο του λεωφορείου προς το Γυμνάσιο.

Ήταν χρόνια που τα Μαθηματικά στο σχολείο είχαν, κατά την **αίσθησή** μου, «**άρωμα**». Αυτό γεννιόταν στη τάξη και κυρίως στα διαλείμματα. Στην τάξη το άρωμα το έδιναν οι καθηγητές μας των Μαθηματικών. Στα διαλείμματα οι μερακλήδες μαθητές **σχημάτιζαν πηγαδάκια** με μόνιμο θέμα συζήτησης τα φροντιστηριακά βοηθήματα καί βεβαίως για τους διδάσκοντες μαθηματικούς στα κεντρικά, κυρίως Κάνιγγος-Ομόνοιας, φροντιστήρια.

Οι βιβλιοσυζητήσεις κατέληγαν σε πλήρη βιβλιογραφική ενημέρωση. Τίτλοι και συγγραφείς έπεφταν βροχή «πάνω στο τραπέζι» Άλγεβρα του Μάγειρα, Πάλλας, Κανέλλος, Τόγκας, Μαντάς, Σαββαΐδης, Ζήβας, Σκιαδάς, Ντάνης (με τα «παπάκια» του να πρωταγωνιστούν στους γεωμετρικούς τόπους), αδελφοί Γεωργιακάκηδες, αδελφοί Γκόνοι και τόσοι άλλοι.

Οι πιο διαβασμένοι πρότειναν την Γεωμετρία των Ιησουϊτών αλλά και τις, Ιησουϊτικού τύπου, Ασκήσεις Τριγωνομετρίας του Ferval. Δίπλα στα ονόματα ακούγαμε καί γελούσαμε, πάντα με πολύ συμπάθεια και σεβασμό, για τις ατάκες και τις συνήθειες των διδασκόντων.

Αλλά να και τα πρώτο σχολικό βιβλίο «*Μαθηματικά δια τας τρείς τάξεις του Γυμνασίου*» του Π. Τόγκα με κλασικά αριθμητικοαλγεβρικά θέματα και προβλήματα: τόκου, μερισμού, μείγματα, αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις κλπ. Ένα βιβλίο που σε ασκούσε βαθμιαία στον «χειροπιαστό» και επαληθεύσιμο μαθηματικό συλλογισμό. Το βιβλίο αυτό κάλυπτε τις τάξεις του Γυμνασίου, δυστυχώς όμως δεν μακροημέρευσε διότι αντικαταστάθηκε από το βιβλίο

"*Μαθηματικά*" υπό Μπούσγου με σύνολα και παρεμφερή θέματα και με το οποίο υλοποιείτο η ανατροπή με επιπόλαιο τρόπο του αναλυτικού προγράμματος για την μαθηματική παιδεία και εκπαίδευση.
Μέχρι την ολοκλήρωση του τριτάξιου Γυμνασίου το προαναφερόμενο βιβλίο αντικαταστάθηκε από εκείνο του Ντίνου Μπιναρδόπουλου.
Στο Λύκειο μας υποδέχθηκε το βιβλίο "*Άλγεβρα*" του Νείλου Σακελλαρίου. Ούτε και αυτό μακροημέρευσε, τουλάχιστον για τα Λύκεια της Αθήνας. Παρέμεινε ως σχολικό εγχειρίδιο για τα τμήματα «κλασικής κατευθύνσεως». Στα τμήματα «θετικής κατευθύνσεως» μας δόθηκε το βιβλίο του Πανάκη ("*Άλγεβρα*") ενώ εκείνο της Γεωμετρίας παρέμεινε το ίδιο. Στις δύο τελευταίες τάξεις του Λυκείου, και για τα θετικά τμήματα, μας έβαλαν τόσα Μαθηματικά που ακόμη και σήμερα, μετά από τόσα χρόνια, δεν μπορώ να καταλάβω πως χώρεσαν: Άλγεβρα, Διανύσματα, Ακολουθίες, Πολυώνυμα, Στερεομετρία, Ανάλυση, Δομές (βιβλίο Στάϊκου), επιφάνειες και όγκοι εκ περιστροφής, απαλείφουσες, τριγωνομετρικά συστήματα , αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις κ.λ.π.

Θυμάμαι όλους τους δασκάλους και καθηγητές μου, ανεξαρτήτως ειδικότητας, με τα καλύτερα αισθήματα και αξεθώριαστους.

Θα ήθελα όμως να κάνω μια ιδιαίτερη μνεία σε δύο καθηγητές μου. Κατά σειρά σχολικών περιόδων: τον Αντ. Κατσουλάκη, που επιπλέον ήταν και σχολ. σύμβουλος- εισηγητής σε σεμινάρια νεοδιόριστων, μας έμπασε στα βαθιά της Άλγεβρας αλλά και στο «τρυπάκι» της αναζήτησης ξενόγλωσσης μαθηματικής βιβλιογραφίας γνωρίζοντας μας, έτσι, με την άλγεβρα του Smith (βρετανική έκδοση).
Και να, στον διάδρομο φαίνεται ο Πέτρ. Σαμπατάκος με το προσωνύμιο « ο Πετράν ή ο Μέγας Πέτρος» για τον αγαπημένο μας καθηγητή. Γρήγορα γυρίζουμε στα θρανία μας. Μπαίνει στην αίθουσα με τον χαρτοφύλακά του, μονίμως φουσκωμένο, αλλά και 1 ή 2 γαλλικά βιβλία Μαθηματικών υπό μάλης. Δεν έχανε την ευκαιρία να μας περιγράφει τις περιπέτειες του με τις διάφορες ασκήσεις, φοιτητής ών.
Ακριβοδίκαιος και αυστηρός αλλά και ευγενής, απευθυνόταν σε εμάς στον πληθυντικό».

3ο θέμα. ***Το μαθηματικό Σχολείο του Βελιγραδίου. Ένα παράδειγμα ίδρυσης σχολείου Επιστημών για την ελληνική μέση εκπαίδευση***

προλεγόμενα. ένας καλός συνάδελφος μας έστειλε μικρή περίληψη απόψεων του Ανδρέα Πούλου (Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Θεσσαλονίκης) σχετικά με τα λεγόμενα «Μαθηματικά Σχολεία». Είναι γνωστό ότι οι απόψεις του Ανδρέα, όλο και κάτι καινούργιο φέρουν και συζητιούνται.

«Η περίπτωση της Σερβίας είναι πολύ ενδιαφέρουσα για τους Έλληνες, διότι είναι μια Βαλκανική χώρα, η οποία κατείχε μια ιδιαίτερη πολιτική και οικονομική θέση μεταξύ των χωρών της **Ευρωπαϊκής Ένωσης**, της **Ρωσικής Ομοσπονδίας** και των Βαλκανίων. **…..** έχουν ιδρύσει και τα αποκαλούμενα σχολεία Επιστημών, τα οποία διατηρούν, βελτιώνουν και ενισχύουν. Στο Βελιγράδι υπάρχει το κεντρικό ειδικό σχολείο Επιστημών το M.G.B., συντομογραφία του **Matematička gimnazija Beograd**, το οποίο θα αναφέρουμε στη συνέχεια ως Μαθηματικό Γυμνάσιο του Βελιγραδίου **(Μ.Γ.Β.).** Ο τίτλος Γυμνάσιο δεν αναφέρεται αποκλειστικά σε Γυμνάσιο, αφού οι μαθητές του έχουν ηλικία από 12 έως 18 ετών και τα τελευταία έτη λειτουργούν και τάξεις Δημοτικού.

Οι πληροφορίες για το **Μ.Γ.Β.** προέρχονται από την επίσημη ιστοσελίδα του, αλλά και από την ενημέρωσή μου από την Διεύθυνση του Σχολείου όταν το επισκέφθηκα τον Μάρτιο του 2016, Το Σχολείο ιδρύθηκε το 1966 ένα χρόνο μετά την ίδρυση του διάσημου Φυσικομαθηματικού **σχολείου Κολμογκόροφ** στη Μόσχα, [6]. Βρίσκεται στο κέντρο της πόλης, κοντά σε Πανεπιστημιακές Σχολές και σε άλλα πολιτιστικά Ιδρύματα. Σε αυτό φοιτούν μαθητές στα Μαθηματικά, στις Φυσικές Επιστήμες και στην Πληροφορική.

Το διδακτικό προσωπικό του Σχολείου αποτελείται από 100 άτομα, 59από αυτά είναι πλήρους απασχόλησης και 41 μερικής απασχόλησης, διότι κάποιοι εργάζονται και σε άλλα εκπαιδευτικά και επιστημονικά ιδρύματα.

Υπάρχουν 38 καθηγητές Μαθηματικών, 20 από αυτούς έχουν διδακτορικό δίπλωμα, 13 καθηγητές της Επιστήμης των Υπολογιστών και 10 καθηγητές Φυσικής. Όλοι οι διδάσκοντες έχουν διακρίσεις στον επιστημονικό τους τομέα. Προτιμώνται οι πρώην μαθητές του Σχολείου και οι διακριθέντες σε διεθνείς διαγωνισμούς.

Τονίζουμε ότι το Μ.Γ.Β., εκτός των άλλων, είναι ένα σχολείο στο οποίο **οι μαθητές μαθαίνουν πώς να σκέφτονται και να αναλύουν**, να αναπτύσσουν τη δύναμη της **κριτικής σκέψης** και με το εφόδιο αυτό να ενισχύουν την ισχύ των αποκτημένων γνώσεων.

Η μοναδικότητα της οργανωτικής δομής του Σχολείου καθορίζεται από τους ακόλουθους παράγοντες:

Α) Οι μαθητές επιλέγονται προσεκτικά μέσω μιας συγκεκριμένης διαδικασίας εισαγωγής, η οποία περιλαμβάνει ειδικές εξετάσεις και αξιολόγηση των προηγούμενων επιτευγμάτων τους.

Β) Από ένα ειδικά προσαρμοσμένο Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών στα Μαθηματικά, στις Φυσικές Επιστήμες και στην Πληροφορική,στο οποίο η επιστημονική γνώση αποκτάται χάρη σε ένα προχωρημένο επίπεδο διδασκαλίας. Για τον λόγο αυτόν επιλέγονται οι άριστοι για το προσωπικό μας. Πολλά μέλη του διδακτικού προσωπικού είναι πρώην μαθητές του Σχολείου.

Τα διδακτικά εγχειρίδια τα οποία χρησιμοποιούνται όχι μόνο στο Σχολείο, αλλά και σε πολλά άλλα σχολεία με προσανατολισμό τα Μαθηματικά και τις Φυσικές επιστήμες, έχουν συγγραφεί από **διδάσκοντες του Σχολείου.** *Κάθε τάξη περιλαμβάνει είκοσι μαθητές. Η βοήθεια, που μπορούν να παρέχουν οι Φυσικομαθηματικές Σχολές και τα Πολυτεχνεία μας, είναι ουσιώδης και εντελώς απαραίτητη για την αποτελεσματική λειτουργία και αποδοτικότητα τέτοιων Σχολείων. Άλλωστε και τα Ιδρύματα αυτά* ***θα έχουν όφελος****, αφού οι απόφοιτοι των Σχολείων Επιστημών θα είναι από τους καλύτερους φοιτητές τους»*

4ο θέμα. Σταύρου Ξενικουδάκη, «Τα εξαιρετικά κατασκευαστικά ένστικτα των μελισσών»

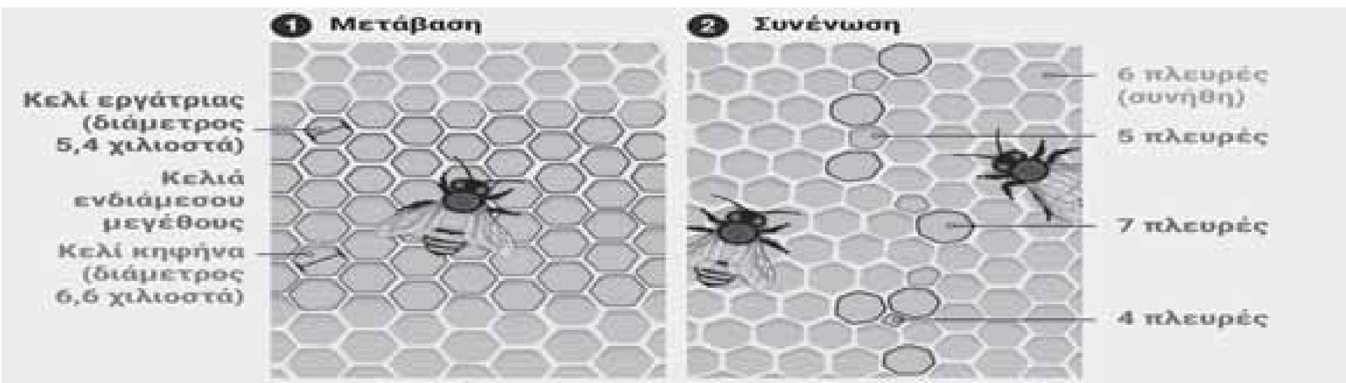
προλεγόμενα. Ο γνωστός επιστημονικός σχολιαστής Σταύρος Ξενικουδάκης, μας έστειλε ένα σημείωμα (παρμένο από το περιοδικό «*Scientific American*»), με τίτλο: «Τα εξαιρετικά κατασκευαστικά ένστικτα των μελισσών»

«Ο Κάρολος Δαρβίνος περιγράφει την ικανότητα των μελισσών να οικοδομούν τέλειες κηρήθρες ως «το πιο όμορφο από όλα τα γνωστά ένστικτα». Κάθε εξάγωνο κελί είναι κατασκευασμένο με τόση ακρίβεια και τοποθετημένο με τέτοια λεπτομέρεια, που οι κηρήθρες μπορούν εύκολα να χαρακτηριστούν κάτι όμορφο να το βλέπεις. Νέες έρευνες σχετικά με το πώς οι μέλισσες καταφέρνουν να ενσωματώσουν κελιά διαφορετικού μεγέθους σε ένα αλάθητο τελικό δίκτυο και μάλιστα να το κάνουν δουλεύοντας ταυτόχρονα από πολλές κατευθύνσεις, αποκαλύπτουν εξαιρετική προσαρμοστικότητα. Τα γειτονικά κελιά αποθήκευσης μελιού, αυτά που προορίζονται για τις εργάτριες μέλισσες, είναι συνήθως ίδιου μεγέθους, αλλά οι μέλισσες φτιάχνουν και μερικά μεγαλύτερα για να μεγαλώσουν μέσα σε αυτά οι κηφήνες. Και πρέπει με κάποιον τρόπο να ταιριάξουν και να συνενώσουν τα τμήματα της κηρήθρας που κατασκευάζονται, ξεκινώντας από πολλά διαφορετικά σημεία εκκίνησης.

Επιστήμονες μέτρησαν τις διαστάσεις περίπου 19.000 κελιών σε κηρήθρες από 12 αποικίες ιταλικών μελισσών. Χρησιμοποιώντας τεχνικές αυτοματοποιημένης ανάλυσης εικόνας, εντόπισαν τα κέντρα και τις κορυφές των κελιών, ώστε να βρουν **διαφορές στο σχήμα** και το **μέγεθός τους.** Η διαδικασία αυτή ήταν ουσιαστικά αδύνατη πριν από την εμφάνιση αυτών των καινούριων **αυτόματων τεχνικών.** Διαπίστωσαν ότι οι μέλισσες έκαναν «**έξυπνες**» προσαρμογές κατά τη μετάβαση από το ένα μέγεθος κελιού στο άλλο, έτσι που τα κελιά να δημιουργήσουν ένα όλον, όσο γίνεται πιο «καθαρό» και ενιαίο. Τα έντομα χρησιμοποιούσαν **μοτίβα** δύσκολων στην κατασκευή σχημάτων (κυρίως ζεύγη επταγώνων και πενταγώνων) και προσάρμοζαν το μέγεθος και τον προσανατολισμό των κελιών με δεξιότητα που θα ζήλευε και ο καλύτερος αρχιτέκτονας.

«Η δομή **εξαγωνικού δικτύου** μιας **κηρήθρας** - που σχηματίζεται από εκατοντάδες μέλισσες χωρίς κάποιον να τις συντονίζει - οδηγεί στην εικασία ότι πρέπει να οφείλεται σε κάποια ρομποτική έμφυτη (ενστικτώδη) συμπεριφορά», λέει ο εντομολόγος Λαρς Τσίτκα, που δεν συμμετείχε στην έρευνα. «Αλλά ένα απλό ρομπότ», προσθέτει, «δεν έχει τέτοιο επίπεδο προσαρμοστικότητας και επιδιόρθωσης λαθών». Σύμφωνα με τον Ραγκαβέντρα Γκανταγκάρ, του Ινδικού Ινστιτούτου Επιστημών, η εξέταση του τρόπου συντονισμού των μελισσών για την κατασκευή της κηρήθρας θα μπορούσε **να βοηθήσει στην πρόοδο της ρομποτικής**. «Φανταστείτε», λέει, «αν μπορούσαμε να προγραμματίσουμε τέτοια εξυπνάδα σε πραγματικά ρομπότ!

Είναι γνωστό ότι οι μέλισσες κατασκευάζουν



κηρήθρες που αποτελούνται από τέλεια ομοιόμορφα εξάγωνα. Ωστόσο, αποκλίνουν από τα συνηθισμένα μοτίβα τους όταν χρειάζεται. Για παράδειγμα, όταν μεταβαίνουν από μικρά κελιά προοριζόμενα για μέλισσες - εργάτριες και εκείνα που προορίζονται για αναπαραγωγικούς κηφήνες, οι μέλισσες φτιάχνουν μια ή δύο σειρές από ενδιάμεσου μεγέθους κελιά (1). Επειδή αρχίζουν την κατασκευή σε διάφορα σημεία, οι μέλισσες πρέπει να βρουν τρόπους να συνενώσουν τα τμήματα, ώστε να σχηματιστεί μια ενιαία κηρήθρα, λειτουργία που συχνά απαιτεί το συνδυασμό κελιών με 4, 5 και 7 πλευρές (2)»

V. ειδήσεις και...ειδήσεις

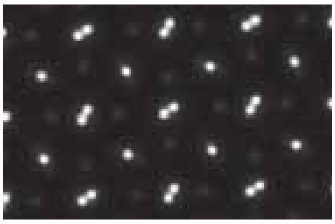
1η. μια δυσαναπλήρωτη απώλεια

Απεβίωσε ο εκλεκτός άνθρωπος και εξαιρετικός Μαθηματικός **Βασίλης Δουγαλής** (1949-2022). Ό,τι και να γράψω για τον Βασίλη είναι λίγο. Ήταν συνάδελφος στο Πανεπιστήμιο Κρήτης για σχεδόν δέκα χρόνια. Κατόπιν πήγε στην Αθήνα, ΕΜΠ και ΕΚΠΑ, αλλά κράτησε ουσιαστική επαφή με το Ίδρυμα Τεχνολογίας Έρευνας [ήταν Διευθυντής] και το Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών, στη Κρήτη.Τον ευγνωμονώ τόσο για την συμβολή του στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης όσο και για την στήριξή του σε εμένα τον ίδιο, στην αρχή της καριέρας μου. [Μιχάλης Λάμπρου, Πανεπιστήμιο Κρήτης]

2η. Η υψηλότερης ανάλυσης εικόνα ατόμων της ύλης που λήφθηκε ποτέ!

Άτομα της κρυσταλλικής χημικής ένωσης ορθοσκανδικό πρασεοδύμιο, μεγεθυμένα 100 εκατομμύρια φορές, με την τεχνική μικροσκοπίας που ονομάζεται ηλεκτρονική πτυχογραφία (βλέπε διπλανή εικόνα)

Ερευνητές του Πανεπιστημίου Κορνέλ κατέγραψαν την υψηλότερης ανάλυσης εικόνα ατόμων της ύλης που έχει ληφθεί ποτέ, και μάλιστα διπλάσιας ανάλυσης από εκείνη που είχαν πετύχει οι ίδιοι το 2018. Χρησιμοποιώντας ειδικό μικροσκόπιο μεγέθυναν ένα δείγμα από κρύσταλλο ορθοσκανδικού πρασεοδύμιου ($PrScO_3$) εκατό εκατομμύρια φορές! Το σκάνδιο και το πρασεοδύμιο είναι μεταλλικά στοιχεία, με το πρώτο να κατατάσσεται στον περιοδικό πίνακα στα στοιχεία μετάπτωσης και το δεύτερο στις λανθανίδες.



3η. Μαθηματικά και ποδόσφαιρο

Από τον σημαντικό συνεργάτη, με το σήμα "**mick7**", της έγκυρης μαθηματικής ιστοσελίδας "mathematica.gr", δανειζόμαστε ελάχιστη περίληψη μιας ανάρτησής του, με την οποία μας δίνει:

«**i.** τρεις διευθύνσεις με θέμα, εκτενή άρθρα **στην τοπολογία** της ποδοσφαιρικής μπάλας.
- https://www.americanscientist.org/artic ... ccer-balls
- https://cs.brown.edu/courses/csci1950-h ... pology.pdf
- https://www.awesomemath.org/wp-pdf-file...graphs.pdf

ii. στη διεύθυνση:•, https://www.youtube.com/watch?v=1LcXH_4rwr4, που μας οδηγεί σε ντοκιμαντέρ το οποίο δείχνει την χρήση της στατιστικής και των δεδομένων στη βελτίωση της **ποιότητας του παιχνιδιού**

iii. στη διεύθυνση: • https://youtu.be/dXr3s7YS-Gg, με την επεξήγηση: «Όταν καταλαβαίνεις ότι ο Βέρνερ είχε περισσότερες πιθανότητες να μην σκοράρει από το ένα μέτρο.

Μπορείτε να βρείτε κι άλα βίντεο αυτής της μορφής "χτυπώντας" goal probability στο YouTube

Η πιθανότητα να σκοράρει εξαρτάται μόνο από την κατάσταση (δηλαδή: απόσταση από το τέρμα, γωνία που σχηματίζει η μπάλα με τα δύο δοκάρια, αν υπάρχουν αμυνόμενοι μεταξύ της μπάλας και τού τέρματος,κλπ) και όχι από τον παίκτη που εκτελη την φάση. Ωστε να μπορούν να βγουν αποτέλεσμα ώστε αν ένας παίκτης είναι καλός (δλδ σκοράρει περισσότερες φορές από την πιθανότητα του) σε όμοιες φάσης.

Π.χ η πιθανότητα να μπει γκολ από πέναλντι είναι 77% (Messi, Ronaldo,**Lewandowski έχουν στα πέναλτι. 101/130 περίπου ίσο με 77,7%,** 139/166 περίπου ίσο με **83,7%,** 62/68 περίπου ίσο με **91,2%**, αντίστοιχα»

4η. το πρόβλημα Γεωμετρίας που έθεσε ο πρωθυπουργός της Ρωσίας

Το γεωμετρικό πρόβλημα που έθεσε ο πρωθυπουργός της Ρωσίας **Μιχαήλ Μισούστιν** σε μαθητές ενός Λυκείου κοντά στη Μόσχα σε μια επίσκεψή του. Ο Μισούστιν είναι μηχανικός και άριστος Γεωμέτρης. Προέτρεψε δε τους μαθητές ***να μελετούν Γεωμετρία και αν καταφέρουν να αποκτήσουν καλές γνώσεις στα Μαθηματικά και στη Φυσική, θα μπορούν να λύνουν οποιοδήποτε πρόβλημα!!!***

Το πρόβλημα: ***«Δίνεται ένας κύκλος (Ο,ρ), μια διάμετρός του ΑΒ και ένα σημείο του Γ. Από το Γ να αχθεί η κάθετη στην ΑΒ χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα (αβαθμολόγητο χάρακα)»*** *υπόδειξη Σωτ. Γκουντουβά*

1. Θεωρούμε δύο σημεία Δ και Ε στον κύκλο οπότε οι γωνίες Δ και Ε είναι ορθές (Θαλής).
2. Προεκτείνουμε τις ΑΔ και ΒΕ που τέμνονται στο Ζ. Το Η είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΖ.
3. Το ΖΗ είναι ύψος του ΑΒΖ και ο φορέας του τέμνει τον κύκλο στα σημεία Θ και Θ'.
4. Φέρουμε την ημιευθεία ΘΓ που τέμνει την ΑΒ στο Κ.
5. Φέρουμε την Θ'Κ που τέμνει τον κύκλο στο Μ.
6. Το ΓΜ είναι κάθετο στη διάμετρο ΑΒ.]

VI. απάντηση στο "αυτό το ξέρατε";

είναι γνωστή ως: "κατασκευή Malfatti" [Στρατή Παπαδόπουλου: «David Hilbert: Θεμέλια της Γεωμετρίας», 1995 (σελ. 271)]

Ασκήσεις στο τριώνυμο

Μιεκλόπουλος Δημήτρης – Παράρτημα **Ε.Μ.Ε. Ηλείας**

Άσκηση 1η. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-\beta x-\alpha=0$ (1), $\alpha,\beta\in R$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta\in R$.

Λύση.

- Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ η (1) είναι ταυτότητα.
- Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$ τότε έχουμε $\beta x=0\Leftrightarrow x=0$, άρα έχει μία λύση
- Αν $\alpha\neq 0$ και $\beta\in R$ έχουμε $\Delta=\beta^2+4\alpha^2>0$. Οπότε η (1) έχει δύο πραγματικές λύσεις άνισες.

Άσκηση 2η. Να λυθεί η ανίσωση $-2x^2+x+1\geq 0$

Λύση: Έχουμε $\Delta=1^2-4(-2)\cdot 1=9>0$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις άνισες λύσεις

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{-4}=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{-4}=1$$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το $-2x^2+x+1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2+x+1$		−	0	+	0	−	

Συνεπώς $x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

Άσκηση 3η. Να λυθεί η ανίσωση $x^2+2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$

Λύση: Υπολογίζουμε την διακρίνουσα

$\Delta=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2>0$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις άνισες λύσεις

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{3}-1}{2}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{-2-\sqrt{3}+1}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το $x^2+2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$x^2+2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$		+	0	−	0	+	

Συνεπώς οι λύσεις της ανίσωσης είναι

$$x\in\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$$

Άσκηση 4η. Να λυθεί η ανίσωση

$$2x^2+2(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}+\frac{3}{2}\leq 0$$

Λύση: Υπολογίζουμε την διακρίνουσα

$$\Delta=4(\sqrt{2}+1)^2-8\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)=0$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την διπλή λύση

$$x_1=\frac{-2(\sqrt{2}+1)}{4}=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το τριώνυμο $2x^2+2(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}+\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+2(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}+\frac{3}{2}$		+	0	+	

Συνεπώς η λύση της ανίσωσης είναι $x=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

Άσκηση 5η. Να λυθεί η εξίσωση $x^2-5|x|-6\geq 0$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $|x|^2=x^2$ για κάθε $x\in R$, οπότε η ανίσωση γίνεται $|x|^2-5|x|-6\geq 0$. Θέτουμε $|x|=\alpha>0$ (Αν $\alpha=0$ είναι αδύνατη). Η ανίσωση γίνεται $\alpha^2-5\alpha-6\geq 0$. Υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta=49$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις άνισες λύσεις $\alpha_1=\frac{5+7}{2}=6$, $\alpha_2=\frac{5-7}{2}=-1$. Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το $\alpha^2-5\alpha-6$ με $\alpha>0$

α	$-\infty$		−1		0		6		$+\infty$
$\alpha^2-5\alpha-6$		+	0	−		−	0	+	

Συνεπώς οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\alpha\geq 6$.

Άρα $|x|\geq 6\Leftrightarrow x\leq -6$ ή $x\geq 6$.

Άσκηση 6η. Να λυθεί η ανίσωση

$$-2x^2-4x+9|x+1|+3>0.$$

Λύση: Έχουμε: $-2x^2-4x-2+9|x+1|+5>0\Rightarrow$

$-2(x^2+2x+1)+9|x+1|+5>0\Rightarrow$

$-2|x+1|^2+9|x+1|+5>0$. Με $|x+1|=\alpha>0$ έχουμε: $-2\alpha^2+9\alpha+5>0$. Υπολογίζουμε τη $\Delta=121$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις άνισες λύσεις $\alpha_1=\frac{-9+11}{-4}=-\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{-9-11}{-4}=5$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το $-2\alpha^2+9\alpha+5$ με $\alpha>0$

α	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		5		$+\infty$
$-2\alpha^2+9\alpha+5$		−	0	+		+	0	−	

Συνεπώς οι λύσεις της ανίσωσης είναι $0<\alpha<5$.

Επειδή $|x+1|\geq 0$ για κάθε $x\in R$ τότε

$\alpha<5\Leftrightarrow|x+1|<5\Leftrightarrow -5<x+1<5\Leftrightarrow -6<x<4$

Άσκηση 7η. Να λυθεί ανίσωση $\left|\frac{x-1}{2x}\right|>1$.

Λύση: Πρέπει $x \neq 0$. Στη συνέχεια η ανίσωση γίνεται $|x-1|>|2x| \Leftrightarrow |x-1|^2>|2x|^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1>4x^2 \Leftrightarrow$ $-3x^2-2x+1>0$. Υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta=16>0$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις άνισες λύσεις $x_1=\dfrac{2+4}{-6}=-1$, $x_2=\dfrac{2-4}{-6}=\dfrac{1}{3}$.

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το $-3x^2-2x+1$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x^2-2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Συνεπώς $x \in (-1,0) \cup \left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

Άσκηση 8η. Να λυθεί η ανίσωση: $|x-\alpha| \leq |\alpha x-3|$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση: $|x-\alpha| \leq |\alpha x-3| \Leftrightarrow |x-\alpha|^2 \leq |\alpha x-3|^2 \Leftrightarrow$

$x^2-2\alpha x+\alpha^2 \leq \alpha^2 x^2-6\alpha x+9 \Leftrightarrow$

$(1-\alpha^2)x^2+4\alpha x+\alpha^2-9 \leq 0 \quad (1)$

Αν $1-\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha=-1$, τότε για $\alpha=1$ έχουμε: $4x-8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ για $\alpha=-1$ έχουμε: $-4x-8 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Αν $1-\alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1$, υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta=16\alpha^2-4(1-\alpha^2)(\alpha^2-9)=$ $=4\alpha^4-24\alpha^2+36=4(\alpha^2-3)^2 \geq 0$

Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow 4(\alpha^2-3)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{3}$ ή $\alpha=-\sqrt{3}$

Η (1) γίνεται: $-2x^2+4\sqrt{3}x-6 \leq 0 \Leftrightarrow -2(x-\sqrt{3})^2 \leq 0$ ή $-2x^2-4\sqrt{3}x-6 \leq 0 \Leftrightarrow -2(x+\sqrt{3})^2 \leq 0$, η οποία αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Αν $\Delta>0$ τότε $4(\alpha^2-3)^2>0 \Leftrightarrow \alpha^2-3 \neq 0 \Leftrightarrow$ $\alpha^2-3>0$ ή $\alpha^2-3<0$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις άνισες λύσεις

$$x_1=\frac{-4\alpha+2(\alpha^2-3)}{2(1-\alpha^2)}=\frac{\alpha^2-2\alpha-3}{1-\alpha^2}=\frac{\alpha-3}{1-\alpha},$$

$$x_2=\frac{-4\alpha-2(\alpha^2-3)}{2(1-\alpha^2)}=\frac{\alpha^2+2\alpha-3}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha+3}{\alpha+1}$$

Αν $\alpha^2-3>0 \Leftrightarrow \alpha^2>3 \Leftrightarrow \alpha<-\sqrt{3}$ ή $\alpha>\sqrt{3}$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το τριώνυμο $(1-\alpha^2)x^2+4\alpha x+\alpha^2-9$. Αφού $\alpha^2>3$ τότε και $\alpha^2>1$, άρα $1-\alpha^2<0$ και $\dfrac{\alpha-3}{1-\alpha}<\dfrac{\alpha+3}{\alpha+1}$

x	$-\infty$		$\frac{\alpha-3}{1-\alpha}$		$\frac{\alpha+3}{\alpha+1}$		$+\infty$
$(1-\alpha^2)x^2+4\alpha x+\alpha^2-9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπώς $x \in \left(-\infty,\dfrac{\alpha-3}{1-\alpha}\right) \cup \left(\dfrac{\alpha+3}{\alpha+1},+\infty\right)$.

Αν $\alpha^2-3<0 \Leftrightarrow \alpha^2<3 \Leftrightarrow -\sqrt{3}<\alpha<\sqrt{3}$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμου για το τριώνυμο $(1-\alpha^2)x^2+4\alpha x+\alpha^2-9$

- Αν $1<\alpha^2<3$ δηλαδή $\alpha \in (-\sqrt{3},-1) \cup (1,\sqrt{3})$ και $\dfrac{\alpha-3}{1-\alpha}>\dfrac{\alpha+3}{\alpha+1}$

x	$-\infty$		$\frac{\alpha+3}{\alpha+1}$		$\frac{\alpha-3}{1-\alpha}$		$+\infty$
$(1-\alpha^2)x^2+4\alpha x+\alpha^2-9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπώς $x \in \left(-\infty,\dfrac{\alpha+3}{\alpha+1}\right) \cup \left(\dfrac{\alpha-3}{1-\alpha},+\infty\right)$

- Αν $\alpha^2<1$ δηλ. $\alpha \in (-1,1)$ και $\dfrac{\alpha-3}{1-\alpha}<\dfrac{\alpha+3}{\alpha+1}$

x	$-\infty$		$\frac{\alpha-3}{1-\alpha}$		$\frac{\alpha+3}{\alpha+1}$		$+\infty$
$(1-\alpha^2)x^2+4\alpha x+\alpha^2-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Συνεπώς $x \in \left(\dfrac{\alpha-3}{1-\alpha},\dfrac{\alpha+3}{\alpha+1}\right)$.

Άσκηση 9η. Να λυθεί η ανίσωση: $|x^2+x-2|<4$

Λύση: $|x^2+x-2|<4 \Leftrightarrow -4<x^2+x-2<4 \Leftrightarrow$

$x^2+x-2>-4$ και $x^2+x-2<4 \Leftrightarrow$

$x^2+x+2>0$ και $x^2+x-6<0$

Για την $x^2+x+2>0$ έχουμε $\Delta=-3<0$ συνεπώς αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Για την $x^2+x-6<0$ έχουμε $\Delta=25$ οπότε $x_1=-3$, $x_2=2$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-3,2)$

Άσκηση 10η. Να λυθεί η ανίσωση: $|x^2-1|>2x-1$

Λύση: Η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \leq \dfrac{1}{2}$.

Για $x>\dfrac{1}{2}$ είναι $x^2-1<-2x+1$ ή $x^2-1>2x-1 \Leftrightarrow$ $x^2+2x-2<0$ ή $x^2-2x>0$.

Για την $x^2+2x-2<0$ έχουμε $\Delta=12$ οπότε $x_1=\sqrt{3}-1$, $x_2=-\sqrt{3}-1$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}-1$		$\sqrt{3}-1$		$+\infty$
x^2+2x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1)$.

Πρέπει όμως $x > \frac{1}{2}$, συνεπώς $x \in \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}-1\right)$ (1)

Για την $x^2 - 2x > 0$ έχουμε $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^2-2x	+	0	−	0	+

Άρα $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Πρέπει όμως $x > \frac{1}{2}$, συνεπώς $x \in (2, +\infty)$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε $x \in \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}-1\right) \cup (2, +\infty)$

Συνεπώς $x \in \left(-\infty, \sqrt{3}-1\right) \cup (2, +\infty)$.

Άσκηση 11η. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+2)x^2 - 2\lambda x - 1 = 0, \quad \lambda \neq -2 \quad (1)$$

α) Να δείξετε ότι η (1) έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \neq -2$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να βρείτε:

i) τα $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$

ii) τις τιμές του $\lambda \in R$ ώστε η (1) να έχει ρίζες θετικές

iii) τις τιμές του $\lambda \in R$ ώστε $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 < 0$

Λύση: α) Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$\Delta = 4\lambda^2 + 4(\lambda+2) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 8 =$

$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 7 = (2\lambda+1)^2 + 7 > 0$

για κάθε πραγματικό αριθμό λ. Συνεπώς η (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in R - \{-2\}$.

β) i) Από τύπους vieta έχουμε $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\lambda}{\lambda+2}$

και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{\lambda+2}$.

ii) Για να έχει η (1) δύο ρίζες θετικές πρέπει:

$(x_1 + x_2 > 0 \text{ και } x_1 \cdot x_2 > 0) \Leftrightarrow$

$\left(\frac{2\lambda}{\lambda+2} > 0 \text{ και } \frac{-1}{\lambda+2} > 0\right) \Leftrightarrow \lambda < -2$

iii) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 < 0 \Leftrightarrow$

$x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\lambda+2} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda+2} < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-2\lambda}{(\lambda+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$

Άσκηση 12η. Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - (\lambda-1)x + \lambda - 2 \qquad (1)$$

α) Για ποιες τιμές του λ ή εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες;

β) Για ποιες τιμές του λ η ανίσωση $f(x) \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$.

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να λύσετε ως προς λ την $|x_1 + x_2| > |x_1 \cdot x_2|$

δ) Να λύσετε την ανίσωση: $4x_2 - x_1(x_2 - 4) < \lambda^2 - 6$ όπου x_1, x_2 οι άνισες ρίζες του τριωνύμου (1)

ε) Για $\lambda = 4$ να κάνετε τον πίνακα προσήμου του $f(x)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι: $f(k^4+2) \cdot f(1-\mu^2) \geq 0$ για $k, \mu \in R$.

Λύση: α) Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$\Delta = (\lambda-1)^2 - 4(\lambda-2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4\lambda + 8 =$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 \geq 0.$

Για να έχει η $f(x) = 0$ δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$

β) Η ανίσωση $f(x) \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$ αν και μόνο αν $\Delta \leq 0 \Rightarrow (\lambda-3)^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda = 3$.

γ) Από τύπους vieta έχουμε $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda - 1$

και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 2$.

$|x_1 + x_2| > |x_1 \cdot x_2| \Leftrightarrow |\lambda-1| > |\lambda-2| \Leftrightarrow$

$|\lambda-1|^2 > |\lambda-2|^2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 > \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow$

$2\lambda > 3 \Leftrightarrow \lambda > \frac{3}{2}$.

δ) $4x_2 - x_1(x_2 - 4) > \lambda^2 - 6 \Leftrightarrow$

$4(x_1 + x_2) - x_1 x_2 > \lambda^2 - 6 \Leftrightarrow$

$4(\lambda-1) - (\lambda-2) > \lambda^2 - 6 \Leftrightarrow$

$3\lambda - 2 > \lambda^2 - 6 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 < 0$

έχουμε $\Delta = 25$ οπότε $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$.

λ	$-\infty$	-1		3		4	$+\infty$
$\lambda^2-3\lambda-4$	+	0	−	‖	−	0	+

Άρα $\lambda \in (-1, 4)$. Επειδή x_1, x_2 οι άνισες ρίζες του τριωνύμου (1) πρέπει $\lambda \neq 3$.

Συνεπώς $\lambda \in (-1, 3) \cup (3, 4)$.

ε) Για $\lambda = 4$ έχουμε $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Ο πίνακας προσήμου του $f(x)$ f είναι:

x	$-\infty$	$1-\mu^2$	1		2	k^4+2	$+\infty$
x^2-3x+2	+		0	−	0	+	

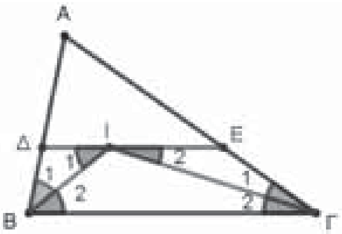
Επειδή $k^4 + 2 \geq 2$ και $1 - \mu^2 \leq 1$ τότε $f(k^4+2) \geq 0$ και $f(1-\mu^2) \geq 0$. Άρα $f(k^4+2) \cdot f(1-\mu^2) \geq 0$.

Παράλληλες ευθείες–Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Γιώργος Α. Κουσινιώρης Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

1. Από το σημείο τομής Ι των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντιστοίχως. Να δειχθεί ότι ΔΕ = ΒΔ+ΓΕ.

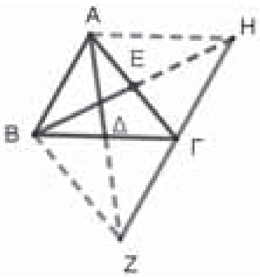
Λύση: Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΒΙ και ΓΙ των γωνιών του Β και Γ. Επειδή ΔΕ//ΒΓ είναι $\widehat{I}_1=\widehat{B}_2$, ως εντός εναλλάξ και επειδή



$\widehat{B}_1=\widehat{B}_2$, λόγω της διχοτόμου είναι $\widehat{I}_1=\widehat{B}_1$. Συνεπώς το τρίγωνο ΔΒΙ είναι ισοσκελές και επομένως είναι ΔΙ=ΒΔ. Ομοίως είναι ΕΙ=ΓΕ *(γιατί;)* οπότε έχουμε: ΒΔ+ΓΕ = ΔΙ+ΕΙ = ΔΕ.

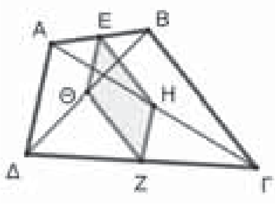
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διαμέσους του ΑΔ και ΒΕ. Προεκτείνουμε τις διαμέσους αυτές κατά τα τμήματα ΔΖ=ΑΔ και ΕΗ=ΒΕ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Ζ, Γ, Η είναι συνευθειακά και το Γ είναι το μέσο του ΗΖ.

Λύση: Το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται *(γιατί;)*, επομένως είναι ΓΗ//=ΑΒ.



Ομοίως το ΑΒΖΓ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς ΓΖ//=ΑΒ. Συνεπώς είναι ΓΗ//=ΓΖ που σημαίνει ότι τα τμήματα ΓΗ και ΓΖ βρίσκονται στην ίδια ευθεία αφού είναι παράλληλα και έχουν κοινό σημείο το Γ. Άρα τα σημεία Η, Γ, Ζ είναι συνευθειακά. Επειδή ΓΗ=ΓΖ το Γ είναι το μέσο του ΗΖ.

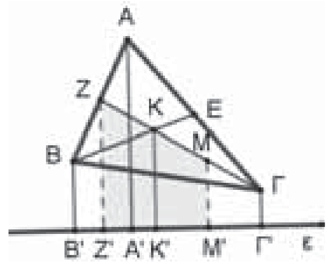
3. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζουν τα μέσα δύο απέναντι πλευρών τετραπλεύρου και τα μέσα των διαγωνίων του είναι παραλληλόγραμμο. Πότε το παραλληλόγραμμο αυτό είναι ορθογώνιο;



Λύση: Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΕΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ επομένως είναι ΕΗ//ΒΓ. Ομοίως είναι ΖΘ//ΒΓ, ΗΖ//ΑΔ και ΕΘ//ΑΔ. Επομένως το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο *(γιατί;)*. Το παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο εφόσον έχει μία ορθή γωνία. Η $\widehat{E}$ θα είναι ορθή εφόσον οι ΑΔ και ΒΓ που είναι παράλληλες με τις ΕΘ και ΕΗ αντιστοίχως προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το βαρύκεντρό του Κ και μια ευθεία (ε) που δεν τέμνει τις πλευρές του. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών του τριγώνου από την ευθεία (ε) είναι ίσο με το τριπλάσιο της απόστασης του βαρύκεντρου από την (ε)

Λύση: Έστω Ε και Ζ τα μέσα των ΑΓ και ΑΒ. Από τις κορυφές του τριγώνου, τα Ε και Ζ και το βαρύκεντρο Κ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα στην (ε). Οι ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΖΖ΄ είναι μεταξύ τους παράλληλες ως κάθετες στην (ε).



Το ΑΑ΄Β΄Β είναι τραπέζιο με βάσεις τις ΑΑ΄ και ΒΒ΄ και η ΖΖ΄ είναι η διάμεσός του αφού είναι ΖΖ΄//ΑΑ΄ και Ζ είναι το μέσον της ΑΒ. Επομένως είναι $ZZ'=\dfrac{AA'+BB'}{2}$ ή $AA'+BB'=2\cdot ZZ'$ **(1)**.

Ομοίως στο τραπέζιο ΓΓ΄Κ΄Κ αν Μ είναι το μέσον της ΚΓ και $MM'\perp\varepsilon$ η ΜΜ΄ είναι η διάμεσός του οπότε έχουμε $KK'+\Gamma\Gamma'=2\cdot MM'$ **(2)**

Οι (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$AA'+BB'+KK'+\Gamma\Gamma'=2(MM'+ZZ')$ **(3)**

Επειδή το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ΚΓ=2ΚΖ και αφού το Μ είναι το μέσον του ΚΓ έχουμε 2ΚΜ=2ΚΖ ή ΚΜ=ΚΖ που σημαίνει ότι η ΜΜ΄ είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΖΖ΄Μ΄Μ (προφανώς είναι ΖΖ¨//ΜΜ¨// ΚΚ΄).

Άρα $MM'+ZZ'=2\cdot KK'$ **(4)**

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$AA'+BB'+KK'+\Gamma\Gamma'=2\cdot 2KK'$ ή

$AA'+BB'+\Gamma\Gamma'=4KK'-KK'$ ή τελικά

$AA'+BB'+\Gamma\Gamma'=3\cdot KK'$.

5. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, δύο παράλληλες ημιευθείες Αχ και Βψ προς το ίδιο μέρος του και ένα σημείο Γ του ΑΒ. Πάνω στις Αχ και Βψ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντιστοίχως τέτοια, ώστε ΑΔ=ΑΓ και ΒΕ=ΒΓ. Αν Ζ είναι το μέσον του ΔΕ, να δειχθεί ότι:

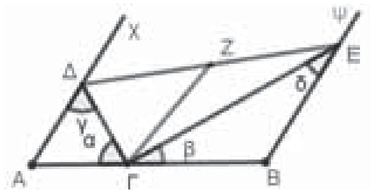
α) Οι γωνίες ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ανεξάρτητες από τη θέση του Γ πάνω στο ΑΒ.

β) ΔΕ = 2ΓΖ.

γ) Το Ζ είναι σταθερό σημείο δηλαδή ανεξάρτητο από τη θέση του Γ πάνω στο ΑΒ.

Λύση: α) Επειδή είναι ΑΔ=ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$. Ομοίως και το ΒΓΕ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{\beta}=\hat{\delta}$. Είναι $\widehat{A}+\hat{\alpha}+\hat{\gamma}=180°$ οπότε έχουμε $\widehat{A}+2\hat{\alpha}=180°$ ή $\hat{\alpha}=90°-\dfrac{\widehat{A}}{2}$ **(1).** Ομοίως είναι $\hat{\beta}=90°-\dfrac{\widehat{B}}{2}$ **(2).**

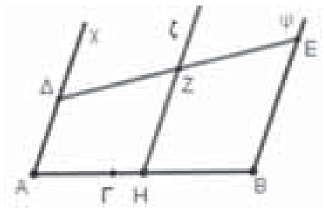
Συνεπώς οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ δεν εξαρτώνται από το σημείο Γ.



β) Επειδή πρέπει να είναι ΔΕ=2ΓΖ, δηλαδή η διάμεσος να ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς, το τρίγωνο ΓΔΕ πρέπει να είναι ορθογώνιο στο Γ. Αρκεί συνεπώς να δείξουμε ότι $\Delta\widehat{\Gamma}E=90°$. Από τις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180°-\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}=180°-\dfrac{180°}{2}=90°$, αφού οι $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αχ και Βψ που τέμνονται από την ΑΒ. Συνεπώς είναι $\Delta\widehat{\Gamma}E=180°-\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\right)=180°-90°$ ή $\Delta\widehat{\Gamma}E=90°$.

γ) Από το μέσο Η του ΑΒ φέρνουμε την ημιευθεία Ηζ παράλληλη με τις Αχ και Βψ. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τραπέζιο με βάσεις τις ΑΔ και ΒΕ. Επειδή το Η είναι μέσο της ΑΒ και Ηζ//ΑΔ//ΒΕ η Ηζ είναι η μεσοπαράλληλη των ΑΔ και ΒΕ οπότε θα περάσει από το μέσο Ζ της ΔΕ. Η ΗΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου, οπότε είναι $HZ=\dfrac{A\Delta+BE}{2}$ και επειδή είναι ΑΔ=ΑΓ και ΒΕ=ΒΓ έχουμε $HZ=\dfrac{A\Gamma+B\Gamma}{2}=\dfrac{AB}{2}$.



Συνεπώς η ΗΖ είναι σταθερή κατά θέση (Η σταθερό σημείο και ΗΖ//ΑΔ) και μέγεθος. οπότε το σημείο Ζ παραμένει ανεξάρτητο από τη θέση του Γ πάνω στην ΑΒ.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90°$ φέρνουμε τη διχοτόμο ΒΕ και το ύψος ΑΔ που τέμνονται στο Ζ. Αν ΕΗ⊥ΒΓ, τότε να δείξετε ότι:

α) ΑΖ=ΕΗ.

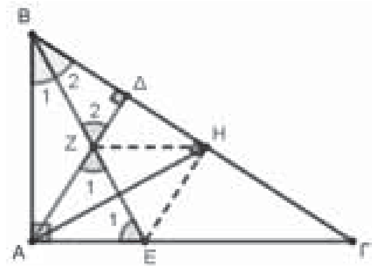
β) Το τετράπλευρο ΑΕΗΖ είναι ρόμβος.

γ) ΑΗ⊥ΒΕ

Λύση: α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ είναι $\widehat{Z}_2=90-\widehat{B}_2$ και επειδή $\widehat{Z}_1=\widehat{Z}_2$ (ως κατακορυφήν) και $\widehat{B}_1=\widehat{B}_2$ (η ΒΕ είναι διχοτόμος της $\widehat{B}$) είναι $\widehat{Z}_1=90-\widehat{B}_1$ **(1)**

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ είναι $\hat{E}_1=90-\hat{B}_1$. **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{E}_1=\hat{Z}_1$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΖ=ΑΕ.**(3)**



Επειδή κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της είναι ΑΕ=ΕΗ οπότε, λόγω της (3) είναι ΑΖ=ΕΗ.

β) Από το (α) ερώτημα έχουμε ΑΖ=ΕΗ και επειδή είναι ΑΖ//ΕΗ (ως κάθετες στη ΒΓ) το τετράπλευρο ΑΕΗΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες. Από τη σχέση (3) του (α) ερωτήματος έχουμε ΑΖ=ΑΕ, αυτό σημαίνει ότι το παραλληλόγραμμο ΑΕΗΖ είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

γ) Αφού το ΑΕΗΖ είναι ρόμβος οι διαγώνιοί του είναι κάθετες και επομένως είναι ΑΗ⊥ΕΖ ή ΑΗ⊥ΒΕ.

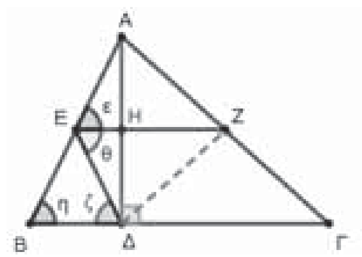
7. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως, τότε να δείξετε ότι:

α) Το τμήμα ΕΖ διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{E}\Delta$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΕΖΔ είναι ίσα.

Λύση: α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΕ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΒ, οπότε είναι $\Delta E=\dfrac{AB}{2}=AE=EB$.

Η ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ οπότε είναι ΕΖ//ΒΓ και επειδή ΑΔ⊥ΒΓ θα είναι και ΑΔ⊥ΕΖ. Συνεπώς στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΔ το ΕΗ είναι ύψος οπότε είναι και διχοτόμος.



Άλλος τρόπος

Το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές αφού ΔΕ=ΕΒ, οπότε είναι $\hat{\eta}=\hat{\zeta}$. Επειδή ΕΖ//ΒΓ είναι $\hat{\varepsilon}=\hat{\eta}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη) και $\hat{\theta}=\hat{\zeta}$ (ως εντός εναλλάξ) επομένως έχουμε $\hat{\varepsilon}=\hat{\theta}$, που σημαίνει ότι η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{E}\Delta$.

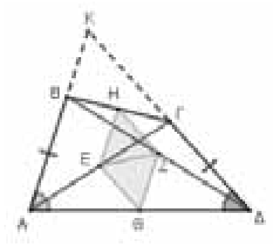
β) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΕΖΔ έχουν την ΕΖ κοινή πλευρά, ΔΕ=ΑΕ και $\hat{\varepsilon}=\hat{\theta}$ επομένως (Π-Γ-Π) είναι ίσα.

8. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ΑΒ=ΓΔ και $\widehat{A}+\widehat{\Delta}=120°$. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ, ΒΓ και ΑΔ, να δείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισόπλευρο.
β) Το τετράπλευρο ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.

Λύση: α) Επειδή $\widehat{A}+\widehat{\Delta}=120°<180°$ οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται σε σημείο Κ.

Είναι $\widehat{K}=180°-\left(\widehat{A}+\widehat{\Delta}\right)=180°-120°$ ή $\widehat{K}=60°$.

Είναι $EH//=\frac{AB}{2}$ γιατί τα Ε, Η είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Ομοίως είναι $HZ//=\frac{\Gamma\Delta}{2}$ και επειδή είναι ΑΒ=ΓΔ είναι ΕΗ=ΗΖ, οπότε το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές.



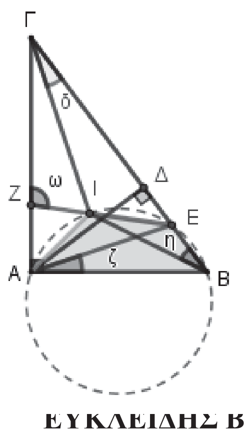
Επειδή ΕΗ//ΑΚ, ΗΖ//ΚΔ και $\widehat{K}=60°$ είναι $\widehat{H}=60°$, ως οξείες με πλευρές παράλληλες, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο *(γιατί;)*.

β) Το τετράπλευρο ΕΘΖΗ έχει $EH//Z\Theta//AB$ και $E\Theta//HZ//\Gamma\Delta$, επομένως είναι παραλληλόγραμμο και επειδή ΕΗ = ΗΖ το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Αν ΑΔ είναι το ύψος στην υποτείνουσα, Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου, ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}\Delta$, η ΕΙ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ζ και $\widehat{B}=58°$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\widehat{Z}\Gamma$

Λύση: Είναι $\widehat{\Gamma}=90°-58°=32°$. Επειδή οι ΒΙ και ΓΙ είναι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ αντιστοίχως είναι $\hat{\eta}+\hat{\delta}=\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{\Gamma}}{2}=\frac{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}{2}=\frac{90°}{2}=45°$ οπότε $\hat{\eta}=45°-\hat{\delta}$.

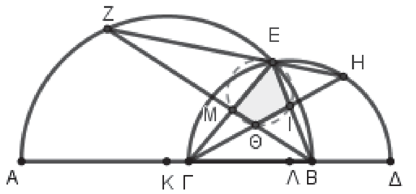
Είναι όμως $I\widehat{A}B=\frac{\widehat{A}}{2}=45°$ και $\hat{\delta}=\hat{\zeta}$, αφού $\Delta\widehat{A}B=\widehat{\Gamma}$ *(γιατί;)*, οπότε έχουμε $\hat{\eta}=I\widehat{A}B-\hat{\zeta}=I\widehat{A}E$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΕΙ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά ΕΙ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α και Β υπό τις ίσες γωνίες $\hat{\eta}$ και $I\widehat{A}E$. Στο εγγράψιμο τετράπλευρο κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι της εσωτερική, οπότε στο εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΕΙ είναι $\Delta\widehat{E}Z=I\widehat{A}B=45°$.



Συνεπώς στο τρίγωνο ΓΕΖ είναι

$$\widehat{Z}=180°-\Delta\widehat{E}Z-\widehat{\Gamma}=180°-45°-32°=103°.$$

10. Στο σχήμα τα ημικύκλια διαμέτρου ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ε. Μια ευθεία που διέρχεται από το Ε τέμνει τα ημικύκλια στα σημεία Ζ και Η. Οι ΒΖ και ΓΗ τέμνονται στο Θ, οι ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο Μ, και οι ΒΕ και ΓΗ τέμνονται στο Ι. Να δείξετε ότι το ΕΜΘΙ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο.



Λύση

Για να δείξουμε ότι το ΕΜΘΙ είναι εγγράψιμο αρκεί να δείξουμε ότι $I\widehat{\Theta}M+I\widehat{E}M=180°$.

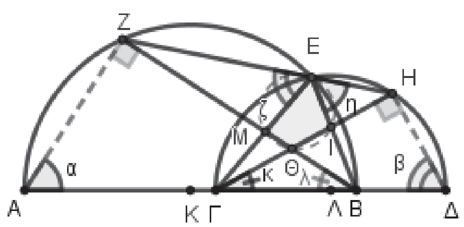
Φερνουμε τις χορδές ΑΖ και ΔΗ.

Ας είναι $Z\widehat{A}B=\alpha$ και $H\widehat{\Delta}\Gamma=\beta$. Τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΓΗΔ είναι ορθογώνια με $\widehat{Z}=\widehat{H}=90°$ *(γιατί;)*, οπότε $\lambda=90°-\alpha$ και $\kappa=90°-\beta$.

Επομένως στο τρίγωνο ΘΒΓ είναι

$B\widehat{\Theta}\Gamma=180°-\kappa-\lambda=$

$=180°-\left(90°-\beta\right)-\left(90°-\alpha\right)=\alpha+\beta.$ **(1)**



Το τετράπλευρο ΑΒΕΖ είναι εγγεγραμμένο, επομένως $\hat{\eta}=\alpha$ (ως εξωτερική και απέναντί της εσωτερική). Ομοίως το τετράπλευρο ΓΔΗΕ είναι εγγεγραμμένο, οπότε $\hat{\zeta}=\hat{\beta}$.

Συνεπώς είναι $I\widehat{E}M=180°-\left(\alpha+\beta\right)\overset{(1)}{=}180°-B\widehat{\Theta}\Gamma$

και επειδή είναι $B\widehat{\Theta}\Gamma=I\widehat{\Theta}M$ *(γιατί;)* έχουμε $I\widehat{E}M=180°-I\widehat{\Theta}M$ ή $I\widehat{\Theta}M+I\widehat{E}M=180°$.

Πηγές:

http://www.gogeometry.com/math_geometry_online_courses/geometry_problems_visual_index_1.html

Εκθετικές Εξισώσεις

Διονύσης Φ. Αρβανιτάκης, Παράρτημα της **Ε.Μ.Ε. Ηλείας**

Παραθέτουμε ανά κατηγορίες τις διάφορες μορφές εκθετικών εξισώσεων.

Μορφή 1η: $\alpha^{f(x)}=\beta$

Στις μορφές αυτές χρησιμοποιούμε τις γνώσεις μας από τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων.

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x-1}=\dfrac{1}{4}$

Λύση: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{2}=2\Leftrightarrow x=5$.

2. $e^{3x}=\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$

Λύση: $e^{3x}=e^{-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow 3x=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

3. $3^{-x^2}=\dfrac{1}{81}$

Λύση: $3^{-x^2}=3^{-4}\Leftrightarrow -x^2=-4\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.

4. $\dfrac{2^{x-3}}{8^x}=\sqrt{32^x}$

Λύση: $\dfrac{2^{x-3}}{2^{3x}}=\sqrt{2^{5x}}\Leftrightarrow 2^{-2x-3}=2^{\frac{5x}{2}}\Leftrightarrow$

$-2x-3=\dfrac{5x}{2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

5. $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

Λύση: Πρέπει $x+1\geq 0$. Άρα: $\left(2^2\right)^{\sqrt{x+1}}=2^6\cdot 2^{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow$

$2^{2\sqrt{x+1}}=2^{6+\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{x+1}=6+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow$

$\sqrt{x+1}=6\Leftrightarrow x+1=36\Leftrightarrow x=35$, δεκτή.

6. $9^{\text{συν}x}=\dfrac{1}{3}$.

Λύση: $3^{2\text{συν}x}=3^{-1}\Leftrightarrow 2\text{συν}x=-1\Leftrightarrow \text{συν}x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\text{συν}x=\text{συν}\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

7. $\sqrt[x+1]{2^{x+5}}=8$.

Λύση: Πρέπει ο δείκτης x+1 να είναι φυσικός ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 2. Άρα: $2^{\frac{x+5}{x+1}}=2^3\Leftrightarrow\dfrac{x+5}{x+1}=3\Leftrightarrow x+5=3x+3\Leftrightarrow x=1$.

Δεκτή, γιατί $x+1=2$.

Μορφή 2η: $\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)}$

Ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

8. $\sqrt{27^x}=\dfrac{1}{9^{1-x}}$

Λύση: $3^{\frac{2x}{3}}=3^{-2(1-x)}\Leftrightarrow\dfrac{2x}{3}=-2+2x\Leftrightarrow$

$2x=-6+12x\Leftrightarrow -10x=-6\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{5}$.

9. $(0{,}1)^{-x^2+5x-8}=100^x$

Λύση: $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{x^2+5x+10}=10^{2x}\Leftrightarrow 10^{x^2-5x+10}=10^{2x}\Leftrightarrow$

$x^2-5x+10=2x\Leftrightarrow x^2-7x+10=0$.

Έχουμε $\Delta=9$, άρα $x=5$ ή $x=2$.

10. $2^{\eta\mu x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\text{συν}x}$

Λύση: $2^{\eta\mu x}=2^{-\text{συν}x}\Leftrightarrow\eta\mu x=-\text{συν}x\overset{\text{συν}x\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{\eta\mu x}{\text{συν}x}=-1\Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi x=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$ ισχύει $\text{συν}\left(\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0$.

11. $e^{x^3}-e^{2-x}=0$

Λύση: $e^{x^3}=e^{2-x}\Leftrightarrow x^3=2-x\Leftrightarrow x^3+x-2=0$.

Αλλά $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$. Άρα:

$(x-1)(x^2+x+2)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+x+2=0$,

η οποία είναι αδύνατη, γιατί $\Delta=-5<0$.

12. $9^{\eta\mu x}=3^{1-\text{συν}^2x}$

Λύση

$3^{2\eta\mu x}=3^{\eta\mu^2x}\Leftrightarrow 2\eta\mu x=\eta\mu^2x\Leftrightarrow$

$2\eta\mu x-\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow\eta\mu x\,(2-\eta\mu x)=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ ή

$2-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=2$, η οποία είναι αδύνατη, γιατί $-1\leq\eta\mu x\leq 1$.

Μορφή 3η: $f(\alpha^x)=0$

Στις μορφές αυτές αντικαθιστούμε την εκθετική συνάρτηση με βοηθητικό άγνωστο και αναγόμαστε σε επίλυση γνωστών μορφών εξισώσεων.

13. $2^{x+1}+2^{2-x}=9$

Λύση: $2\cdot 2^x+\dfrac{2^2}{2^x}=9\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-9\cdot 2^x+4=0$.

Θέτουμε $2^x=y>0$. Τότε $2^{2x}=\left(2^x\right)^2=y^2$ Άρα η εξίσωση γίνεται $2y^2-9y+4=0$. Έχουμε $\Delta=49$, άρα $y=\frac{1}{2}$ ή $y=8$. Συνεπώς:

- $2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^x=2^{-1}\Leftrightarrow x=-1$ ή
- $2^x=8\Leftrightarrow 2^x=2^3\Rightarrow x=3$.

14. $\mathbf{2^{x+1}+2^{x-1}-\frac{14}{2^{x-1}}=\frac{3}{2^{x-2}}}$

Λύση: $2\cdot 2^x+\frac{2^x}{2}-\frac{14}{\frac{2^x}{2}}=\frac{3}{\frac{2^x}{2^2}}\Leftrightarrow 2\cdot 2^x+\frac{2^x}{2}-\frac{28}{2^x}=\frac{12}{2^x}$.

Θέτουμε $2^x=y>0$. Άρα η εξίσωση γίνεται

$$2\cdot y+\frac{y}{2}-\frac{28}{y}=\frac{12}{y}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 5y^2-40=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2=8\Rightarrow y=\sqrt{8}\ \text{ή}\ y=-\sqrt{8}\text{, απορρίπτεται.}$$

Συνεπώς: $2^x=\sqrt{8}\Leftrightarrow 2^x=2^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ $x=-1$.

15. $\mathbf{8^x+4=4^x+2^{x+2}}$

Λύση: $2^{3x}-2^{2x}-4\cdot 2^x+4=0$.

Θέτουμε $2^x=y>0$. Τότε: $4^x=2^{2x}=y^2$, $8^x=2^{3x}=y^3$. Άρα η εξίσωση γίνεται

$$y^3-y^2-4y+4=0\Leftrightarrow y^2(y-1)-4(y-1)=0\Leftrightarrow$$

$$(y-1)(y^2-4)=0\Leftrightarrow y-1=0\Leftrightarrow y=1$$

ή $y^2-4=0\Leftrightarrow y=2$ ή $y=-2$, απορρίπτεται.

Συνεπώς: $2^x=1\Leftrightarrow x=0$ ή $2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

16. $\mathbf{\frac{3}{4^x-1}=\frac{3}{2^x-1}-\frac{4}{5}}$

Λύση: Θέτουμε $2^x=y>0$. Τότε: $4^x=2^{2x}=y^2$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $\frac{3}{y^2-1}=\frac{3}{y-1}-\frac{4}{5}\Leftrightarrow$

$$\frac{3}{(y-1)(y+1)}=\frac{3}{y-1}-\frac{4}{5}\ \text{ με }\ y\neq\pm1$$

$$3=3(y+1)-4(y-1)(y+1)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 4y^2-15y-4=0.$$

Έχουμε $\Delta=289$, άρα: $y=4$ ή $y=-\frac{1}{4}$, απορρίπτεται.

Συνεπώς: $2^x=4\Rightarrow 2^x=2^2\Rightarrow x=2$.

17. $\mathbf{2^{\eta\mu^2 x}+2^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=3}$

Λύση: $2^{\eta\mu^2 x}+2^{1-\eta\mu^2 x}=3\Leftrightarrow 2^{\eta\mu^2 x}+\frac{2}{2^{\eta\mu^2 x}}=3$.

Θέτουμε $2^{\eta\mu^2 x}=y>0$. Άρα η εξίσωση γίνεται $y+\frac{2}{y}-3=0\Leftrightarrow y^2-3y+2=0$. Έχουμε $\Delta=1$, άρα $y=1$ ή $y=2$. Συνεπώς:

- $2^{\eta\mu^2 x}=1\Leftrightarrow 2^{\eta\mu^2 x}=0\Leftrightarrow \eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ ή
- $2^{\eta\mu^2 x}=2\Leftrightarrow \eta\mu^2 x=1\Leftrightarrow$
- $\begin{cases}\eta\mu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ \eta\mu x=-1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

18. $\mathbf{9^{\log x}-2\cdot 3^{\log x}=100^{\log\sqrt{3}}}$

Λύση: $100^{\log\sqrt{3}}=10^{2\log\sqrt{3}}=10^{2\log 3^{\frac{1}{2}}}=10^{\log 3}=3$.

Άρα: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}=3\Leftrightarrow 3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-3=0$.

Θέτουμε $3^{\log x}=y>0$. Επίσης: $3^{2\log x}=y^2$. Άρα η εξίσωση γίνεται $y^2-2y-3=0$. Έχουμε $\Delta=16$, άρα: $y=3$ ή $y=-1$, απορρίπτεται.

Συνεπώς: $3^{\log x}=3\Leftrightarrow \log x=1\Leftrightarrow x=10$.

Μορφή 4η: $\mathbf{f\left(\alpha^x,\beta^x\right)=0}$

➢ $\mathbf{\kappa\cdot\alpha^x+\lambda\cdot\beta^x=0}$

Στις μορφές αυτές διαχωρίζουμε στο πρώτο μέλος το α^x και στο δεύτερο μέλος το β^x.

19. $\mathbf{3\cdot 5^x-5\cdot 3^x=0}$

Λύση: $3\cdot 5^x=5\cdot 3^x\overset{3^x\neq0}{\Leftrightarrow}\frac{5^x}{3^x}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^x=\frac{5}{3}\Leftrightarrow x=1$.

20. $\mathbf{2\cdot 5^{x-2}+2^x=12\cdot 5^{x-3}+3\cdot 2^{x-3}}$

Λύση: $\frac{2\cdot 5^x}{5^2}-\frac{12\cdot 5^x}{5^3}=\frac{3\cdot 2^x}{2^3}-2^x\Leftrightarrow\frac{2\cdot 5^x}{25}-\frac{12\cdot 5^x}{125}=\frac{3\cdot 2^x}{8}-2^x\Leftrightarrow 80\cdot 5^x-96\cdot 5^x=375\cdot 2^x-1000\cdot 2^x\Leftrightarrow$

$$-16\cdot 5^x=-625\cdot 2^x\Leftrightarrow\frac{5^x}{2^x}=\frac{625}{16}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^4\Leftrightarrow x=4.$$

➢ $\mathbf{\kappa\cdot\alpha^{2x}+\lambda\cdot(\alpha\cdot\beta)^x+\mu\cdot\beta^{2x}=0}$

Στις μορφές αυτές διαιρούμε είτε με β^{2x} είτε με α^{2x} και αναγόμαστε σε δευτεροβάθμια εξίσωση.

21. $\mathbf{5\cdot 25^x+3\cdot 10^x-2\cdot 4^x=0}$

Λύση: $5\cdot 5^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 5^x-2\cdot 2^{2x}=0\Leftrightarrow$

$$5\cdot\frac{5^{2x}}{2^{2x}}+3\cdot\frac{2^x\cdot 5^x}{2^{2x}}-2\cdot\frac{2^{2x}}{2^{2x}}=0\Leftrightarrow$$

$$5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+3\cdot\frac{5^x}{2^x}-2=0\Leftrightarrow 5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x-2=0$$

Θέτουμε $\left(\frac{5}{2}\right)^x=y>0$. Τότε $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}=y^2$. Άρα η εξίσωση γίνεται $5y^2+3y-2=0$. Έχουμε $\Delta=49$, άρα $y=\frac{2}{5}$ ή $y=-1$, απορρίπτεται. Συνεπώς:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1.$$

22. $\mathbf{6\cdot 9^{\log x}-13\cdot 6^{\log x}+6\cdot 4^{\log x}=0}$

Λύση: Πρέπει $x>0$. Άρα:

$$6\cdot 3^{2\log x}-13\cdot 3^{\log x}\cdot 2^{\log x}+6\cdot 2^{2\log x}=0\Leftrightarrow$$

$$6\cdot\frac{3^{2\log x}}{2^{2\log x}}-13\cdot\frac{3^{\log x}\cdot 2^{\log x}}{2^{2\log x}}+6\cdot\frac{2^{2\log x}}{2^{2\log x}}=0\Leftrightarrow$$

$$6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}+6=0$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}=y>0$. Επίσης: $\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x}=y^2$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $6y^2-13y+6=0$. Έχουμε $\Delta=25$, άρα $y=\frac{3}{2}$ ή $y=\frac{2}{3}$. Συνεπώς:

- $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=1$.
- $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1$.

➢ $\boldsymbol{\kappa\cdot\alpha^{3x}+\lambda\cdot\alpha^{2x}\cdot\beta^{x}+\mu\cdot\alpha^{x}\cdot\beta^{2x}+\nu\cdot\beta^{3x}=0}$

Στις μορφές αυτές διαιρούμε είτε με β^{3x} είτε με α^{3x} και αναγόμαστε σε τριτοβάθμια εξίσωση.

23. $\mathbf{4\cdot 27^x-4\cdot 18^x-9\cdot 12^x+9\cdot 8^x=0}$

Λύση: $4\cdot 3^{3x}-4\cdot 3^{2x}\cdot 2^x-9\cdot 3^x\cdot 2^{2x}+9\cdot 2^{3x}=0\Leftrightarrow$

$$4\cdot\frac{3^{3x}}{2^{3x}}-4\cdot\frac{3^{2x}\cdot 2^x}{2^{3x}}-9\cdot\frac{3^x\cdot 2^{2x}}{2^{3x}}+9\cdot\frac{2^{3x}}{2^{3x}}=0\Leftrightarrow$$

$4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}-4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+9=0$. Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y>0$. Τότε $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=y^2$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}=y^3$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $4y^3-4y^2-9y+9=0$. Είτε με παραγοντοποίηση είτε με το σχήμα Horner καταλήγουμε $y=1$ ή $y=\frac{3}{2}$ ή $y=-\frac{3}{2}$, απορρίπτεται. Συνεπώς:

- $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$.
- $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=1$.

Μορφή 5^{η}: Παραγοντοποίηση

24. $\mathbf{5\cdot 3^x-2^x=5-6^x}$

Λύση: $5\cdot 3^x-2^x+6^x-5=0\Leftrightarrow$

$5\cdot\left(3^x-1\right)+2^x\cdot\left(3^x-1\right)=0\Leftrightarrow$

$\left(3^x-1\right)\cdot\left(2^x+5\right)=0\Leftrightarrow$

$3^x-1=0\Leftrightarrow 3^x=1\Leftrightarrow x=0$ ή

$2^x+5=0\Leftrightarrow 2^x=-5$, αδύνατη ($2^x>0$).

Παρατήρηση: *Σύγκριση εκθετικών συναρτήσεων*

Αν $0<\alpha<\beta$, τότε ισοδύναμα έχουμε:

$\alpha^x<\beta^x\overset{\beta^x>0}{\Leftrightarrow}\frac{\alpha^x}{\beta^x}<1\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x<1\overset{\frac{\alpha}{\beta}<1}{\Leftrightarrow}x>0$. Προφανώς, αν $0<\alpha<\beta$, τότε έχουμε ότι: $\alpha^x>\beta^x\Leftrightarrow x<0$.

Μορφή 6^{η}: Πρόσθεση κατά μέλη και εις άτοπον απαγωγή

25. $\mathbf{2^x+e^x=3^x+6^x}$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $x=0$, τότε $2^0+e^0=2=3^0+6^0$.

2) Αν $x\in\left(0,+\infty\right)$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}2^x<3^x\\ e^x<6^x\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}2^x+e^x<3^x+6^x.$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\left(0,+\infty\right)$.

3) Αν $x\in\left(-\infty,0\right)$ έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l}2^x>3^x\\ e^x>6^x\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}2^x+e^x>3^x+6^x.$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\left(-\infty,0\right)$.

✓ Συνεπώς μοναδική ρίζα η $x=0$.

26. $\mathbf{e^x=x^3+e^{2x}}$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $x=0$, τότε $e^0=1=0^3+e^0$.

2) Αν $x\in\left(0,+\infty\right)$ έχουμε ότι $e^x<e^{2x}\overset{x^3>0}{\Leftrightarrow}e^x<x^3+e^{2x}$.

Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\left(0,+\infty\right)$.

3) Αν $x\in\left(-\infty,0\right)$ έχουμε ότι $e^x>e^{2x}\overset{x^3<0}{\Leftrightarrow}e^x>x^3+e^{2x}$.

Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\left(-\infty,0\right)$.

✓ Συνεπώς μοναδική ρίζα η $x=0$.

Μορφή 7^{η}: Προφανής Ρίζα

Αναφέρουμε μία σημαντική πρόταση για την επίλυση εξισώσεων με τη χρήση μεθόδων της ανάλυσης (προφανής ρίζα).

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Έστω η συνάρτηση f:𝔸→ℝ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο 𝔸 και ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο 𝔸, τότε η ρίζα ρ είναι μοναδική.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο 𝔸. Παραδεχόμαστε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο 𝔸 τις ρ και ξ. Τότε θα έχουμε $f\left(\rho\right)=f\left(\xi\right)=0$. Ας υποθέσουμε ότι $\xi<\rho$. Αφού συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο 𝔸, έπεται ότι

$f(\xi)<f(\rho)\Leftrightarrow 0<0$. Άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $\xi>\rho$. Στο άτοπο καταλήξαμε, γιατί παραδεχθήκαμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες στο σύνολο $\mathbb{A}$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το ρ στο $\mathbb{A}$. ▲

27. $\mathbf{2^x+3^x=5^{2-x}}$

Λύση: ◈ Έχουμε: $2^x+3^x-5^{2-x}=0$.

◈ Η εξίσωση έχει ρίζα τη $x=1$, αφού $e^0+0-1=0$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=2^x+3^x-5^{2-x}$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύουν ότι: $2^{x_1}<2^{x_2}$ (1) και $3^{x_1}<3^{x_2}$ (2) και

$$-x_1>-x_2\Rightarrow 2-x_1>2-x_2\Rightarrow$$
$$5^{2-x_1}>5^{2-x_2}\Rightarrow -5^{2-x_1}<-5^{2-x_2}\quad (3)$$

Και προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) έχουμε $2^{x_1}+3^{x_1}-5^{2-x_1}<2^{x_2}+3^{x_2}-5^{2-x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

✓ Άρα με βάση την πρόταση 1 η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

28. $\mathbf{e^x+x=1}$

Λύση: ◈ Έχουμε: $e^x+x=1\Leftrightarrow e^x+x-1=0$.

◈ Η εξίσωση έχει ρίζα τη $x=0$, αφού $e^0+0-1=0$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=e^x+x-1$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1-1<x_2-1 \end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1}+x_1-1<e^{x_2}+x_2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

✓ Άρα με βάση την πρόταση 1 η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

29. $\mathbf{\dfrac{e^x+3}{e^x+1}=x+2}$

Λύση ◈ Έχουμε: $\dfrac{e^x+3}{e^x+1}=x+2\Leftrightarrow \dfrac{2}{e^x+1}-x-1=0$.

◈ Η εξίσωση έχει ρίζα τη $x=0$, αφού $\dfrac{2}{1+1}-0-1=0$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{2}{e^x+1}-x-1$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι: $e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow 0<e^{x_1}+1<e^{x_2}+1\Rightarrow$

$$\frac{1}{e^{x_1}+1}>\frac{1}{e^{x_2}+1}\Rightarrow \frac{2}{e^{x_1}+1}>\frac{2}{e^{x_2}+1}\quad (1)$$

Επίσης: $-x_1>-x_2\Rightarrow -x_1-1>-x_2-1$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\dfrac{2}{e^{x_1}+1}-x_1-1>\dfrac{2}{e^{x_2}+1}-x_2-1\Rightarrow$

$$f(x_1)>f(x_2).$$

✓ Άρα με βάση την πρόταση 1 η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

30. $\mathbf{3^x+4^x=5^x}$

Λύση: ◈ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=2$, αφού $3^2+4^2=5^2$.

◈ Η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$ διαιρώντας με $5^x\neq 0$ μετασχηματίζεται ισοδύναμα:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0\ .$$

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}-1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

✓ Άρα με βάση την πρόταση 1 η ρίζα $x=2$ είναι μοναδική.

31. $\mathbf{2^x+3^x=4^x+5^x}$

Λύση: ◈ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=0$, αφού $2^0+3^0=2=4^0+5^0$.

◈ Μετασχηματίζουμε την εξίσωση:

$$2^x+3^x=4^x+5^x\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x-\left(\frac{5}{4}\right)^x-1=0\,.$$

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f \text{ με } f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x-\left(\frac{5}{4}\right)^x-1,$$

με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} \\ \left(\frac{5}{4}\right)^{x_1}<\left(\frac{5}{4}\right)^{x_2}\Rightarrow-\left(\frac{5}{4}\right)^{x_1}>-\left(\frac{5}{4}\right)^{x_2} \end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\ldots f(x_1)>f(x_2).$$

✓ Άρα με βάση την πρόταση 1 η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

32. $\mathbf{x\cdot e^{x-1}=1}$

Λύση: Η εξίσωση $x\cdot e^{x-1}=1$ δεν έχει μη αρνητική ρίζα, αφού για κάθε $x\in(-\infty,0]$ ισχύει $x\cdot e^{x-1}\leq 0$.

❖ Διαιρούμε με x διαμορφώνοντας την εξίσωση

$e^{x-1}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow e^{x-1}-\dfrac{1}{x}=0$.

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=1$, αφού $e^{1-1}-\dfrac{1}{1}=0$.

❖ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$, με $x\in(0,\ +\infty)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$. Πράγματι, αν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει $\left.\begin{array}{l} x_1-1<x_2-1\Rightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1} \\ \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\Rightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$e^{x_1-1}-\frac{1}{x_1}<e^{x_2-1}-\frac{1}{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

✓ Άρα με βάση την πρόταση 1 η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

33. $\left(2^x+3^x\right)^{100}=\left(2^{100}+3^{100}\right)^x$

Λύση: ❖ Διαιρούμε κατά μέλη με 3^{100x}:

$$\frac{\left(2^x+3^x\right)^{100}}{3^{100x}}=\frac{\left(2^{100}+3^{100}\right)^x}{3^{100x}}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2^x+3^x}{3^x}\right)^{100}=\left(\frac{2^{100}+3^{100}}{3^{100}}\right)^x\Leftrightarrow$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{100}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+1\right]^x.$$

❖ Θεωρούμε την f με $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+1$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$. Επίσης, θεωρούμε την g με $g(x)=\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}+1\right]^x$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού ισχύει ότι $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}+1>1$.

❖ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=100$, αφού $\left(2^{100}+3^{100}\right)^{100}=\left(2^{100}+3^{100}\right)^{100}$.

❖ Για $x<100$, επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$f(x)>f(100)\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x+1>\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+1>0\Rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{3}{3}\right)^x+1\right]^{100}>\left[\left(\frac{3}{3}\right)^{100}+1\right]^{100}\quad(1)$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι: $g(x)<g(100)\Rightarrow$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+1\right]^x<\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+1\right]^{100}\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+1\right]^x<\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{100}.$$

❖ Ομοίως, για $x<100$ έχουμε ότι

$$f(x)>f(100)\Rightarrow\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{100}>\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+1\right]^{100}\quad(2)$$

$$g(x)>g(100)\overset{(2)}{\Rightarrow}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+1\right]^x>\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{100}.$$

✓ Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη $x=100$.

Έμμεση χρήση δευτεροβάθμιας

34. $\mathbf{x^2+\left(2\cdot 3^x-5\right)x+9^x-5\cdot 3^x+4=0}$

Λύση: ❖ Θεωρώντας την εξίσωση δευτεροβάθμια ως προς x έχουμε:

$$\Delta=\left(2\cdot 3^x-5\right)^2-4\left(9^x-5\cdot 3^x+49\right)=$$

$$4\cdot 9^x-20\cdot 3^x+25-4\cdot 9^x-20\cdot 3^x-16=9$$

$$x=\frac{-\left(2\cdot 3^x-5\right)+3}{2}=\ldots=-3^x+4\Rightarrow x+3^x=4\quad(1)$$

$$x=\frac{-\left(2\cdot 3^x-5\right)-3}{2}=\ldots=-3^x+1\Rightarrow x+3^x=1\quad(2)$$

❖ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=x+3^x$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι: $\left.\begin{array}{l}3^{x_1}<3^{x_2}\\ x_1<x_2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}3^{x_1}+x_1<3^{x_2}+x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

❖ Η εξίσωση (1) έχει προφανή ρίζα τη $x=1$, ενώ η εξίσωση (2) έχει προφανή ρίζα τη $x=0$,

✓ Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $x=0$ και $x=1$.

❖ $\mathbf{x^2-(7-2^x-3^x)x+(2^x-3)(3^x-4)=0}$

Λύση: ❖ Θέτουμε $A=A(x)=2^x-3$ και $B=B(x)=3^x-4$ κι έχουμε ότι $A+B=2^x+3^x-7\Leftrightarrow -\left(A+B\right)=7-2^x-3^x$ και διαμορφώνουμε την εξίσωση ως «τριώνυμο» με βάση τους τύπους του Vieta κι έχουμε:

$$x=-A\Leftrightarrow x=-2^x+3\Leftrightarrow 2^x+x-3=0\quad(1)$$

$$x=-B\Leftrightarrow x=-3^x+4\Leftrightarrow 3^x+x-4=0\quad(2)$$

❖ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=2^x+x-3$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{l}2^{x_1}<2^{x_2}\\ x_1<x_2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow} 2^{x_1}+x_1<2^{x_2}+x_2\Rightarrow$$

$$2^{x_1}+x_1-3<2^{x_2}+x_2-3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=1$, αφού $f(1)=2+1-3=0$.

◈ Θεωρούμε την g με $g(x)=3^x+x-4$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

◈ Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τη $x=1$, αφού $g(1)=3+1-4=0$.

✓ Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει ρίζα τη $x=1$.

Μορφή 8η: $f(A(x))=f(B(x))$

Αναφέρουμε μία σημαντική πρόταση για την επίλυση εξισώσεων με τη χρήση μεθόδων της ανάλυσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{A}\to\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{A}$ και α, $\beta\in\mathbb{A}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow\alpha=\beta$

Απόδειξη: **ΕΥΘΥ"⇒":**Έστω $f(\alpha)=f(\beta)$. Ας υποθέσουμε ότι οι α και β δεν είναι ίσοι, δηλαδή ισχύει $\alpha\neq\beta$. Τότε θα έχουμε: Αν $\alpha<\beta$, τότε θα ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)$, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{A}$. Άτοπο, γιατί ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν παραδεχθούμε ότι $\alpha>\beta$. Στο άτοπο καταλήξαμε, γιατί θεωρήσαμε ότι ισχύει $\alpha\neq\beta$. Συνεπώς ισχύει $\alpha=\beta$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ: "⇐": Έστω $\alpha=\beta$. Από τον ορισμό της συνάρτησης έπεται ότι $f(\alpha)=f(\beta)$. ▲

35. $e^{x^3}-\pi^x=\pi^{x^3}-e^x$.

Λύση: ◈ Διαμορφώνουμε την εξίσωση

$$e^{x^3}+e^x=\pi^{x^3}+\pi^x.$$

◈ Θεωρούμε την f με $f(x)=e^x+\pi^x$, με $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}e^{x_1}<e^{x_2}\\ \pi^{x_1}<\pi^{x_2}\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1}+\pi^{x_1}<e^{x_2}+\pi^{x_2}\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

◈ Άρα $f(x^3)=f(x)\overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ 2}}{\Leftrightarrow}x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow$

$x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

36. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}$, με $x\in\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{2^{f(e^x)}}{2^{f(5^x)}}=1$

Λύση: ◈ Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε έχουμε ότι $2x_1<2x_2\Rightarrow e^{2x_1}<e^{2x_2}$ (1).

Επίσης: $-2x_1>-2x_2\Rightarrow e^{-2x_1}>e^{-2x_2}\Rightarrow -e^{-2x_1}<-e^{-2x_2}$ (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$e^{2x_1}-e^{-2x_1}<e^{x_2}-e^{-2x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

◈ Άρα έχουμε ότι $\dfrac{2^{f(e^x)}}{2^{f(5^x)}}=1\Leftrightarrow 2^{f(e^x)}=2^{f(5^x)}\Leftrightarrow$

$$f(e^x)=f(5^x)\overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ 2}}{\Leftrightarrow}e^x=5^x\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x}{5^x}=1\Leftrightarrow\left(\frac{e}{5}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0.$$

Μορφή 9η: Ολικό Ακρότατο

Αν η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο το M (αντίστοιχα ολικό ελάχιστο το m) και για $x_0\in\mathbb{A}$ ισχύει $f(x_0)=M$ (αντίστοιχα $f(x_0)=m$), τότε έχουμε ότι $f(x)=M\Rightarrow x=x_0$ (αντίστοιχα $f(x)=m\Rightarrow x=x_0$)

37. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=9^x+4^x-2\cdot3^{x+1}-2^{x+2}+15$, με $x\in\mathbb{R}$.

I. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ακρότατο, του οποίου να βρείτε το είδος και την τιμή.

II. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

Λύση I. Έχουμε: $f(x)=3^{2x}+2^{2x}-2\cdot3\cdot3^x-2\cdot2\cdot2^x+15=$

$$=\left(3^{2x}+2\cdot3\cdot3^x+9\right)+\left(2^{2x}-2\cdot2\cdot2^x+4\right)+2=$$

$$=\left(3^x-3\right)^2+\left(2^x-2\right)^2+2.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$(3^x-3)^2\geq0$, η ισότητα ισχύει για $x=1$.

$(2^x-2)^2\geq0$, η ισότητα ισχύει για $x=1$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$(3^x-3)^2+(2^x-2)^2\geq0\Rightarrow$$

$$(3^x-3)^2+(2^x-2)^2+2\geq2\Rightarrow f(x)\geq f(1).$$

Συνεπώς η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ το $f(1)=2$.

II. Από ερώτημα I για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει ότι $f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>2$. Η ισότητα $f(x)=2$ ισχύει μόνο για $x=1$ και άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη $x=1$.

38. Δίνεται η f με $f(x)=3^x+3^{\frac{4}{x}}$, με $x\in(0,+\infty)$.

I. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο, το οποίο και να βρείτε.

II. Να βρείτε τη θετική ρίζα της: $3^x+3^{\frac{4}{x}}=18$

Λύση: Ι. Έστω $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, με $x_1 < x_2$, τότε ισχύει ότι $\quad = 3^{x_1}\left(3^{x_2-x_1}-1\right)-3^{\frac{4}{x_2}}\left(3^{\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}}-1\right)=$

$$=3^{x_1}\left(3^{x_2-x_1}-1\right)-3^{\frac{4}{x_2}}\left(3^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}}-1\right) \quad (1)$$

Έχουμε ότι $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 3^{x_2-x_1} > 1 \Rightarrow 3^{x_2-x_1} - 1 > 0$.

Επίσης: $2 \le x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{4} < \frac{x_2}{4} \Rightarrow$

$$\frac{4}{x_1} > \frac{4}{x_2} \Rightarrow \frac{4}{x_1} - \frac{4}{x_2} > 0 \Rightarrow$$

$\frac{4(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2} > 0 \Rightarrow 3^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}} > 1 \Rightarrow 3^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}} - 1 > 0$.

Επιπλέον ισχύουν ότι:

$$x_1 \cdot x_2 > 4 \Rightarrow x_1 > \frac{4}{x_2} \Rightarrow 3^{x_1} > 3^{\frac{4}{x_2}} > 0 \quad (2)$$

Και $x_1 \cdot x_2 > 4 \Rightarrow 1 > \frac{4}{x_1 \cdot x_2} \overset{x_2 - x_1 > 0}{\Rightarrow}$

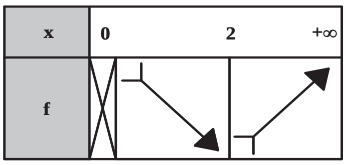
$$x_2 - x_1 > \frac{4(x_2 - x_1)}{x_1 \cdot x_2} \Rightarrow 3^{x_2-x_1} > 3^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}} \Rightarrow$$

$3^{x_2-x_1} - 1 > 3^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}} - 1 > 0 \quad (3)$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (2) και (3) έχουμε ότι: $3^{x_1}\left(3^{x_2-x_1}-1\right) > 3^{\frac{4}{x_2}}\left(3^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1\cdot x_2}}-1\right) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης f.



ΟΛΙΚΟ
ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Συνεπώς η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 2$ το $f(2) = 18$.

ΙΙ. Από ερώτημα Ι για κάθε $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$ ισχύει ότι $f(x) > f(2) \Leftrightarrow f(x) > 18$. Η ισότητα $f(x) = 18$ ισχύει μόνο για $x = 2$ και άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη $x = 2$.

Μορφή 9η: $f(x) \le \kappa \le g(x)$

Αν η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο το κ (αντίστοιχα ολικό ελάχιστο το κ) και η συνάρτηση g έχει ολικό ελάχιστο το κ (αντίστοιχα ολικό μέγιστο το m) και για $x_0 \in \mathbb{A}$ ισχύει $f(x_0) = g(x_0) = \kappa$ (αντίστοιχα $f(x_0) = g(x_0) = \kappa$), τότε έχουμε ότι $f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_0$

39. $e^{x^2} = \sigma\upsilon\nu x$

Λύση: ◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = e^{x^2}$, με $x \in \mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 \ge 0 \Rightarrow e^{x^2} \ge e^0 \Rightarrow f(x) \ge f(0)$, έπεται ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$.

◈ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu x \le 1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \kappa\pi$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

◈ Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $e^{x^2} > 1 \ge \sigma\upsilon\nu x$.

✓ Συνεπώς η εξίσωση $e^{x^2} = \sigma\upsilon\nu x$ έχει μοναδική προφανή ρίζα τη $x = 0$, αφού $e^{0^2} = 1 = \sigma\upsilon\nu 0$

✓

40. $e^x = -x^2 - 2x - 2$

Λύση: ◈ Έχουμε: $e^x = -(x+1)^2 - 1$.

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = -(x+1)^2 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-(x+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 - 1 \le -1 \Leftrightarrow$ $f(x) \le f(-1)$, έπεται ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -1$ το $f(-1) = -1$.

◈ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x > 0$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x > 0 > -1 \ge f(x) = -(x+1)^2 - 1$.

✓ Συνεπώς η $e^x = -x^2 - 2x - 2$ είναι αδύνατη.

✓

41.. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.

Λύση: ◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f \text{ με } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι: $x + \frac{1}{x} \ge 2$, ενώ η ισότητα ισχύει για $x = 1$. Θέτοντας στη θέση του x το e^x, το οποίο είναι θετικό, έχουμε ότι για κάθε

$x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\geq 2\Leftrightarrow e^{x}+e^{-x}\geq 2$.

Η ισότητα ισχύει για $e^{x}=1\Rightarrow x=0$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq f(0).$$

Συνεπώς η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ το $f(0)=1$.

❖ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g \text{ με } g(x)=\frac{1}{x^2+1},\ \text{με } x\in\mathbb{R}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$x^2+1\geq 1\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow g(x)\leq g(0).$$

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=0$ το $g(0)=1$.

❖ Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}^{*}$ ισχύει ότι

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}>1>\frac{1}{x^2+1}.$$

✓ Συνεπώς η εξίσωση $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\dfrac{1}{x^2+1}$ έχει μοναδική προφανή ρίζα τη $x=0$, αφού

$$\frac{e^{0}+e^{-0}}{2}=1=\frac{1}{0^2+1}$$

42. $\mathbf{e^{x-1}+e^{1-x}=\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$

Λύση

◈ Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=e^{x-1}+e^{1-x}$, με $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}\geq 2\Leftrightarrow e^{x-1}+e^{1-x}\geq 2.$$

Η ισότητα ισχύει για $e^{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$e^{x-1}+e^{1-x}\geq 2\Leftrightarrow f(x)\geq f(1).$$

Συνεπώς η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ το $f(1)=1$.

◈ Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\leq 1$.

◈ Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$e^{x-1}+e^{1-x}\geq 2>1\geq \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

✓ Συνεπώς η εξίσωση $e^{x-1}+e^{1-x}=\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ είναι αδύνατη.

Μορφή 10η: Μεταβλητή Βάση και Εκθέτης

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}=1$$

Σε αυτή τη μορφή αναζητούμε τις ρίζες των επιμέρους εξισώσεων:

- $\mathbf{f(x)=1}$.
- $\mathbf{g(x)=0}$**, αρκεί να ισχύει** $\mathbf{f(x)\neq 0}$.
- $\mathbf{f(x)=-1}$**, αρκεί ο εκθέτης** $\mathbf{g(x)}$ **να είναι άρτιος.**

43. $\mathbf{(x-5)^{x^2-x-2}=1}$

Λύση: Έχουμε $f(x)=x-5$ και $g(x)=x^2-x-2$.

- $f(x)=1\Leftrightarrow x-5=1\Leftrightarrow x=6$.
- $g(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$.

Επαλήθευση: $f(2)=2-5=-3\neq 0$.

$f(-1)=-1-5=-6\neq 0$.

- $f(x)=-1\Leftrightarrow x-5=-1\Leftrightarrow x=4$.

Επαλήθευση: $g(4)=4^2-4-2=10$, άρτιος.

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(f(x)\right)^{h(z)}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) **Αν** $\mathbf{f(x)=0}$**, τότε απαιτούμε επιπλέον** $\mathbf{g(x)>0}$ **και** $\mathbf{h(x)>0}$.

2) **Αν** $\mathbf{f(x)\neq 0}$**, τότε η εξίσωση ανάγεται στην προηγούμενη μορφή, αφού μετασχηματίζεται ισοδύναμα στη μορφή:** $\mathbf{\left(f(x)\right)^{g(x)-h(x)}=1}$

44. $\mathbf{(x-4)^{x^2}=(x-4)^{x+6}}$

Λύση

Έχουμε $f(x)=x-4$, $g(x)=x^2$ και $h(x)=x+6$.

- $f(x)=0\Leftrightarrow x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

Επαλήθευση: $g(4)=4^2=16>0$.

$h(4)=4+6=10>0$.

- Μετασχηματίζουμε τον τύπο: $(x-4)^{x^2-x-6}=1$.

Έχουμε $\varphi(x)=x^2-x-6$.

- $f(x)=1\Leftrightarrow x-4=1\Leftrightarrow x=5$.
- $\varphi(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-2$.

Επαλήθευση: $f(3)=3-4=-1\neq 0$.

$f(-2)=-2-4=-6\neq 0$.

- $f(x)=-1\Leftrightarrow x-4=-1\Leftrightarrow x=3$.

Επαλήθευση: $\varphi(3)=3^2-3-6=0$, άρτιος.

Τάξη: Β

Ασκήσεις Άλγεβρας

Μποζατζίδης Βασίλης – Στάμου Γιάννης – Τσιφάκης Χρήστος

ΘΕΜΑ 1ο Δίνεται η συνάρτηση
$\mathbf{f(x)=\alpha\cdot \eta\mu\left(\frac{x}{5}\right)+\beta}$**, με** $\mathbf{\alpha,\beta\in R}$**.**

i) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\alpha,\beta\in R$**, αν η γραφική παράσταση της** f **διέρχεται από τα σημεία** $A(10\pi,6)$ **και** $B\left(-\frac{5\pi}{6},1\right)$

ii) Για τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ **που βρήκατε στο i) ερώτημα, να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της** f **σε διάστημα μιας περιόδου.**

iii) Ποια είναι η μονοτονία της στο διάστημα $[0,10\pi]$**;**

Λύση: i) Αφού αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(10\pi,6)$ και $B\left(-\frac{5\pi}{6},1\right)$

έχουμε $\left.\begin{matrix} f(10\pi)=6 \\ f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha\cdot\eta\mu(10\pi)+\beta=6 \\ \alpha\cdot\eta\mu\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\beta=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}\beta=6 \\ \alpha\cdot\eta\mu\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+6=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\beta=6 \\ \alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-5\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\beta=6 \\ \alpha=10\end{matrix}\right\}$

ii) Έχουμε $f(x)=10\cdot\eta\mu\left(\frac{x}{5}\right)+6$

Άρα $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{5}}=10\pi$ και $-4\le f(x)\le 16$.

Αν $f(x)=-4\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{x}{5}\right)=-1\Leftrightarrow \frac{x}{5}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$ ή

$\frac{x}{5}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow x=10\kappa\pi-\frac{5\pi}{2}$ ή $x=10\kappa\pi+\frac{15\pi}{2},\kappa\in Z$.

Αφού $0\le x\le 10\pi\Leftrightarrow 0\le 10\kappa\pi-\frac{5\pi}{2}\le 10\pi\Leftrightarrow$

$\frac{5\pi}{2}\le 10\kappa\pi\le 10\pi+\frac{5\pi}{2}\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\le 2\kappa\pi\le\frac{5\pi}{2}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\le 2\kappa\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\kappa=1$, οπότε $x=\frac{15\pi}{2}$.

Αν $0\le x\le 10\pi\Leftrightarrow 0\le 10\kappa\pi+\frac{15\pi}{2}\le 10\pi\Leftrightarrow$

$-\frac{15\pi}{2}\le 10\kappa\pi\le\frac{5\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le 2\kappa\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$-\frac{3}{4}\le\kappa\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\kappa=0$, οπότε $x=\frac{15\pi}{2}$.

Άρα $f_{min}=f\left(\frac{15\pi}{2}\right)=-4$.

Όμοια, $f(x)=16\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{x}{5}\right)=1\Leftrightarrow$

$\frac{x}{5}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=10\kappa\pi+\frac{5\pi}{2}$

Αφού $0\le x\le 10\pi\Leftrightarrow 0\le 10\kappa\pi+\frac{5\pi}{2}\le 10\pi\Leftrightarrow$

$-\frac{5\pi}{2}\le 10\kappa\pi\le 10\pi-\frac{5\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{2}\le 10\kappa\pi\le\frac{15\pi}{2}\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}\le 2\kappa\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\kappa=0$, οπότε

$x=\frac{5\pi}{2}$. Άρα $f_{min}=f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=10$.

iii) Η μονοτονία της συνάρτησης f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	0		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{15\pi}{2}$		10π
$f(x)$	6	↗	10 Μέγιστο	↘	-4 Ελάχιστο	↗	6

Στο $\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, στο $\left[\frac{5\pi}{2},\frac{15\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\left[\frac{15\pi}{2},10\pi\right]$ είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ 2ο Να λυθεί η εξίσωση:

$\mathbf{(1+\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu^2x=x^2+x^{-2}}$ **με** $\mathbf{0<x\le\frac{\pi}{2}}$

Λύση: Η εξίσωση $(1+\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu^2x=x^2+\frac{1}{x^2}$.

Αφού $0<x\le\frac{\pi}{2}$ έχουμε $|\eta\mu x|\le 1\Leftrightarrow\eta\mu^2x\le 1$

και $0\le\sigma\upsilon\nu x<1\Leftrightarrow 1+\sigma\upsilon\nu x<2$

Άρα $(1+\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu^2x<2$. Το β΄ μέλος της εξίσωσης γίνεται: Αφού $x>0$ ισχύει

$$x+\frac{1}{x}\ge 2\Leftrightarrow x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ge 4\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2.$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 3ο Δίνεται η συνάρτηση

$\mathbf{f(x)=(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)x^3-5\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot x^2+}$

$\mathbf{+(12+\beta)x+5-\beta}$**, με** $\mathbf{\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ **και** $\mathbf{\beta\in\mathbb{R}}$**.**

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{A(1,14)}$ **και** $\mathbf{B(\beta,5)}$**:**

α) Να δείξετε ότι $\alpha=\beta=0$.

β) Να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=25$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+5x^2-5$ είναι γνησίως αύξουσα και η C_g είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Λύση: α) Αφού $A\in C_f$ έχουμε: $f(1)=14\Leftrightarrow$

$1+\sigma\upsilon\nu\alpha-5\sigma\upsilon\nu^2\alpha+12+\cancel{\beta}+5-\cancel{\beta}=14\Leftrightarrow$

$-5\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha+4=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha=1$ ή $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\dfrac{4}{5}$

Όμως αφού $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu\alpha>0$, άρα τελικά έχουμε $\sigma\upsilon\nu\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=0$. Αντίστοιχα είναι: $f(\beta)=5\Leftrightarrow 2\beta^3-5\beta^2+12\beta+\beta^2+5-\beta=5\Leftrightarrow$

$2\beta^3-4\beta^2+11\beta=0\Leftrightarrow\beta\left(2\beta^2-4\beta+11\right)=0$.

Από όπου έχουμε $\beta=0$ αφού για το τριώνυμο $\Delta<0$.

β) Για $\alpha=\beta=0$ η f γίνεται $f(x)=2x^3-5x^2+12x+5$. Τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=25$ είναι οι λύσεις τις ανίσωσης $f(x)<25$, οπότε έχουμε: $f(x)<25\Leftrightarrow$

$2x^3-5x^2+12x+5<25\Leftrightarrow 2x^3-5x^2+12x-20<0$

2	−5	12	−20	2
↓	4	−2	20	
2	−1	10	0	

Οπότε έχουμε: $(x-2)\left(2x^2-x+10\right)<0$ και

x	−∞		2		+∞
$x-2$		−	0	+	
$2x^2-x+10$		+		+	
Γ		−	0	+	

και οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x<2$.

γ) Η g γίνεται $g(x)=2x^3-\cancel{5x^2}+12x+\cancel{5}+\cancel{5x^2}-\cancel{5}=$
$=2x^3+12x$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1^3<x_2^3\\12x_1<12x_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x_1^3<2x_2^3\\12x_1<12x_2\end{matrix}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$

$2x_1^3+12x_1<2x_2^3+12x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η C_g είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων αν είναι περιττή. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $g(-x)=2(-x)^3+12(-x)=-2x^3-12x=$
$=-\left(2x^3+12x\right)=-g(x)$, οπότε είναι περιττή.

ΘΕΜΑ 4ο Να λυθεί η εξίσωση στο R:

$$2x+\left(4x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}=4x^3+\sqrt{1-x^2}$$

Λύση: Πρέπει και αρκεί
$1-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

$2x+\left(4x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}=4x^3+\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow$

$2x\left(2x^2-1\right)=2\left(2x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow$

- $2x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή
- $x=\sqrt{1-x^2}\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x^2=1-x^2\Leftrightarrow 2x^2=1\Leftrightarrow$
  $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Β΄ τρόπος: Αφού $-1\leq x\leq 1$, θέτουμε $x=\eta\mu\omega$ με $\omega\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Έτσι έχουμε: $2\eta\mu\omega+\left(4\eta\mu^2\omega-1\right)\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}=$
$=4\eta\mu^3\omega+\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}\Leftrightarrow$

$2\eta\mu\omega+\left(4\eta\mu^2\omega-1\right)|\sigma\upsilon\nu\omega|=4\eta\mu^3\omega+|\sigma\upsilon\nu\omega|\Leftrightarrow$

$2\eta\mu\omega+\left(4\eta\mu^2\omega-1\right)\sigma\upsilon\nu\omega=4\eta\mu^3\omega+\sigma\upsilon\nu\omega\Leftrightarrow$

$2\left(2\eta\mu^2\omega-1\right)\left(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega\right)=0\Leftrightarrow$

- $\eta\mu\omega=x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή
- $\eta\mu\omega=\sigma\upsilon\nu\omega\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)\Leftrightarrow$
  $\omega=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ΘΕΜΑ 5ο Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x)=\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-1\right)x^4+\left(2\sigma\upsilon\nu\alpha+1\right)x^3+$$
$$+21x^2+5\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot x+35,\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

α) Αν γνωρίζετε ότι το P είναι τρίτου βαθμού να βρείτε το α.

β) Για $\alpha=0$: i) να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

ii) να λύσετε την ανίσωση $P(2x+1)>0$.

Λύση: α) Αφού είναι $3^{ου}$ βαθμού θα πρέπει: ο συντελεστής του x^4 να ισούται με 0 και ταυτόχρονα ο συντελεστής του x^3 να είναι $\neq 0$.

Δηλαδή $\left.\begin{matrix}2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-1=0\\2\sigma\upsilon\nu\alpha+1\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}(2\sigma\upsilon\nu\alpha+1)\cdot(\sigma\upsilon\nu\alpha-1)=0\\2\sigma\upsilon\nu\alpha+1\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\alpha=1\overset{\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\alpha=0$. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha=1$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x)=3x^3+21x^2+5x+35$.

β) i) Έχουμε: $P(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3+21x^2+5x+35=0$

3	21	5	35	−7
↓	−21	0	−35	
3	0	5	0	

Άρα: $(x+7)(3x^2+5)=0 \Leftrightarrow x=-7$, μοναδική ρίζα.

ii) Το πρόσημο του P προκύπτει από τον πίνακα:

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Λύσεις της $P(2x+1)>0$ είναι τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $2x+1>-7 \Leftrightarrow x>-4$. Άρα $x\in(-4,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 6ο Δίνεται το πολυώνυμο

$$\mathbf{P(x)=\left(x^3-2(x+1)\right)\left(x^3-2(x-1)\right)-12}.$$

α) Να γράψετε το P στη μορφή

$$\mathbf{P(x)=\left(\alpha x^3+\beta x\right)^2-\gamma^2}.$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Να λύσετε την $P(\eta\mu\alpha+1)>0$, για $\alpha\in[0,\pi]$.

Λύση: α) Διαδοχικά το $P(x)$ γίνεται:

$P(x)=\left(x^3-2(x+1)\right)\left(x^3-2(x-1)\right)-12=$

$\left(x^3-2x-2\right)\left(x^3-2x+2\right)-12=$

$\left[\left(x^3-2x\right)-2\right]\cdot\left[\left(x^3-2x\right)+2\right]-12=$

$\left(x^3-2x\right)^2-4-12=\left(x^3-2x\right)^2-4^2$

β) $P(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^3-2x\right)^2-16=0 \Leftrightarrow$

$x^3-2x=-4 \quad (1)$ ή $x^3-2x=4 \quad (2)$

Η (1) διαδοχικά γίνεται: $x^3-2x=-4 \Leftrightarrow$

$x^3-2x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$

Αντίστοιχα η (2) διαδοχικά γίνεται:

$x^3-2x=4 \Leftrightarrow x^3-2x-4=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x=2$

γ) Έχουμε: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+2x+2)(x^2-4)(x^2-2x+2)=0$

Το πρόσημο του P προκύπτει από το πρόσημο του γινομένου $(x+2)(x-2)$ αφού τα δύο τριώνυμα έχουν αρνητικές διακρίνουσες και είναι θετικά για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε προκύπτει ο πίνακας:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+2x+2	$+$		$+$		$+$
x^2-2x+2	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα είναι $P(x)>0$ για $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Η ανίσωση $P(\eta\mu\alpha+1)>0$ έχει λύσεις τα $\alpha\in[0,\pi]$ για τα οποία είναι:

$\eta\mu\alpha+1<-2 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha<-3$, Αδύνατη

ή $\eta\mu\alpha+1>2 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha>1$, Αδύνατη

Επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 7ο Να λύσετε στο R την εξίσωση:

$$\mathbf{x^2-10x+27=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}}$$

Λύση: Με $x\in[4,6]$ έχουμε

$x^2-10x+27=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4} \Leftrightarrow$

$(x-5)^2+2=\sqrt{1-(x-5)}+\sqrt{1+(x-5)}$

Θέτουμε $\sqrt{1-(x-5)}=\alpha$ και $\sqrt{1+(x-5)}=\beta$

οπότε $1-(x-5)=\alpha^2$, $1+(x-5)=\beta^2$ και

$(x-5)^2+2=3-\alpha^2\beta^2$. Έτσι έχουμε

$$\left.\begin{array}{r}\alpha^2+\beta^2=2\\ 3-\alpha^2\beta^2=\alpha+\beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2\\ 3-\alpha^2\beta^2=\alpha+\beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\beta=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2}-1\\ 3-\alpha^2\beta^2=\alpha+\beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow 3-\left[\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}-1\right]^2=\alpha+\beta$$

$$\overset{\alpha+\beta=y>0}{\Leftrightarrow} \quad y^4-4y^2+4y-8=0 \quad \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$(y-2)\cdot(y^3+2y^2+4)=0 \Leftrightarrow y=2$

$$\text{Τότε} \left.\begin{array}{r}\alpha^2+\beta^2=2\\ \alpha+\beta=2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha=1, \beta=1, \text{ οπότε } x=5.$$

ΘΕΜΑ 8ο Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$.

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{f(\sqrt{x})}{4}+f(-\sqrt{x})\geq f(0)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu^2x)+f(\sigma\upsilon\nu^2x)=e+1$

Λύση: α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ διαδοχικά έχουμε:

$\dfrac{f(\sqrt{x})}{4}+f(-\sqrt{x})\geq f(0) \Leftrightarrow \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4}+e^{-\sqrt{x}}\geq 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4}+\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}\geq 1 \Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2+4\geq 4e^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2-4e^{\sqrt{x}}+4\geq 0 \Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{x}}-2\right)^2\geq 0$, που ισχύει.

β) Διαδοχικά έχουμε: $f(\eta\mu^2x)+f(\sigma\upsilon\nu^2x)=e+1 \Leftrightarrow$

$e^{\eta\mu^2x}+e^{\sigma\upsilon\nu^2x}=e+1 \Leftrightarrow e^{1-\sigma\upsilon\nu^2x}+e^{\sigma\upsilon\nu^2x}=e+1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{e^{\sigma\upsilon\nu^2x}}+e^{\sigma\upsilon\nu^2x}=e+1 \Leftrightarrow 1+\left(e^{\sigma\upsilon\nu^2x}\right)^2=(e+1)e^{\sigma\upsilon\nu^2x} \Leftrightarrow$

$\left(e^{\sigma\upsilon\nu^2x}\right)^2-(e+1)e^{\sigma\upsilon\nu^2x}+1=0$

Θεωρώντας $e^{\sigma\upsilon\nu^2x}=\kappa>0$ η εξίσωση γίνεται:

$\kappa^2-(e+1)\kappa+1=0 \Leftrightarrow (\kappa-1)(\kappa-e)=0 \Leftrightarrow$
$\kappa=1$ ή $\kappa=e$. Έτσι έχουμε:
$e^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$
ή $e^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=e \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\pm1 \Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\pi$
Οπότε τελικά: $x=2\kappa\pi$ ή $x=2\kappa\pi\pm\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$, άρα $x=\kappa\pi$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ 9ο Δίνεται η $f(x)=\ln\left(\sqrt{x+1}-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να μελετήσετε τη μονοτονία της.

β) Να λύσετε την $f(x)=\frac{1}{2}\left(\ln 4+\ln\left(3-\frac{x}{4}\right)\right)$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(80)$ και $f(e^4-1)$.

Λύση: α) Πρέπει και αρκεί

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{x+1}-1>0\\ x+1\geq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\sqrt{x+1}>1\\ x\geq -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}x+1>1\\ x\geq -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x>0\\ x\geq -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x>0,\ A_f=(0,+\infty).$$

Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow \sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1} \Rightarrow$
$\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1 \Rightarrow$
$\ln\left(\sqrt{x_1+1}-1\right)<\ln\left(\sqrt{x_2+1}-1\right) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_f.

β) Η εξίσωση έχει λύσεις για:

$$\left.\begin{matrix}x>0\\ 3-\frac{x}{4}>0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x>0\\ x<12\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0<x<12$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\ln 4+\ln\left(3-\frac{x}{4}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left(4\cdot\left(3-\frac{x}{4}\right)\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(12-x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{12-x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2=\left(\sqrt{12-x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x+1}^2-2\sqrt{x+1}+1=12-x \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x+1}=2x-10 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-5 \overset{5\leq x<12}{\Leftrightarrow}$$

$$x+1=x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+24=0 \Leftrightarrow$$

$x=3$ (απορρίπτεται) ή $x=8$ (δεκτή)

γ) Γνωρίζουμε ότι:

$e<3 \Leftrightarrow e^4<3^4 \Leftrightarrow e^4-1<80$

και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$f(e^4-1)<f(80)$.

ΘΕΜΑ 10ο Δίνεται η $f(x)=\log\left(2^x+1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f και να μελετήσετε τη μονοτονία της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(2x)=2\log 2$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)=\eta\mu x-1$ είναι αδύνατη.

δ) Να δείξετε ότι $f(\log_2 x)+f(2+\log_2 x)\geq \log x$, για κάθε $x>0$.

Λύση: α) Η f ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $2^x+1>0$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow 2^{x_1}+1<2^{x_2}+1 \Leftrightarrow$
$\log\left(2^{x_1}+1\right)<\log\left(2^{x_2}+1\right) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$
οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση γίνεται: $f(x)+f(2x)=2\log 2 \Leftrightarrow$

$$\log\left(2^x+1\right)+\log\left(2^{2x}+1\right)=2\log 2 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\left(2^x+1\right)\left(2^{2x}+1\right)\right)=\log 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(2^x+1\right)\left(2^{2x}+1\right)=4 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^3+\left(2^x\right)^2+2^x-3=0$$

Θέτοντας $2^x=\kappa>0$ η εξίσωση γίνεται:

$$\kappa^3+\kappa^2+\kappa-3=0 \Leftrightarrow (\kappa-1)\left(\kappa^2+2\kappa+3\right)=0$$

$\Leftrightarrow \kappa=1$. Οπότε είναι $\kappa=1 \Leftrightarrow 2^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

γ) Έχουμε ότι:

$2^x>0 \Leftrightarrow 2^x+1>1 \Leftrightarrow \log\left(2^x+1\right)>\log 1 \Leftrightarrow$
$\log\left(2^x+1\right)>0 \Leftrightarrow f(x)>0$. όμως $\eta\mu x-1\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Αρκεί να δείξουμε:

$f(\log_2 x)+f(2+\log_2 x)\geq \log x$

Αρκεί $\log\left(2^{\log_2 x}+1\right)+\log\left(2^{2+\log_2 x}+1\right)\geq \log x$

Αρκεί $\log(x+1)+\log\left(2^2\cdot 2^{\log_2 x}+1\right)\geq \log x$

Αρκεί $\log(x+1)+\log(4x+1)\geq \log x$

Αρκεί $\log\left((x+1)(4x+1)\right)\geq \log x$

Αρκεί $(x+1)(4x+1)\geq x$. Αρκεί $.4x^2+4x+1\geq 0$.

Αρκεί $(2x+1)^2\geq 0$, που ισχύει.

ΘΕΜΑ 11ο Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln|x-2|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(x+2)$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)\le f(|x|+4)$.

Λύση: α) Η συνάρτηση ορίζεται για $|x-2|>0 \Leftrightarrow x\neq 2$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

β) Για κάθε $x\neq 2$ έχουμε:

$$\ln|x-2|=\ln|(x-2)+2| \Leftrightarrow \ln|x-2|=\ln|x| \Leftrightarrow$$

$$|x-2|=|x| \Leftrightarrow x-2=\pm x \Leftrightarrow x=1$$

γ) Για κάθε $x\in A_f$ έχουμε:

$$\ln|x-2|\le \ln|(|x|+4)-2| \Leftrightarrow$$

$$\ln|x-2|\le \ln||x|+2| \Leftrightarrow |x-2|\le |x|+2$$

Ισχύει αφού είναι: $|x-2|=|x+(-2)|\le |x|+2$

ΘΕΜΑ 12ο Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ και } g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι $g(\ln 2)=\frac{3}{4}$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $g(x)\ge \frac{3}{4}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x$.

Λύση: α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το $-x\in\mathbb{R}$.
- $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οπότε, για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, έχουμε:

$$x_1<x_2 \overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow} \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ -x_1>-x_2 \end{cases} \overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow} \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ e^{-x_1}>e^{-x_2} \end{cases} \underset{\cdot(-1)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ -e^{-x_1}<-e^{-x_2} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} e^{x_1}-e^{-x_1}<e^{x_2}-e^{-x_2} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}<\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2} \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Είναι $g(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.

$$g(x)\ge\frac{3}{4} \Leftrightarrow g(x)\ge g(\ln 2) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x\ge \ln 2.$$

δ) Έχουμε: $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{2}=\eta\mu x \Leftrightarrow$

$$e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=2\eta\mu x \overset{\frac{\pi}{2}-x=u}{\Leftrightarrow} e^u+e^{-u}=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-u\right) \Leftrightarrow$$

$e^u+\frac{1}{e^u}=2\sigma\upsilon\nu u$ (1). Απ' τη γνωστή ανισότητα για κάθε $x>0$ ισχύει $x+\frac{1}{x}\ge 2$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$, έχουμε ότι:

$$e^u+\frac{1}{e^u}\ge 2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\sigma\upsilon\nu u\ge 2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu u\ge 1 \quad (2)$$

Όμως $\sigma\upsilon\nu x\le 1$ (3), συνεπώς απ' τις σχέσεις (1), (2) και (3) καταλήγουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x=1$ και στην εξίσωση $e^u+\frac{1}{e^u}=2 \Leftrightarrow e^u=1 \Leftrightarrow u=0$, δηλαδή:

$\frac{\pi}{2}-x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$, που ικανοποιεί την αρχική εξίσωση.

ΘΕΜΑ 13ο Δίνεται η $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση βρίσκεται εξ' ολοκλήρου κάτω απ' τον άξονα x΄x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(2x)-f(x)<x-\ln 2+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right).$$

δ) Να δείξετε ότι

$$f(\ln 2)+f(\ln 3)+\ldots+f(\ln\nu)=-\ln\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

Λύση: α) Πρέπει $1-\frac{1}{e^x}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}<1 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(0,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{e^{x_1}}<-\frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow 1-\frac{1}{e^{x_1}}<1-\frac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow$$

$\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_1}}\right)<\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_2}}\right) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x>0$.

Είναι $\frac{1}{e^x}>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x}<0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^x}<1 \Leftrightarrow$

$\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)<\ln 1 \Leftrightarrow f(x)<0$ για κάθε $x>0$.

γ) Πρέπει $e^x-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow e^x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>-\ln 2$

που ισχύει επειδή $x>0$. Έχουμε:

$$f(2x)-f(x)<x-\ln 2+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)<\ln e^x-\ln 2+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}\right)-\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)<\ln\left(\frac{e^x}{2}\right)+\ln\left(\frac{2e^x-1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}}{\frac{e^x-1}{e^x}}\right)<\ln\left(\frac{e^x}{2}\cdot\frac{2e^x-1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x\left(e^x-1\right)}\right)<\ln\left(\frac{2e^{2x}-e^x}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)<\ln\left(\frac{2e^{2x}-e^x}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{e^x+1}{e^x}<\frac{2e^{2x}-e^x}{4}\overset{4e^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$4e^x+4<2e^{3x}-e^x\Leftrightarrow 2e^{3x}-e^{2x}-4e^x-4>0\quad(1).$$

Θέτοντας $e^x=\omega>0$ η (1): $2\omega^3-\omega^2-4\omega-4>0$.

Παρατηρούμε ότι το $P(\omega)=2\omega^3-\omega^2-4\omega-4$ έχει ρίζα το 2, οπότε από το σχήμα Horner έχουμε:

2	-1	-4	-4	2
	4	6	4	
2	**3**	**2**	**0**	

Άρα η ανίσωση γίνεται:

$$(\omega-2)\Big(\underbrace{2\omega^2+3\omega+2}_{>0}\Big)>0\Leftrightarrow\omega-2>0\Leftrightarrow\omega>2.$$

Με $\omega>2\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$.

δ) Είναι: $f(\ln 2)+f(\ln 3)+f(\ln 4)+\ldots+f(\ln\nu)=$

$$\ln\left(1-\frac{1}{e^{\ln 2}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{e^{\ln 3}}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{e^{\ln\nu}}\right)=$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{\nu-1}{\nu}\right)=\ln\left(\frac{1}{\nu}\right)=-\ln\nu.$$

ΘΕΜΑ 14ο Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x>0$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(2-\eta\mu x)-f\left(\frac{4}{3}-\eta\mu^2x\right)=f(3)$ στο διάστημα $[6\pi,7\pi]$.

β) Αν $\alpha>0$ και $f(\alpha)+f(\alpha^2)+f(\alpha^3)+\ldots+f(\alpha^{100})=5050$, να δείξετε ότι $\alpha=e$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\cdot\sqrt{f(x)}+f(x)-12>0$.

Λύση: α) Είναι $2-\eta\mu x>0$ και $\frac{4}{3}-\eta\mu^2x>0$,

οπότε: $f(2-\eta\mu x)-f\left(\frac{4}{3}-\eta\mu^2x\right)=f(3)\Leftrightarrow$

$$\ln(2-\eta\mu x)-\ln\left(\frac{4}{3}-\eta\mu^2x\right)=\ln 3\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{2-\eta\mu x}{\frac{4}{3}-\eta\mu^2x}\right)=\ln 3\Leftrightarrow\frac{2-\eta\mu x}{\frac{4}{3}-\eta\mu^2x}=3\Leftrightarrow$$

$$2-\eta\mu x=4-3\eta\mu^2x\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}3\eta\mu^2x-\eta\mu x-2=0\\ \eta\mu x=\omega\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}3\omega^2-\omega-2=0\\ \eta\mu x=\omega\end{matrix}\right\}\overset{\Delta=25}{\Leftrightarrow}\omega=1\ \text{ή}\ \omega=-\frac{2}{3}.$$

Άρα $\eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=-\frac{2}{3}$. Το διάστημα $[6\pi,7\pi]$, περιγράφει το $1^{\text{ο}}$ και το $2^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο, οπότε $\eta\mu x\geq 0$. Συνεπώς δεκτή είναι η λύση $\eta\mu x=1$.

$$\eta\mu x=1\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z.$$

Όμως $x\in[6\pi,7\pi]\Leftrightarrow 6\pi\leq x\leq 7\pi\Leftrightarrow$

$$6\pi\leq 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\leq 7\pi\Leftrightarrow 6\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2\kappa\pi\leq 7\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{11\pi}{2}\leq 2\kappa\pi\leq\frac{13\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{11}{2}\leq 2\kappa\leq\frac{13}{2}\Leftrightarrow$$

$\frac{11}{4}\leq\kappa\leq\frac{13}{4}\Leftrightarrow 2,75\leq\kappa\leq 3,25\overset{\kappa\in Z}{\Leftrightarrow}\kappa=3$. Άρα η λύση της εξίσωσης είναι η $x=6\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{13\pi}{2}$.

β) Έχουμε: $f(\alpha)+f(\alpha^2)+f(\alpha^3)+\ldots+f(\alpha^{100})=5050\Leftrightarrow$

$$\ln\alpha+\ln\alpha^2+\ln\alpha^3+\ldots+\ln\alpha^{100}=5050\Leftrightarrow$$
$$\ln\alpha+2\ln\alpha+3\ln\alpha+\ldots+100\ln\alpha=5050\Leftrightarrow$$
$$(1+2+3+\ldots+100)\cdot\ln\alpha=5050\Leftrightarrow$$
$$5050\ln\alpha=5050\Leftrightarrow\ln\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=e$$

(*) Η παράσταση $1+2+3+\ldots+100$ αποτελεί άθροισμα 100 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου, με $\alpha_1=1$, $\alpha_{100}=100$ και $\omega=1$, οπότε $S_{100}=\frac{\alpha_1+\alpha_{100}}{2}\cdot 100=\frac{1+100}{2}\cdot 100=5050$.

γ) Πρέπει $\left.\begin{matrix}x>0\\ \ln x\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x>0\\ x\geq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\geq 1$.

Είναι $f(x)\cdot\sqrt{f(x)}+f(x)-12>0\Leftrightarrow$

$\ln x\cdot\sqrt{\ln x}+\ln x-12>0\quad(1)$. Θεωρούμε την

$\ln x\cdot\sqrt{\ln x}+\ln x-12=0\quad(2)$.

Θέτουμε $\sqrt{\ln x}=\omega>0\Leftrightarrow\ln x=\omega^2$, οπότε η (2) γίνεται: $\omega^3+\omega^2-12=0\quad(3)$.

1	1	0	-12	2
	2	6	12	
1	3	6	0	

και προκύπτει: $(\omega-2)\left(\underbrace{\omega^2+3\omega+6}_{>0}\right)=0 \Leftrightarrow \omega=2$.

Άρα $(1) \Rightarrow \sqrt{\ln x}>2 \Leftrightarrow \ln x>4 \Leftrightarrow x>e^4$.

ΘΕΜΑ 15ο Δίνεται το πολυώνυμο $\mathbf{P(x)=(2\ln\kappa-1)x^4+x^3+(e-1)x^2-}$ $\mathbf{-e\cdot x+1+2\eta\mu\theta}$, **με** $\boldsymbol{\theta\in(0,2\pi)}$, $\boldsymbol{\kappa>0}$. **Το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού και έχει παράγοντα το** $\mathbf{x-1}$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\boldsymbol{\kappa}$ **και** $\boldsymbol{\theta}$.

Αν $\boldsymbol{\kappa=e^{\frac{1}{2}}}$ **και** $\boldsymbol{\theta=\frac{7\pi}{6}}$ **ή** $\boldsymbol{\theta=\frac{11\pi}{6}}$ **:**

β) Να λύσετε την ανίσωση $\mathbf{P(x)<0}$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{f(x)=e^{3x}+(e-1)\cdot e^{2x}-e^{x+1}}$ **βρίσκεται κάτω απ' τον άξονα x΄x.**

Λύση: α) Το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού, άρα πρέπει: $2\ln\kappa-1=0 \Leftrightarrow 2\ln\kappa=1 \Leftrightarrow \ln\kappa=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa=e^{\frac{1}{2}}$.

Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-1$, οπότε:

$P(1)=0 \Leftrightarrow 1+(e-1)-e+1+2\eta\mu\theta=0 \Leftrightarrow$

$1+2\eta\mu\theta=0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\theta=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$ ή $\theta=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$ ή

$\theta=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \overset{\theta\in(0,2\pi)}{\Leftrightarrow} \theta=\frac{7\pi}{6}$ ή $\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$.

Άρα το πολυώνυμο έχει τη μορφή

$P(x)=x^3+(e-1)x^2-e\cdot x$.

β) $P(x)<0 \Leftrightarrow x^3+(e-1)x^2-e\cdot x<0 \Leftrightarrow$

$x\cdot[x(x+e)-(x+e)]<0 \Leftrightarrow x\cdot(x+e)\cdot(x-1)<0$

x		-e		0		1	
x	-		-	0	+		+
x+e	-	0	+		+		+
x−1	-		-		-	0	+
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

Άρα $x\in(-\infty,-e)\cup(0,1)$.

γ) Θέλουμε $f(x)<0 \Leftrightarrow e^{3x}+(e-1)e^{2x}-e^{x+1}<0 \Leftrightarrow$

$(e^x)^3+(e-1)(e^x)^2-e\cdot e^x<0 \Leftrightarrow P(e^x)<0$.

Από ερώτημα (β), η λύση της ανίσωσης $P(x)<0$ είναι $x\in(-\infty,-e)\cup(0,1)$, οπότε ικανοποιείται όταν $\underbrace{e^x<-e}_{\text{Αδύνατη}}$ ή $0<e^x<1 \Leftrightarrow x<0$. Άρα η C_f βρίσκεται κάτω απ' τον άξονα x΄x στο διάστημα $A=(-\infty,0)$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1. Θεωρούμε την εξίσωση

$4x^2+\lambda x+1=0$, $\lambda\in R$

i) Για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες;

Θεωρούμε την συνάρτηση

$f(\theta)=4\sigma\upsilon\nu^2\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta+1$ με $\theta\in[-2\pi,2\pi]$

ii) Πόσες τιμές του $\sigma\upsilon\nu\theta$ με $\theta\in[-2\pi,2\pi]$ ικανοποιούν την εξίσωση $f(\theta)=0$;

iii) Να βρείτε όλες τις τιμές του $\theta\in[-2\pi,2\pi]$ που ικανοποιούν την εξίσωση $f(\theta)=0$.

iv) Εάν η εξίσωση $f(\theta)=\kappa$ ικανοποιείται για τρεις τιμές του θ, να βρείτε το κ.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Κατά την διάρκεια της χρονιάς 2021, η μεταβολή της τιμής του δολαρίου σε ευρώ, δίνεται από την συνάρτηση:

$P(t)=1-0,2\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ με $1\le t\le 12$

i. Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης;

ii. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του δολαρίου – ευρώ, και ποια είναι η μικρότερη;

iii. Πότε μας συμφέρει να αγοράσουμε δολάρια και πότε να πουλήσουμε;

ΑΣΚΗΣΗ 3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση:

$A=\log(\varepsilon\varphi1^\circ)+\log(\varepsilon\varphi2^\circ)+\log(\varepsilon\varphi3^\circ)+\ldots+$

$+\log(\varepsilon\varphi87^\circ)+\log(\varepsilon\varphi88^\circ)+\log(\varepsilon\varphi89^\circ)$

α) $A=1$ **β)** $A=0$ **γ)** $A=\frac{1}{2}$ **δ)** $A=-1$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $m\in R$, έτσι ώστε η εξίσωση $(\eta\mu x-1)(\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x+m)=0$, να έχει 5 λύσεις στο διάστημα $[0,2\pi]$ και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση: **α)** $0\le m<\frac{1}{4}$ **β)** $-\frac{1}{4}<m\le 0$

γ) $0<m<\frac{1}{4}$ **δ)** $-\frac{1}{4}<m<0$

ΑΣΚΗΣΗ 5. Να βρείτε το άθροισμα των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $(3^x-9)^3+(9^x-3)^3=(9^x+3^x-12)^3$ και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση:

α) 3 **β)** $\frac{7}{2}$ **γ)** 4 **δ)** $\frac{9}{2}$

Απαντήσεις: 3) (β) **4)** (α) **5)** (β)

Τάξη: Β΄

Κανονικά πολύγωνα – κύκλος

Σπύρος Γιαννακόπουλος – Παράρτημα **Ε.Μ.Ε. Ηλείας**

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν δείξει ενδιαφέρον για το ποια είδη γεωμετρικών σχημάτων μπορούν να κατασκευαστούν μόνο με τη χρήση του κανόνα (μη βαθμολογημένος χάρακας) και του διαβήτη. Ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα αυτής της κατηγορίας αφορούσε τα κανονικά πολύγωνα. Το ερώτημα είναι: Για ποιες τιμές του ν μπορεί να κατασκευαστεί κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές με τη χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη; Τονίζουμε τη διαφορά μεταξύ της έκφρασης ότι “το κανονικό ν-γωνο υπάρχει” και της έκφρασης ότι αυτό “μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη”. Κανονικά πολύγωνα υπάρχουν για όλες τις τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$, απλά σχηματίζοντας σε έναν κύκλο επίκεντρες γωνίες $\dfrac{360^0}{\nu}$. Αυτό όμως απαιτεί κάτι παραπάνω από ένα κανόνα και ένα διαβήτη· απαιτεί ένα ακριβές μοιρογνωμόνιο. Για παράδειγμα, υπάρχουν κανονικά 7-γωνα, 11-γωνα αλλά δεν κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

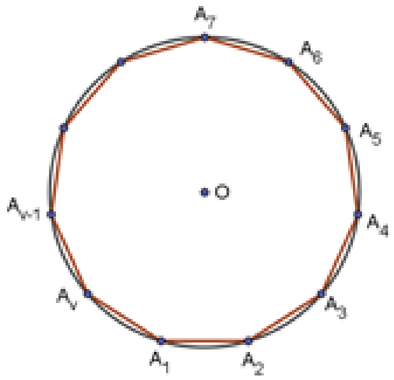
Μετά από περίπου 2000 χρόνια ο Gauss έδωσε απάντηση, ποια κανονικά πολύγωνα μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη. Σύμφωνα με τον Gauss, ένα κανονικό ν-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν ο ν μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\nu = 2^r \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_\kappa$ όπου $r \in \mathbb{N}$ και οι $p_1, p_2, \cdots, p_\kappa$ είναι αριθμοί της μορφής $2^{2^\rho}+1$ με $\rho \in \mathbb{N}$. (Οι αριθμοί της μορφής $2^{2^\rho}+1$ λέγονται πρώτοι του Fermat).

Θέμα 1ο Θεωρούμε ένα πολύγωνο με ν το πλήθος πλευρές και ίσες γωνίες, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Δείξτε ότι:

i. Αν το ν είναι άρτιος, τότε οι πλευρές του ν-γώνου είναι ανά δύο ίσες.

ii. Αν το ν είναι περιττός τότε το ν-γωνο είναι κανονικό.

Λύση: Ας θεωρήσουμε το πολύγωνο $A_1A_2 \cdots A_{\nu-1}A_\nu$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).



$\hat{A}_2 = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{A_1A_\nu A_3} = \dfrac{1}{2}\left(360^0 - \overset{\frown}{A_1A_2} - \overset{\frown}{A_2A_3}\right)$.

$\hat{A}_3 = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{A_2A_1A_4} = \dfrac{1}{2}\left(360^0 - \overset{\frown}{A_2A_3} - \overset{\frown}{A_3A_4}\right)$.

Έχουμε $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 \Leftrightarrow \overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_3A_4} \Leftrightarrow$

$A_1A_2 = A_3A_4$. Όμοια $\hat{A}_4 = \hat{A}_5 \Leftrightarrow A_3A_4 = A_5A_6$

Άρα με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = \ldots$ (1) και $A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_7 = \ldots$ (2).

i. Αν $\nu = 2\rho$ με $\rho \geq 2$ θετικό ακέραιο, τότε

$(1) \Rightarrow A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = \ldots = A_{\nu-1}A_\nu$ και

$(2) \Rightarrow A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_7 = \ldots = A_\nu A_1$.

ii. Αν $\nu = 2\rho+1$ με $\rho \in \mathbb{N}^*$, τότε

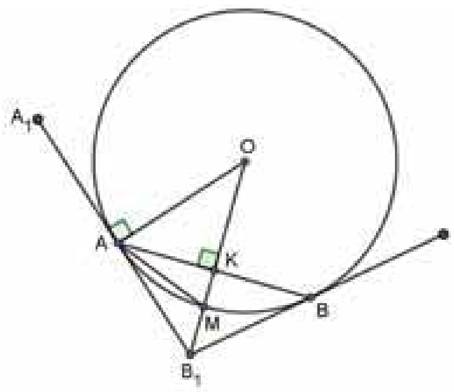
$(1) \Rightarrow A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = \ldots = A_\nu A_1$ και

$(2) \Rightarrow A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_7 = \ldots = A_{\nu-1}A_\nu = A_1A_2$. Άρα όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες και δεδομένου ότι οι γωνίες του είναι επίσης ίσες, το ν-γωνο είναι κανονικό.

Θέμα 2^o Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε εγγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο, κανονικό 2ν-γωνο και περιγεγραμμένο στο κύκλο αυτό κανονικό ν-γωνο. Αν συμβολίσουμε $E_\nu, E_{2\nu}$ και E'_ν το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου, 2ν-γώνου και του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου αντίστοιχα, δείξτε ότι ισχύει:

$$E_{2\nu} = E_\nu . E'_\nu .$$

Λύση: Έστω $AB = \lambda_\nu$, η πλευρά του εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R) κανονικού ν-γώνου και Μ το μέσο του μικρότερου τόξου $\overset{\frown}{AB}$, τότε $AM = \lambda_{2\nu}$ η πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού 2ν-γώνου στον κύκλο αυτό.



Οι εφαπτομένες του κύκλου στις κορυφές του κανονικού ν-γώνου ορίζουν κανονικό περιγεγραμμέ-

νο ν-γωνο στον κύκλο αυτό.
Έτσι είναι $A_1B_1=\lambda'_\nu$, η πλευρά του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου.
Είναι $OA\perp A_1B_1$ και $OB_1\perp AB\Rightarrow OK=\alpha_\nu$, το απόστημα του εγγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου. Είναι $E_\nu=\frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu=\frac{1}{2}\nu\lambda_\nu\alpha_\nu$ και

$$E_{2\nu}=2\nu(OAM)=2\nu\frac{1}{2}OM\cdot AK=\nu R\frac{\lambda_\nu}{2}\Leftrightarrow$$

$E_{2\nu}=\frac{1}{2}\nu R\lambda_\nu$ (1). Η ακτίνα R του κύκλου είναι απόστημα για το περιγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο. Το εγγεγραμμένο και το περιγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο στον κύκλο (O,R) επειδή έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια. Έτσι έχουμε:

$$\frac{E'_\nu}{E_\nu}=\left(\frac{R}{\alpha_\nu}\right)^2\Leftrightarrow E'_\nu=\frac{R^2}{\alpha_\nu^2}E_\nu\Leftrightarrow$$

$$E_\nu E'_\nu=\frac{R^2}{\alpha_\nu^2}E_\nu^2\Leftrightarrow E_\nu E'_\nu=\frac{R^2}{\alpha_\nu^2}\frac{1}{4}\nu^2\lambda_\nu^2\alpha_\nu^2=$$

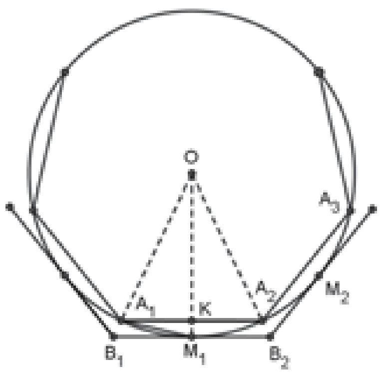
$$\left(\frac{1}{2}\nu R\lambda_\nu\right)^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}E_\nu E_{\nu'}=E_{2\nu}^2.$$

Θέμα 3ο Έστω λ_ν η πλευρά κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R).

i. Να βρείτε ως συνάρτηση της λ_ν την πλευρά $\lambda_{2\nu}$ του εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R) κανονικού 2ν-γώνου.

ii. Να βρείτε την πλευρά λ'_ν του περιγεγραμμένου κανονικού ν-γώνου στον κύκλο (O,R) ως συνάρτηση της λ_ν.

Λύση: Έστω $A_1A_2...A_\nu$ κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R) και $M_1,M_2,...,M_\nu$ τα μέσα των μικρότερων τόξων $\overset{\frown}{A_1A_2},\overset{\frown}{A_2A_3},...,$ $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$ αντίστοιχα.



i. Είναι $OM_1\perp A_1A_2, OK=\alpha_\nu$ το απόστημα του εγγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου και $\lambda_{2\nu}=A_1M_1$.
Άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο KA_1M_1 έχουμε: $A_1M_1^2=A_1K^2+KM_1^2\Leftrightarrow$

$$\lambda_{2\nu}^2=\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2+(R-\alpha_\nu)^2\Leftrightarrow\lambda_{2\nu}^2=R^2-2R\alpha_\nu+$$

$\alpha_\nu^2+\frac{\lambda_\nu^2}{4}$ (1). Είναι $\alpha_\nu^2+\frac{\lambda_\nu^2}{4}=R^2$ (2), οπότε

$(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\lambda_{2\nu}^2=2R^2-2R\alpha_\nu$ (3). Από την (2) παίρνουμε $\alpha_\nu=\frac{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}{2}$ (4).

Άρα $(3)\overset{(4)}{\Rightarrow}\lambda_{2\nu}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$ (Τύπος του Αρχιμήδη).

ii. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία $M_1,M_2,...,M_\nu$ ορίζουν κανονικό ν-γωνο (γιατί;) περιγεγραμμένο στον κύκλο (O,R).

Είναι $\lambda_\nu=A_1A_2$, $\lambda'_\nu=B_1B_2$ και το απόστημα $\alpha'_\nu=OM_1=R$ του κανονικού περιγεγραμμένου ν-γώνου στον κύκλο (O,R).

Είναι $\frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu}=\frac{\alpha'_\nu}{\alpha_\nu}\Leftrightarrow\frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu}=\frac{R}{\alpha_\nu}\Leftrightarrow\lambda'_\nu=\frac{R\cdot\lambda_\nu}{\alpha_\nu}\overset{(4)}{\Leftrightarrow}$

$$\lambda'_\nu=\frac{2R\cdot\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}.$$

Θέμα 4ο Έστω ένας κύκλος (O,R).

α. Θεωρούμε κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R) με 35 διαγωνίους.

Να υπολογίσετε την πλευρά λ_ν και το απόστημα α_ν του κανονικού ν-γώνου ως συνάρτηση του R.

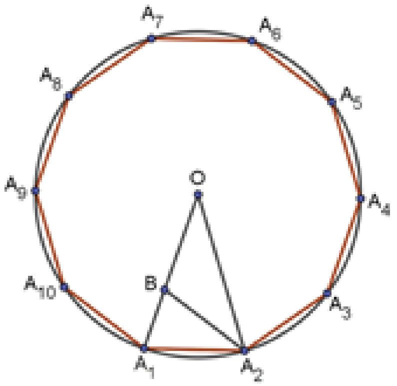
β. Θεωρούμε δύο κάθετες διαμέτρους $AB,\Gamma\Delta$ του κύκλου (O,R). Έστω P το μέσο της ακτίνας OA. Με κέντρο το σημείο P και ακτίνα PΓ γράφουμε κύκλο που τέμνει την ακτίνα OB στο σημείο K. Δείξτε ότι τα τμήματα KO και KΓ είναι αντίστοιχα πλευρά κανονικού δεκαγώνου και πενταγώνου που εγγράφονται στον κύκλο (O,R).

Λύση: α. Αν επιλέξουμε μία κορυφή του κανονικού ν-γώνου, για να φτιάξουμε τις διαγωνίους του από την κορυφή αυτή θα πρέπει να την ενώσουμε με τις $\nu-3$ υπόλοιπες κορυφές. Έτσι από κάθε κορυφή φτιάχνουμε $\nu(\nu-3)$ διαγωνίους. Η κάθε μία από τις διαγωνίους που φτιάξαμε έχει υπολογιστεί δύο φορές. Άρα το διαφορετικό πλήθος των διαγωνίων του κανονικού ν-γώνου είναι $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$.

Πρέπει $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}=35 \Leftrightarrow \nu^2-3\nu-70=0$.

Από την εξίσωση βρίσκουμε $\nu=10$. Άρα έχουμε κανονικό δεκάγωνο. Έστω $A_1A_2\cdots A_9A_{10}$ το κανονικό δεκάγωνο που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R). Η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου είναι $A_1A_2=\lambda_{10}$.

$$A_1\hat{O}A_2=\frac{360^0}{10}=36^0 \Rightarrow O\hat{A}_1A_2=O\hat{A}_2A_1=72^0.$$



Έστω A_2B η διχοτόμος της γωνίας $O\hat{A}_2A_1$, τότε $O\hat{A}_2B=36^0$. Άρα τα τρίγωνα BOA_2 και A_2A_1B είναι ισοσκελή με $BO=BA_2=A_1A_2=\lambda_{10}$. Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο A_2A_1O έχουμε: $\dfrac{A_2A_1}{A_2O}=\dfrac{BA_1}{BO}\Leftrightarrow\dfrac{\lambda_{10}}{R}=\dfrac{R-\lambda_{10}}{\lambda_{10}}\Leftrightarrow$

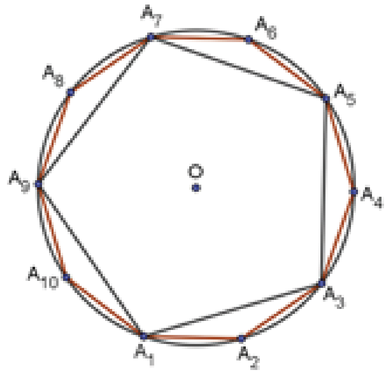
$\lambda_{10}^2+R\cdot\lambda_{10}-R^2=0$. Από τη λύση της εξίσωσης βρίσκουμε $\lambda_{10}=\dfrac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Έχουμε $\alpha_{10}^2+\dfrac{\lambda_{10}^2}{4}=R^2\Leftrightarrow\alpha_{10}=\dfrac{\sqrt{4R^2-\lambda_{10}^2}}{2}\Leftrightarrow$.

$$\alpha_{10}=\frac{\sqrt{4R^2-\frac{1}{4}R^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$$

$$\alpha_{10}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

β. Από το κανονικό δεκάγωνο έχουμε



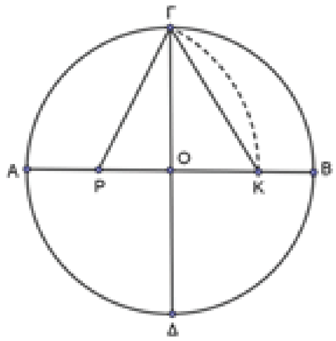
το $A_1A_3A_5A_7A_9$, που είναι κανονικό πεντάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R).

Είναι $\lambda_{2\nu}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$, οπότε

$$\lambda_{10}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-\lambda_5^2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right)=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-\lambda_5^2}}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$$

$$\lambda_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$



Έχουμε $PK=P\Gamma=\sqrt{R^2+\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}R\sqrt{5}$.

$$OK=PK-PO=\frac{1}{2}R\sqrt{5}-\frac{R}{2}\Leftrightarrow OK=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Με βάση το α) έχουμε $OK=\lambda_{10}$.

$$K\Gamma=\sqrt{O\Gamma^2+OK^2}=\sqrt{R^2+\frac{1}{4}R^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$K\Gamma=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\Leftrightarrow K\Gamma=\lambda_5.$$

Παρατήρηση: $\lambda_5^2=R^2+\lambda_{10}^2$.

Θέμα 5^o Θεωρούμε κανονικό πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{B}E, E\hat{\Gamma}\Delta$ τέμνουν τις πλευρές AE και ΔE του κανονικού πενταγώνου στα σημεία Λ, K αντίστοιχα.

α. Δείξτε ότι: i. $K\Lambda//A\Delta$.

ii. Το τετράπλευρο $B\Gamma K\Lambda$ είναι ορθογώνιο.

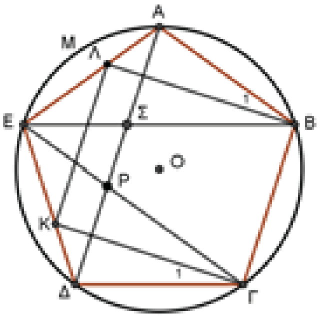
β. Αν η πλευρά του κανονικού πενταγώνου έχει μήκος 1, θέτουμε $EB=x$. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{\Lambda E}{\Lambda A}$.

Λύση: α. i. Η γωνία του κανονικού πενταγώνου είναι $\varphi_5=180^0-\dfrac{360^0}{5}=180^0-72^0\Leftrightarrow\varphi_5=108^0$

και η κεντρική του γωνία είναι $\omega_5=\dfrac{360^0}{5}=72^0$.

$$A\hat{B}E=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AME}=\frac{1}{2}\cdot72^0=36^0\Rightarrow\hat{B}_1=18^0.$$

Όμοια $\hat{\Gamma}_1=18^0$.



Τα τρίγωνα $AB\Lambda, \Gamma\Delta K$ είναι ίσα γιατί έχουν:

$AB=\Gamma\Delta, \hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1=18^0$ και $B\hat{A}\Lambda=\Gamma\hat{\Delta}K=108^0$ (κριτήριο $\Gamma-\Pi-\Gamma$). Άρα $A\Lambda=\Delta K \Rightarrow$ $E\Lambda=EK$. Επειδή $\frac{EK}{K\Delta}=\frac{E\Lambda}{\Lambda A} \Rightarrow K\Lambda//A\Delta$ (Για την παραλληλία θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι $E\hat{\Lambda}K=E\hat{A}\Delta=36^0$).

ii. Αφού $AB=\Gamma\Delta \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow B\Gamma//A\Delta$. Όμοια $AB//E\Gamma$ και $EB//\Delta\Gamma$. Το τετράπλευρο $AB\Gamma P$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $AB=B\Gamma$, είναι ρόμβος. Όμοια και το τετράπλευρο $\Sigma B\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. Άρα τα τρίγωνα $BA\Sigma, \Gamma\Delta P$ είναι ισοσκελή με $\Gamma P=\Gamma\Delta=B\Sigma=AB$.

Επειδή η ΓK είναι διχοτόμος της γωνίας $P\hat{\Gamma}\Delta$ θα είναι $\Gamma K\perp A\Delta \overset{(i)}{\Rightarrow} \Gamma K\perp K\Lambda$ και $\Gamma K\perp B\Gamma$, αφού $K\Lambda//A\Delta \Rightarrow K\Lambda//B\Gamma$. Όμοια $B\Lambda\perp K\Lambda$. Άρα το τετράπλευρο $B\Gamma K\Lambda$ είναι ορθογώνιο.

β. Έχουμε $EB=x$ και $\Sigma B=AB=1$, άρα $E\Sigma=x-1$. Τα τρίγωνα $AE\Sigma, AEB$ είναι όμοια γιατί έχουν κοινή τη γωνία $A\hat{E}B$ και $E\hat{A}\Sigma=A\hat{B}E=36^0$. Άρα $\frac{E\Sigma}{EA}=\frac{EA}{EB} \Leftrightarrow x-1=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2-x-1=0$. Από τη λύση της εξίσωσης βρίσκουμε $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο AEB έχουμε $\frac{\Lambda E}{\Lambda A}=\frac{EB}{AB} \Leftrightarrow \frac{\Lambda E}{\Lambda A}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Σχόλιο: Ο αριθμός $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ συμβολίζεται διεθνώς με φ. Ο συμβολισμός προέρχεται από το όνομα του αρχαίου γλύπτη Φειδία.
(el.wikipedia.org/wiki/Χρυσή τομή)

Θέμα 6ο **Θεωρούμε κανονικό δωδεκάγωνο $A_1A_2\cdots A_{12}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Φέρουμε $A_1B\perp OA_2$ (Το Β είναι σημείο του OA_2).**

α. Αν E_{12} το εμβαδόν του κανονικού δωδεκαγώνου, δείξτε ότι η $\sqrt{E_{12}}$ είναι το μήκος της πλευράς ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R).

β. Με πλευρά την OB κατασκευάζουμε τετράγωνο $OB\Gamma\Delta$ στο ημιεπίπεδο που δεν περιέχει την κορυφή A_1. Επίσης κατασκευάζουμε τον κύκλο με διάμετρο την OA_1.

i. Αν λ_{12} η πλευρά του κανονικού δωδεκαγώνου, να δείξετε ότι $\lambda_{12}=\alpha_4\left(\sqrt{3}-1\right)$, όπου α_4 το απόστημα του τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R).

ii. Ονομάζουμε E_1 το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου OA_1 και E_2 το εμβαδόν του τετραγώνου $OB\Gamma\Delta$. Αν E είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του κύκλου (O,R) που δεν περιέχεται στο κανονικό δωδεκάγωνο, να δείξτε ότι $E=4(E_1-E_2)$.

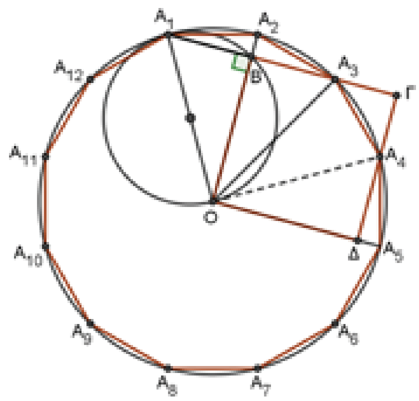
Λύση: Η κεντρική γωνία του κανονικού δωδεκαγώνου είναι $\omega_{12}=\frac{360^0}{12}=30^0$.

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA_1 έχουμε

$A_1B=\frac{OA_1}{2} \Leftrightarrow A_1B=\frac{R}{2}$, αφού $A_1\hat{O}B=30^0$.

$E_{12}=12(OA_1A_2)=12\cdot\frac{1}{2}OA_2\cdot A_1B=6R\cdot\frac{R}{2} \Leftrightarrow$

$E_{12}=3R^2 \Leftrightarrow \sqrt{E_{12}}=R\sqrt{3}$, που είναι το μήκος της πλευράς ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R).



β. i. Είναι $A_1B=\frac{R}{2}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA_1 έχουμε:

$$OB=\sqrt{OA_1^2-A_1B^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}} \Leftrightarrow$$

$OB=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ (Διαφορετικά: Το τρίγωνο OA_1A_3 είναι ισόπλευρο και το OB είναι ύψος του, οπότε $OB=\frac{R\sqrt{3}}{2}$). Η ευθεία A_1B διέρχεται από την κορυφή A_3 αφού το τρίγωνο OA_1A_3 είναι ισόπλευρο και $A_1A_3 \perp OA_2$.

$B\hat{O}\Delta=90^0 \Leftrightarrow 30^0+A_3\hat{O}\Delta=90^0 \Leftrightarrow A_3\hat{O}\Delta=60^0$

Άρα η $O\Delta$ διέρχεται από την κορυφή A_5.

Η γωνία του κανονικού δωδεκαγώνου είναι

$\varphi_{12}=180^0-\frac{360^0}{12}=150^0 \Rightarrow O\hat{A_1}A_2=75^0$.

Το τρίγωνο A_1OA_3 είναι ισόπλευρο , οπότε

$A_2\hat{A_1}A_3=A_2\hat{A_3}A_1=75^0-60^0=15^0$.

Αν από την κορυφή A_4 φέρουμε $A_4\Delta_1 \perp OA_5$, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα BOA_3, Δ_1OA_4 είναι ίσα, αφού έχουν $OA_3=OA_4$ και $B\hat{O}A_3=\Delta_1\hat{O}A_4=30^0$, οπότε $O\Delta_1=OB$. Άρα τα σημεία Δ, Δ_1 ταυτίζονται, οπότε η $\Gamma\Delta$ διέρχεται από την κορυφή A_4.

$B\hat{A_3}A_4=135^0 \Rightarrow \Gamma\hat{A_3}A_4=45^0$. Συνεπώς το ορθογώνιο τρίγωνο ΓA_3A_4 είναι ισοσκελές και από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\lambda_{12}^2=2A_3\Gamma^2 \Leftrightarrow A_3\Gamma^2=\frac{\lambda_{12}^2}{2} \Leftrightarrow A_3\Gamma=\frac{\lambda_{12}\sqrt{2}}{2}$.

Έχουμε $B\Gamma=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BA_3+A_3\Gamma=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{R}{2}+\frac{\lambda_{12}\sqrt{2}}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{12}\sqrt{2}=R\left(\sqrt{3}-1\right) \Leftrightarrow$

$\lambda_{12}=\frac{R\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \Leftrightarrow \lambda_{12}=\alpha_4\left(\sqrt{3}-1\right)$.

ii. Είναι $E=\pi R^2-E_{12}=\pi R^2-3R^2 \Leftrightarrow$ $E=R^2(\pi-3)$.

$E_1-E_2=\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2-OB^2=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow$

$E_1-E_2=\frac{1}{4}R^2(\pi-3)=\frac{1}{4}E \Leftrightarrow E=4(E_1-E_2)$.

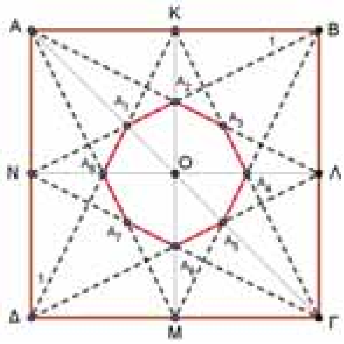
Παρατήρηση: Η κατασκευή του τετραγώνου $OB\Gamma\Delta$ μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε την πλευρά του κανονικού δωδεκαγώνου.

Θέμα 7^o Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α και τα σημεία K, Λ, M, N μέσα των πλευρών του AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA αντίστοιχα. Ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου με τις απέναντι κορυφές του. Δείξτε ότι:

i. Ορίζεται κανονικό οκτάγωνο.

ii. Να υπολογίσετε την πλευρά του κανονικού οκταγώνου του ερωτήματος i, από την πλευρά α του τετραγώνου.

Λύση: i. Ορίζεται το οκτάγωνο $A_1A_2\cdots A_7A_8$. Έστω O το κέντρο του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Το τετράπλευρο $AB\Lambda N$ είναι ορθογώνιο, οπότε η ΛN είναι μεσοκάθετος των πλευρών $A\Delta, B\Gamma$ του τετραγώνου. Λόγω των κέντρων των ορθογωνίων $AKM\Delta, KB\Gamma M$ είναι $A_8A=A_8\Delta$ και $A_4B=A_4\Gamma$. Άρα τα σημεία A_8, A_4 βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο των $A\Delta, B\Gamma$ που είναι η $N\Lambda$. Όμοια τα σημεία A_2, A_6 είναι πάνω στην KM. Τα τετράπλευρα $KBM\Delta$ και $AK\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το τετράπλευρο KA_8MA_4 είναι ρόμβος με κέντρο O. Τα σημεία A_8, A_4 είναι μέσα των διαγωνίων AM και ΓK αντίστοιχα. Έτσι στα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta K$ και $BK\Gamma$ έχουμε $NA_8=\Lambda A_4=\frac{\alpha}{4}$.

Συνεπώς τα σημεία A_4, A_8 είναι συμμετρικά ως προς το σημείο O. Όμοια και τα σημεία A_2, A_6 είναι συμμετρικά ως προς το σημείο O. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta K$ και ABN έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες, άρα είναι ίσα, οπότε $\hat{\Delta}_1=\hat{B}_1$. Επίσης τα τρίγωνα $N\Delta A_1$ και KBA_1 είναι ίσα, γιατί έχουν $\Delta N=BK$

$\hat{\Delta}_1=\hat{B}_1$ και $\Delta\hat{N}A_1=90^0+\hat{B}_1=90^0+\hat{\Delta}_1=B\hat{K}A_1$ (εξωτερικές γωνίες των τριγώνων ABN και $A\Delta K$). Άρα $A_1N=A_1K$, οπότε το A_1 βρίσκεται στη μεσοκάθετο του NK, που είναι η $A\Gamma$. Όμοια το A_5 είναι πάνω στην $A\Gamma$.

Το σημείο A_1 είναι βαρύκεντρο στο τρίγωνο $AN\Lambda$, οπότε $OA_1=\frac{1}{3}OA$. Όμοια το σημείο A_5

είναι βαρύκεντρο στο τρίγωνο $\Gamma N \Lambda$, οπότε $OA_5 = \frac{1}{3}O\Gamma$ και δεδομένου ότι $OA = O\Gamma$, θα έχουμε $OA_1 = OA_5$, δηλαδή τα σημεία A_1, A_5 είναι συμμετρικά ως προς το O. Όμοια τα σημεία A_3, A_7 είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

Άρα οι κορυφές του οκταγώνου είναι σημεία του κύκλου (O,r) με $r = OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_8$.

Έχουμε $A_1\hat{O}A_2 = A_2\hat{O}A_3 = \cdots = A_7\hat{O}A_8 = 45^0$.

Δηλαδή το O είναι κέντρο κανονικού οκταγώνου. Συνεπώς το $A_1A_2 \cdots A_8$ είναι κανονικό οκτάγωνο.

ii. Έστω x η πλευρά του κανονικού οκταγώνου $A_1A_2 \cdots A_7A_8$. Στο τρίγωνο AMA_5 έχουμε το A_8 μέσο του AM και $A_8A_1 // MA_5$. Άρα

$$A_8A_1 = \frac{MA_5}{2} \Leftrightarrow MA_5 = 2x \Rightarrow MA_4 = 3x.$$

Συνεπώς $BM = 6x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha^2} = 6x \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha\sqrt{5}}{2} = 6x \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{5}}{12}.$$

Θέμα 8^o Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του.

α. Θεωρούμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο $(\hat{A} = 90^0)$, με ΑΒ<ΑΓ. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Κ και την πλευρά ΑΓ στο σημείο Λ.

i. Αν στον κύκλο $(A, A\Delta)$ θεωρήσουμε εγγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο με πλευρά $\lambda_\nu = \Delta\Lambda$ και εγγεγραμμένο κανονικό μ-γωνο με πλευρά $\lambda_\mu = \Delta K$, να δείξετε ότι: $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}$

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχεται στο κύκλο $(A, A\Delta)$, ως παράσταση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου και να δείξετε ότι:

$$\beta + \gamma > \sqrt{\frac{(\pi+4)\beta\gamma}{2}}.$$

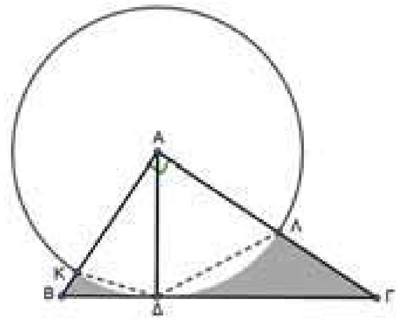
β. Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) με $AB = \lambda_6$, πλευρά κανονικού εξαγώνου, $A\Gamma = \lambda_3$, πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου και ΑΕ διάμετρος του κύκλου. Αν E_6 είναι το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο (Ο,R), δείξτε ότι

$$(A\Delta E) = \frac{1}{6}E_6.$$

Λύση α. i. Έχουμε τις κεντρικές γωνίες $\Delta\hat{A}\Lambda = \omega_\nu = \frac{360^0}{\nu}$ και $K\hat{A}\Delta = \omega_\mu = \frac{360^0}{\mu}$.

Όμως $\omega_\nu + \omega_\mu = 90^0 \Leftrightarrow \frac{360^0}{\nu} + \frac{360^0}{\mu} = 90^0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}.$$



ii. Ισχύει $A\Delta.B\Gamma = AB.A\Gamma \Leftrightarrow \alpha A\Delta = \beta\gamma \Leftrightarrow$

$A\Delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\gamma$ και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $A\widehat{K\Delta\Lambda}$ είναι $\left(A\widehat{K\Delta\Lambda}\right) = \frac{\pi A\Delta^2 90}{360} = \frac{\pi\beta^2\gamma^2}{4\alpha^2}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = (AB\Gamma) - \left(A\widehat{K\Delta\Lambda}\right) = \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{\pi\beta^2\gamma^2}{4\alpha^2} =$$

$$\frac{2\alpha^2\beta\gamma - \pi\beta^2\gamma^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta\gamma(2\alpha^2 - \pi\beta\gamma)}{4\alpha^2}.$$

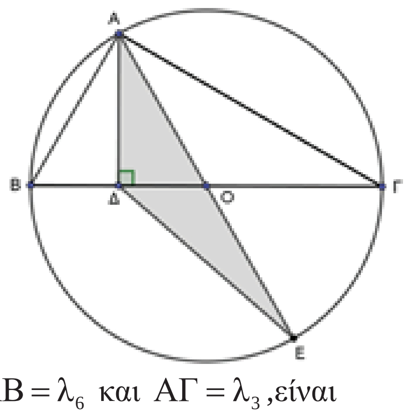
Από τον παραπάνω τύπο του εμβαδού πρέπει

$$2\alpha^2 - \pi\beta\gamma > 0 \Leftrightarrow 2\left(\beta^2 + \gamma^2\right) > \pi\beta\gamma \Leftrightarrow 2\left(\beta^2 + \gamma^2\right) +$$

$$4\beta\gamma > \pi\beta\gamma + 4\beta\gamma \Leftrightarrow 2(\beta+\gamma)^2 > (\pi+4)\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$(\beta+\gamma)^2 > \frac{(\pi+4)\beta\gamma}{2} \Leftrightarrow \beta + \gamma > \sqrt{\frac{(\pi+4)\beta\gamma}{2}}.$$

β.



Επειδή $AB = \lambda_6$ και $A\Gamma = \lambda_3$, είναι

$\hat{AOB}=60^0$ και $\hat{AOΓ}=120^0$. Άρα

$\hat{AOB}+\hat{AOΓ}=180^0$, συνεπώς η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου (O,R), οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στη κορυφή Α.

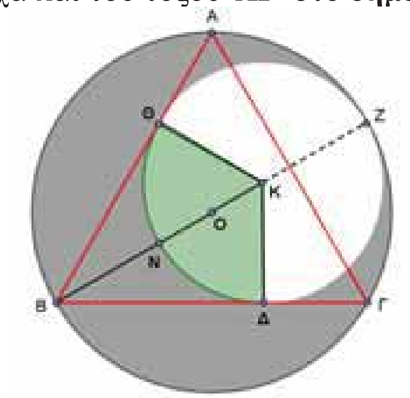
Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Αφού το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΟΑΒ, θα είναι και διάμεσος. Άρα $(OAB)=2(ΔOA)$ (1).

$E_6=6(OAB)\Leftrightarrow(OAB)=\frac{1}{6}E_6$ (2).

Το ΔΟ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΕ, οπότε $(AΔE)=2(ΔOA)\overset{(1)}{=}(OAB)\overset{(2)}{=}\frac{1}{6}E_6$.

Σημείωση: *Η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Πράγματι: Αν πάρουμε ως βάσεις των τριγώνων τα τμήματα που η διάμεσος χωρίσει την πλευρά, τότε τα τρίγωνα αυτά θα έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος που αντιστοιχεί στις βάσεις αυτές.*

Θέμα 9^o Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και τον κύκλο (K,r) ο οποίος εφάπτεται των πλευρών $AB,BΓ$ του τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία $Θ,Δ$ αντίστοιχα και του τόξου $\overset{\frown}{AΓ}$ στο σημείο Ζ.



i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της ακτίνας r.
ii. Έστω Ε το εμβαδόν του γραμοσκιασμένου χωρίου του κύκλου (O,R). Να δείξετε ότι $E=\frac{15}{4}(K\widehat{ΘΝΔ})$.

Λύση: Επειδή οι κύκλοι $(O,R),(K,r)$ εφάπτονται εσωτερικά, έχουμε $OK=R-r$.

i. Η ευθεία ΒΚ είναι διακεντρική του σημείου Β, οπότε διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}$. Επίσης η ΟΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.Άρα τα σημεία Β,Ο,Κ είναι συνευθειακά. Είναι $K\hat{B}Δ=30^0$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΚΒ έχουμε

$KΔ=\frac{BK}{2}\Leftrightarrow KΔ=\frac{BO+OK}{2}\Leftrightarrow$

$r=\frac{R+R-r}{2}\Leftrightarrow 3r=2R\Leftrightarrow R=\frac{3}{2}r$ (1). Η πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\lambda_3=R\sqrt{3}$, οπότε

$(ABΓ)=\frac{\lambda_3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}(ABΓ)=\frac{27r^2\sqrt{3}}{16}$.

ii. Έστω E_1,E_2 τα εμβαδά των κύκλων (O,R) και (K,r) αντίστοιχα.

Είναι $E=E_1-E_2=\pi R^2-\pi r^2=\frac{9}{4}\pi r^2-\pi r^2\Leftrightarrow$

$E=\frac{5}{4}\pi r^2$. Αφού $\hat{B}=60^0\Rightarrow Δ\hat{K}Θ=120^0$. Άρα

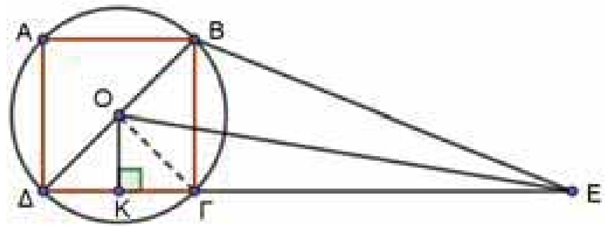
$(K\widehat{ΔΝΘ})=\frac{\pi r^2 120}{360}=\frac{\pi r^2}{3}$.

$\frac{E}{(K\widehat{ΔΝΘ})}=\frac{15}{4}\Leftrightarrow E=\frac{15}{4}(K\widehat{ΔΝΘ})$.

Θέμα 10^o Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ κατά τμήμα $ΓE=3ΓΔ$.
α. Δείξτε ότι: i. $(OΔE)=(ABΓΔ)$.
ii. Να βρείτε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΔΕ.
β. Να βρείτε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα τμήματα ΒΕ, ΓΕ και του μικρότερου τόξου $\overset{\frown}{BΓ}$.

Λύση: α. i. Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\lambda_4=R\sqrt{2}$.

Το απόστημα του τετραγώνου είναι $OK=\alpha_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $ΔE=4ΔΓ=4R\sqrt{2}$.



$(OΔE)=\frac{1}{2}ΔE\cdot OK=\frac{1}{2}4R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2}=2R^2=\lambda_4^2\Leftrightarrow$

$(ΟΔΕ)=(ΑΒΓΔ)$.

ii. $ΚΕ=ΚΓ+ΓΕ=\dfrac{\lambda_4}{2}+3\lambda_4=\dfrac{7\lambda_4}{2}\Leftrightarrow\ ΚΕ=\dfrac{7R\sqrt{2}}{2}$.

$ΟΕ=\sqrt{ΟΚ^2+ΚΕ^2}=\sqrt{\dfrac{R^2}{2}+\dfrac{49R^2}{2}}=5R$.

$(ΟΔΕ)=2R^2$. Έστω R_1 η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $ΟΔΕ$, τότε

$(ΟΔΕ)=\dfrac{ΟΔ\cdot ΟΕ\cdot ΔΕ}{4R_1}=\dfrac{R\cdot 5R\cdot 4R\sqrt{2}}{4R_1}=$

$2R^2=\dfrac{5R^3\sqrt{2}}{R_1}\Leftrightarrow R_1=\dfrac{5R\sqrt{2}}{2}$. Έστω E_1 το ζητούμενο εμβαδόν, τότε $E_1=\pi R_1^2=\dfrac{25}{2}\pi R^2$.

β. Είναι $ΟΓ\perp ΔΒ$. Έστω τ το κυκλικό τμήμα που ορίζεται από τη χορδή $ΒΓ$ και από το μικρότερο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$. $(\tau)=(Ο\overset{\frown}{ΒΓ})-(ΟΒΓ)=\dfrac{1}{4}\pi R^2-\dfrac{1}{2}R^2$.

$(ΓΒΕ)=\dfrac{1}{2}ΓΕ\cdot ΒΓ=\dfrac{1}{2}3R\sqrt{2}\cdot R\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$(ΓΒΕ)=3R^2$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$E=(ΓΒΕ)-(\tau)=3R^2-\dfrac{1}{4}\pi R^2+\dfrac{1}{2}R^2\Leftrightarrow$

$E=\dfrac{R^2}{4}(14-\pi)$.

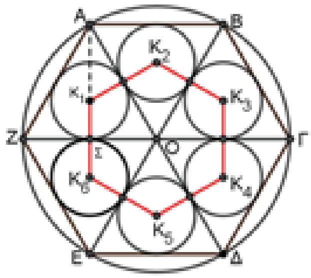
Θέμα 11^o Θεωρούμε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).

i. Να κατασκευάσετε έξι κύκλους εντός του κανονικού εξαγώνου οι οποίοι να εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και ο κάθε ένας να εφάπτεται σε μία πλευρά του κανονικού εξαγώνου.

ii. Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων του ερωτήματος i ορίζουν κανονικό εξάγωνο.

iii. Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των ΑΒΓΔΕΖ και του κανονικού εξαγώνου του ερωτήματος ii αντίστοιχα, να δείξετε ότι $E_1=3E_2$.

Λύση: i. Έστω O το κέντρο του κανονικού εξαγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$. Φέρουμε τις διαγωνίους του $ΑΔ$, $ΒΕ, ΖΓ$ οι οποίες διέρχονται από το O. Σχηματίζονται έξι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή το O. Κατασκευάζουμε τους εγγεγραμμένους κύκλους των παραπάνω ισοπλεύρων τριγώνων με κέντρα $Κ_1,Κ_2,Κ_3,Κ_4,Κ_5,Κ_6$ και το καθένα από τα κέντρα αυτά είναι έγκεντρο, βαρύκεντρο και ορθόκεντρο ταυτόχρονα του αντίστοιχου τριγώνου. Οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στο μέσο των ακτίνων και ο καθένας εφάπτεται σε μία πλευρά του κανονικού εξαγώνου, οπότε είναι οι ζητούμενοι κύκλοι.



ii. Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$ είναι $\lambda_6=R$. Το $ΑΣ$ είναι ύψος και διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου $ΟΑΖ$, οπότε

$$ΑΣ=\frac{\lambda_6\sqrt{3}}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Το $Κ_1$ είναι κέντρο βάρους του τριγώνου $ΟΑΖ$ με

$$Κ_1Σ=\frac{1}{3}ΑΣ=\frac{R\sqrt{3}}{6}$$

Άρα οι κύκλοι του ερωτήματος i είναι ίσοι με ακτίνα $\rho=\dfrac{R\sqrt{3}}{6}$ και $Κ_1Κ_2=Κ_2Κ_3=$

$$Κ_3Κ_4=Κ_4Κ_5=Κ_5Κ_6=Κ_6Κ_1=2\rho=\frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Επίσης οι πλευρές του πολυγώνου $Κ_1Κ_2Κ_3Κ_4Κ_5Κ_6$ είναι μεσοκάθετοι των ακτίνων του κανονικοί εξαγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$. Είναι $Α\hat{Ο}Ζ=60^0$, οπότε $Κ_2\hat{Κ}_1Κ_6=120^0$. Όμοια όλες οι γωνίες του πολυγώνου $Κ_1Κ_2Κ_3Κ_4Κ_5Κ_6$ είναι 120^0 και δεδομένου ότι οι πλευρές του είναι ίσες, το πολύγωνο είναι κανονικό εξάγωνο.

iii. Τα κανονικά εξάγωνα $ΑΒΓΔΕΖ$ και $Κ_1Κ_2Κ_3Κ_4Κ_5Κ_6$, αφού έχουν ίδιο πλήθος πλευρών, είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{E_1}{E_2}=\left(\frac{ΑΒ}{Κ_1Κ_2}\right)^2=\left(\frac{R}{\frac{R\sqrt{3}}{3}}\right)^2=3\Leftrightarrow E_1=3E_2.$$

[Συνεχίζεται στο επόμενο τεύχος]

Σχόλιο: Σχετικά με το εισαγωγικό σημείωμα του άρθρου του προηγούμενου τεύχους που αναφέρεται στα εμβαδά και για την αποφυγή παρανοήσεων, επισημαίνουμε ότι: Η έννοια του εμβαδού ορθογωνίου ως γινομένου των διαστάσεων του, και εξ' αυτού των εμβαδών των υπολοίπων πολυγώνων, δεν υπάρχει στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά (Στοιχεία του Ευκλείδη). Εκεί γίνεται σύγκριση σχημάτων και όχι μέτρησή τους.

Επιτροπή έκδοσης του περιοδικού

Τάξη: Β΄

Κωνικές Τομές

Τσόπελας Γιάννης - Δεδότση Βασιλική Παράρτημα **Ε.Μ.Ε Ηλείας**

Θέμα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2+(\lambda-2)x+(3\lambda-2)y-\lambda=0$$

α) Δείξτε ότι η (1) παριστάνει κύκλο (C) για κάθε πραγματικό αριθμό λ και να βρείτε το κέντρο του Κ ως συνάρτηση του λ.

β) Αν το κέντρο Κ του κύκλου που ορίζει η (1) ανήκει στην ευθεία (ε) : $y=x$

i) Δείξτε ότι ο κύκλος έχει εξίσωση

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

ii) Βρείτε ευθεία (ζ_1) με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$ η οποία τέμνει τον (C) σε δύο σημεία Α και Β ώστε $A\hat{O}B=90^\circ$.

iii) Βρείτε ευθεία (ζ_2) με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$ η οποία τέμνει τον (C) σε δύο σημεία Γ και Δ, ώστε $\Gamma\hat{O}\Delta=45^\circ$.

Λύση α) $A^2+B^2-4\Gamma=(\lambda-2)^2+(3\lambda-2)^2+14\lambda=$ $=10\lambda^2-12\lambda+8>0$ για κάθε $\lambda\in R$ γιατί το $10\lambda^2-12\lambda+8$ έχει $\alpha=10>0$ και $\Delta=-176<0$. Οπότε η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R$. Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{\lambda-2}{2},-\frac{3\lambda-2}{2}\right)$.

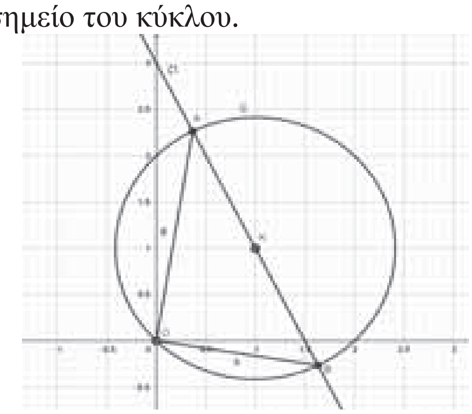
β) Το $K\left(-\frac{\lambda-2}{2},-\frac{3\lambda-2}{2}\right)$ ανήκει στην ευθεία

$$y=x\Leftrightarrow -\frac{\lambda-2}{2}=-\frac{3\lambda-2}{2}\Leftrightarrow \lambda-2=3\lambda-2\Leftrightarrow\lambda=0.$$

i) Για $\lambda=0$ η εξίσωση γίνεται:

$x^2+y^2-2x-2y=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=2$ δηλ. παριστάνει κύκλο κέντρου $K(1,1)$ και $\rho=\sqrt{2}$.

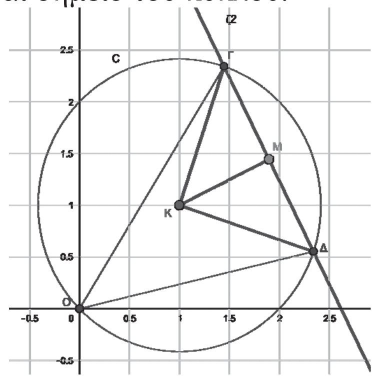
ii) η (ζ_1) έχει εξίσωση $y=-2x+\beta$ και τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β ενώ η αρχή Ο των αξόνων είναι σημείο του κύκλου.



Αφού $A\hat{O}B=90^\circ$ έχουμε ότι η ΑΒ διάμετρος του κύκλου. Το $K(1,1)$ ανήκει στην $(\zeta_1)\Leftrightarrow 1=-2+\beta\Leftrightarrow\beta=3$.

Άρα η ευθεία $(\zeta_1): y=-2x+3$.

iii) η (ζ_2) έχει εξίσωση $y=-2x+\beta$, $\beta>3$ και τέμνει στα Γ, Δ το κύκλο ενώ η αρχή Ο των αξόνων είναι σημείο του κύκλου.



$\Gamma\hat{O}\Delta=45^\circ\Leftrightarrow\Gamma\hat{K}\Delta=90^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΓΚΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $K\Gamma=K\Delta=\sqrt{2}$ και το ύψος από τη κορυφή Κ είναι 1 οπότε:

$$d(K,\zeta_2)=1\Leftrightarrow\frac{|2x_K+y_K-\beta|}{\sqrt{5}}=1\Leftrightarrow$$

$|3-\beta|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\beta=3\pm\sqrt{5}$. Δεκτή μόνο η τιμή $\beta=3+\sqrt{5}$, άρα $y=-2x+3+\sqrt{5}$.

Θέμα 2. Δίνεται η παραβολή (C): $y^2=4x$

α) Βρείτε την εξίσωση της χορδής ΑΒ της παραβολής (C) με $x_A<x_B$, η οποία έχει μέσο το $\Lambda\left(\frac{5}{2},1\right)$ καθώς και τα σημεία Α και Β.

β) Θεωρούμε σημείο $M(x_0,y_0)$ της παραβολής (C) με $-2<y_0<4$.

i) Δείξτε ότι: $(MAB)=-\frac{3y_0^2}{4}+\frac{3y_0}{2}+6$.

ii) Δείξτε ότι: $(MAB)\le\frac{27}{4}$ και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ γίνεται μέγιστο.

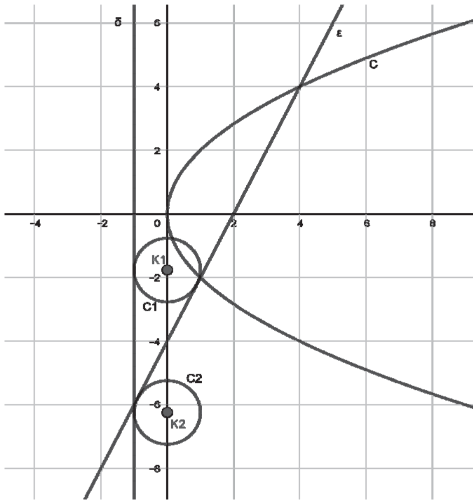
γ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο στον yy΄ που εφάπτεται στη διευθετούσα της παραβολής και στην ευθεία της χορδής ΑΒ.

Λύση: α) Έστω $A(x_A,y_A)$ και $B(x_B,y_B)$ σημεία της παραβολής με $x_A<x_B$.

Η χορδή ΑΒ έχει κλίση

$$\lambda=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_B-y_A}{\frac{y_B^2}{4}-\frac{y_A^2}{4}}=\frac{4}{y_A+y_B}=\frac{2}{y_\Lambda}=2$$

και εξίσωση $y-1=2\left(x-\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow y=2x-4$.



Τα σημεία Α, Β βρίσκονται λύνοντας το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y^2 = 4x \\ 2y = 4x - 8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \text{ και}$$

τελικά προκύπτει $A(1,-2)$ και $B(4,4)$.

β) i) Έχουμε $M\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right)$, άρα

$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{y_0^2}{4} - 1, y_0 + 2\right)$, $\overrightarrow{AB} = (3,6)$ και

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 6\left(\frac{y_0^2}{4} - 1\right) - 3(y_0 + 2) =$$

$$= \frac{3}{2}y_0^2 - 3y_0 - 12 = \frac{3}{2}\left(y_0^2 - 2y_0 - 8\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(y_0 - 4)(y_0 + 2) < 0.$$

$$\text{Άρα } (MAB) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}y_0^2 + 3y_0 + 12\right) = -\frac{3}{4}y_0^2 + \frac{3}{2}y_0 + 6$$

ii) $(MAB) \le \frac{27}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}y_0^2 + \frac{3}{2}y_0 + 6 \le \frac{27}{4} \Leftrightarrow$

$-3y_0^2 + 6y_0 - 3 \le 0 \Leftrightarrow (y_0 - 1)^2 \ge 0$, που ισχύει.

iii) Σύμφωνα με το (ii) ερώτημα η μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου ΜΑΒ είναι $\frac{27}{4}$ και προκύπτει μόνο για $y_o = 1$, δηλαδή για $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

γ) Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο Κ στον yy΄ και την ευθεία $(\delta): x = -1$ κατακόρυφη εφαπτομένη, άρα η ακτίνα του κύκλου ισούται με την απόσταση των παραλλήλων $x = 0$ και $x = 1$ δηλαδή $\rho = 1$. Αν $K(0,\kappa)$ τότε:

$$d(K, AB) = 1 \Leftrightarrow \frac{|-\kappa - 4|}{\sqrt{5}} = 1 \Leftrightarrow \kappa = -4 \pm \sqrt{5}$$

και οι κύκλοι είναι οι: $(C_1): x^2 + \left(y + 4 - \sqrt{5}\right)^2 = 1$

$(C_2): x^2 + \left(y + 4 + \sqrt{5}\right)^2 = 1$

Θέμα 3. Θεωρούμε τη παραβολή $(C): y^2 = 2px, p > 0$ και το σημείο της $A(\mu, 2\mu)$, $\mu > 0$. Η εφαπτόμενη της (C) στο Α σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E = 2$.

α) Δείξτε ότι $\mu = 2$, $p = 4$ και βρείτε την εφαπτομένη της (C) στο Α.

β) Έστω $(\varepsilon): y = x + 2$ η εφαπτόμενη του α) ερωτήματος να δείξετε ότι η (ε) είναι πάνω από την (C) για κάθε $x \ge 0$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.

γ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C_1) με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων που έχει εφαπτόμενη την (ε) καθώς και το σημείο επαφής των $(C_1), (\varepsilon)$ (έστω Β).

δ) Να βρείτε σημεία της παραβολής που ισαπέχουν από τα Α,Β.

Λύση: α) $A \in (C) \Leftrightarrow (2\mu)^2 = 2\rho\mu \Leftrightarrow \rho = 2\mu$. Η εφαπτόμενη της παραβολής (C) στο Α είναι $yy_A = 4(x + x_A) \Leftrightarrow y \cdot 2\mu = 2\mu(x + \mu) \Leftrightarrow y = x + \mu$ και τέμνει τους άξονες στα $Z(-\mu, 0)$ και $H(0, \mu)$. Το τρίγωνο ΟΖΗ έχει εμβαδόν $E = 2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OZ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OH}\right| = 4 \Leftrightarrow \mu^2 = 4 \Leftrightarrow \mu = 2$, οπότε $\rho = 4$ και $A(2,4)$. Η εφαπτόμενη της παραβολής (C) στο Α είναι η ευθεία $y = x + 2$.

β) Έστω $K(x_K, y_K)$ σημείο της (C) και $\Lambda(x_\Lambda, y_\Lambda)$ σημείο της (ε) με $x_K = x_\Lambda \ge 0$. Θα αποδείξουμε ότι $y_\Lambda \ge y_K$ με την ισότητα μόνο για $x = 2$. Πράγματι: $y_\Lambda = x_\Lambda + 2 \ge 2\sqrt{2x_\Lambda} = \sqrt{8x_\Lambda} =$
$= \sqrt{8x_K} = \sqrt{y_K^2} = |y_K| \ge y_K$

γ) Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου ισούται με την απόσταση του $O(0,0)$ από την $(\varepsilon): y = x + 2$.

οπότε : $r = d(O, (\varepsilon)) = \frac{|2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$ και η εξίσωση του κύκλου είναι $(C_1): x^2 + y^2 = 2$.

Λύνοντας το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x + 2 \end{matrix}\right.$ βρίσκουμε το σημείο επαφής $B(-1,1)$.

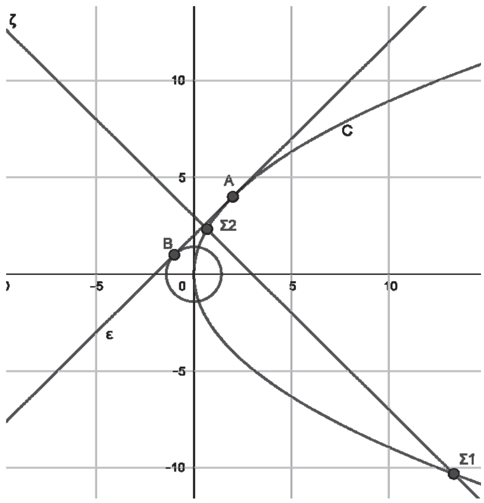
δ) τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία τομής της παραβολής με τη μεσοκάθετο του ΑΒ έστω (ζ).

Το μέσο της (ζ) είναι το $M\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ και ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda_\zeta=-1$ (γιατί $\lambda_\zeta\lambda_\varepsilon=-1$ και $\lambda_\varepsilon=1$).

Άρα $(\zeta): y-\frac{5}{2}=-1(x-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow y=-x+3$

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} y^2=8x \\ y=-x+3 \end{cases}$

Προκύπτουν τα σημεία $\Sigma_1\left(7+2\sqrt{10},-4-2\sqrt{10}\right)$, $\Sigma_2\left(7-2\sqrt{10},-4+2\sqrt{10}\right)$



Θέμα 4. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3\lambda}{5}+1\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{4\lambda}{5}-1\right)^2}=1 \qquad (1)$$

(α) Για ποιες του $\lambda\in R$ η (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x΄x;

(β) Θεωρούμε την έλλειψη (C) που ορίζει η (1) για $\lambda=5$ και την παραβολή (C_1) με εξίσωση $y^2=2x$.

(i) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της (C) στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ με $x_1<0<y_1$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

(ii) Δείξτε ότι η παραβολή (C_1) και η εφαπτομένη (ε) του β(i) ερωτήματος δεν έχουν κοινά σημεία.

(iii) Από τυχαίο σημείο $M_0(x_0,y_0)$ της (ε) φέρουμε τις εφαπτόμενες στη (C_1) με Α, Β τα σημεία επαφής. Δείξτε ότι όταν το M_0 κινείται στην (ε) η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο Κ το οποίο και να βρείτε .

Λύση: α) Πρέπει $\begin{cases} \left(\frac{3\lambda}{5}+1\right)^2>0 \\ \left(\frac{4\lambda}{5}-1\right)^2>0 \\ \left(\frac{3\lambda}{5}+1\right)^2>\left(\frac{4\lambda}{5}-1\right)^2 \end{cases}$

- $\left(\frac{3\lambda}{5}+1\right)^2>0 \Leftrightarrow \frac{3\lambda}{5}+1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq-\frac{5}{3}$
- $\left(\frac{4\lambda}{5}-1\right)^2>0 \Leftrightarrow \frac{4\lambda}{5}-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\frac{5}{4}$
- $\left(\frac{3\lambda}{5}+1\right)^2>\left(\frac{4\lambda}{5}-1\right)^2 \Leftrightarrow \left|\frac{3\lambda+5}{5}\right|>\left|\frac{4\lambda-5}{5}\right| \Leftrightarrow$

$|3\lambda+5|>|4\lambda-5| \Leftrightarrow 9\lambda^2+30\lambda+25>16\lambda^2-40\lambda+25 \Leftrightarrow$
$\lambda^2-10\lambda<0 \Leftrightarrow 0<\lambda<10$

- Τελικά $\lambda\in\left(0,\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4},10\right)$

β) για λ = 5 προκύπτει η έλλειψη $(C): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

i) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο $M_1(x_1,y_1)$ είναι $(\varepsilon): \frac{xx_1}{16}+\frac{yy_1}{9}=1$ και τέμνει τους άξονες στα $K\left(0,\frac{9}{y_1}\right), \Lambda\left(\frac{16}{x_1},0\right)$. Το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ισοσκελές $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OK}\right|=\left|\overrightarrow{O\Lambda}\right| \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{9}{y_1}\right|=\left|\frac{16}{x_1}\right| \Leftrightarrow \frac{9}{y_1}=-\frac{16}{x_1} \Leftrightarrow 9x_1=-16y_1 \qquad (2)$$

$$M(x_1,y_1)\in(C) \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{9}=1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{16y_1^2}{81}+\frac{y_1^2}{9}=1 \overset{y_1>0}{\Leftrightarrow} y_1=\frac{9}{5}$$

και από την (2) $x_1=-\frac{16}{5}$. Τελικά $M_1\left(-\frac{16}{5},\frac{9}{5}\right)$

και $(\varepsilon): y=x+5$.

ii) το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} y^2&=2x \\ y&=x+5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y^2-2y+10&=0 \\ y&=x+5 \end{aligned}\right\} \overset{\Delta=-36<0}{\Leftrightarrow}$$ και είναι

αδύνατο στο R. Άρα η (ε) δεν τέμνει την (C_1).

iii) $M_0(x_0,y_0)$ και $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$

Ευθεία $(M_0A): yy_A=x+x_A \overset{M_0\in M_0A}{\Longleftrightarrow} y_0y_A=x_0+x_A$

Ευθεία $(M_0B): yy_B=x+x_B \overset{M_0\in M_0B}{\Longleftrightarrow} y_0y_B=x_0+x_B$

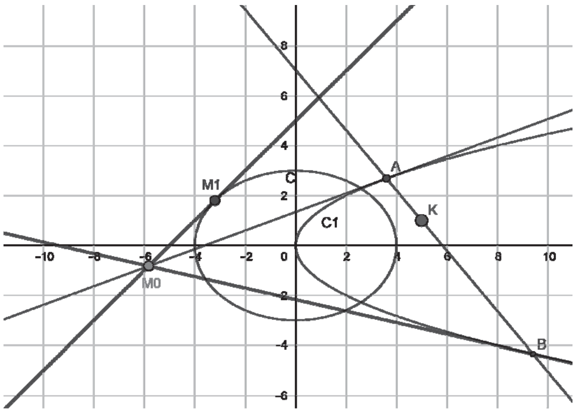
Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $y_0y=x_0+x$ τότε τα σημεία Α, Β την επαληθεύουν οπότε η $y_0y=x_0+x$ είναι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ . Ισχύει ότι:

$M_0(x_0,y_0)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow y_0=x_0+5$

Οπότε η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

$(x_0+5)y=x_0+x\Leftrightarrow x_0(y-1)+5y-x=0\Leftrightarrow$

$\begin{cases} y-1=0 \\ 5y-x=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=1 \\ x=5 \end{cases}$. Οπότε το σημείο από το οποίο διέρχεται η ΑΒ είναι το $K(5,1)$.



Θέμα 5. **Θεωρούμε την έλλειψη $(C):\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, με $\alpha>\beta>0$ και την ευθεία $(\varepsilon): y=2x+8$ η οποία εφάπτεται στην (C) στο σημείο $\Gamma(-1,6)$.**

α) Δείξτε ότι $(C):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{48}=1$.

β) Βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης (C) που διέρχονται από το $M(2,10)$.

γ) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων P του επιπέδου από τα οποία άγονται κάθετες εφαπτόμενες προς την έλλειψη.

Λύση: α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης (C) στο $\Gamma(-1,6)$ είναι $(\varepsilon_\varphi):\frac{(-1)x}{\beta^2}+\frac{6y}{\alpha^2}=1\Leftrightarrow y=\frac{\alpha^2}{6\beta^2}x+\frac{\alpha^2}{6}$. Για να συμπίπτει με την $(\varepsilon): y=2x+8$ θα πρέπει

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\alpha^2}{6\beta^2}=2\\ \frac{\alpha^2}{6}=8\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\beta^2=4\\ \alpha^2=48\end{array}\right\}. \text{ Άρα } (C):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{48}=1$$

β) Από το $M(2,10)$ διέρχονται οι ευθείες $(\zeta_1):\ x=2$ και $(\zeta_\lambda):\ y-10=\lambda(x-2)$. Η έλλειψη (C) έχει κατακόρυφες εφαπτόμενες τις $(\varepsilon_1): x=-2$ και $(\varepsilon_2): x=2$, άρα η $(\zeta_1):\ x=2$ είναι λύση του προβλήματος. Από το σύστημα

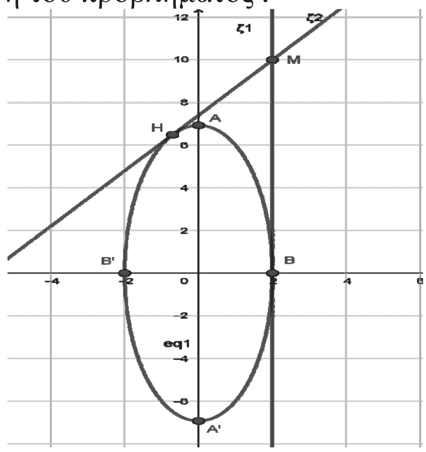
$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{48}=1\\ y=\lambda x+10-2\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}12x^2+y^2=48\\ y=\lambda x+10-2\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}12x^2+(\lambda x+10-2\lambda)^2=48\\ y=\lambda x+10-2\lambda\end{array}\right\} \text{ καταλήγουμε στην (1)}$$

η οποία μετά από πράξεις ισοδύναμα γράφεται:

$(12+\lambda^2)x^2+2\lambda(10-2\lambda)x+4\lambda^2-40\lambda+52=0$

Η (ζ_λ) εφάπτεται της (C) αν και μόνο αν $\Delta=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\lambda=\frac{13}{10}$. Άρα η $(\zeta_2): y=\frac{13}{10}x+\frac{74}{10}$ είναι λύση του προβλήματος .



γ) η έλλειψη (C) έχει κατακόρυφες εφαπτόμενες τις $x=-2$, $x=2$ και οριζόντιες τις $y=4\sqrt{3}$ και $y=-4\sqrt{3}$ οπότε τα σημεία

$P_1(-2,-4\sqrt{3}),P_2(-2,4\sqrt{3}),P_3(2,4\sqrt{3}),P_4(2,-4\sqrt{3})$

ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο.

Αν $(\zeta_3): y-y_o=\lambda(x-x_o)$ εφαπτόμενη της έλλειψης $(C):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{48}=1$, τότε από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{48}=1\\ y=\lambda x+y_o-\lambda x_o\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}12x^2+y^2=48\\ y=\lambda x+y_o-\lambda x_o\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}12x^2+(\lambda x+y_o-\lambda x_o)^2=48\quad(1)\\ y=\lambda x+y_o-\lambda x_o\end{array}\right\} \text{ καταλήγουμε στην}$$

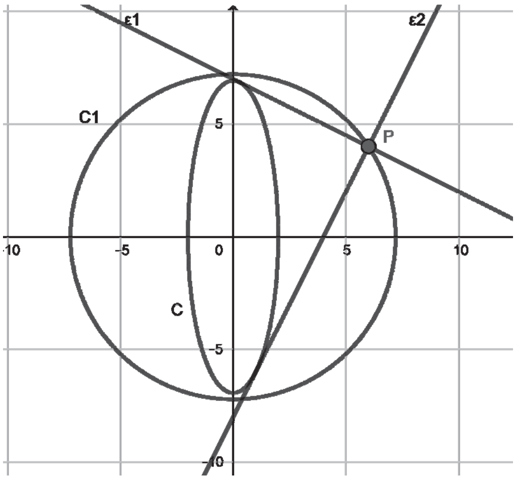
(1) η οποία μετά από πράξεις ισοδύναμα γράφεται

$(12+\lambda^2)x^2+2\lambda(y_0-\lambda x_0)x+\lambda^2x_0^2-2\lambda x_0y_0-48=0$

Η (ζ_3) εφάπτεται της (C) αν και μόνο αν $\Delta=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(4-x_0^2)\lambda^2+2x_0y_0\lambda+48-y_0^2=0\quad(2)$

Οι λύσεις λ_1,λ_2 της (2) έχουν γινόμενο $\lambda_1\lambda_2=\frac{48-y_0^2}{4-x_0^2}$ και οι εφαπτόμενες κάθετες θα είναι αν και μόνο αν $\frac{48-y_0^2}{4-x_0^2}=-1\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=52$.

Άρα ο γ. τόπος των σημείων P είναι ο κύκλος $(C_1): x^2+y^2=52$.



Θέμα 6. Δίνεται η εξίσωση

$$\mathbf{x^2+y^2+(\lambda-1)x+(\lambda-11)y+23-3\lambda=0 \quad (1)}$$

όπου λ ακέραιος και η υπερβολή $(C_1):\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

α) Δείξτε ότι η (1) παριστάνει κύκλο (C) για κάθε ακέραιο αριθμό λ και να βρείτε το κέντρο του K ως συνάρτηση του λ.

β) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2x$ εφάπτεται του κύκλου (1):

i) Δείξτε ότι ο κύκλος (C) έχει εξίσωση: $(C): x^2+(y-5)^2=5$

ii) Να βρείτε τις διαμέτρους του κύκλου του β)i) ερωτήματος που εφάπτονται της υπερβολής (C_1)

(iii) Να βρείτε ευθείες κάθετες στην $(\zeta): y=-\dfrac{4}{3}x$ που ορίζουν στο κύκλο (C) χορδή ΑΒ μήκους 4.

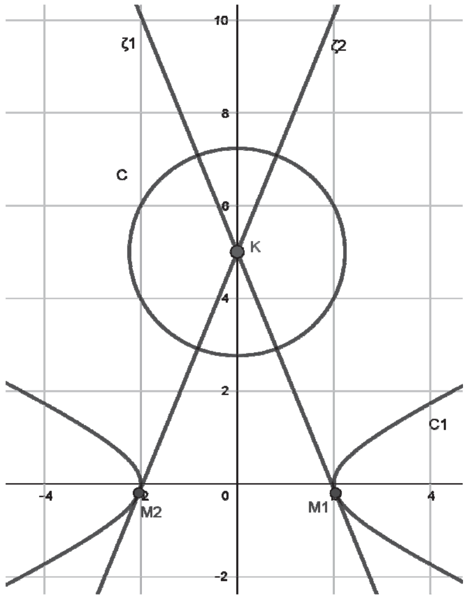
Λύση α) $A^2+B^2-4\Gamma=(\lambda-1)^2+(\lambda-11)^2-4(23-3\lambda)=$
$2\lambda^2-12\lambda+30=2(\lambda^2-6\lambda+15)=2(\lambda-3)^2+12>0$
για κάθε $\lambda\in Z$. Οπότε η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in Z$. Το κέντρο του κύκλου είναι
$K\left(\dfrac{1-\lambda}{2},\dfrac{11-\lambda}{2}\right)$, $\lambda\in Z$.

β) i) η ευθεία (ε): $2x-y=0$ εφάπτεται του (C)

$$\Leftrightarrow d(K,(\varepsilon))=\rho\Leftrightarrow \frac{\left|2\dfrac{1-\lambda}{2}-\dfrac{11-\lambda}{2}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2\lambda^2-12\lambda+30}}{2}\Leftrightarrow$$

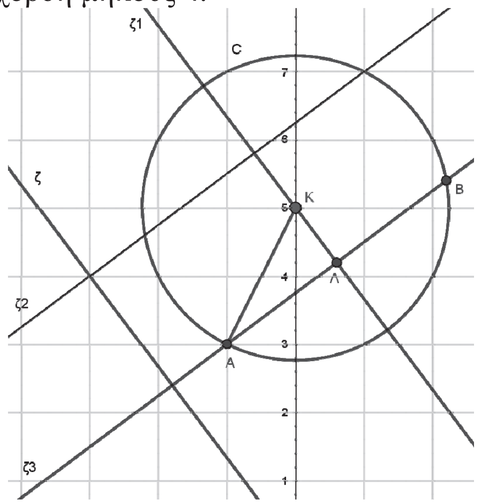
$$\frac{|\lambda+9|}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2\lambda^2-12\lambda+30}}{2}\Leftrightarrow 9\lambda^2-78\lambda+69=0\overset{\lambda\in Z}{\Leftrightarrow}\lambda=1$$

ii) Αναζητούμε εφαπτόμενες της υπερβολής $(C_1):\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ που διέρχονται από το $K(0,5)$.
Αν $M_0(x_0,y_0)$ το σημείο επαφής τότε
$(\zeta_1):\dfrac{xx_0}{4}-yy_0=1$. Το Κ ανήκει στην (ζ_1) άρα
$\dfrac{0x_0}{4}-5y_0=1\Leftrightarrow y_0=-\dfrac{1}{5}$. Ακόμη
$M_0(x_0,y_0)\in(C_1)\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2}{4}-\dfrac{1}{25}=1\Leftrightarrow x_0=\pm\dfrac{2\sqrt{26}}{5}$.



Έχουμε δύο σημεία επαφής $M_1\left(\dfrac{2\sqrt{26}}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$,
$M_2\left(-\dfrac{2\sqrt{26}}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$, άρα και δύο εφαπτόμενες:
$(\zeta_1):\sqrt{26}x+2y=10$, $(\zeta_2):\sqrt{26}x-2y=-10$

iii) Αναζητούμε ευθεία $(\zeta_3): 3x-4y+k=0$ η οποία τέμνει τον κύκλο σε 2 σημεία Α, Β και ορίζει χορδή μήκους 4.



Θεωρούμε την $(\zeta_1): y=-\dfrac{4}{3}x+5$ η οποία είναι κάθετη στη (ζ_3) και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Οι (ζ_1), (ζ_3) τέμνονται στο Λ. Το ΚΛ ως απόστημα της χορδής ΑΒ τη διχοτομεί άρα $|\overrightarrow{A\Lambda}|=2$ και από το Π. Θε. στο ΑΚΛ ($\hat{\Lambda}=90^o$) έχουμε
$K\Lambda^2=KA^2-A\Lambda^2\Leftrightarrow K\Lambda^2=1\Leftrightarrow K\Lambda=1$.

$d(K,\zeta_3)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|k-20|}{5}=1 \Leftrightarrow |k-20|=5 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$

$k=25$ ή $k=15$. Άρα $(\zeta_3): 3x-4y+25=0$,

$(\zeta_2): 3x-4y+15=0$.

Θέμα 7. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2-y^2-4x-2y+3=0 \qquad (1)$$

α) Δείξτε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες (ε_1), (ε_2) κάθετες μεταξύ τους των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις και το σημείο τομής τους Λ.

β) Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 8 είναι τέτοιο ώστε τα Α, Β να ανήκουν στις (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα. Δείξτε ότι καθώς το ΑΒ κινείται, το μέσο του Κ ανήκει σε κύκλο (C) του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

γ) Αν ο κύκλος (C) έχει εξίσωση $(C): (x-2)^2+(y+1)^2=16$ να βρείτε το γ. τ των σημείων Μ του επιπέδου από τα οποία άγονται εφαπτόμενες προς τον (C) οι οποίες σχηματίζουν γωνία 60^o.

Λύση: **α)** $(1) \Leftrightarrow y^2+2y-x^2+4x-3=0$.
Θεωρούμε την εξίσωση αυτή ως $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο το y και παίρνουμε

$$y=\frac{-2\pm 2(x-2)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3(\varepsilon_1) \\ \text{ή} \\ y=-x+1(\varepsilon_2) \end{cases}$$

$\lambda_1\lambda_2=1\cdot(-1)=-1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Το σημείο τομής τους έχει συντεταγμένες τη λύση του $\left.\begin{matrix} y=x-3 \\ y=-x+1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=2, y=-1$. Άρα το $\Lambda(2,-1)$

β) Συμβολίζουμε *μονοπαραμετρικά* τα Α και Β δηλαδή $A(\alpha,\alpha-3)$ και $B(\beta,-\beta+1)$ οπότε το μέσο Κ του ΑΒ θα έχει συντεταγμένες $x_K=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

και $y_K=\dfrac{\alpha-3-\beta+1}{2}=\dfrac{\alpha-\beta-2}{2}$.

Από τις τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:
$\alpha+\beta=2x_K$ και $\alpha-\beta=2y_K+2$ (2)

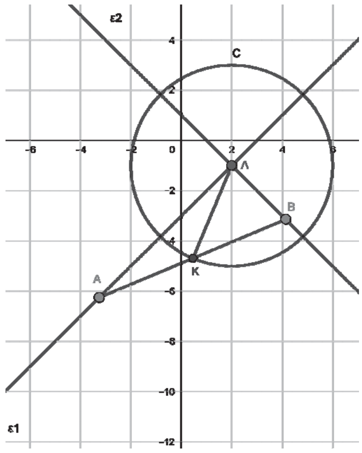
$(AB)=8 \Leftrightarrow \sqrt{(\beta-\alpha)^2+(-\beta-\alpha+4)^2}=8$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{(2y_K+2)^2+(2x_K-4)^2}=8 \Leftrightarrow$

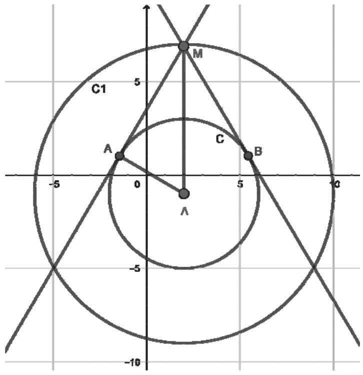
$(x_K-2)^2+(y_K+1)^2=16$.

Άρα το Κ ανήκει σε κύκλο κέντρου Λ και $\rho=4$.

Γεωμετρική προσέγγιση : *Για οποιαδήποτε θέση των Α, Β το τρίγωνο ΑΛΒ είναι ορθογώνιο στο Λ με υποτείνουσα 8 ,οπότε η διάμεσος ΚΛ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας δηλαδή $K\Lambda=4$ άρα το Κ ανήκει σε κύκλο κέντρου Λ και ακτίνας $\rho=4$.*



γ) Γεωμετρική προσέγγιση: *Αν Μ τυχαίο σημείο από το οποίο άγονται προς τον (C) εφαπτόμενες ΜΑ, ΜΒ με $A\hat{M}B=60^o$ τότε $A\hat{M}\Lambda=30^o$. Το τρίγωνο ΑΜΛ είναι ορθογώνιο στο Α με $A\hat{M}\Lambda=30^o$ και $A\Lambda=4$. Άρα η υποτείνουσα $\Lambda M=2A\Lambda=8$, άρα το Μ ανήκει σε κύκλο κέντρου Λ και ακτίνας $\rho=8$.*



Θέμα 8. Θεωρούμε την υπερβολή $(C): \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με εστίες $E(\gamma,0)$, $E'(-\gamma,0)$, κορυφές $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$ και $M_0(x_0,y_0)$ τυχαίο σημείο του δεξιού κλάδου της με $x_0 \neq \alpha$.

α) Δείξτε ότι $(ME')=\varepsilon x_0+\alpha$ και $(ME)=\varepsilon x_0-\alpha$.

β) Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(E',E'M), C_2(E,EM)$. Να αποδείξετε ότι τέμνονται και στη συνέχεια αν ΚΛ το κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους να δείξετε ότι $K\Lambda=2\beta$.

γ) Αν Η το ορθόκεντρο του ΜΑΑ΄ να αποδείξετε ότι το Η κινείται στο δεξιό κλάδο της υπερβολής $(C_1): \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right)^2}=1$.

Λύση: α) Έχουμε ότι $(ME')^2-(ME)^2=$

$(\gamma+x_0)^2+y^2-(\gamma-x_0)^2-y^2=4\gamma x_0$

και $(ME')-(ME)=2\alpha$. Οπότε

$[(ME')-(ME)][(ME')+(ME)]=4\gamma x_0 \Leftrightarrow$

$(ME)+(ME')=\dfrac{4\gamma x_0}{2\alpha} \Leftrightarrow (ME)+(ME')=2\varepsilon x_0$

$$\left.\begin{matrix}(ME')-(ME)=2\alpha\\ (ME')+(ME)=2\varepsilon x_0\end{matrix}\right\} \overset{\pm}{\Longrightarrow} \left.\begin{matrix}(ME')=\varepsilon x_0+\alpha\\ (ME)=\varepsilon x_0-\alpha\end{matrix}\right\}$$

β) Ισχύει

$2\alpha<2\gamma<2\varepsilon\cdot x_o \Rightarrow \left|\overrightarrow{ME'}\right|-\left|\overrightarrow{ME}\right|<\left|\overrightarrow{EE'}\right|<\left|\overrightarrow{ME'}\right|+\left|\overrightarrow{ME}\right|$

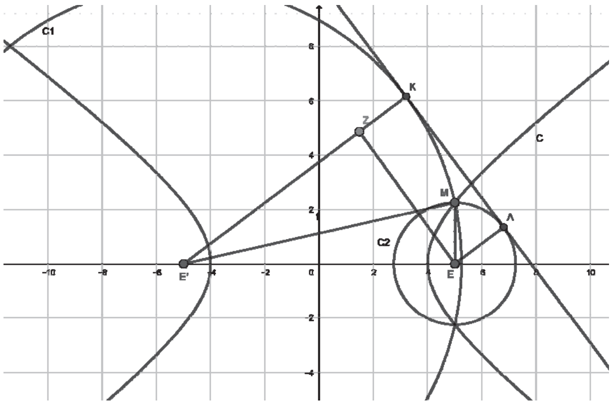
οπότε οι κύκλοι τέμνονται.

Θεωρούμε $EZ\perp E΄Z$ οπότε το ΕΖΚΛ είναι ορθογώνιο και $K\Lambda=EZ$. Επίσης $E΄Z=E΄K-KZ=E΄M-E\Lambda=E΄M-EM=2\alpha$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΕΕ΄Ζ:

$EZ^2=E'E^2-E'Z^2=4\gamma^2-4\alpha^2=4\beta^2 \Leftrightarrow$

$EZ=2\beta \Leftrightarrow K\Lambda=2\beta$.



γ) Θωρούμε τα ύψη του ΜΑΑ΄ από το Μ και από το Α που τέμνονται στο Η. Το ύψος ΜΗ έχει εξίσωση $x=x_o$ και το ύψος ΑΗ έχει εξίσωση

$y-0=-\dfrac{x_0+\alpha}{y_0}(x-\alpha)$. Λύνοντας το σύστημα

$\begin{cases}x=x_0\\ y=-\dfrac{x_0+\alpha}{y_0}(x-\alpha)\end{cases}$ Βρίσκουμε το $H\left(x_0,\dfrac{\alpha^2-x_0^2}{y_0}\right), x_0>\alpha$

$$\begin{cases}x_H=x_0\\ y_H=\dfrac{\alpha^2-x_0^2}{y_0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_0=x_H\\ y_0=\dfrac{\alpha^2-x_H^2}{y_H}\end{cases}$$

Ισχύει $\beta^2{x_0}^2-\alpha^2{y_0}^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$

$$\beta^2x_H^2-\alpha^2\left(\frac{\alpha^2-x_H^2}{y_H}\right)^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2-x_H^2)(\alpha^4-\alpha^2x_H^2+\beta^2y_H^2)=0 \overset{\alpha^2-x_H^2\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\alpha^2x_H^2-\beta^2y_H^2=\alpha^4 \Leftrightarrow \frac{x_H^2}{\alpha^2}-\frac{y_H^2}{\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^2}=1$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Θέμα 9. Θεωρούμε την έλλειψη $(C_1):\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ και την υπερβολή $(C_2):\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής έχει εμβαδόν ίσο με 8.

α) Δείξτε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$.

β) Η εφαπτομένη της (C_2) σε τυχαίο σημείο της $M_0(x_0,y_0)$, $x_o\neq\pm 2$, τέμνει την (C_1) στα Κ, Λ. Να δείξετε ότι : αν οι εφαπτόμενες της (C_1) στα Κ, Λ τέμνονται σε σημείο Ν, τότε το Ν είναι σημείο της (C_2), το οποίο είναι συμμετρικό του Μ ως προς x΄x.

γ) Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής που απέχουν από το $P(0,1)$ την ελάχιστη απόσταση.

Λύση: α) για την εκκεντρότητα της έλλειψης (C_1) γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=2\beta \qquad (1)$$

Για το εμβαδόν βάσης της υπερβολής (C_2) γνωρίζουμε ότι ισούται με $4\alpha\beta$ οπότε $4\alpha\beta=8 \Leftrightarrow \alpha\beta=2$ (2)

Από το σύστημα των (1), (2) $\alpha=2$, $\beta=1$. Οπότε:

$$(C_1):\frac{x^2}{4}+y^2=1\ ,\ (C_2):\frac{x^2}{4}-y^2=1$$

β) η εφαπτόμενη (ε) της (C_2) στο Μ έχει εξίσωση

$\dfrac{xx_0}{4}-yy_0=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{x_0x}{4y_0}-\dfrac{1}{y_0}$ και τέμνει στα $K(x_1,y_1),\Lambda(x_2,y_2)$ την έλλειψη (C_1). Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα Κ, Λ αντίστοιχα είναι: $(\varepsilon_1):\dfrac{xx_1}{4}+yy_1=1$, $(\varepsilon_2):\dfrac{xx_2}{4}+yy_2=1$

και επειδή τέμνονται στο $N(x_N,y_N)$ θα ισχύει:

$$\frac{x_Nx_1}{4}+y_Ny_1=1\ ,\ \frac{x_Nx_2}{4}+y_Ny_2=1 \quad (3)$$

Θεωρώντας λοιπόν την ευθεία

$(\zeta):\dfrac{x_Nx}{4}+y_Ny=1 \Leftrightarrow y=-\dfrac{x_Nx}{4y_N}+\dfrac{1}{y_N}$ Τότε λόγω των σχέσεων (3) η (ζ) είναι η ευθεία των Κ, Λ. Όμως και η $(\varepsilon):y=\dfrac{x_0x}{4y_0}-\dfrac{1}{y_0}$ είναι η ευθεία των Κ, Λ. Τελικά (ε), (ζ) ταυτίζονται οπότε $\left.\begin{aligned} -\frac{x_N}{4y_N} &= \frac{x_0}{4y_0} \\ \frac{1}{y_N} &= -\frac{1}{y_0} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_N &= x_o \\ y_N &= -y_o \end{aligned}\right\}$,

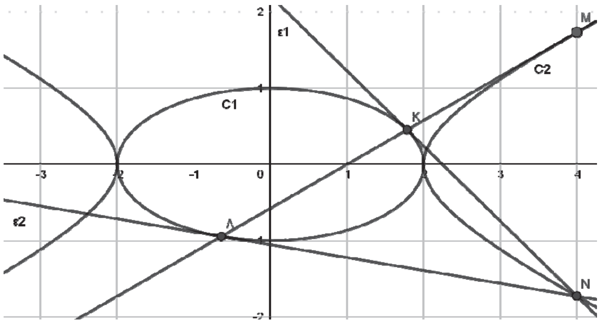
άρα το σημείο Ν της υπερβολής (C_2) είναι συμμετρικό του Μ ως προς x΄x.

γ) Αναζητούμε σημεία $M_0(x_0, y_0)$ της υπερβολής $(C_2): x^2 - 4y^2 = 4$ που απέχουν την ελάχιστη απόσταση από το $P(0,1)$

$$(MP) = \sqrt{x_0^2 + (1-y_0)^2} \overset{x_0^2 = 4y_0^2 + 4}{=} \sqrt{5y_0^2 - 2y_0 + 5}$$

Η ΜΡ ελαχιστοποιείται στο y_o που ελαχιστοποιείται και το τριώνυμο: $5y_0^2 - 2y_0 + 5$ δηλαδή για $y_0 = \frac{1}{5}$ και $x_0 = \pm\sqrt{\frac{104}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{26}}{5}$.

Δηλαδή τα ζητούμενα σημεία είναι: $M_1\left(\frac{2\sqrt{26}}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $M_2\left(-\frac{2\sqrt{26}}{5}, \frac{1}{5}\right)$



Θέμα 10. Θεωρούμε την παραβολή $(C): x^2 = 2py$, $p > 0$ και τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$. Θεωρούμε και τα σημεία Α, Β, Γ της παραβολής (C) με τετμημένες α, β, γ αντίστοιχα. Δείξτε ότι:

α) $\lambda_{AB} < \lambda_{A\Gamma} < \lambda_{B\Gamma}$ (*λήμμα των τριών χορδών(*)*)

β) i) $(AB\Gamma) = \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{4p}$.

ii) Αν τα σημεία Δ, Ε, Ζ της παραβολής έχουν τετμημένες $\delta = \alpha + 2022$, $\varepsilon = \beta + 2022$, $\zeta = \gamma + 2022$ αντίστοιχα, τότε $(\Delta EZ) = (AB\Gamma)$.

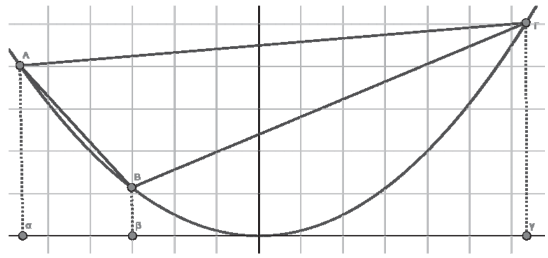
iii) Αν οι τετμημένες των Α, Β, Γ είναι διαδοχικοί ακέραιοι τότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2p}$.

Λύση: Ισχύει ότι $A\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{2p}\right)$, $B\left(\beta, \frac{\beta^2}{2p}\right)$ $\Gamma\left(\gamma, \frac{\gamma^2}{2p}\right)$ με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι συντελεστές διεύθυνσης των χορδών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{\frac{\beta^2}{2p} - \frac{\alpha^2}{2p}}{\beta - \alpha} = \frac{\beta+\alpha}{2p},\ \lambda_{B\Gamma} = \frac{\beta+\gamma}{2p},\ \lambda_{A\Gamma} = \frac{\gamma+\alpha}{2p}$$

Ισχύει: $\beta + \alpha < \gamma + \alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow$

$$\frac{\beta+\alpha}{2p} < \frac{\gamma+\alpha}{2p} < \frac{\beta+\gamma}{2p} \Leftrightarrow \lambda_{AB} < \lambda_{A\Gamma} < \lambda_{B\Gamma}$$



β) i) $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} \beta - \alpha & \gamma - \alpha \\ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2p} & \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{2p} \end{vmatrix} = \ldots$

$$= \frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{2p} = \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2p} > 0$$

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{4p}$

ii) $\delta - \varepsilon = \alpha + 2022 - \beta - 2022 = \alpha - \beta$ και ομοίως $\varepsilon - \zeta = \beta - \gamma$, $\zeta - \delta = \gamma - \alpha$ οπότε σύμφωνα με το i)

$$(\Delta EZ) = \frac{(\delta-\varepsilon)(\varepsilon-\zeta)(\zeta-\delta)}{4p} = \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{4p} = (AB\Gamma).$$

iii) αν $\alpha < \beta < \gamma$ διαδοχικοί ακέραιοι τότε $\beta = \alpha + 1$, $\gamma = \beta + 1 = \alpha + 2$ οπότε σύμφωνα με το i)

$$(AB\Gamma) = \frac{(-1)(-1)2}{4p} = \frac{1}{2p}.$$

(*) *το **λήμμα των τριών χορδών** ισχύει (με τη μορφή που είναι διατυπωμένο στο α ερώτημα) για **κυρτές συναρτήσεις** και μία τέτοια είναι και η (C). Ανάλογη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και για **κοίλες συναρτήσεις**.*

Θέμα 11. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + 8\lambda^2 x - 8\lambda y + 16\lambda^2(\lambda^2 + 1) = 5 \quad (1), \lambda \in R$$

Δείξτε ότι: α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$.

β) Οι κύκλοι που ορίζει η (1) είναι ίσοι.

γ) Τα κέντρα των κύκλων που ορίζει η (1) ανήκουν σε παραβολή (C) της οποίας να βρείτε την εστία Ε και την διευθετούσα (δ).

δ) Μόνο δύο από τους κύκλους που ορίζει η (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ε) Έστω (C_1) ο κύκλος που προκύπτει από την

(1) για $\lambda=0$ και η ισοσκελής υπερβολή $(C_2): x^2-y^2=5$. Η εφαπτόμενη (ε) του κύκλου (C_1) στο σημείο του $M(x_0,y_0)$ (με $x_0>0, y_0>0$) τέμνει τον άξονα x΄x στο N και η κάθετη στον άξονα x΄x στο N τέμνει την (C_2) στα K, Λ. Δείξτε ότι $K\hat{M}\Lambda=90^o$.

Λύση

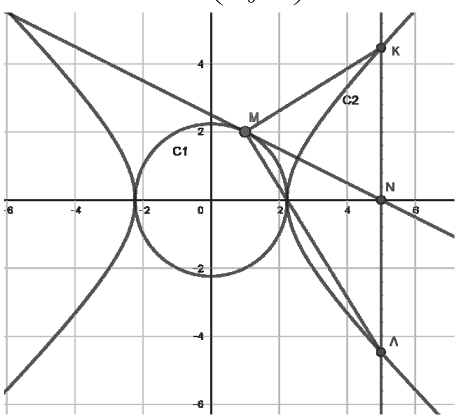
α) $A^2+B^2-4\Gamma=64\lambda^4+64\lambda^2-4(16\lambda^4+16\lambda^2-5)=$
$=20>0$ άρα παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R$.

β) Οι κύκλοι της μορφής (1) έχουν ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}$ οπότε είναι ίσοι μεταξύ τους.

γ) Οι κύκλοι (1) έχουν κέντρα $K\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K(-4\lambda^2,4\lambda)$ Θέτουμε $x=8\lambda^2$ και $y=-8\lambda$ και με απαλοιφή του λ προκύπτει $y^2=-4x$ άρα τα κέντρα K είναι σημεία της παραβολής $(C): y^2=-4x$ η οποία έχει εστία $E(-1,0)$ και διευθετούσα $(\delta): x=1$.

δ) Οι κύκλοι (1) διέρχονται από την αρχή O των αξόνων αν και μόνο αν $\Gamma=0 \Leftrightarrow 16\lambda^4+16\lambda^2-5=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm\dfrac{1}{2}$ και επειδή για κάθε τιμή του λ προκύπτει διαφορετικός κύκλος, τελικά μόνο δύο από τους κύκλους που ορίζει η (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ε) η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $xx_0+yy_0=5$ και το σημείο N είναι $N\left(\dfrac{5}{x_0},0\right)$.



Τα σημεία K, Λ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=5 \\ x=\dfrac{5}{x_0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{25}{x_0^{\ 2}}-y^2=5 \\ x=\dfrac{5}{x_0} \end{array}\right\} \overset{x_0^2+y_0^2=5}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{array}{l} y^2=\dfrac{5y_0^2}{x_0^2} \\ x=\dfrac{5}{x_0} \end{array}\right\}$$

Οπότε: $K\left(\dfrac{5}{x_0},\dfrac{\sqrt{5}y_0}{x_0}\right)$, $\Lambda\left(\dfrac{5}{x_0},-\dfrac{\sqrt{5}y_0}{x_0}\right)$

$\overrightarrow{MK}=\left(\dfrac{y_0^2}{x_0},\dfrac{y_0(\sqrt{5}-x_0)}{x_0}\right)$ και $\overrightarrow{M\Lambda}=\left(\dfrac{y_0^2}{x_0},\dfrac{-y_0(\sqrt{5}+x_0)}{x_0}\right)$

Άρα $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{M\Lambda}=\dfrac{y_0^4}{x_0^2}-\dfrac{y_0^2}{x_0^2}(5-x_0^2)=0 \Rightarrow K\hat{M}\Lambda=90^o$

Θέμα 12. Δίνεται η εξίσωση

$$\kappa x^2+(\kappa+1)y^2=\kappa^2+\kappa, \kappa>0. \quad (1)$$

α) Δείξτε ότι η (1) παριστάνει έλλειψη (C) και να βρείτε τις εστίες της E΄, E.

β) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=x$ τέμνει την (C) σε σημείο M του 1ου τεταρτημόριου και η εφαπτομένη της (C) στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\dfrac{4}{5}$, να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και στη συνέχεια να βρείτε τις εφαπτόμενες της (C) που είναι κάθετες στην $(\varepsilon): y=x$.

γ) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C_1) των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{NE'}\cdot\overrightarrow{NE}=\det\left(\overrightarrow{NE'},\overrightarrow{NE}\right)-1$ (2)

δ) Έστω ότι ο (C_1) είναι ο κύκλος κέντρου $K(0,1)$ και ακτίνας $\rho=1$. Θεωρούμε επιπλέον το σημείο $\Lambda(-4,-2)$ και την ευθεία (ζ) με εξίσωση $3x-4y+12=0$. Αν Z τυχαίο σημείο της (ζ) και H τυχαίο σημείο του (C_1) να αποδείξετε ότι: $(\Lambda H)-(\Lambda Z)\le\dfrac{22}{5}$.

Λύση α) Διαιρώντας με $\kappa(\kappa+1)>0$ την (1) έχουμε: $\dfrac{x^2}{\kappa+1}+\dfrac{y^2}{\kappa}=1$ με $\kappa+1>\kappa>0$. Άρα παριστάνει έλλειψη με εστίες στον x΄x και $\alpha^2=\kappa+1$, $\beta^2=\kappa$, $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=1 \Leftrightarrow \gamma=1$, άρα $E(1,0)$ και $E΄(-1,0)$.

β) έστω $M(\mu,\mu)$, $\mu>0$. Η εφαπτόμενη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση $\dfrac{x\mu}{\kappa+1}+\dfrac{y\mu}{\kappa}=1 \Leftrightarrow \kappa x+(\kappa+1)y=\dfrac{\kappa^2+\kappa}{\mu}$ και συντελεστή διεύθυνσης $-\dfrac{\kappa}{\kappa+1}$. Άρα $-\dfrac{\kappa}{\kappa+1}=-\dfrac{4}{5} \Leftrightarrow \kappa=4$ οπότε $(C): \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Ορίζουμε σημείο επαφής $M'(x_1, y_1)$ και θεωρούμε την εφαπτομένη στο M΄: $(\eta): \frac{xx_1}{5} + \frac{yy_1}{4} = 1$ με

$\lambda_\eta = -\frac{4x_1}{5y_1} = -1 \Leftrightarrow 4x_1 = 5y_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5y_1}{4} (3)$

$M'(x_1, y_1) \in (C) \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{5} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$4x_1^2 + 5y_1^2 = 20 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} y_1 = \pm\frac{4}{3}$ και από την (2) καταλήγουμε στα σημεία επαφής $M_1'\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $M_2'\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ και στις αντίστοιχες εφαπτόμενες $y = -x + 3, y = -x - 3$.

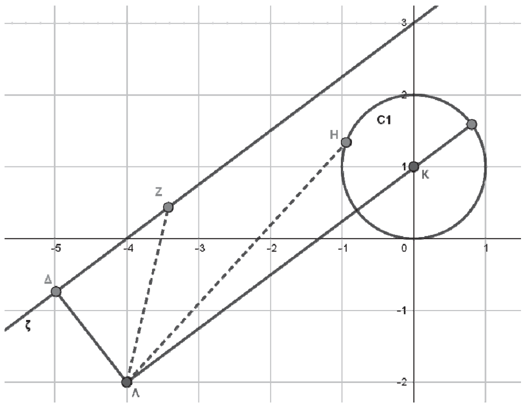
γ) $\overrightarrow{NE'} = (-1 - x, -y), \overrightarrow{NE} = (1 - x, -y)$

$\overrightarrow{NE'} \cdot \overrightarrow{NE} = x^2 - 1 + y^2$, $\det\left(\overrightarrow{NE'}, \overrightarrow{NE}\right) = 2y$ και η (2) μετά από πράξεις γίνεται $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

δ) $d(\Lambda, (\zeta)) = \frac{|3(-4) - 4(-2) + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{8}{5} \Rightarrow (\Lambda Z) \geq \frac{8}{5}$ (4)

$(\Lambda K) + \rho = 5 + 1 = 6 \Rightarrow (\Lambda H) \leq 6 (5)$.

Από (4) , (5)$\Rightarrow (\Lambda H) - (\Lambda Z) \leq 6 - \frac{8}{5} = \frac{22}{5}$



Θέμα 13. Θεωρούμε την ευθεία $(\delta): x = \frac{1}{2}$ και το σημείο $E(2,0)$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου που δεν ανήκουν στην (δ) και για τα οποία ισχύει: $\frac{d(M,E)}{d(M,(\delta))} = 2$

β) Θεωρούμε το κύκλο: $(C_1): (x-7)^2 + y^2 = 90$ και την υπερβολή $(C_2): x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

i) Δείξτε ότι οι (C_1), (C_2) έχουν ακριβώς τέσσερα σημεία τα οποία και να βρείτε.

ii) Βρείτε τις εφαπτόμενες των (C_1), (C_2) στο κοινό τους σημείο που ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο και στη συνέχεια να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες αυτές.

Λύση: α) $\frac{d(M,E)}{d(M,(\delta))} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{\left|x - \frac{1}{2}\right|} = 2 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 + y^2 = |2x-1|^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow$

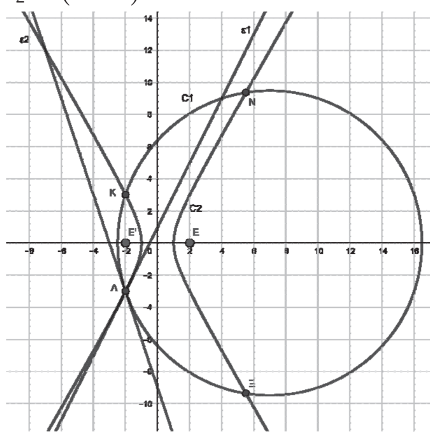
$\Leftrightarrow 3x^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, οπότε το M κινείται σε υπερβολή με εστίες $E'(-2,0)$, $E(2,0)$ και απόλυτη διαφορά $2\alpha = 2$.

β) θεωρούμε το $\left.\begin{array}{l}(x-7)^2 + y^2 = 90 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = -2,\ y = \pm 3 \\ x = \frac{11}{2}, y = \pm\frac{3\sqrt{39}}{2}\end{array}\right\}$

Έτσι $K(-2,3)$, $\Lambda(-2,-3)$, $N\left(\frac{11}{2}, \frac{3\sqrt{39}}{2}\right)$, $\Xi\left(\frac{11}{2}, -\frac{3\sqrt{39}}{2}\right)$

γ) η εφαπτόμενη της υπερβολής στο $\Lambda(-2,-3)$ είναι (ε_1): $2x - y + 1 = 0$. Ο κύκλος (C_1) $(x-7)^2 + y^2 = 90$ έχει κέντρο $P(7,0)$ και ισχύει $\lambda_{P\Lambda} = \frac{-3-0}{-2-7} = \frac{1}{3}$, άρα η εφαπτόμενη του (C_1) στο $\Lambda(-2,-3)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ και η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο Λ είναι (ε_2): $y + 3 = -3(x+2) \Leftrightarrow 3x + y + 9 = 0$.

Ένα παράλληλο διάνυσμα της (ε_1) είναι το $\vec{\delta}_1 = (1,2)$ και ένα παράλληλο διάνυσμα της (ε_2) είναι το $\vec{\delta}_2 = (-1,3)$,



οπότε $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Τάξη: Γ΄

Ολοκλήρωμα

Γιάννης Λουριδάς

Γενικό θέμα στο 3ο κεφάλαιο

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x)=xe^{1-\alpha x}-2\alpha\left(\frac{e-2}{\alpha^2}-\int_0^{\frac{1}{\alpha}}f(t)dt\right) \qquad (1)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\in(0,+\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{1-\alpha x},x\in\mathbb{R},\alpha>0$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=-\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x+1)e^{1-\alpha x},x\in\mathbb{R},\alpha>0$ είναι μία αρχική συνάρτηση της f.

γ. Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

δ. **δ₁.** Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

δ₂. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του $\alpha\in(0,+\infty)$, ώστε να ισχύει $\alpha e^{\alpha x-1}\ge x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Να βρείτε συναρτήσει του α το σημείο της C_f με την ελάχιστη κλίση.

στ. Να βρείτε πού ανήκει το σημείο της C_f με την ελάχιστη κλίση, καθώς το α μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ζ. Να βρείτε το εμβαδόν $E_1(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία $(\varepsilon): y=e^{-1}x$.

η. Αν $E_2(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=\frac{2}{\alpha}$, $\alpha\in(0,+\infty)$, τότε:

η₁. Να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$ είναι σταθερός, καθώς το α μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,+\infty)$.

η₂. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}E_2(\alpha),\ \lim_{\alpha\to 0}E_2(\alpha)$$

θ. Αν $A(x,f(x)),x\in\left(0,\frac{2}{\alpha}\right),K\left(\frac{2}{\alpha},f\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)$, όπου $\alpha>0$ και $E(x)$ είναι η συνάρτηση του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΚ και $E(0)=E\left(\frac{2}{\alpha}\right)=0$, τότε να αποδείξετε ότι

$$E_1(\alpha)=\alpha\int_0^{\frac{2}{\alpha}}E(x)dx$$

ι. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-2022}^{2022}xe^{1-\alpha|x|}dx$$

ια. Αν $\alpha=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

ια₁. Η εξίσωση

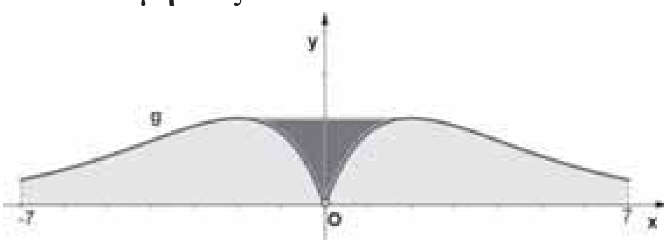
$$\left(x^{10}+1\right)\int_0^1 f\left(t^2\right)dt-3x^5+\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \text{ έχει}$$

μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ια₂. $f(x)\ge-\frac{1}{e}x+\frac{4}{e}$ για κάθε $x\ge 2$, και

ια₃. $\int_2^4 xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>e^5$

ιβ. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η κάθετη διατομή ενός καναλιού.



Η εξωτερική γραμμή των αναχωμάτων του καναλιού, στην κάθετη διατομή, περιγράφεται με το γράφημα της συνάρτησης

$$g(x)=|x|e^{1-\frac{|x|}{2}},x\in[-7,7],$$

όπου 1 μονάδα μήκους αντιστοιχεί σε 5m. Να βρείτε:

ιβ₁. Το μέγιστο ύψος των αναχωμάτων του καναλιού.

ιβ₂. Το εμβαδόν της επιφάνειας του νερού στην κάθετη διατομή του καναλιού, όταν το κανάλι είναι γεμάτο με νερό.

Απαντήσεις

α. Αρκεί από την ισότητα (1) να βρούμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{1}{\alpha}} f(t)\,dt$.

Θέτουμε $\int_0^{\frac{1}{\alpha}} f(t)\,dt = c$ (2) και έχουμε:

$$c=\int_0^{\frac{1}{\alpha}} f(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{\alpha}} f(x)\,dx \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(xe^{1-\alpha x}-2\alpha\left(\frac{e-2}{\alpha^2}-c\right)\right)dx=$$

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} xe^{1-\alpha x}dx-2\alpha\left(\frac{e-2}{\alpha^2}-c\right)\int_0^{\frac{1}{\alpha}}dx=$$

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} xe^{1-\alpha x}dx-2\alpha\left(\frac{e-2}{\alpha^2}-c\right)\frac{1}{\alpha}=$$

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} xe^{1-\alpha x}dx-2\frac{e-2}{\alpha^2}+2c \qquad (3)$$

Είναι:

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} xe^{1-\alpha x}dx=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}} x\left(e^{1-\alpha x}\right)'dx=$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left[xe^{1-\alpha x}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(x)'e^{1-\alpha x}dx=$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left[xe^{1-\alpha x}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}}e^{1-\alpha x}dx=$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left[xe^{1-\alpha x}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{1}{\alpha^2}\left[e^{1-\alpha x}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-0\right)-\frac{1}{\alpha^2}(1-e)=-\frac{2}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^2}=\frac{e-2}{\alpha^2} \qquad (4)$$

Από (3), (4) έχουμε:

$$c=\frac{e-2}{\alpha^2}-2\frac{e-2}{\alpha^2}+2c \Leftrightarrow c=\frac{e-2}{\alpha^2} \qquad (5)$$

Επομένως, από (1), (2), (5) έχουμε
$f(x)=xe^{1-\alpha x}, x\in\mathbb{R}, \alpha>0$

β. Η συνάρτηση $F(x)=-\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x+1)e^{1-\alpha x}, x\in\mathbb{R}, \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$F'(x)=-\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x+1)'e^{1-\alpha x}-\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x+1)\left(e^{1-\alpha x}\right)'=$$

$$-\frac{1}{\alpha^2}\alpha e^{1-\alpha x}-\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x+1)e^{1-\alpha x}(1-\alpha x)'=$$

$$-\frac{1}{\alpha}e^{1-\alpha x}+\frac{1}{\alpha}(\alpha x+1)e^{1-\alpha x}=xe^{1-\alpha x}=f(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, η συνάρτηση F είναι μία αρχική συνάρτηση της f.

γ. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-\alpha x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\alpha x-1}} \overset{\text{ΜΟΡΦΗ}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DL'H}{=}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{\alpha x-1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha e^{\alpha x-1}}\overset{\alpha>0}{=}0.$$

Άρα, η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Στο $-\infty$ η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη, διότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^{1-\alpha x}\overset{\alpha>0}{=}(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$$

δ. δ$_1$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x)=\left(xe^{1-\alpha x}\right)'=(x)'e^{1-\alpha x}+x\left(e^{1-\alpha x}\right)'$$

$$=e^{1-\alpha x}+xe^{1-\alpha x}(1-\alpha x)'=e^{1-\alpha x}-\alpha xe^{1-\alpha x}$$

$$=(1-\alpha x)e^{1-\alpha x},\ x\in\mathbb{R},\ \alpha>0.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(1-\alpha x)e^{1-\alpha x}=0\overset{e^{1-\alpha x}\neq0}{\Leftrightarrow}1-\alpha x=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow(1-\alpha x)e^{1-\alpha x}>0\overset{e^{1-\alpha x}>0}{\Leftrightarrow}1-\alpha x>0$$

$$\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}x<\frac{1}{\alpha}$$

Η ρίζα και το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f(x)	↗	Ο.Μ.	↘

Άρα, για $x=\frac{1}{\alpha}$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}.$$

δ$_2$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha e^{\alpha x-1}\geq x\Leftrightarrow\alpha\geq xe^{1-\alpha x}\Leftrightarrow f(x)\leq\alpha$$

που συμβαίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν και μόνο αν, το μέγιστο της f είναι μικρότερο ή ίσο από το α.

Δηλαδή: $\frac{1}{\alpha} \le \alpha \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 \ge 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha \ge 1$

Άρα, η μικρότερη τιμή του $\alpha \in (0,+\infty)$, ώστε να ισχύει $\alpha e^{\alpha x-1} \ge x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι η $\alpha = 1$.

ε. Αρκεί να βρούμε που η f' παρουσιάζει ελάχιστο. Η συνάρτηση $f'(x) = (1-\alpha x)e^{1-\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x) = \left((1-\alpha x)e^{1-\alpha x}\right)' = (1-\alpha x)'e^{1-\alpha x} + (1-\alpha x)\left(e^{1-\alpha x}\right)'$$

$$= -\alpha e^{1-\alpha x} + (1-\alpha x)e^{1-\alpha x}(1-\alpha x)'$$

$$= -\alpha e^{1-\alpha x} - \alpha(1-\alpha x)e^{1-\alpha x} = \alpha(\alpha x - 2)e^{1-\alpha x}, x \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x - 2)e^{1-\alpha x} = 0 \overset{\alpha e^{1-\alpha x} \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\alpha}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x - 2)e^{1-\alpha x} > 0 \overset{\alpha e^{1-\alpha x} > 0}{\Leftrightarrow} \alpha x - 2 > 0$$

$$\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} x > \frac{2}{\alpha}$$

Η ρίζα και το πρόσημο της $f''(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{2}{\alpha}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$	Ο.Ε. $f'\left(\frac{2}{\alpha}\right) = -e^{-1}$	$\nearrow$

Δηλαδή, για $x = \frac{2}{\alpha}$ η f' παρουσιάζει ελάχιστο.

Άρα, το σημείο της C_f με την ελάχιστη κλίση είναι το $K\left(\frac{2}{\alpha}, f\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)$, δηλαδή, $K\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha e}\right)$, το οποίο είναι το σημείο καμπής της C_f.

στ. Έστω $K(x,y)$, τότε $\begin{cases} x = \frac{2}{\alpha} \\ y = \frac{2}{\alpha e} \end{cases}$ με $\alpha > 0$.

Δηλαδή, $y = e^{-1}x, x > 0$. Άρα, το σημείο της C_f με την ελάχιστη κλίση ανήκει στην ημιευθεία $y = e^{-1}x, x > 0$, καθώς το α μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ζ. $f(x) = e^{-1}x \Leftrightarrow xe^{1-\alpha x} - e^{-1}x = 0$

$$\Leftrightarrow x\left(e^{1-\alpha x} - e^{-1}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } e^{1-\alpha x} - e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } e^{1-\alpha x} = e^{-1} \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ ή } 1 - \alpha x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{2}{\alpha}.$$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - e^{-1}x$ στο διάστημα $\left(0,\frac{2}{\alpha}\right)$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και δεν μηδενίζεται σε αυτό. Οπότε, η φ διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $\left(0,\frac{2}{\alpha}\right)$ και, επειδή $\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - e^{-1}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha e} > 0$, αφού α>0, ισχύει $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\frac{2}{\alpha}\right)$.

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν $E_1(\alpha)$ είναι:

$$E_1(\alpha) = \int_0^{\frac{2}{\alpha}} \varphi(x)dx = \int_0^{\frac{2}{\alpha}} \left(f(x) - e^{-1}x\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{2}{\alpha}} f(x)dx - e^{-1}\int_0^{\frac{2}{\alpha}} xdx \overset{(\beta)}{=} F\left(\frac{2}{\alpha}\right) - F(0) - e^{-1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{\alpha}}$$

$$= -\frac{3}{\alpha^2}e^{-1} - \left(-\frac{e}{\alpha^2}\right) - \frac{e^{-1}}{2}\left(\frac{4}{\alpha^2} - 0\right) = -\frac{5}{\alpha^2 e} + \frac{e}{\alpha^2}$$

$$= \frac{e^2 - 5}{\alpha^2 e}$$

η. $f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1-\alpha x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0,\frac{2}{\alpha}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, και $f(x) = xe^{1-\alpha x} \ge 0$ για κάθε $x \in \left[0,\frac{2}{\alpha}\right]$. Οπότε, το ζητούμενο εμβαδόν $E_2(\alpha)$ είναι:

$$E_2(\alpha) = \int_0^{\frac{2}{\alpha}} f(x)dx \overset{(\beta)}{=} F\left(\frac{2}{\alpha}\right) - F(0) = -\frac{3}{\alpha^2}e^{-1} - \left(-\frac{e}{\alpha^2}\right)$$

$$= \frac{e^2 - 3}{\alpha^2 e}.$$

η₁. Για κάθε $\alpha \in (0,+\infty)$ ισχύει: $\frac{E_1(\alpha)}{E_2(\alpha)} = \frac{\frac{e^2-5}{\alpha^2 e}}{\frac{e^2-3}{\alpha^2 e}} = \frac{e^2-5}{e^2-3}$.

Άρα, ο λόγος των εμβαδών $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$ είναι σταθερός, καθώς το α μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,+\infty)$.

η₂. $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E_2(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{e^2-3}{\alpha^2 e}=\dfrac{e^2-3}{e}\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha^2}$

$$=\frac{e^2-3}{e}\cdot 0=0$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} E_2(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{e^2-3}{\alpha^2 e}=\dfrac{e^2-3}{e}\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\dfrac{1}{\alpha^2}$

$$=\frac{e^2-3}{e}\cdot(+\infty)=+\infty$$

θ. Για $x\in\left(0,\dfrac{2}{\alpha}\right)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΚ

είναι: $E(x)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x & f(x)\\ \dfrac{2}{\alpha} & \dfrac{2}{\alpha e}\end{vmatrix}\right|$

$\overset{\alpha>0}{=}\dfrac{1}{\alpha}\left|\begin{vmatrix} x & f(x)\\ 1 & e^{-1}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{\alpha}\left|e^{-1}x-f(x)\right|=\dfrac{1}{\alpha}\left(f(x)-e^{-1}x\right)$,

διότι $f(x)-e^{-1}x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{2}{\alpha}\right)$, από το ερώτημα (ζ). Επίσης:

$\lim\limits_{x\to 0^+}E(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\alpha}\left(f(x)-e^{-1}x\right)\right)=0=E(0)$, και

$\lim\limits_{x\to \frac{2}{\alpha}^-}E(x)=\lim\limits_{x\to \frac{2}{\alpha}^-}\left(\dfrac{1}{\alpha}\left(f(x)-e^{-1}x\right)\right)=0=E\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)$.

Οπότε, $E(x)=\dfrac{1}{\alpha}\left(f(x)-e^{-1}x\right), x\in\left[0,\dfrac{2}{\alpha}\right]$, η οποία είναι και συνεχής. (6)

Από το ερώτημα (ζ) και την ισότητα (6) έχουμε ότι

$E_1(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\alpha}}\left(f(x)-e^{-1}x\right)dx=\alpha\int_0^{\frac{2}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}\left(f(x)-e^{-1}x\right)dx$

$$\overset{(6)}{=}\alpha\int_0^{\frac{2}{\alpha}}E(x)dx$$

ι. Η συνάρτηση $h(x)=xe^{1-\alpha|x|}$ είναι συνεχής και περιττή στο διάστημα $\Delta=[-2022,2022]$.

Πράγματι, για κάθε $x\in\Delta$, $-x\in\Delta$ και

$h(-x)=-xe^{1-\alpha|-x|}=-xe^{1-\alpha|x|}=-h(x)$

Στο ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{-2022}^{2022}xe^{1-\alpha|x|}dx$

θέτουμε $x=-t$, οπότε

$d(x)=d(-t)=(-t)'dt=-dt$, και

- για $x=-2022$ έχουμε: $-2022=-t_1\Leftrightarrow t_1=2022$
- για $x=2022$ έχουμε: $2022=-t_2\Leftrightarrow t_2=-2022$

Το ολοκλήρωμα Ι γίνεται:

$I=\displaystyle\int_{-2022}^{2022}xe^{1-\alpha|x|}dx=-\int_{2022}^{-2022}-te^{1-\alpha|-t|}dt=\int_{2022}^{-2022}te^{1-\alpha|t|}dt$

$$=-\int_{-2022}^{2022}te^{1-\alpha|t|}dt=-I$$

Δηλαδή, $I=-I$, οπότε $I=0$.

Άρα, $I=\displaystyle\int_{-2022}^{2022}xe^{1-\alpha|x|}dx=0$

ια. Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=xe^{1-x}, x\in\mathbb{R}$

ια₁. Για $\alpha=1$ από το ερώτημα (δ₁) έχουμε ότι: $0\le f(x)\le 1$, για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε $0\le f(x^2)\le 1$, για κάθε $x\in[0,1]$. Οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x=0$ και $x=1$ αντίστοιχα. Επίσης, η συνάρτηση $f(x^2)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Άρα, $0<\displaystyle\int_0^1 f(x^2)dx<1$ (7)

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\varphi(x)=\left(x^{10}+1\right)\int_0^1 f(t^2)dt-3x^5+\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), x\in[0,1]$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών, και $\varphi(0)\varphi(1)<0$, αφού

$\varphi(0)=\displaystyle\int_0^1 f(t^2)dt>0$ και $\varphi(1)=2\left(\displaystyle\int_0^1 f(t^2)dt-1\right)<0$

λόγω της ανισότητας (7).

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0$, δηλαδή η εξίσωση

$$\left(x^{10}+1\right)\int_0^1 f(t^2)dt-3x^5+\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Σημείωση: Επίσης, η εξίσωση

$$3\left(x^{10}+1\right)\int_0^1 f(t^2)dt-2ex^5+\eta\mu(\pi x)=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$,

αφού $0<\displaystyle\int_0^1 f(x^2)dx<\dfrac{e}{3}$, διότι …

ια₂. **$1^{ος}$ *τρόπος*** (κυρτότητα και εφαπτομένη)

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο καμπής της $K\left(2,\dfrac{2}{e}\right)$ είναι:

$(\varepsilon): y-\dfrac{2}{e}=-\dfrac{1}{e}(x-2)$, δηλαδή, $(\varepsilon): y=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{4}{e}$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$, διότι:

$f''(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$, από ερώτημα (ε) για $\alpha=1$, και η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$.

Άρα, $f(x)\geq -\frac{1}{e}x+\frac{4}{e}$ για κάθε $x\in[2,+\infty)$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=2$.

2ος τρόπος: (Υπόδειξη) Με θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[2,x], x>2$. Για $x=2$ ισχύει ως ισότητα.

3ος τρόπος: (Υπόδειξη) Με ακρότατο. Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση

$$p(x)=f(x)+\frac{1}{e}x-\frac{4}{e},\ x\in[2,+\infty)$$

παρουσιάζει ελάχιστο το μηδέν.

ια₃. Λόγω του ερωτήματος (ια₂), για κάθε $x\in[2,+\infty)$ ισχύει:

$$f(x)\geq -\frac{1}{e}x+\frac{4}{e}\Rightarrow ef(x)\geq -x+4\Rightarrow xe^{-x+2}\geq -x+4$$

$$\overset{\cdot e^{-\frac{x^2}{2}+4x}}{\Rightarrow}\ e^2xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}\geq(-x+4)e^{-\frac{x^2}{2}+4x}\quad(8)$$

Οι συναρτήσεις της ανισότητας (8) είναι συνεχείς στο διάστημα $[2,+\infty)$ και το ίσο ισχύει μόνο για $x=2$, όπως είδαμε στο ερώτημα (ια₂).

Άρα, $\int_2^4 e^2xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>\int_2^4(-x+4)e^{-\frac{x^2}{2}+4x}dx$

$$\Rightarrow e^2\int_2^4 xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>\int_2^4 e^{-\frac{x^2}{2}+4x}\left(-\frac{x^2}{2}+4x\right)'dx$$

$$\Rightarrow e^2\int_2^4 xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>\left[e^{-\frac{x^2}{2}+4x}\right]_2^4$$

$$\Rightarrow e^2\int_2^4 xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>e^{-\frac{4^2}{2}+4\cdot4}-e^{-\frac{2^2}{2}+4\cdot2}$$

$$\Rightarrow e^2\int_2^4 xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>e^8-e^6$$

$$\Rightarrow \int_2^4 xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>e^4(e^2-1)>e^5$$

Οπότε, $\int_2^4 xe^{-\frac{x^2}{2}+3x}dx>e^5$.

ιβ. $g(x)=|x|e^{1-\frac{|x|}{2}}, x\in[-7,7]$

ιβ₁. Η συνάρτηση g είναι άρτια.
Πράγματι, για κάθε $x\in\Delta$, $-x\in\Delta$ και

$$g(-x)=|-x|e^{1-\frac{|-x|}{2}}=|x|e^{1-\frac{|x|}{2}}=g(x).$$

Οπότε, για να βρούμε το μέγιστο ύψος των αναχωμάτων του καναλιού θα μελετήσουμε την g στο διάστημα $\Delta_1=[0,7]$.

Για $x\in[0,7]$ έχουμε $g(x)=xe^{1-\frac{x}{2}}$, η οποία προκύπτει από την f για $\alpha=\frac{1}{2}$.

Λόγω του ερωτήματος (δ₁) η g για $x=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ παρουσιάζει μέγιστο το $g(2)=2$.

Άρα, η g στο διάστημα $\Delta=[-7,7]$ για $x=2$ και $x=-2$ παρουσιάζει μέγιστο το $g(2)=g(-2)=2$.

Οπότε, το μέγιστο ύψος των αναχωμάτων του καναλιού είναι 2 μονάδες, δηλαδή $2\cdot5=10m$, λόγω της υπόθεσης.

ιβ₂. $g(x)=2\overset{(\iota\beta_1)}{\Leftrightarrow}x=-2$ ή $x=2$.

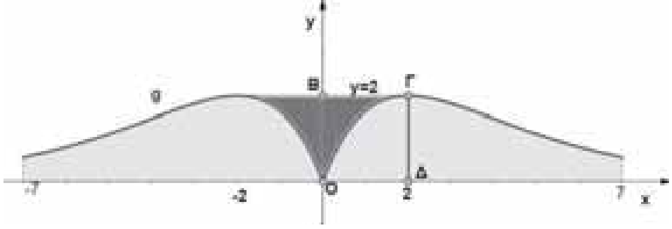
Η επιφάνεια του νερού στην κάθετη διατομή του καναλιού, όταν αυτό είναι γεμάτο, περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και την ευθεία $y=2$. Η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, αφού g άρτια. Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=2\int_0^2(2-g(x))dx=4\int_0^2dx-2\int_0^2g(x)dx$$

$$=4(2-0)-2[F(x)]_0^2=8-2(F(2)-F(0)),$$

όπου $F(x)=-4\left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{1-\frac{x}{2}}, x\in\mathbb{R}$ από ερώτημα (β), για $\alpha=\frac{1}{2}$.

Άρα, $E=8-2(F(2)-F(0))=8-2(-8-(-4e))$
$=8(3-e)$ τ.μ. $=8(3-e)\cdot25\approx56,34m^2$,
λόγω της υπόθεσης.



Σημείωση: $E=2\left((OB\Gamma\Delta)-\int_0^2 g(x)dx\right)$.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 371 (ΤΕΥΧΟΣ 120)

Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x, y, z, w, v ώστε να ισχύει $3x-5y+7z+11w=2v^5$

Τσιλιακός Ελευθέριος – Γαλάτσι.

ΛΥΣΗ Αποστολόπουλος Γιώργος- Μεσολόγγι

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$3x-5y=1 \text{ και } 7z+11w=1$$

Μια μερική λύση των εξισώσεων είναι

$$(x_o, y_o)=(2,-1) \text{ και } (z_o, w_o)=(-3, 2)$$

αντίστοιχα, οπότε καθεμιά από τις εξισώσεις έχει άπειρες λύσεις, που έχουν τη μορφή

$$x=2+5\kappa,\ y=1+3\kappa,\ \kappa\in\mathbb{Z} \text{ και}$$

$$z=11\lambda-3,\ w=2-7\lambda,\ \lambda\in\mathbb{Z}$$

αντίστοιχα.

Επομένως, η δοσμένη εξίσωση έχει άπειρες ακέραιες λύσεις της μορφής

$$x=(2+5\kappa)\mu^5,\ y=(1+3\kappa)\mu^5,\ z=(11\lambda-3)\mu^5,\ w=(2-7\lambda)\mu^5$$

με $\mu=v,\ \mu\in\mathbb{Z}$.

ΑΣΚΗΣΗ 372 (ΤΕΥΧΟΣ 120)

Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z καθένας από τους οποίους είναι μεγαλύτερος της μονάδας, ώστε να ισχύει

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}=2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}\right)$$

Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο

Η στήλη αισθάνεται την ανάγκη να απολογηθεί προς τους αναγνώστες και συνεργάτες της, διότι στην εκφώνηση της άσκησης εκ παραδρομής το δεύτερο μέλος ήταν $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$.

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t)=t+\frac{3}{t-1}-2\sqrt{t+2},\ t>1$$

Είναι φανερό ότι η εξίσωση γράφεται

$$f(x)+f(y)+f(z)=0,\ (1)$$

Επιπλέον, με $t>1$ έχουμε

$$f(t)=\frac{1}{t-1}\left(t^2-t+3-2(t-1)\sqrt{t+2}\right)$$

$$=\frac{1}{t-1}\left(t^2-2t+1-2(t-1)\sqrt{t+2}+t+2\right)$$

$$=\frac{1}{t-1}\left((t-1)^2-2(t-1)\sqrt{t+2}+t+2\right)$$

$$=\frac{1}{t-1}\left(t-1-\sqrt{t+2}\right)^2\geq 0$$

οπότε έχουμε: $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)=f(z)=0$

Η ισότητα $f(t)=0$ με $t>1$ ισχύει μόνο όταν:

$$t-1=\sqrt{t+2}\Leftrightarrow t^2-2t+1=t+2\Leftrightarrow t^2-3t-1=0$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης που είναι μεγαλύτερη από την μονάδα είναι ο αριθμός $\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{13}\right)$.

Επομένως, $x=y=z=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{13}\right)$

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Λαγογιάννης Βασίλειος – Νέο Ηράκλειο.

ΑΣΚΗΣΗ 373 (ΤΕΥΧΟΣ 120)

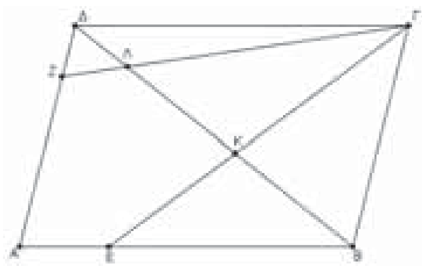
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε να είναι: $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{AZ}{Z\Delta}=2$

Τα τμήματα ΓΕ και ΓΖ τέμνουν την διαγώνιο ΒΔ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$BK^2+\Delta\Lambda^2=K\Lambda^2$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ Καρτσακλής Δημήτρης - Αγρίνιο



Οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες, οπότε έχουμε:

$$\frac{AB}{EB}=\frac{\Gamma\Delta}{EB}=\frac{K\Delta}{BK}=\frac{K\Lambda+\Lambda\Delta}{BK}$$

$$\Rightarrow\frac{AE+EB}{EB}=\frac{K\Lambda+\Lambda\Delta}{BK}\Rightarrow\frac{AE}{EB}+1=\frac{K\Lambda+\Lambda\Delta}{BK}$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{K\Lambda+\Lambda\Delta}{BK}-1\Rightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{K\Lambda+\Lambda\Delta-BK}{BK},\ (1)$$

Ομοίως από τις παράλληλες ευθείες ΑΔ και ΒΓ έχουμε: $\dfrac{ΑΔ}{ΖΔ}=\dfrac{ΒΓ}{ΖΔ}=\dfrac{ΒΛ}{ΛΔ}=\dfrac{ΒΚ+ΚΛ}{ΛΔ}$

$$\Rightarrow \frac{ΑΖ+ΖΔ}{ΖΔ}=\frac{ΒΚ+ΚΛ}{ΛΔ}\Rightarrow \frac{ΑΖ}{ΖΔ}+1=\frac{ΒΚ+ΚΛ}{ΛΔ}$$

$$\Rightarrow \frac{ΑΖ}{ΖΔ}=\frac{ΒΚ+ΚΛ}{ΛΔ}-1\Rightarrow \frac{ΑΖ}{ΖΔ}=\frac{ΒΚ+ΚΛ-ΛΔ}{ΛΔ},\quad (2)$$

Εξαιτίας των (1) και (2) η δοσμένη ισότητα γράφεται:

$$(ΚΛ+ΛΔ-ΒΚ)(ΒΚ+ΚΛ-ΛΔ)=2ΒΚ\cdot ΛΔ$$

$$\Rightarrow [ΚΛ+(ΛΔ-ΒΚ)]\cdot[ΚΛ-(ΛΔ-ΒΚ)]=2ΒΚ\cdot ΛΔ$$

$$\Rightarrow ΚΛ^2-(ΛΔ-ΒΚ)^2=2ΒΚ\cdot ΛΔ$$

$$\Rightarrow ΚΛ^2-ΛΔ^2-ΒΚ^2+2ΒΚ\cdot ΛΔ=2ΒΚ\cdot ΛΔ$$

$\Rightarrow ΒΚ^2+ΔΛ^2=ΚΛ^2$, που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Παπαδόπουλος Δήμος - Έδεσα.

ΑΣΚΗΣΗ 374 (ΤΕΥΧΟΣ 120)

Στη λέξη «ΓΩΝΙΑ» διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Αν είναι γνωστό ότι οι γωνίες μετρούνται σε μοίρες και ισχύει

$$ημ(ΓΩΝΙΑ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

να βρείτε την $εφ(ΓΓΩΩΝΝΙΙΑΑ)$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

ΛΥΣΗ Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

Είναι φανερό ότι $ΓΩΝΙΑ\equiv 45$ ή $135(\bmod 360)$, οπότε $Α=5$. Έτσι έχουμε:

$50+10Ι+10^2Ν+10^3Ω+10^4Γ\equiv 45$ ή $135(\bmod 360)$

οπότε

$$Ι+10Ν+10^2Ω+10^3Γ\equiv 4 \text{ ή } 13(\bmod 36)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$Ι+Ν+Ω+Γ\equiv 4\ (\bmod 9)$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$ΓΓΩΩΝΝΙΙΑΑ\equiv 135\ (\bmod 180)$$

Από την ισότητα $Ι+Ν+Ω+Γ\equiv 4\ (\bmod 9)$ παίρνουμε: $2Ι+2Ν+2Ω+2Γ\equiv 8\ (\bmod 9)$

$\Rightarrow Ι+10Ι+10^2Ν+10^3Ν+10^4Ω+10^5Ω+10^6Γ+10^7Γ\equiv 8(\bmod 9)$

αφού $10\equiv 1(\bmod 9)$.

Επιπλέον, $5\cdot 2\equiv 1(\bmod 9)$, οπότε

$5(Ι+10Ι+10^2Ν+10^3Ν+10^4Ω+10^5Ω+10^6Γ+10^7Γ)\equiv 4(\bmod 9)$

$\Rightarrow 10(Ι+10Ι+10^2Ν+10^3Ν+10^4Ω+10^5Ω+10^6Γ+10^7Γ)\equiv 8(\bmod 18)$

$\Rightarrow 10^2(Ι+10Ι+10^2Ν+10^3Ν+10^4Ω+10^5Ω+10^6Γ+10^7Γ)\equiv 80(\bmod 180)$

Από την τελευταία ισότητα και δεδομένου ότι

$$ΓΓΩΩΝΝΙΙΑΑ$$

$=55+10^2(Ι+10Ι+10^2Ν+10^3Ν+10^4Ω+10^5Ω+10^6Γ+10^7Γ)$

παίρνουμε:

$$ΓΓΩΩΝΝΙΙΑΑ\equiv 135\ (\bmod 180)$$

επομένως, $εφ(ΓΓΩΩΝΝΙΙΑΑ)=-1$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Καραβότας Δημήτριος - Κ. Αχαΐα, Νερούτσος Κων/νος – Γλυφάδα, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

ΑΣΚΗΣΗ 375 (ΤΕΥΧΟΣ 120)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$f(x)=x^3-ημ^2x\cdot εφx,\ g(x)=2x^2-ημ^2x-xεφx,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Να βρείτε το πρόσημο των τιμών τους.

Δεληστάθης Γιώργος - Κ. Πατήσια

ΛΥΣΗ Από τον ίδιο

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι όταν $f(x)<0$, τότε και $g(x)<0$ και στη συνέχεια ότι ισχύει $f(x)<0$, οπότε το πρόσημο των τιμών κάθε συνάρτησης θα είναι αρνητικό.

Με $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$x^3-ημ^2xεφx<0\Rightarrow x^3<ημ^2xεφx\Rightarrow εφx>\frac{x^3}{ημ^2x}$$

$$\Rightarrow xεφx>\frac{x^4}{ημ^2x}\Rightarrow -xεφx<-\frac{x^4}{ημ^2x},\ \text{οπότε}$$

$$2x^2-ημ^2x-xεφx<2x^2-ημ^2x-\frac{x^4}{ημ^2x}$$

$$=x^2\left(2-\frac{ημ^2x}{x^2}-\frac{x^2}{ημ^2x}\right)<0$$

αφού $\dfrac{ημ^2x}{x^2}+\dfrac{x^2}{ημ^2x}>2$, δεδομένου ότι στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $0<\dfrac{ημ^2x}{x^2}\neq 1$. Άρα $g(x)<0$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Απομένει να δείξουμε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=3x^2-2ημx\cdot συνx\cdot εφx-ημ^2x(1+εφ^2x)$$

$$=3x^2-2ημ^2x-εφ^2x \text{ και } f'(0)=0$$

Επιπλέον,

$f''(x)=...=2(3x-ημ2x-εφx-εφ^3x)$ και $f''(0)=0$

$f^{(3)}(x)=...=2(2-2συν2x-4εφ^2x-3εφ^4x)$ και $f^{(3)}(0)=0$

$f^{(4)}(x)=8(\eta\mu 2x-2\varepsilon\varphi x-5\varepsilon\varphi^3 x-3\varepsilon\varphi^5 x)$

Στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $\eta\mu 2x<2x<2\varepsilon\varphi x$, οπότε $f^{(4)}(x)<0$. Άρα η συνάρτηση $f^{(3)}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $f^{(3)}(x)=0$ οπότε $f^{(3)}(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τελικά ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=0$. Επομένως, $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

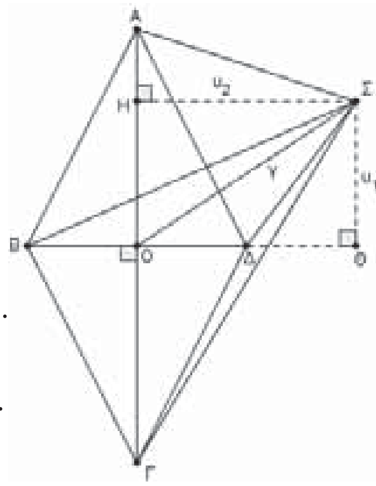
ΑΣΚΗΣΗ 376 (ΤΕΥΧΟΣ 120)

Θεωρούμε ρόμβο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, διαγωνίους $A\Gamma=2\alpha$, $B\Delta=2\beta$ και έστω Σ σημείο στο εξωτερικό του που απέχει από το Ο απόσταση $\Sigma O=\gamma$. Οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ φαίνονται από το Σ υπό γωνίες φ και ω αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$4\alpha^2\beta^2\gamma^2=\beta^2(\alpha^2-\gamma^2)^2\varepsilon\varphi^2\varphi+\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2\varepsilon\varphi^2\omega$$

Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη

ΛΥΣΗ Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι



Σε καθένα από τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΒΔ εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων και έχουμε:

$4\alpha^2=A\Sigma^2+\Gamma\Sigma^2-2A\Sigma\cdot$

και

$4\beta^2=B\Sigma^2+\Delta\Sigma^2-2B\Sigma\cdot$

Επιπλέον, από το πρώτο θεώρημα διαμέσων στα ίδια τρίγωνα, έχουμε: $A\Sigma^2+\Gamma\Sigma^2=2\gamma^2+2\alpha^2$ και

$$B\Sigma^2+\Delta\Sigma^2=2\gamma^2+2\beta^2$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα ζεύγη ισοτήτων παίρνουμε:

$$A\Sigma\cdot\Gamma\Sigma\sigma\upsilon\nu\varphi=\gamma^2-\alpha^2 \text{ και } B\Sigma\cdot\Delta\Sigma\sigma\upsilon\nu\omega=\gamma^2-\beta^2$$

Έτσι, έχουμε:

$$\beta^2(\alpha^2-\gamma^2)^2\varepsilon\varphi^2\varphi+\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)^2\varepsilon\varphi^2\omega$$
$$=\beta^2\cdot A\Sigma^2\cdot\Gamma\Sigma^2\cdot\eta\mu^2\varphi+\alpha^2\cdot B\Sigma^2\cdot\Delta\Sigma^2\cdot\eta\mu^2\omega$$
$$=4\beta^2(\Sigma A\Gamma)^2+4\alpha^2(\Sigma B\Delta)^2=4\beta^2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\alpha\upsilon_2\right)^2+4\alpha^2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\beta\upsilon_1\right)^2$$
$$=4\alpha^2\beta^2\upsilon_2^2+4\alpha^2\beta^2\upsilon_1^2=4\alpha^2\beta^2\left(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2\right)=4\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

αφού, $\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\gamma^2$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο, Παπαδόπουλος Δήμος - Έδεσα και Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια

Προτεινόμενα Θέματα

387. Να αποδείξετε ότι σε οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\geq\dfrac{1}{R^2}$, όπου α, β, γ είναι οι πλευρές του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

388. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ, Ν εσωτερικά σημεία της πλευράς ΒΓ, ώστε $BM=N\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{A\Gamma^2}{AM}+\dfrac{AB^2}{AN}>B\Gamma$

Αποστολόπουλος Γιώργος - Μεσολόγγι.

389. Τρένο αφήνει τον σιδηροδρομικό σταθμό όταν το ρολόι δείχνει h ώρες, m λεπτά και 0 δευτερόλεπτα. Αφού διανύσει 8 Km ο οδηγός του παρατηρεί ότι ο λεπτοδείκτης είναι ακριβώς πάνω από τον ωροδείκτη. Αν η μέση ταχύτητα στα 8Km διαδρομής είναι $33Km/h$, να βρείτε την ώρα αναχώρησης του τρένου.

Καραβότας Δημήτριος - Κ. Αχαΐα.

390. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu x^2-x^2\eta\mu(\eta\mu^2 x)}{x^{10}}$$

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσα.

391. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{7\pi}{9}}=40$$

Τσιώλης Γεώργιος - Τρίπολη

Το Βήμα του Ευκλείδη

Τα τρίγωνα και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι

Κούλης Νώντας - Γκουνέλα Μαρία, Παράρτημα **ΕΜΕ Αχαΐας**

1) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τρία σημεία Ζ, Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

i. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΕΖ, ΒΖΔ και ΓΔΕ περνούν από το ίδιο σημείο

ii. $B\hat{O}\Gamma = B\hat{A}\Gamma + Z\hat{\Delta}E$.

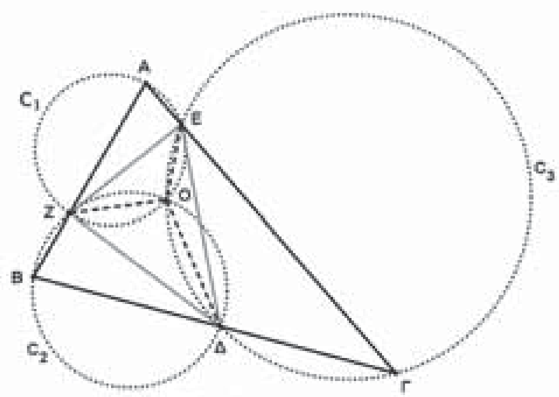
Λύση

i. Έστω C_1 και C_2 οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΔΖ και Ο το δεύτερο σημείο τομής τους. Θα αποδείξουμε ότι και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΕ διέρχεται από το Ο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΓΔΟΕ είναι εγγράψιμο. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΕΟΖ είναι $E\hat{O}Z = 180^o - \hat{A}$ (1). Όμοια από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΖΟΔ είναι $\Delta\hat{O}Z = 180^o - \hat{B}$ (2).

Είναι $\Delta\hat{O}E = 360^o - \Delta\hat{O}Z - E\hat{O}Z \overset{(1).(2)}{=}$

$360^o - 180^o + \hat{B} - 180^o + \hat{A} = \hat{B} + \hat{A} = 180^o - \hat{\Gamma}$, άρα

$\Delta\hat{O}E + \hat{\Gamma} = 180^o$ οπότε το ΓΔΟΕ είναι εγγράψιμο.



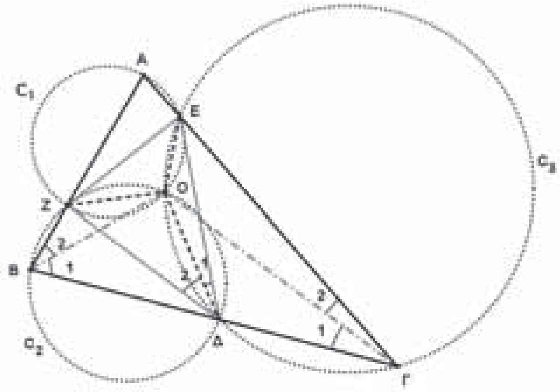
(Σχ. 1)

ii. Είναι (Σχ. 2) $B\hat{O}\Gamma = 180^o - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1$

$= B\hat{A}\Gamma + (\hat{B} - \hat{B}_1) + (\hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1) = B\hat{A}\Gamma + \hat{B}_2 + \hat{\Gamma}_2$ (1). Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΟΖΒΔ θα είναι $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$ (2).

Όμοια από το εγγράψιμο ΟΕΓΔ θα είναι $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_1$ (3).
Η (1) λόγω των (2), (3) γίνεται:

$$B\hat{O}\Gamma = B\hat{A}\Gamma + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_1 = B\hat{A}\Gamma + Z\hat{\Delta}E.$$



(Σχ. 2)

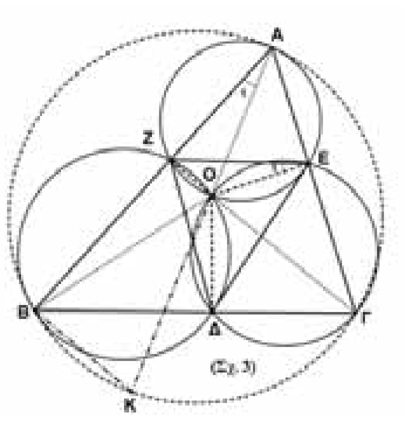
Παρατήρηση: Όμοια θα ισχύει $A\hat{O}\Gamma = \hat{B} + \hat{E}$ και $A\hat{O}B = \hat{\Gamma} + \hat{Z}$.

2) Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, τότε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΔΕΖ.

Λύση

Από την προηγούμενη άσκηση είναι $B\hat{O}\Gamma = \hat{A} + \hat{\Delta} = 2\hat{A}$.

Όμοια $B\hat{O}A = \hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2\hat{\Gamma}$ και $A\hat{O}\Gamma = \hat{B} + \hat{E} = 2\hat{B}$ δηλαδή το σημείο Ο βλέπει τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ με διπλάσιες γωνίες αντίστοιχα των γωνιών Α, Β, Γ, οπότε θα συμπίπτει με κέντρο της περιγεγραμμένης περιφέρεια του τριγώνου ΑΒΓ. Έστω Κ το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς το Ο (Σχ. 3).



Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΖΟΕ θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = B\hat{A}K$ (1).

Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο (ΑΚ διάμετρος) άρα $\hat{A}_1 + B\hat{K}A = 90^o$ και λόγω της (1) θα είναι $\hat{E}_1 + B\hat{A}K = 90^o$ (2).

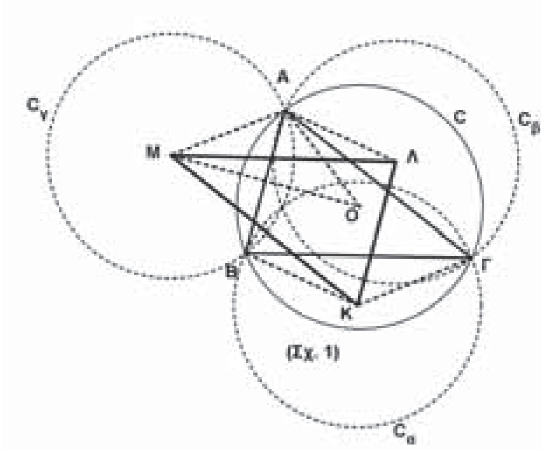
Είναι $B\hat{\Gamma}A = B\hat{K}A$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο και επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι όμοια ($\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$) θα είναι $B\hat{\Gamma}A = B\hat{K}A = \Delta\hat{Z}E$ (3).

Η (2) λόγω της (3) γίνεται: $\hat{E}_1 + \Delta\hat{Z}E = 90^o$, άρα η ΕΟ⊥ΖΔ, δηλαδή το ΕΟ θα είναι το ύψος του τριγώνου ΔΕΖ. Όμοια ΔΟ⊥ΖΕ, οπότε το Ο θα είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΖΔΕ.

3) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με χορδές τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ, γράφουμε τόξα εκτός του τριγώνου, που να φαίνονται με γωνίες Α, Β, Γ αντίστοιχα. Έστω C_α, C_β και C_γ οι αντίστοιχες περιφέρειες με κέντρα Κ, Λ, Μ και C ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

α) Οι κύκλοι C_α, C_β, C_γ και C είναι ίσοι

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ίσα.



(Σχ. 1)

Λύση

α) Για να είναι ίσοι δύο κύκλοι αρκεί να έχουν ίσες ακτίνες. Είναι $B\hat{K}\Gamma = 2\hat{K} = 2\hat{A} = B\hat{O}\Gamma$ από κατασκευή. Τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΟΓ είναι ισοσκελή, έχουν κοινή πλευρά την ΒΓ και $B\hat{K}\Gamma = B\hat{O}\Gamma$, άρα θα είναι ίσα, οπότε ΟΒ=ΟΓ=ΚΒ=ΚΓ, δηλαδή οι κύκλοι C_α και C είναι ίσοι. Αντίστοιχα για τους άλλους κύκλους.

β) Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΚΒΓ.
Επειδή οι κύκλοι C_α, C_β και C_γ είναι ίσοι θα έχουμε ΑΜ=ΑΛ=ΚΒ=ΚΓ ως ακτίνες ίσων κύκλων, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $M\hat{A}\Lambda = B\hat{K}\Gamma$. Κάθε σημείο του τόξου του κύκλου C_α που είναι εξωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, βλέπει τη ΒΓ με γωνία Α, άρα η επίκεντρη γωνία $B\hat{K}\Gamma = 2\hat{A}$ (1).

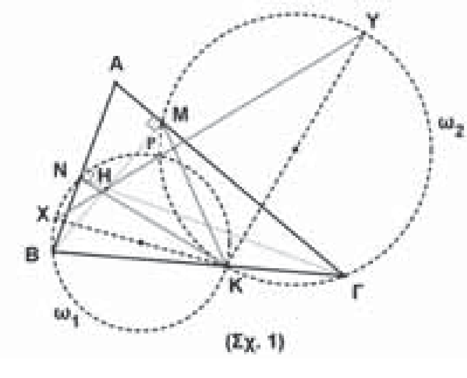
Τα σημεία Μ, Ο είναι συμμετρικά ως προς την ΑΒ άρα $M\hat{A}B = B\hat{A}O$ (2).

Όμοια τα σημεία Λ, Ο είναι συμμετρικά ως προς την ΑΓ άρα $\Lambda\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}O$ (3).

Θα έχουμε $M\hat{A}\Lambda = M\hat{A}B + B\hat{A}O + O\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Lambda \overset{(2),(3)}{=} 2B\hat{A}O + 2O\hat{A}\Gamma = 2\hat{A}$ (4).

Από (1), (4) θα είναι $M\hat{A}\Lambda = B\hat{K}\Gamma$, οπότε τα τρίγωνα ΑΜΛ, ΚΒΓ θα είναι ίσα άρα ΜΛ=ΒΓ.
Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι ΜΚ=ΑΓ και ΚΛ=ΑΒ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΚΛΜ θα είναι ίσα.

4) Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, έστω Μ, Ν τα ίχνη των υψών του από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα. Έστω Κ τυχαίο σημείο στο εσωτερικό της πλευράς ΒΓ. Ας είναι ω_1, ω_2 οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΒΝΚ, ΓΜΚ αντίστοιχα. Έστω ακόμα Χ, Υ τα αντιδιαμετρικά σημεία του Κ ως προς τους κύκλους ω_1, ω_2 αντίστοιχα και Ρ το σημείο τομής των ω_1, ω_2 με Ρ≠Κ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Χ, Υ και Η είναι συνευθειακά, όπου Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. (ΙΜΟ 2013).



(Σχ. 1)

Η απόδειξη θα στηριχτεί σε τρία λήμματα.

Λήμμα 1: Τα σημεία Χ, Υ, Ρ είναι συνευθειακά.

Λήμμα 2: Τα σημεία Α, Ρ, Κ είναι συνευθειακά.

Λήμμα 3: Τα σημεία Α, Ν, Μ, Ρ, Η είναι ομοκυκλικά.

Απόδειξη 1: Η ΧΚ είναι διάμετρος του ω_1 και $P \in \omega_1$. Άρα $X\hat{P}K = 90^\circ$.
Όμοια η ΥΚ είναι διάμετρος του ω_2 και $P \in \omega_2$. Άρα $Y\hat{P}K = 90^\circ$.
Άρα $X\hat{P}Y = X\hat{P}K + Y\hat{P}K = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα τα Χ, Ρ, Υ είναι συνευθειακά.

Απόδειξη 2: Θα δείξουμε ότι το σημείο Α έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους ω_1 και ω_2. Πράγματι, λόγω της τέμνουσας ΑΝΒ του ω_1, $\Delta^A_{\omega_1} = AN \cdot AB$, (1) ενώ λόγω της τέμνουσας ΑΜΓ του ω_2, $\Delta^A_{\omega_2} = AM \cdot A\Gamma$ (2). Όμως το τετράπλευρο ΒΓΜΝ είναι εγγράψιμο, αφού $B\hat{N}\Gamma = B\hat{M}\Gamma = 90^\circ$ και οι ΑΝΒ, ΑΜΓ είναι τέμνουσες του περιγεγραμμένου κύκλου του ΒΝΜΓ, άρα $AN \cdot AB = AM \cdot A\Gamma$(3).

Από τις (1),(2),(3) έπεται ότι όντως το σημείο Α έχει την ίδια δύναμη ως προς τους ω_1, ω_2, άρα θα ανήκει στον ριζικό τους άξονα, που είναι ο φορέας της κοινής τους χορδής ΡΚ. Άρα, τα σημεία Α, Ρ, Κ είναι συνευθειακά.

Απόδειξη 3: Από την άσκηση 1 έπεται ότι τα σημεία Α,Μ,Ρ,Ν είναι ομοκυκλικά. Όμως, το τετράπλευρο ΑΝΗΜ είναι εγγράψιμο, αφού $A\hat{N}H = A\hat{M}H = 90^\circ$. Άρα, τα σημεία Α, Ν, Η, Ρ, Μ είναι ομοκυκλικά.

Αλλά ας επιστρέψουμε στην απόδειξη της άσκησης.

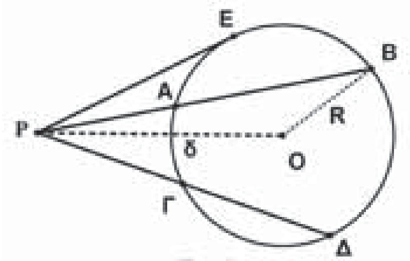
Λόγω του λήμματος (1), το ζητούμενο θα έχει αποδειχθεί εάν δείξουμε ότι τα σημεία Χ, Η, Ρ είναι συνευθειακά. Για να το δείξουμε αυτό, θα δείξουμε ότι $K\hat{P}H = K\hat{P}X$. Πράγματι, $A\hat{P}H = 90^\circ$, αφού η ΑΗ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του πενταγώνου ΑΝΗΡΜ και το σημείο Ρ ανήκει σε αυτόν τον κύκλο. Άρα $K\hat{P}H = 180^\circ - A\hat{P}H = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ αφού λόγω του λήμματος 2 τα Α, Ρ, Κ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα $K\hat{P}H = 90^\circ$. (4)

Ακόμα, $K\hat{P}X = 90^\circ$(5), αφού όπως είπαμε και πριν η ΚΧ είναι διάμετρος του ω_1 και $P \in \omega_1$.

Από τις (4), (5) έπεται ότι $K\hat{P}H = K\hat{P}X$ άρα τα σημεία Χ,Η,Ρ είναι συνευθειακά, συνεπώς λόγω των παρατηρήσεων στην αρχή της απόδειξης καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Παράρτημα

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

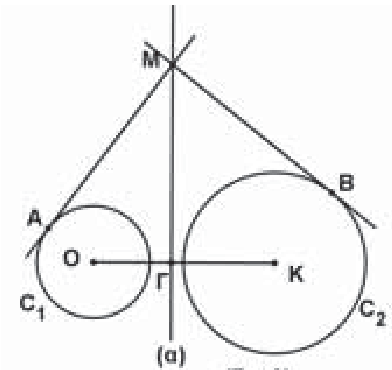


(Σχ. 1)

Θεώρημα: Δίνεται κύκλος (Ο, R) και Ρ ένα εξωτερικό σημείο Ρ του κύκλου. Από το Ρ φέρουμε τις τέμνουσες ΡΑΒ, ΡΓΔ και την εφαπτομένη ΡΕ του κύκλου (Σχ. 1).

Να αποδείξετε ότι $PE^2 = PA \cdot PB = PO^2 - R^2 = \delta^2 - R^2$, όπου δ=ΟΡ. Την απόδειξη μπορείτε να βρείτε στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρία της Β Λυκείου στη σελίδα 61. Η διαφορά (πραγματικός αριθμός) $\boldsymbol{\delta^2 - R^2}$ λέγεται δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R) και συμβολίζεται $\Delta^{P}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = PO^2 - R^2$

Ο ριζικός άξονας



(Σχ. 2)

Θεώρημα: Τα σημεία του επιπέδου (γεωμετρικός τόπος) τα οποία έχουν ίσες δυνάμεις ως προς δύο μη ομόκεντρους κύκλους είναι μια ευθεία (α), κάθετη στη διάκεντρο των δύο αυτών κύκλων.

Αντίστροφα, κάθε σημείο της ευθείας (α) έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους (Σχ. 2). Η ευθεία αυτή (α) λέγεται **ριζικός άξονας** των δύο κύκλων.

Μερικές ιδιότητες του ριζικού άξονα.

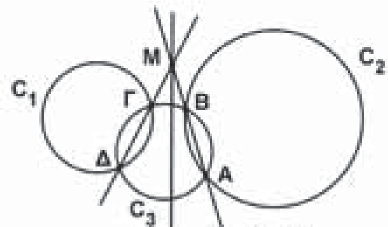
i. Ο ριζικός άξονας δύο κύκλων που τέμνονται στα Α, Β είναι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β.

ii. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά τότε ο ριζικός άξονας είναι η κοινή τους εφαπτομένη στο σημείο επαφής.

iii. Αν δύο κύκλοι είναι ίσοι τότε ο ριζικός τους άξονας είναι η μεσοκάθετη της διακέντρου των κύκλων.

iv. Ο ριζικός άξονας δύο κύκλων διχοτομεί τις κοινές εξωτερικές και εσωτερικές εφαπτόμενες τους.

v. Ένας κύκλος C_3 τέμνει τους κύκλους C_2 και C_1, στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα (Σχ. 3), τότε οι ευθείες ΑΒ, ΔΓ τέμνονται επί του ριζικού άξονα των C_1 και C_2.



(Σχ. 3)

Βιβλιογραφία:

1) Επίπεδη Γεωμετρία Ι. Γ. Ιωαννίδη
2) Γεωμετρία Νικ. Α. Κισκύρα
2) Γεωμετρία Α. Κ. Κυριακόπουλου
3) Γεωμετρία Εμμ. και Πολ. Γεωργιακάκη
4) Ελάσσον Γεωμετρικόν Παμφίλου

Λύσεις Διοφαντικής εξίσωσης

Γιάννης Προμπονάς - Λεόντειο Λύκειο Ν. Σμύρνης

1. Εισαγωγή: Στο άρθρο αυτό θα ασχοληθούμε με τις λύσεις της εξίσωσης $X^2 + Ψ^2 = Z^2$, όπου Χ, Ψ και Ζ φυσικοί αριθμοί. Η εξίσωση αυτή λέγεται διοφαντική ή απροσδιόριστης ανάλυσης δευτέρου βαθμού. Στην περίπτωση αυτή η τριάδα λύσεων (Χ, Ψ, Ζ) λέγεται Πυθαγόρεια. Μεγάλοι Μαθηματικοί της Αρχαιότητας, όπως ο Διόφαντος, ο Πυθαγόρας, και ο Ευκλείδης, αλλά και φιλόσοφοι, όπως ο Πλάτωνας, με διάφορες μεθόδους, έδωσαν Πυθαγόρειες τριάδες. Όπως ξέρουμε, μεγάλοι μαθηματικοί αργότερα, από την περίοδο της Αναγέννησης και μετά, στην Ευρώπη μελέτησαν και το πρόβλημα των Πυθαγόρειων τριάδων και δεν έχουν βρεθεί λύσεις, οι οποίες να απαντούν σε όλες τις περιπτώσεις αυτού του προβλήματος. Στη μελέτη αυτή θα επιλύσουμε την Διοφαντική εξίσωση. Αυτό σημαίνει ότι θα βρούμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες, για να έχει η εξίσωση ακέραιες λύσεις και να τις προσδιορίσουμε με ακρίβεια.

Η θεωρητική θεμελίωση αυτής της εργασίας παρέχει τη δυνατότητα, για την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων, για άρτιους, περιττούς και πρώτους αριθμούς, με την εφαρμογή τυπολογίου.

2. Λύσεις Διοφαντικής εξίσωσης:

Η Διοφαντική εξίσωση $X^2 + Ψ^2 = Z^2$ γράφεται $Ψ^2 = Z^2 - X^2$ ή $Ψ^2 = (Z - X)(Z + X)$

Είναι $(Z - X) + (Z + X) = 2Z$ άρτιος: Άρα $\left\{\begin{array}{c}(A)\ Z - X \text{ άρτιος και } Z + X \text{ άρτιος} \quad (1)\\ \text{ή}\\ (B)\ Z - X \text{ περιττός και } Z + X \text{ περιττός} \quad (2)\end{array}\right.$

Από (Α) προκύπτει, Ζ άρτιος και Χ άρτιος ή Ζ περιττός και Χ περιττός, οπότε σε κάθε περίπτωση $Z - X = ρ$ είναι άρτιος και έτσι $Ψ^2 = ρ(Z + X) = ρ(2Z - ρ)$. (3)

Το πρώτο μέλος της (3) είναι τέλειο τετράγωνο άρα πρέπει $2Z - ρ = κ^2ρ$, οπότε

$$Z = \frac{ρ}{2}(κ^2 + 1) \text{ και } X = \frac{ρ}{2}(κ^2 + 1) - ρ \text{ ή } X = \frac{ρ}{2}(κ^2 - 1)$$

με κ = 2, 3, 4, . . . και η (1) γράφεται: $Ψ^2 = [(κ^2 + 1)]^2 - [(κ^2 - 1)]^2$ ή $Ψ = κρ$.

Τελικά, οι λύσεις (Χ, Ψ, Ζ) της διοφαντικής εξίσωσης (1) δίνονται από τις

$$Z = \frac{ρ}{2}(κ^2 + 1),\ X = \frac{ρ}{2}(κ^2 - 1),\ Z - X = ρ,\ Ψ = ρκ,$$

με ρ = 2, 4, 6, ... Οι μικρότεροι διαδοχικοί ακέραιοι Χ, Ψ, Ζ προκύπτουν όταν ρ = 2 και κ = 2 με (Ψ, Χ, Ζ) = (3, 4, 5) η γνωστή πυθαγόρεια τριάδα. Ενδεικτικά με ρ = 2 και κ = 3, 4, 5, 6, 7, . . . προκύπτουν : (8, 6, 10), (15, 8, 17), (24, 12, 26), (48, 14, 50), (63, 16, 65), κ.λ.π

Τρόπος εργασίας: $κ^2 + 1 = 5, 10, 17, 26, 37, 50, . . .$, $κ^2 - 1 = 3, 8, 15, 24, 35, 48, . . .$

Δίνεται ο φυσικός αριθμός ν και ζητείται: αν είναι λύση της (1), να βρεθούν οι άλλοι δύο της τριάδας. Αναλύουμε τον φυσικό αριθμό ν σε γινόμενο παραγόντων, αν δεν υπάρχει παράγοντας της μορφής $κ^2+1$, τότε Ζ, ν ομοίως, αν δεν υπάρχει παράγοντας της μορφής $κ^2-1$ τότε Χ, ν.

Εφαρμογή 1η:

ν = 96 =2 · 48 = 3 · 32 = 4 · 24 = 6 · 16 = 8 · 12. Άρα Ζ, 96. Όμως είναι πολλαπλάσιο της μορφής $κ^2 - 1$

α) $48 = 7^2 - 1$ άρα κ = 7, $X = 96 = \frac{ρ}{2}(49 - 1)$, άρα ρ = 4, $Z = \frac{4}{2}(72 + 1) = 100$, Ψ = κρ = 4 · 7=28,

(Χ, Ψ, Ζ) = (96, 28, 100).

β) $3 = 2^2 - 1$ άρα κ = 2, $96 = \frac{ρ}{2}3$, ρ = 64, $Z = \frac{64}{2}(2^2 + 1) = 160$, Ψ = κρ = 128, (Χ, Ψ, Ζ) = (96, 128, 160)

γ) $96 = \frac{ρ}{2}(5^2 - 1)$, ρ = 8, $Z = \frac{8}{2}(5^2 + 1)$, κ = 5, Ζ = 104, Ψ = κρ = 5 · 8 = 40, (Χ, Ψ, Ζ) = (96, 40, 104)

δ) $96 = \frac{ρ}{2}(3^2 - 1)$, κ = 3, ρ = 24, Ζ = Χ + ρ = 96 + 24 = 120, Ψ = 3 · 24 = 72, (Χ, Ψ, Ζ) = (96, 72, 120).

Ψ = ν = 96 = 2.48 = 3.32 = 4.24 = 6.16 = 8.12

1) κ = 2, ρ = 48, τότε : (Χ, Ψ, Ζ) = (360, 96, 408),
2) κ = 48, ρ = 2, τότε : (Χ, Ψ, Ζ) = (2303, 96, 2305),
3) κ = 32, ρ = 3, απορρίπτεται πρέπει κ περιττός,
4) κ = 3, ρ = 32, τότε : (Χ, Ψ, Ζ) = (128, 96, 160),
5) κ = 24, ρ = 4, τότε : (Χ, Ψ, Ζ) = (1150, 96, 1154),

6) $\kappa = 4, \rho = 24$, τότε : $(X, \Psi, Z) = (180, 96, 204)$,
7) $\kappa = 6, \rho = 16$, τότε : $(X, \Psi, Z) = (280, 96, 296)$,
8) $\kappa = 16, \rho = 6$, τότε : $(X, \Psi, Z) = (765, 96, 771)$,
9) $\kappa = 8, \rho = 12$, τότε : $(X, \Psi, Z) = (378, 96, 390)$,
10) $\kappa = 12, \rho = 8$, τότε : $(X, \Psi, Z) = (572, 96, 580)$.

Εφαρμογή 2η:

$\nu = 40 = 1.40 = 2.20 = 4.10 = 5.8$,

α) $Z = \frac{8}{2}(3^2+1)$, $\rho=8$, $\kappa=3$, $X=Z-\rho=32$, $\Psi=\rho\kappa=24$ και έτσι $(X, \Psi, Z) = (32, 24, 40)$,

β) $Z = 40 = \frac{16}{2}(2^2+1)$, $\rho = 16$, $\kappa = 2$ $X = Z-\rho = 24$, $\Psi=\rho\kappa=32$ και έτσι $(X, \Psi, Z) = (24, 32, 40)$,

γ) $X = 40 = \frac{10}{2}(3^2-1)$, $\rho = 10$, $\kappa = 3$, $Z = X + \rho = 50$, $\Psi = \kappa\rho = 30$ και έτσι $(X, \Psi, Z)=(30,40,50)$.

$\Psi = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$ οπότε:

i) $\rho = 2$, $\kappa = 20$, $Z = \frac{2}{2}(20^2+1) = 401$, $X = Z - \rho = 399$ και έτσι $(X, \Psi, Z) =(399, 40, 401)$,

ii) $\rho = 20$, $\kappa = 2$, $Z = \frac{20}{2}\cdot(2^2+1) = 50$, $X = Z - \rho = 30$ και έτσι $(X, \Psi, Z) =(30, 40, 50)$,

iii) $\rho = 4$, $\kappa = 10$, $Z = \frac{4}{2}\cdot(10^2+1) = 202$, $X = Z - \rho = 198$ και έτσι $(X, \Psi, Z) = (198, 40, 202)$,

iv) $\rho = 10$, $\kappa = 4$, $Z = \frac{10}{2}\cdot(4^2+1) = 85$, $X = Z - \rho = 75$ και έτσι $(X, \Psi, Z) =(75, 40, 85)$,

v) $\rho = 8$, $\kappa = 5$, $Z = \frac{8}{2}\cdot(5^2+1) = 104$, $X = Z - \rho = 96$ και έτσι $(X, \Psi, Z) =(96, 40, 104)$.

Από (B) προκύπτει $\Psi^2 = (Z - X)(Z + X) = P(Z + X)$, γινόμενο περιττών. Άρα Ψ^2 τετράγωνο περιττού.

α) Εκδοχή πρώτη: Αφού Ψ^2 τέλειο τετράγωνο, πρέπει $Z-X=\rho$ και $Z+X=\rho C^2$, οπότε $Z=\frac{(1+C^2)}{2}$, με $\rho \in \{1,3,5,7,\ldots\}$, $C \in \{3,5,7,\ldots\}$ και $C^2 + 1 \geq 10$. Με $C = 2\mu + 1$

Προκύπτει $Z = \frac{\rho\left[1+(2\mu+1)^2\right]}{2} = \rho\left[2\left(\mu^2+\mu\right)+1\right]$, γινόμενο περιττών, άρα περιττός. Αν $\rho = 1$, τότε $Z = \frac{\rho(1+C^2)}{2}$ και $\Psi = \rho C = C$. Όταν ($C = 5$, $Z = 5$, $X = 4$, $\Psi = 3$), ($C = 5$, $Z = 13$, $X = 12$, $\Psi = 5$), ($C = 7$, $Z = 25$, $X = 24$, $\Psi = 5$), μέθοδος **Πυθαγόρα** με διαφορετικό τρόπο.

β) Εκδοχή δεύτερη: Θέτοντας $Z-X=\gamma^2$ και $Z+X=\lambda^2$, έχουμε $\Psi^2=\gamma^2\lambda^2$ και $Z = \frac{\gamma^2+\lambda^2}{2}$, με γ και λ περιττοί αριθμοί, $\gamma^2 = \{1, 9, 25, 49, 81, 121, \ldots\}$, $\lambda^2 = \{9, 25, 49, 81, 121, \ldots\}$

Εφαρμογές:

1) $Z = 29$, πρώτος. Τότε $29 = \frac{1+C^2}{2}$ και $C^2 = 57$, αδύνατη. Όμως $29 = \frac{\gamma^2+\lambda^2}{2}$, οπότε $58 = \gamma^2 + \lambda^2 = 3^2 + 7^2$ και έτσι $\Psi = \gamma \cdot \lambda = 21$, $X = 20$, $(X, \Psi, Z) = (20,21,2,29)$.

2) $Z = 23$, πρώτος. Τότε $23 = \frac{1+C^2}{2}$ και $C^2 = 45$, αδύνατη.

Επίσης $46 = \gamma^2 + \lambda^2$ αδύνατη. Επομένως δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 23 και κάθετες πλευρές φυσικούς αριθμούς.

3) $Z = 123 = 1 \cdot 123 = 3 \cdot 41$. Τότε $3 \cdot 41 = \frac{\rho\left(C^2+1\right)}{2}$ και $\rho = 3$, $41 = \frac{\left(C^2+1\right)}{2}$, $C=9$, οπότε $\Psi = \rho \cdot C = 3 \cdot 9 = 27$, $X^2 = 41^2 - 27^2$, $X = 120$, $(X, \Psi, Z) = (120,27, 123)$.

Επίσης $123 = \frac{\gamma^2+\lambda^2}{2}$ και $246 = \gamma^2 + \lambda^2$ αδύνατη. Ομοίως $123 = \frac{C^2+1}{2}$ και $C^2 = 245$ αδύνατη.

4) $Z = 85 = 5 \cdot 17$. Τότε $Z = \frac{34}{2}(2^2+1)$ και $\rho = 34$, $\kappa = 2$, οπότε $\Psi = \rho \cdot \kappa =$

$34 \cdot 2 = 68$, $X = Z - \rho = 85 - 34 = 51$, $(X, \Psi, Z) = (51, 68, 85)$. Επίσης $Z = \frac{10}{2}(4^2+1)$ και $\rho = 10$, $\kappa = 4$, οπότε $\Psi = \rho \cdot \kappa = 10 \cdot 4 = 40$, $X = Z - \rho = 85 - 10 = 75$, $(X, \Psi, Z) = (75, 40, 85)$.

Ακόμη $Z = 5 \cdot 17 = \frac{\rho(C^2+1)}{2}$. Τότε $\rho = 5$, $C^2 = 33$ αδύνατη. Επίσης $Z = 85 = \frac{\gamma^2+\lambda^2}{2}$,

$170 = \gamma^2 + \lambda^2 = 1^2 + 13^2$, $\gamma = 1$, $\lambda = 13$, $\Psi = 1 \cdot 13 = 13$, $X = 84$, $(X, \Psi, Z) = (84, 13, 85)$.

5) Z άρτιος με Z, πολλ$(\kappa^2 + 1)$. Τότε αναλύουμε Z = άρτιος × περιττός.

Έστω $Z = 52 = 4 \cdot 13$. Τότε $Z' = 13 = \frac{C^2+1}{2}$, $C^2 = 26 - 1$, $C = 5$, και έτσι $\Psi' = 1 \cdot 5 = 5$,

$X'^2 = 13^2 - 5^2$, $X' = 12$. Άρα $(X, \Psi, Z) = (4 \cdot 12,\ 4 \cdot 5,\ 4 \cdot 13) = (48, 20, 52)$.

Πρόβλημα. Δίνεται ο φυσικός αριθμός ν = 205. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τριάδες- λύσεις της εξίσωσης $X^2+\Psi^2=Z^2$, που περιέχουν τον φυσικό αριθμό ν=205.

Λύση. Έχουμε $205 = 1 \cdot 205 = 5 \cdot 41$ και επομένως $Z = 1 \cdot 205 = \frac{\rho(C^2+1)}{2}$, οπότε $\rho = 1$ και $C = 410$ αδύνατη. Επίσης $Z = 5 \cdot 41 = \frac{\rho(C^2+1)}{2}$, οπότε $\rho = 5$ και $C^2 = 81$ ή $C = 9$.

Άρα $\Psi = \rho \cdot c = 5 \cdot 9 = 45$, $X = Z - \rho = 205 - 5 = 200$ και $(X, \Psi, Z) = (200, 45, 205)$.

$Z = \frac{\gamma^2+\lambda^2}{2}$, οπότε $410 = \gamma^2 + \lambda^2 = 11^2 + 17^2$ και έτσι $\Psi = \gamma \cdot \lambda = 11 \cdot 17 = 187$,

$X = Z - \gamma^2 = 205 - 121 = 84$, $(X, \Psi, Z) = (84, 187, 205)$.

$205 = Z = \frac{\rho(\kappa^2+1)}{2} = \frac{82}{2}(2^2+1)$, οπότε $\rho = 82$ και $\kappa = 2$ και έτσι $\Psi = \rho \cdot \kappa = 164$,

$X = Z - \rho = 205 - 82 = 123$, $(X, \Psi, Z) = (123, 164, 205)$.

$\Psi = 205 = 1 \cdot 205$, οπότε από την $\Psi = \rho\kappa$ έπεται $\rho = 1$ και $\kappa = 205$. Επομένως

$Z = \frac{1}{2}(205^2+1) = 21013$ $X = Z - \rho = 21012$ και $(X, \Psi, Z) = (21012, 205, 21013)$.

$\Psi = 205 = 41 \cdot 5$, οπότε από την $\Psi = \rho\kappa$ έπεται $\rho = 41$ και $\kappa = 5$. Επομένως

$Z = \frac{41}{2}(5^2+1) = 533$ $X = Z - \rho = 492$ και $(X, \Psi, Z) = (492, 205, 533)$.

$\Psi = 205 = 5 \cdot 41$, οπότε από την $\Psi = \rho\kappa$ έπεται $\rho = 5$ και $\kappa = 14$. Επομένως

$Z = \frac{5}{2}(41^2-1) = 4200$ $Z = X + \rho = 4205$ και $(X, \Psi, Z) = (4200, 205, 4205)$.

3. Επίλογος: Με βάση όσα εκθέσαμε, μας δίνεται η δυνατότητα να καταλήξουμε σε κάποια γενικά συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα,

1) Για κάθε πρώτο αριθμό ν η εκδοχή πρώτη και η εκδοχή δεύτερη, με βάση το τυπολόγιο μπορεί να διαπιστωθεί αν Z = ν. Με Z, ν, τότε υπάρχει μόνο μια τριάδα λύσης με $\Psi = \nu = 1 \cdot \nu = \rho\kappa$, με $\rho = 1$ και $\kappa = \nu$. Τότε $\Psi = \nu$, $X = \frac{(\nu^2-1)}{2}$, $Z = \frac{(\nu^2+1)}{2}$.

2) Για κάθε περιττό, ακολουθείται η ίδια διαδικασία με τον πρώτο αριθμό.

3) Για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό ν, με βάση τη θεωρία **(Α)** και **(Β)** βρίσκουμε όλες τις δυνατές τριάδες λύσεων, όπου σε κάθε τριάδα, ένας από τους τρεις είναι ο φυσικός αριθμός ν.

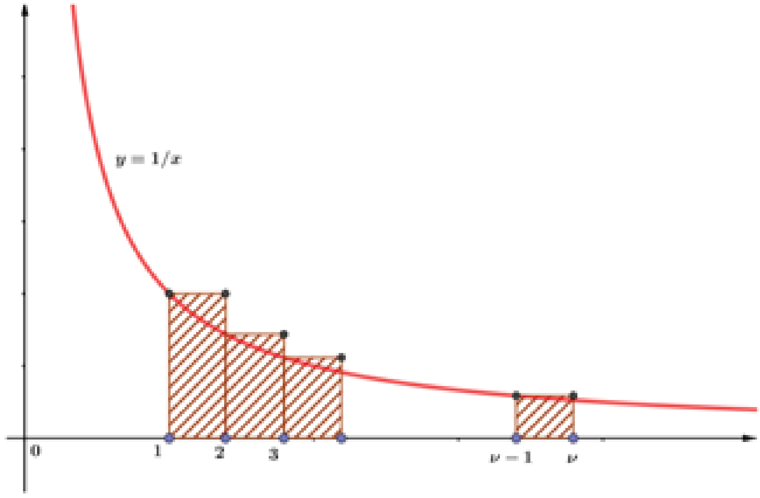
4) Η βασική αρχή των Αρχαίων Ελλήνων στηρίζεται στη δημιουργία ταυτοτήτων, οι οποίες δίνουν Πυθαγόρειες τριάδες μονοσήμαντα, για ν=2ρ+1, όπου ρ τυχαίως ακέραιος, η τριάδα $X = \nu$, $\Psi = \frac{(\nu^2-1)}{2}$, $Z = \frac{(\nu^2-1)}{2}$ είναι λύση της $X^2 + \Psi^2 = Z^2$. Με ν= 13, τότε X = 13, Ψ = 84, Z = 85. με βάση την εφαρμογή (4) ότι έχουμε (51, 68, 85), (75, 40, 85), (84, 13, 85), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι έχουνε υποσύνολο λύσεων.

Απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια εμβαδών

Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος Ηλείας

1. Να αποδειχτεί ότι $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}>\ln\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^*$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x},\ x>0$. Στο ορθογώνιο σύστημα xOy ορίζουμε στον άξονα $x'x$ τα σημεία με τετμημένες $1,2,\ldots,\nu-1,\nu$ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάση 1 και ύψος την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ σε καθένα από τα υποδιαστήματα $[1,2],[2,3],\ldots,[\nu-1,\nu]$. Το άθροισμα των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων είναι $E=1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}+\ldots+1\cdot\frac{1}{\nu}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}$ και



είναι προφανές ότι το συγκεκριμένο εμβαδόν είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$, $x=\nu$. Συνεπώς έχουμε $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}>\int_1^\nu\frac{dx}{x}$ ή $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}>\ln\nu$.

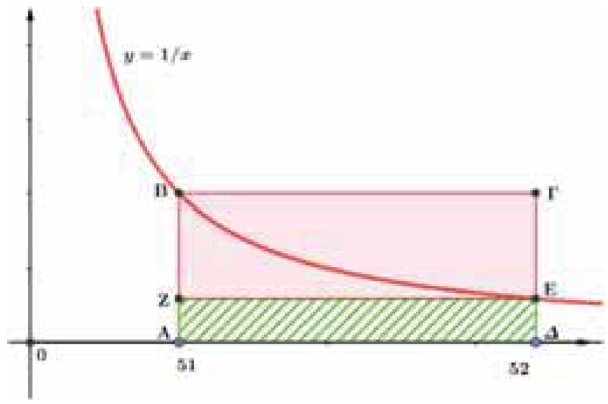
2. Να αποδειχτεί ότι $\frac{1}{1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{m\sqrt{m}}<2-\frac{2}{\sqrt{m}}$, $m\in\mathbb{N}^*$

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$, $x\geq 1$. Είναι $f \searrow [1,m]$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα κατασκευάζουμε ορθογώνια με βάση 1 και ύψος την μικρότερη τιμή της f σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2],[2,3],\ldots[m-1,m]$. Το άθροισμα των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων είναι

$E=1\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{m\sqrt{m}}$ και είναι προφανές ότι αυτό το εμβαδόν είναι μικρότερο από το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=m$. Είναι $\int_1^m\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=1-\frac{2}{\sqrt{m}}$, οπότε είναι $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{m\sqrt{m}}<1-\frac{2}{\sqrt{m}}$ ή $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{m\sqrt{m}}<2-\frac{2}{\sqrt{m}}$.

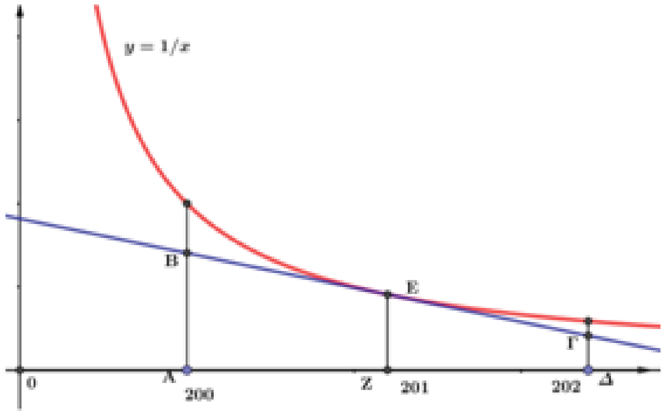
3. Να αποδειχτεί ότι $\frac{1}{52}<\ln\frac{52}{51}<\frac{1}{51}$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ στο διάστημα $[51,52]$ και τα ορθογώνια με βάση το 1 και ύψη τους αριθμούς $\frac{1}{51}$ και $\frac{1}{52}$.



Είναι προφανές ότι $(\text{ΑΖΕΔ})<\int_{51}^{52}\frac{1}{x}dx<(\text{ΑΒΓΔ})$ ή $\frac{1}{52}<[\ln x]_{51}^{52}<\frac{1}{51}$ ή $\frac{1}{52}<\ln\frac{52}{51}<\frac{1}{51}$.

4. **Να συγκριθούν οι αριθμοί: $\frac{2}{201}$ και $\ln\frac{101}{100}$.**



Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ στο διάστημα $[200,202]$. Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=201$ τέμνει τις κατακόρυφες ευθείες στα Α , Δ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα.

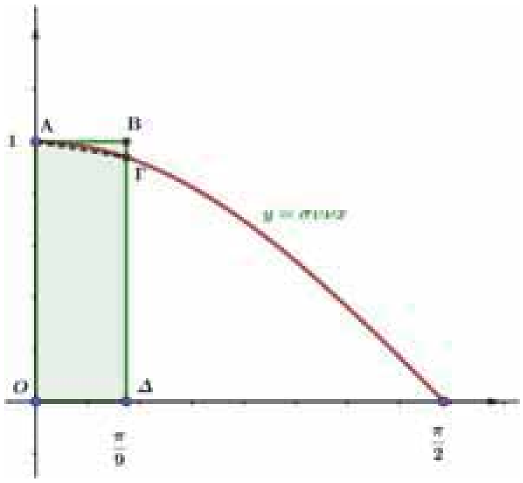
Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσο με $\frac{2}{201}$ και είναι μικρότερο από το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=200$, $x=202$.

Είναι $\int_{200}^{202}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_{200}^{202}=\ln\frac{202}{200}=\ln\frac{101}{100}$, συνεπώς $\ln\frac{101}{100}>\frac{2}{201}$

5. **Να αποδειχτούν οι ανισότητες:**

a. $ημ20^0<\frac{7}{20}$ **b.** $ημ20^0>\frac{1}{3}$

Λύση: a. Είναι $ημ20^0=ημ\frac{\pi}{9}=\int_0^{\frac{\pi}{9}}συνx\,dx$. Συνεπώς το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου ΟΑΓΔ είναι ίσο με $ημ20^0$. Το καμπυλόγραμμο τραπέζιο ΟΑΓΔ περιέχεται στο ορθογώνιο ΟΑΒΔ το οποίο έχει εμβαδόν $\frac{\pi}{9}$. Επομένως είναι $ημ20^0<\frac{\pi}{9}$. Όμως $\frac{\pi}{9}<\frac{7}{20}$, άρα $ημ20^0<\frac{7}{20}$.

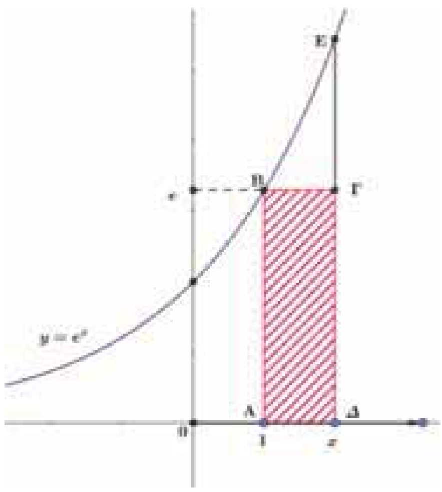


b. Για το ορθογώνιο τραπέζιο ΟΑΓΔ θεωρούμε ότι (ΟΑΓΔ)=Ε. Το συγκεκριμένο τραπέζιο περιέχεται στο καμπυλόγραμμο τραπέζιο ΟΑΓΔ συνεπώς $E<(ΟΑΓΔ)=ημ20^0=ημ\frac{\pi}{9}$.

Είναι $E=\frac{1+συν\frac{\pi}{9}}{2}\cdot\frac{\pi}{9}<ημ\frac{\pi}{9}$.

Λύνουμε την τελευταία ανίσωση ως προς $ημ\frac{\pi}{9}$. Θέτουμε $ημ\frac{\pi}{9}=t>0$. Τότε είναι $συν\frac{\pi}{9}=\sqrt{1-t^2}$ και η ανίσωση γίνεται $\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{2}\cdot\frac{\pi}{9}<t\Rightarrow t>\frac{36\pi}{\pi^2+18^2}\Rightarrow ημ\frac{\pi}{9}>\frac{36\pi}{\pi^2+18^2}>\frac{36\cdot 3{,}1}{324+3{,}1^2}=\frac{111{,}6}{334{,}24}>0{,}3338>\frac{1}{3}$ Άρα $ημ\frac{\pi}{9}>\frac{1}{3}$.

6. **Να αποδειχτεί ότι $e^x\ge e\cdot x$, $x\ge 1$**

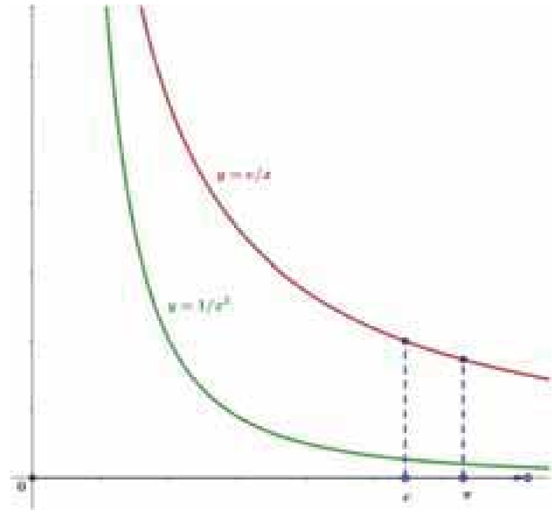


Λύση: Για $x=1$, η ανίσωση $e^x\ge ex$ ισχύει ως ισότητα. Έστω $x>1$. Τότε έχουμε: $e^x\ge ex\Leftrightarrow e^x-e\ge ex-e\Leftrightarrow\int_1^x e^t dt\ge\int_1^x e\,dt$.

Η τελευταία ανίσωση ισχύει και μάλιστα αυστηρά γιατί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι μικρότερο του εμβαδού του καμπυλόγραμμου τραπεζίου ΑΒΕΔ. Συνεπώς έχουμε $\int_1^x e^t dt > \int_1^x e dt$, άρα για κάθε $x \ge 1$, $e^x \ge ex$.

7. Να συγκριθούν οι αριθμοί: $e^{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{e}}$ και $\left(\frac{e}{\pi}\right)^e$

Λύση: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=\frac{e}{x}$. Οι γραφικές τους παραστάσεις εμφανίζονται στο διπλανό σχήμα.



Είναι $E_1=\int_e^\pi \frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{e}-\frac{1}{\pi}$, $E_2=\int_e^\pi \frac{e}{x}dx=e\cdot\ln\frac{\pi}{e}$. Είναι προφανές ότι $E_1<E_2$, οπότε

$$\frac{1}{e}-\frac{1}{\pi}<e\cdot\ln\frac{\pi}{e}\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}-\frac{1}{e}>e\cdot\ln\frac{e}{\pi}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{e}}>e^{e\cdot\ln\frac{\pi}{e}}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{e}}>\left(\frac{e}{\pi}\right)^e$$

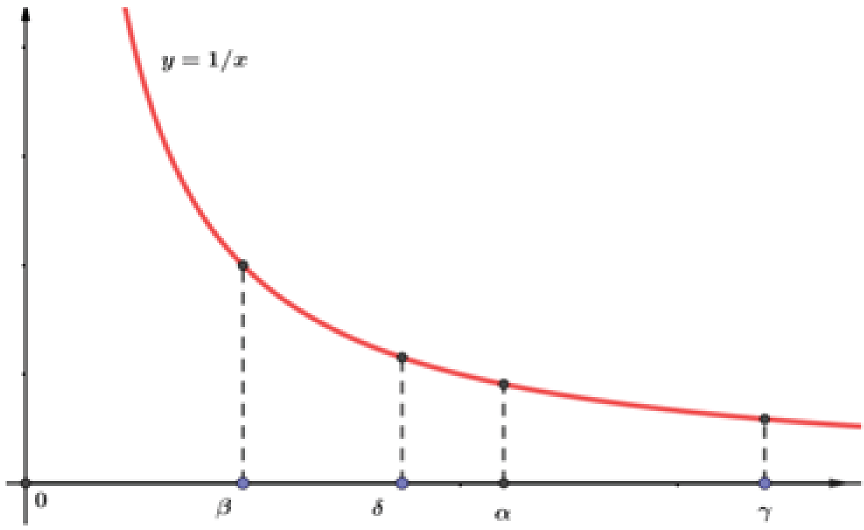
8. Αν $\alpha,\beta,\gamma>1$ με $\frac{\alpha}{\beta}\ge\frac{\gamma}{\alpha}$, τότε : $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\ge\frac{\ln\gamma}{\ln\alpha}$.

Λύση: Είναι $\frac{\alpha}{\beta}\ge\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha^2\ge\beta\gamma\Leftrightarrow\alpha\ge\sqrt{\beta\gamma}$ $\quad(1)$.

Υποθέτουμε ότι $\gamma>\beta$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $\alpha\ge\sqrt{\beta\gamma}>\sqrt{\beta^2}=\beta\Rightarrow\alpha>\beta$.

- Αν $\gamma\le\alpha$, τότε η αποδεικτέα είναι προφανής.
- Συνεπώς θεωρούμε ότι $\gamma>\alpha$ και η αποδεικτέα γράφεται: $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-1\ge\frac{\ln\gamma}{\ln\alpha}-1\Leftrightarrow\frac{\ln\alpha-\ln\beta}{\ln\beta}\ge\frac{\ln\gamma-\ln\alpha}{\ln\alpha}$ $\quad(2)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\beta$, $x=\alpha$ είναι $E_1=\int_\beta^\alpha \frac{1}{x}dx=\ln\alpha-\ln\beta$, ενώ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\gamma$, $x=\alpha$ είναι $E_2=\int_\alpha^\gamma \frac{1}{x}dx=\ln\gamma-\ln\alpha$.



Συνεπώς για να αποδείξουμε την (2) , αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{E_1}{\ln\beta}\ge\frac{E_2}{\ln\alpha}$ $\quad(\alpha>\beta,\gamma>\alpha)$ $\quad(3)$.

Έστω $\delta=\sqrt{\beta\gamma}$.

Τότε είναι $E_3=\int_\beta^\delta \frac{1}{x}dx=\ln\delta-\ln\beta=\ln\frac{\delta}{\beta}=\ln\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\beta}=\ln\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}=\ln\frac{\gamma}{\sqrt{\beta\gamma}}=\ln\frac{\gamma}{\delta}=\ln\gamma-\ln\delta=\int_\delta^\gamma \frac{1}{x}dx=E_4$

Παρατηρούμε ότι $E_1\ge E_3=E_4\ge E_2\Rightarrow E_1\ge E_2$. Όμως $\ln\beta<\ln\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\beta}>\frac{1}{\ln\alpha}$ και σε συνδυασμό με το . $E_1\ge E_2$, λαμβάνουμε την (3).

Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

> **Ο χρόνος δίνει όλες τις απαντήσεις, είναι πολύ ομιλητικός και δεν χρειάζεται τις ερωτήσεις. Ευριπίδης**

Μέτρα στα λόγια μας

Πολλές εκφράσεις στον καθημερινό μας λόγο παραπέμπουν σε **μέτρα και σταθμά** από το παρελθόν και ιδιαίτερα από το Βυζάντιο.

Δυο μέτρα δυο σταθμά. Μην τα παίρνεις τοις μετρητοίς. Ψηλά τον **πήχη** έβαλε.

Μην το κουνήσεις **ρούπι** από εδώ (ρούπι=υποδιαίρεση του πήχη). Μια χούφτα χώμα.

Πηχυαίος ο τίτλος της εφημερίδας. Δεν έχει **δράμι** μυαλό (δράμι=υποδιαίρεση της οκάς).

Μια σπιθαμή Γη. Μια πρέζα αλάτι(όσο πιάνουν τα 3 δάκτυλα).

Ένα **κατοσταράκι** κρασί(100 δράμια, τότε δεν μετρούσαν με όγκο τα υγρά αλλά με βάρος)

Ο Ήλιος είναι μια **οργιά** ψηλά. Τα πουλάνε με την **οκά** (για φθηνοπράγματα)

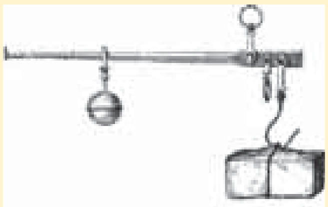
Τα 'χει **τετρακόσια**.(τόσα δράμια είχε η οκά)

Παλαιότερα όλα τα προϊόντα (στερεά και υγρά) τα μετρούσαν με το βάρος τους και τα διέθεταν οι έμποροι χύμα. Πολλαπλάσιο της οκάς ήταν το καντάρι = 44 οκάδες= 56,5 περίπου κιλά.

Πρόδωσε τον Ιησού για 30 **αργύρια** (νόμισμα του Λιβάνου). Τον απήγαγαν και ζήτησαν **λύτρα** για να τον απελευθερώσουν(λύτρα αρχ. Ελληνική). Στο Βυζάντιο **λίτρα** ήταν μονάδα βάρους και **Λογαρική λίτρα** ήταν βάση για το νομισματικό σύστημα, εισήχθη από τον Κωνσταντίνο Α΄ το 309.

Μία λίτρα=12 ουγγίες=1728 κεράτια. Πολλαπλάσια της λίτρας ήταν κετηνάριον και ο **μόδιος**. Για μικρά βάρη είχαν το **ζύγιν** και για μεγάλα τον **κάμπανον** (στατήρα ή καντάρι).

Ένα **ζευγάριον γη**=έκταση που μπορεί ένα ζευγάρι βόδια να οργώσει σε μια μέρα.



Στατήρας ή καντάρι
(εφεύρεση του Αρχιμήδη)
απαιτεί δύο άτομα.

Το **καντάρι** είχε την **Αλαφριά ή αλαφρή πλευρά** για μικρά βάρη και τη Βαριά πλευρά για μεγαλύτερα βάρη. Το ίδιο ήταν και **η παλάντζα**, που ήταν Στατήρας με δίσκο για να τοποθετούν εκεί τα προϊόντα που θα ζυγίσουν. «Αυτός ζυγίζει απ' τις αλαφριές» (φράση για τους αφελείς).

Βάλε μια Βεδούρα (ξύλινο δοχείο ως μέτρο δημητριακών, 10 οκάδες). Έδωσε ένα **Ξάι** (70 οκάδες).

Παλάντζα

Τα φλουριά τα ζύγιζαν με το Φλουρόδραμο (μικρή ζυγαριά ακριβείας).

Ο **πήχης** (ή πήχυς) προέρχεται από το ομώνυμο οστό του χεριού μας και στην πράξη ο εμπορικός πήχης(για μέτρηση υφασμάτων) ήταν ίσος με 64 εκατοστά του μέτρου, το μήκος αυτό είναι από τον ώμο μέχρι το άκρο του χεριού μας. Υπήρχε και ο τεκτονικός πήχης, ίσος με 75 εκατοστά του μέτρου για οικοδομικές μετρήσεις. Άλλες μονάδες ήταν ο **χρυσός σόλιδος**, για μεγάλες συναλλαγές.Ο **χάλκινος φόλλις**, μικρής αξίας για τις καθημερινές συναλλαγές. Το ρωμαϊκό **δηνάριο**. Ο **μόδιος** (μονάδα μέτρησης σιτηρών αλλά και μονάδα μέτρησης γης), **το πινάκιον, το ταγάριον, το εξάγιον**, για το **μήκους** ήταν το μίλλιον, το στάδιον, η οργυιά, ο πήχυς, το βήμα, ο πους, η σπιθαμή, το δίμοιρον και ο δάκτυλος.(Στην ανέγερση του ναού της Αγίας Σοφίας ως μέτρο χρησιμοποιήθηκε **ο βυζαντινός πους 31,23** εκατοστά του μέτρου). Μονάδες **επιφανείας**_ήταν ο μόδιος έκτασης, το σχοινίον ή σοκάριον, η **λίτρα έκτασης**. **Όγκου** ήταν ο **μόδιος όγκου**, το χοινίκιν, το βασιλικόν κάλαθον, η μίνα, το λαγήνιον, ο βίκος, το θαλάσσιον μέτρον, το μοναστηριακόν μέτρον, το ελαϊκόν μέτρον, το ανωνικόν και το μεγαρικόν μέτρον. Το βυζαντινό μετρητικό σύστημα ήταν δωδεκαδικό και οι μετρητικές μονάδες ήταν πολλές και διαφορετικές, ανάλογα με το είδος του προϊόντος. Άλλες μονάδες για το εμπόριο ξηράς, άλλες της θάλασσας, άλλες για άγονη ή καλλιεργήσιμη γη κλπ. Όπως και σήμερα είχαν υπεύθυνους για τον έλεγχο των μέτρων που χρησιμοποιούσαν οι έμποροι και λέγονταν **βουλλωτές** γιατί βούλλωναν(σφράγιζαν) τα πρότυπα των μέτρων. Για τον ποιοτικό έλεγχο και έλεγχο βάρους των χρυσών νομισμάτων είχαν υπεύθυνους τους **ζυγοστάτες.**

Μια πολύτιμη μονάδα

Η ουγκιά: Θα έχετε ακούσει ότι τα πολύτιμα μέταλλα και τα διαμάντια, τα υπολογίζουν με την Ουγκιά. Η Ουγκιά (oz) είναι μονάδα μάζας αλλά χρησιμοποιείται ως μονάδα βάρους για πολύτιμα μέταλλα. Μια **ουγκιά (1 oz) =** 31,104 γραμμάρια.

Τα καράτια (carat): Αν ένα χρυσό κόσμημα έχει π.χ. βάρος 5 γραμμάρια και αναγράφει 585 ή 750 ή 835 αυτό σημαίνει ότι είναι 14 ή 18 ή 20 καράτια. Δηλαδή 14/24=0,583 γράφουν 585, και 5x0,585=2,92 είναι το πολύτιμο μέταλλο. Αν μια ουγκιά χρυσού έχει 2000 € τότε το κόσμημα που είναι 14 καράτια έχει αξία (2000/31,104)x2,92=64,30x2,92=187,75€

Το ίδιο για 18 καράτια 18/24=0,750 γράφουν 750 ή 20 καράτια 20/24=0,833 γράφουν 835.

Το καράτι ή κεράτιον, είναι το όνομα του σπόρου του χαρουπιού ή ξυλοκέρατου που στην αρχαία Ελλάδα λεγόταν κεράτιον. Πρώτοι το χρησιμοποίησαν οι έμποροι πολύτιμων λίθων και πετραδιών, οι οποίοι αναζήτησαν μια πολύ μικρή μονάδα μέτρησης βάρους. Έτσι χρησιμοποίησαν σπόρους χαρουπιού οι οποίοι είναι σκληροί και δεν μεταβάλουν το βάρος τους. Από το 1930 καθιερώθηκε παγκοσμίως ως μονάδα μέτρησης του βάρους των πολύτιμων λίθων το ένα καράτι (carat) το οποίο ισούται με το 1/5 του γραμμαρίου, δηλαδή 1ct = 0,20gr. Πήχης και οκά καταργήθηκαν το 1953. Από το 1961 έχουμε το **Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI)**, είναι ένα δεκαδικό σύστημα μονάδων μέτρησης που λόγω της απλότητάς του εφαρμόζεται σε μεγάλο ποσοστό του κόσμου έναντι παλαιοτέρων άλλων συστημάτων που βασίζονται σε ιδιαίτερες μονάδες όπως η ίντσα, η λίβρα κλπ.

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η διαφορά: Ένας μαθητής πήρε 28 διαδοχικούς αριθμούς μεταξύ του 2500 και 2600 και τους έγραψε σε 4 στήλες ως εξής:
Αν το άθροισμα των αριθμών στην $1^η$ στήλη είναι Σ1 και στην $4^η$ είναι Σ3 ποια είναι η διαφορά Σ3-Σ1;

A1	A2	A3	A4
A5	A6	A7	A8
A9	A10	A11	A12
A25	A26	A27	A28

Τα πολλαπλάσια: Όλοι ξέρουμε τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια των μονάδων π.χ. λέμε bit, Byte, κίλομπαϊτ(10^3), mega(M, 10^6), giga(G, 10^9), tera(T, 10^{12}), ξέρετε πως λέγονται τα μεγαλύτερα πολλαπλάσια;

Αγώνας δρόμου: Σε έναν αγώνα δρόμου πήραν μέρος τρία παιδιά ο Πέτρος, η Ιωάννα και η Ειρήνη. Όταν τερμάτισε ο Πέτρος η Ιωάννα είχε τρέξει 2500 μέτρα και η Ειρήνη 2000 μέτρα. Όταν τερμάτισε και η Ιωάννα η Ειρήνη είχε τρέξει 2800 μέτρα. Πόσα μέτρα ήταν ο αγώνας; (κάθε παιδί έχει την ταχύτητά του)

Τέλειο τετράγωνο: Να βρεθούν τρεις αριθμοί, αριθμ. προόδου, ώστε το άθροισμα τους ανά δύο να είναι τετράγωνο.

Οι κύβοι: Ένας μαθητής πρόσθεσε δύο αριθμούς, ύστερα τους ύψωσε στον κύβο και τους ξαναπρόσθεσε. Παρατήρησε ότι τα αθροίσματα είναι τα ίδια. Έκανε λάθος;

Το τρίγωνο: Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο αν από το μήκος της υποτείνουσας αφαιρέσουμε το μήκος οποιασδήποτε κάθετης πλευράς προκύπτει τέλειος κύβος. Ποιες είναι οι πλευρές του;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 122

Ο Γρίφος της ΕΜΕ: Από τις σημειώσεις προκύπτει ότι ο μυστικός αριθμός είναι: ΑΒΓ2019

Η πιθανότητα: Το 99,99% είναι μεγαλύτερο από το 99,100%.

Ο 3ψήφιος: Αν ο 3ψήφιος ήταν αβγ προκύπτει αβγ επί 7. Δηλαδή διαιρούμε το αποτέλεσμα δια 7 και έχουμε τον 3ψήφιο.

Το χαρτί: Έχω ένα χαρτί Α4 και το διπλώνω, βλέπω ότι το χαρτί μικραίνει σε διαστάσεις πολύ γρήγορα και αυξάνει σε πάχος γεωμετρικά όπως λέγεται. Αυτή η διαδικασία είναι μια εφαρμογή Γεωμετρικής προόδου. Γι' αυτό δεν μπορείτε να διπλώσετε οτιδήποτε περισσότερο από 7 ή 8 φορές.

διπλώνω	διαστάσεις σε χιλιοστά	επιφάνεια σε τετραγ χιλιοστά	Πάχος σε χιλιοστά
	300x200	60.000	1
1η	150x200	30.000	2
2η	150x100	15.000	4
3η	75x100	7500	8
4η	75x50	3750	16
5η	37,5x50	1875	32
6η	37,5x25	937,5	64
7η	18,75x25	468,75	128
8η	18,75x12,5	234,375=60000:256	256

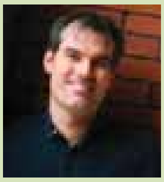
Βλέπουμε ότι η αρχική επιφάνεια μειώθηκε 256 φορές και το πάχος αυξήθηκε 256 φορές.

Η Αθηνά: Το 2025 θα είναι 45 ετών και 2025:45=45.

αφορμές ... και στιγμιότυπα

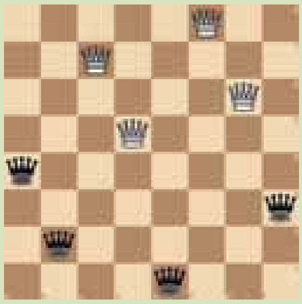
Το σκακιστικό πρόβλημα της βασίλισσας

Ο μαθηματικός Simkin έδωσε λύση σε σκακιστικό πρόβλημα 150 ετών



Ένα δημοφιλές σκακιστικό πρόβλημα, ο Γρίφος της Βασίλισσας, έχει πονοκεφαλιάσει μαθηματικούς, σκακιστές και πληροφορικούς για πολλές δεκαετίες, αν και κανείς δεν έχει βρει έναν αλγόριθμο που να τον λύνει εύκολα και αποτελεσματικά. Βρετανοί ερευνητές βγήκαν μάλιστα και μας είπαν πρόσφατα ότι κανένας υπολογιστής δεν θα τα καταφέρει ποτέ, προσφέροντας και αμοιβή 1 εκατ. δολαρίων σε όποιον αποδείξει ότι κάνουν λάθος! Ο γρίφος υπάρχει από τη δεκαετία του **1850** και μας προκαλεί να τοποθετήσουμε 8 βασίλισσες σε μια σκακιέρα έτσι ώστε καμία από αυτές να μην μπορεί να επιτεθεί στην άλλη.

Η βασίλισσα είναι το πιο ισχυρό πιόνι στη σκακιέρα, αφού μπορεί να κινείται κάθετα, οριζόντια και διαγώνια για όσα τετράγωνα θέλει. Το πρόβλημα των **8 βασιλισσών** είναι από τα πιο διαδεδομένα παιχνίδια προγραμματισμού και απαιτεί **να τοποθετηθούν 8 βασίλισσες σε μία σκακιέρα 8×8.** Το σκακιστικό πρόβλημα έχει λυθεί από τους ανθρώπους, καθώς έχουν προταθεί 92 λύσεις από τους 4.426.165.368 πιθανούς συνδυασμούς τοποθέτησης των 8 βασιλισσών στην ασπρόμαυρη σκακιέρα, αν και τόσο οι μαθηματικοί όσο και οι πληροφορικοί δεν μπορούν να βρουν μια μαγική και γρήγορη φόρμουλα.



Όσο μάλιστα η σκακιέρα γίνεται μεγαλύτερη και τοποθετούνται περισσότερες βασίλισσες, τότε το πράγμα γίνεται σαφώς δυσκολότερο, όπως μας λέει η μελέτη που δημοσιεύτηκε στο «The Journal of Artificial Intelligence Research», και ισχυρίζεται ότι είναι πρακτικά αδύνατο για έναν υπολογιστή να το λύσει σε εύλογο χρονικό διάστημα! «Υπολογιστικά κοστοβόρο» το λένε, καθώς σε μια σκακιέρα 27×27 τετραγώνων υπάρχουν 2,34 τετράκις εκατομμύρια πιθανές λύσεις. Όταν μάλιστα η σκακιέρα φτάσει στα 1.000×1.000 τετράγωνα και ο υπολογιστής πρέπει να τοποθετήσει 1.000 βασίλισσες, τότε χάνεται στην άβυσσο των τρελά μεγάλων αριθμών. Το πρόβλημα των n-βασιλισσών εμφανίστηκε σε ένα γερμανικό περιοδικό σκακιού το **1848** και έγινε γνωστό ως το πρόβλημα των 8 βασιλισσών, ενώ η σωστή απάντηση ήρθε δυο χρόνια αργότερα. Το **1869** όμως η διευρυμένη έκδοση του προβλήματος δε βρήκε ποτέ απάντηση μέχρι σήμερα.

Όπως μας λέει ο επικεφαλής της έρευνας και καθηγητής πανεπιστημίου **Ian Gent,** κάθε υπολογιστής θα χρειάζονταν χιλιάδες χρόνια για να βρουν την αποδοτικότερη λύση

Ο Gent μας λέει ότι όποιος καταφέρει να λύσει με κάποιο πρόγραμμα τον Γρίφο της Βασίλισσας, τότε θα έχει στα χέρια του έναν πανίσχυρο αλγόριθμο που θα μπορούσε να διαχειριστεί και τα άλλα σχεδόν αδύνατα προβλήματα της ανθρωπότητας, όπως η αποκωδικοποίηση των σοβαρότερων κρυπτογραφημάτων.

Ο **Michael Simkin**, μαθηματικός του Harvard, υπολόγισε πως υπάρχουν **(0.143n)** n τρόποι με τους οποίους οι βασίλισσες μπορούν να τοποθετηθούν χωρίς να επιτίθενται η μία στην άλλη σε μία γιγαντιαία σκακιέρα **nxn.** Η εξίσωση του Simkin δεν προσφέρει ακριβή απάντηση αλλά ένα προσεγγιστικό νούμερο στην απάντηση, με το 0.143 να αντιπροσωπεύει ένα μέσο επίπεδο αβεβαιότητας.

Για παράδειγμα σε μία σκακιέρα με ένα εκατομμύριο βασίλισσες, το 0.143 θα πολλαπλασιαστεί με το 1.000.000 δίνοντάς μας 143.000. Έπειτα το νούμερο υψώνεται στη δύναμη του 1.000.000 δίνοντάς μας μία απάντηση με πέντε εκατομμύρια ψηφία. Όσον αφορά τη **χωροταξική τοποθέτηση**, ο Simkin βρήκε πως όσο μεγαλώνει η σκακιέρα και αυξάνονται τα πιόνια, οι διατάξεις που επιτρέπουν τις περισσότερες τοποθετήσεις βασιλισσών τείνουν να τις συγκεντρώνονται στα άκρα της σκακιέρας με λιγότερες βασίλισσες προς το **κέντρο της**. Για να καταλήξει στη λύση του, ο Simkin πήρε πρώτα τους μέσους όρους της κατανομής των βασιλισσών στο ταμπλό. Χρησιμοποίησε αυτές τις τιμές για να καθορίσει την τιμή του κατώτερου ορίου, δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό λύσεων που θα έχει μία συγκεκριμένη τιμή του ν. Χρησιμοποιώντας μία στρατηγική γνωστή ως **"Αρχή Μεγιστοποίησης της Εντροπίας"**, ο Simkin μελέτησε μια υπομονάδα του πλέγματος που δημιούργησε (και την οποία ονόμασε "queenon") για να βρει την τιμή του ανώτερου ορίου. Και οι δύο προσεγγίσεις χρησιμοποιούν τον μέσο όρο ή/και την τυχαιότητα ως μέσο για να βοηθήσουν στη μοντελοποίηση της σωστής τιμής. Ο Simkin διαπίστωσε ότι οι δύο διαφορετικές συναρτήσεις που έθεσε για τις τιμές του κατώτερου και του ανώτερου ορίου είναι σχεδόν ίσες, πράγμα που σημαίνει ότι το σύνολο των πιθανών απαντήσεων είναι άμεσα συνδεδεμένες, δημιουργώντας μία **στέρεη μαθηματική εκτίμηση**.

Ο Simkin εργαζόταν στο πρόβλημα εδώ και πέντε χρόνια, ενώ δηλώνει πως είναι αρκετά κακός παίκτης σκακιού. Υποστηρίζει πως είναι θεωρητικά πιθανό να βρεθεί μία πιο ακριβής απάντηση στο πρόβλημα, αλλά είναι ικανοποιημένος με τη δουλειά του και θα αφήσει κάποιον άλλο να το επιχειρήσει.

Πηγές: arXiv, unboxholics.com, esquire.com, diakonima.gr, cyprusnews.eu, eps.edu.gr, europa.eu

Το βραβείο Shaw 2021

Το διεθνές βραβείο **Shaw στην Αστρονομία για το 2021 απονεμήθηκε** εξίσου στην Ελληνίδα **αστροφυσικό** της διασποράς **Χρύσα Κουβελιώτου**, καθηγήτρια και πρόεδρο του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Τζορτζ Ουάσιγκτον και αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Αθηνών από το 2016, και στη Βικτόρια Κάσπι, καθηγήτρια Φυσικής και διευθύντρια του Ινστιτούτου Διαστήματος McGill Space του Καναδά, για τη συμβολή τους στη μελέτη και κατανόηση των μάγναστρων (magnetars). Τα magnetars είναι αστέρες **νετρονίων** με πολύ ισχυρό **μαγνητικό πεδίο**, τα οποία συνδέονται με ένα ευρύ φάσμα αστροφυσικών φαινομένων υψηλών ενεργειών.

Οι αστέρες νετρονίων είναι υπέρπυκνα μαγνητισμένα απομεινάρια αστρικών εκρήξεων. Περιστρέφονται με περιόδους περιστροφής χιλιοστών του δευτερολέπτου έως μερικών δευτερολέπτων και εκπέμπουν ισχυρές δέσμες παλμικής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (εξ ου και η ονομασία «πάλσαρ»). Λόγω της περιστροφής τους αυτής αποτελούν ακριβή «κοσμικά ρολόγια» και «εργαστήρια» μελέτης διαφόρων φυσικών φαινομένων σε βαρυτικά πεδία δισεκατομμύρια φορές ισχυρότερα της Γης.

Η έρευνα των Κάσπι και Κουβελιώτου βασίστηκε στη θεωρητική πρόβλεψη της ύπαρξης αστέρων νετρονίων με μαγνητικά πεδία έως και χιλιάδες φορές ισχυρότερα από αυτά των απλών pulsars, τα οποία παράγουν ισχυρές εκλάμψεις ακτίνων γ. Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία τροφοδοτείται κυρίως από τεράστιες δεξαμενές μαγνητικής ενέργειας στην μαγνητόσφαιρά τους και δευτερευόντως από την περιστροφή τους. Οι βραβευθείσες ανέπτυξαν νέες παρατηρησιακές μεθόδους, οι οποίες επιβεβαίωσαν την ύπαρξη αυτών των αντικειμένων και προσδιόρισαν τις φυσικές τους ιδιότητες. Η εργασία τους καθιέρωσε τα magnetars ως μία νέα και σημαντική κατηγορία αστροφυσικών αντικειμένων.

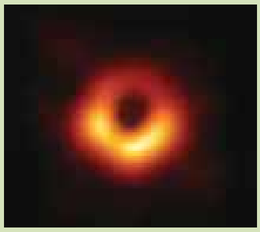
Η Χρύσα Κουβελιώτου γεννήθηκε στην Αθήνα το 1956. Σπούδασε φυσική στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και πραγματοποίησε μεταπτυχιακές σπουδές στο Πανεπιστήμιο του Sussex στο Ηνωμένο Βασίλειο το 1977. Έλαβε το διδακτορικό της από το Τεχνικό Πανεπιστήμιο του Μονάχου και το Ινστιτούτο Μαξ Πλανκ το 1981. Ακολούθησε ακαδημαϊκή σταδιοδρομία στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και εν συνεχεία στις Ηνωμένες Πολιτείες, όπου εργάστηκε ως ερευνήτρια στο Διαστημικό Κέντρο Πτήσεων Μάρσαλ της NASA (Marshall Space Flight Center). Είναι μέλος της Εθνικής Ακαδημίας Επιστημών των ΗΠΑ από το 2013 και έχει λάβει σειρά υψηλών διακρίσεων και βραβείων για το έργο της.

Το «Θεώρημα Αρετάκη»

ή το θεώρημα "των ακραίων μελανών οπών"

Αρετάκης Στέφανος: Επίκουρος καθηγητής στα **θεωρητικά Μαθηματικά** στο University of Toronto, βραβεύτηκε πρόσφατα από το ίδρυμα Μποδοσάκη και λίγο πριν, τον Αύγουστο του 2021, τον βράβευσε η **IAMP** (International Union of Pure and Applied Physics) στον κλάδο των καθαρών Μαθηματικών και για την επιρροή του στη θεωρία της Σχετικότητας. Σε μια σειρά από πρωτοποριακές εργασίες, απέδειξε μαθηματικά την **ύπαρξη** μίας νέας **αστάθειας** των λεγομένων ακραίων μελανών οπών, που ονομάστηκε **αστάθεια Αρετάκη**. Το στοιχείο της εμπλοκής του στο χώρο των Μαθηματικών, είχε γίνει από πολύ νωρίς, αφού από νεαρή ηλικία έχει συμμετάσχει και κερδίσει μετάλλια σε ελληνικές και διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Πρόκειται για ένα νέο μαθηματικό που μελετά **επιστημονικά προβλήματα**, εξερευνά λύσεις και δραστηριοποιείται σε γνωσιακά πεδία που είναι δύσκολο να κατανοηθούν από τον **ανθρώπινο νου**, Ερευνητής με σεμνότητα και ήθος με βιωμένες εμπειρίες και επιμονή στο χώρο των Μαθηματικών.

Ο ίδιος ισχυρίζεται ότι "... Η τεχνητή νοημοσύνη θα βελτιώσει κατά πολύ τις ζωές μας και θα φέρει επανάσταση σε όλους τους τομείς. Ίσως ξεπεράσει κατά πολύ την **ανθρώπινη ικανότητα**. Γι' αυτό όλοι μας θα πρέπει να προσαρμοστούμε στις νέες συνθήκες. Άλλωστε, δεν ανήκω σ' εκείνους που πιστεύουν ότι θα χαθούν θέσεις εργασίας αλλά ότι **πολλά επαγγέλματα** απλώς **θα μετασχηματιστούν**. Το βέβαιο είναι ότι το μέλλον προμηνύεται συναρπαστικό ... ". Είναι ενδεικτικό ότι μόλις στα τριάντα τρία του έχει καταφέρει να διανύσει μια αξιέπαινη διαδρομή σε πανεπιστήμια όπως το Κέμπριτζ και το Πρίνστον. Γεννήθηκε και μεγάλωσε σε μια γειτονιά του Παγκρατίου. Ο πατέρας του ήταν μαθηματικός. Όταν ήταν δώδεκα ετών, μετακόμισε οικογενειακώς στο Ρίο της Πάτρας. Αποφάσισε να σπουδάσει στο Μαθηματικό Πατρών, θέτοντας ως στόχο να αποφοιτήσει από αυτό με βαθμό δέκα "... Ξέρετε, **αδιαφόρησα** εντελώς για όσα μου έλεγαν οι άλλοι, που **επέμεναν να περάσω** σε μια **καλύτερη σχολή**, με υψηλότερη βαθμολογία. Ωστόσο, επέλεξα αυτό που μου **άρεσε** και κυρίως εκείνο στο οποίο έκρινα ότι ήμουν καλός. Αυτό ήταν το προσωπικό μου **κριτήριο**. Θυμάμαι πολύ έντονα ότι με τον πατέρα μου συμμετείχαμε σε μια ομάδα αστρονομίας και παρακολουθούσαμε κάποιες διαλέξεις που διεξάγονταν στο Πανεπιστήμιο της Πάτρας. Εκεί ήταν, νομίζω, που ανακάλυψα διάφορες πτυχές της **απεραντοσύνης του σύμπαντος.** Κάπως έτσι ξεκίνησε για μένα η αναζήτηση στον κόσμο της ορθολογικής σκέψης...". Τα Μαθηματικά, αποτελούσαν γι' αυτόν, μια ξεχωριστή νοητική διαδικασία. Η πολυπλοκότητά τους, τον γοήτευε και τον συνάρπαζε. Είναι ο μοναδικός δρόμος που σε οδηγεί σε νέα μονοπάτια ιδεών. Ο ίδιος υποστηρίζει ότι: Προσφέρουν αναρίθμητες δυνατότητες προκειμένου να μη σταματάς να ερευνάς. Ο θαυμαστός κόσμος των Μαθηματικών δεν απαρτίζεται από μια σειρά συμβόλων, τύπων ή θεωριών. Αλλά, προφανώς, περιλαμβάνει μετρήσεις, υπολογισμούς, κανόνες ή εφαρμογές που χρησιμοποιείς ως εργαλεία και μέσω αυτών, διευρύνεις τους ορίζοντές σου. Πρόκειται για ένα ανεκτίμητο μέσο κατανόησης του κόσμου αλλά και της λογικής συγκρότησής του. Θέτεις, λύνεις, βρίσκεις, αποτυγχάνεις και ανακαλύπτεις νέες κατευθύνσεις. Ουσιαστικά, με τα Μαθηματικά διαρκώς μαθαίνεις (...). Αναμφίβολα, η **φωτογραφία** της μαύρης τρύπας από το πείραμα του **Event Horizon**, δεν αποτελεί απλώς ορόσημο για την αστρονομία και την αστροφυσική αλλά και μία ακόμα επιβεβαίωση της ύπαρξής της. Αποκάλυψε για πρώτη φορά ένα από τα πιο σαγηνευτικά αινίγματα του σύμπαντος, αφού για πολλά χρόνια αναφερόμασταν σε αυτές, χωρίς ποτέ να έχουμε δει πώς μοιάζουν (...). Οι μαύρες τρύπες συγκαταλέγονται στα πιο μυστηριώδη και τρομακτικά σημεία του σύμπαντος. Η δύναμη της βαρύτητας μιας μαύρης τρύπας παραμορφώνει τον χωρόχρονο και διατηρεί την ικανότητα να εξαφανίζει οτιδήποτε εισέλθει σε αυτήν, ακόμη και το ίδιο το φως. «Η γενική σχετικότητα είναι μια θεωρία βαρύτητας που αναπτύχθηκε από τον **Αϊνστάιν**. Επομένως, δεν μπορούμε να φανταστούμε τον πλανήτη μας χωρίς την ύπαρξη της βαρύτητας, διότι αυτή περιορίζει τα πάντα στην καθημερινότητά μας. Αποκεί και πέρα, για να αντιληφθείς το μοντέλο της βαρύτητας **απαιτείται η γνώση** των Μαθηματικών. Εκεί εδρεύουν τα νέα πεδία της επιστημονικής μου δράσης ...". Ωστόσο, για έναν αδαή τι μπορεί να σημαίνει η ύπαρξη μιας **νέας αστάθειας** των λεγόμενων **"ακραίων" Μελανών Οπών**. Η μαύρη τρύπα ή μελανή οπή ορίζεται ως εκείνο το σημείο του χωροχρόνου, στο οποίο οι βαρυτικές δυνάμεις είναι τόσο μεγάλες, ώστε τίποτα, ούτε καν τα σωματίδια και η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, όπως το φως, δεν μπορεί να ξεφύγει από αυτό. Συγκεκριμένα, με τη δική του μαθηματική απόδειξη οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα της ύπαρξης μιας νέας αστάθειας, με την έννοια ότι **οι ακραίες μαύρες τρύπες** είναι μάλλον **ασταθείς**. Ορισμένες **μαύρες τρύπες**, δηλαδή, ενδέχεται να έχουν αστάθειες στους **ορίζοντες** των γεγονότων τους. Αποτέλεσμα αυτών των ασταθειών θα ήταν σε ορισμένες περιοχές του ορίζοντα να εμφανίζεται μια ισχυρότερη βαρυτική έλξη σε σχέση με άλλες. Αυτό θα έκανε τις θεωρούμενες ως εντελώς ταυτόσημες μαύρες τρύπες να διαφέρουν μεταξύ τους». Σε ερώτηση πως βλέπει τους **νέους σήμερα** αναφέρει «Θέλω να πω σε **όλους τους νέους**, ειδικά στα παιδιά που δίνουν **φέτος Πανελλήνιες**, να μένουν προσηλωμένοι στους στόχους τους. Η αποτυχία μάς πεισμώνει και μας κάνει καλύτερους. Οπότε, δεν πρέπει να απογοητεύεσαι, αν δεν τα καταφέρεις. **Προχώρα** και θα φτάσεις ψηλότερα. Ζούμε σε μια **ανταγωνιστική εποχή** και προσωπικά έχω μάθει ότι **το πρώτιστο** είναι να στρέφεσαι στην κατεύθυνση **που σου αρέσει**. Πρέπει να επιβαλλόμαστε στους σχεδιασμούς μας και να μην ακούμε τους άλλους. **Μόνο εμείς** γνωρίζουμε τι είναι αυτό που πραγματικά αγαπάμε. Ο κανόνας **δεν** πρέπει να είναι η εκάστοτε σχολή αλλά **τι** σου αρέσει». **Πηγές:** Lifo, physicsgg.me, thebest.gr, hellas-now.com, e-enimerosi.com



$4^{ος}$ διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 2022

Πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων

Έγινε πρόσφατα ο ετήσιος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ με μεγάλη επιτυχία.

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ είναι στην **ουσία μία εκπαιδευτική έρευνα** μεγάλης κλίμακας. Κεντρικός του στόχος, είναι η ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις **δυνατότητες να σκέπτεται** ο μαθητής με μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

Ο διαγωνισμός αυτός, ο οποίος πραγματοποιήθηκε ηλεκτρονικά εξ΄ αποστάσεως, **δεν** ελέγχει άμεσα ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να **σκέφτεται** με τα **εφόδια** που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη **σκέψη**. Με βάση τις μαθηματικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων διακρίνουμε τις παρακάτω πτυχές της μαθηματικής ικανότητας: **αριθμητική** ικανότητα, **γεωμετρική** ικανότητα, ικανότητα **επαγωγικού** συλλογισμού, **συνδυαστική** ικανότητα, ικανότητα **μετάφρασης δεδομένων** από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. (π.χ. η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα ή από μία εικόνα), **αλγεβρική** ικανότητα, ικανότητα επίλυσης προβλήματος, **αλγοριθμική** ικανότητα.

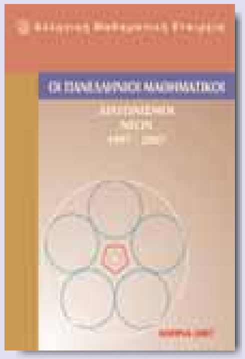
Βασικό χαρακτηριστικό του διαγωνισμού είναι ότι αποτελεί εργαλείο βελτίωσης των μαθηματικών ικανοτήτων, αφενός σε επίπεδο σχολικής τάξης και αφετέρου σε επίπεδο μεμονωμένων μαθητών τονίζοντας τη σύνδεση των μαθηματικών ικανοτήτων με τις κατάλληλες **στρατηγικές** αντιμετώπισής τους. Επίσης χαρακτηριστικό του, είναι αφενός η μη απογοήτευση των μαθητών που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά, αλλά ταυτόχρονα και η ύπαρξη πρόκλησης για μαθητές με υψηλούς στόχους στα Μαθηματικά. Ακόμη επιτρέπει την εξάσκηση των μαθητών σε θέματα **τύπου PISA**, που είναι ένα πεδίο στο οποίο οι Έλληνες μαθητές υστερούν σε μεγάλο βαθμό. Ακόμη ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αποτελεί τη βάση και τον **συνδετικό κρίκο** της υποχρεωτικής εκπαίδευσης με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ (Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, προκριματικός) που καταλήγουν στη συγκρότηση της ελληνικής ομάδας που μετέχει σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, με **αποκορύφωμα** την Παγκόσμια **Ολυμπιάδα των Μαθηματικών**. Τέλος, ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ μπορεί να **αποτελέσει** σημαντικό βοήθημα στο νέο θεσμικό πλαίσιο του ΥΠΑΙΘ (άρθρο 104, Νόμος 4823/2021), που αφορά στην αξιολόγηση του εκπαιδευτικού συστήματος μέσω εξετάσεων διαγνωστικού χαρακτήρα για τους μαθητές/ τριες της **ΣΤ' τάξης των δημοτικών** σχολείων και τους μαθητές/τριες **της Γ' τάξης των γυμνασίων** στη Γλώσσα και στα Μαθηματικά, με σκοπό την εξαγωγή πορισμάτων σχετικά με την πορεία υλοποίησης των προγραμμάτων σπουδών και τον βαθμό επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων σε εθνικό και περιφερειακό επίπεδο και σε επίπεδο σχολικής μονάδας.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές

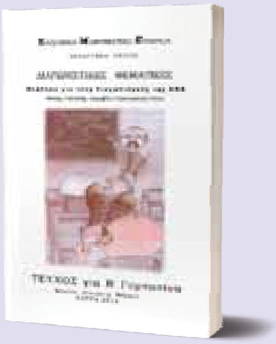
Νέα τιμή βιβλίου: 15€



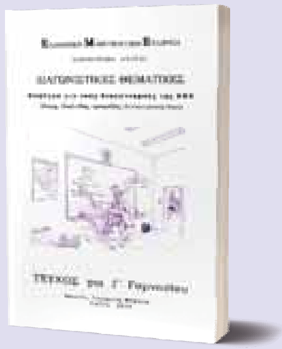
Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Νέα τιμή βιβλίου: 15€

Διαγωνισμοί



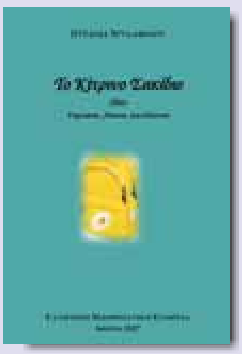
Τιμή βιβλίου: 12€



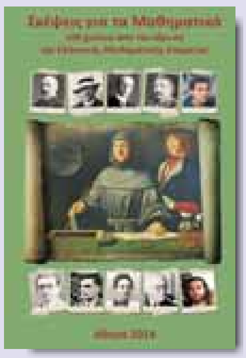
Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ



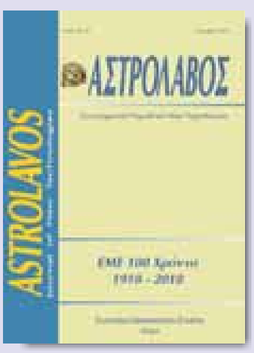
Τιμή βιβλίου: 18€



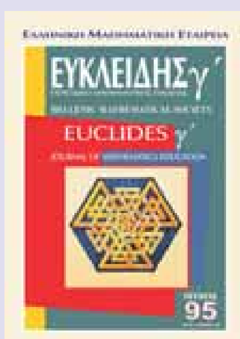
Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr