ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

126

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2022 ευρώ 3,5

ΕΚΛΟΓΕΣ της ΕΜΕ το 2023

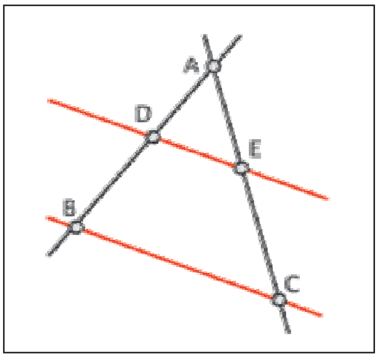
π

Θέματα Θαλής 2022

α^x

BMO 2022 CYPRUS

39th Balkan Mathematical Olympiad



$\sqrt{\ }$

Ίππαρχος ο Ρόδιος

Σ

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 126 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2022 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Τα Μαθηματικά και η Βιολογία 1
Ο χάρτης του ουρανού του Ιππαρχου, ... 5
Ο ήχος του μαγνητικού πεδίου της Γής, ... 7
Vasarely: "το απόλυτο μάτι", ... 8
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ... 9
Homo Mathematicus, ... 23

Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Ασκήσεις 25
Γεωμετρία: Παράλληλες Ευθείες 31

Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Τριγωνομετρία και πολυώνημα, ... 35
Γεωμετρία: Μετρικές σχέσεις και εμβαδά, ... 39
Αναλυτική Γεωμετρία: Σχετική θέση δύο ευθειών, ... 42

Γ΄ Τάξη

Ανάλυση: Συναρτήσεις: Παράγωγοι, ... 50

Γενικά Θέματα

Το Βήμα του Ευκλείδη: Συστήματα και ανισότητες, ... 58
Η διοφαντική εξίσωση, ... 61
Ο Ευκλείδης προτείνει... 62
Αναλυτικές συζητήσεις, ... 64
Επικαιρότητα, ... 74
Τα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, ... 75
Αφορμές και στιγμιότυπα, ... 79

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

... αν υπάρχει κάτι κοινό στην ιστορία
της εξέλιξης του κόσμου ...
του τότε, με το τώρα
του πριν, με το μετά
είναι η αιώνια σοφία των αριθμών
που δόξασαν ο Πλάτων,
"οι αριθμοί, οι αίτιοι των αισθητών πραγμάτων"
και ο Πυθαγόρας
"αριθμοί θείες οντότητες".
Σε πείσμά της έκφρασης
"Η στατιστική είναι ο καλύτερος τρόπος να πεις ψέματα"
καμιά φορά οι αριθμοί λένε την αλήθεια,
έτσι κάθε φορά λέμε από αύριο,
πίσω στην πεζή καθημερινότητα,
σαν ευχή και σαν υπόσχεση στους εαυτούς μας,
αλλά υπάρχει όμως και ο κανόνας του σήμερα
που λέει με αισιοδοξία και ελπίδα
προοπτικής, για ένα καλύτερο αύριο...

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...

Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	11 Νοεμβρίου	2022
Ευκλείδης:	Δεν θα γίνει	
Αρχιμήδης:	18 Φεβρουαρίου	2023

$$2023 = 20^2+(2\cdot 20)^2+23$$

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Εμμανουήλ Ιωάννης
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

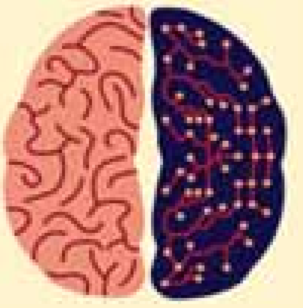
Μαθηματικά και Βιολογία
Vio vs Maths

Θανάσης Κοπάδης μαθηματικός - συγγραφέας

Ο βασικός λόγος για τον οποίο δημιουργήθηκαν, γιγαντώθηκαν και εξαπλώθηκαν οι επιστήμες στον κόσμο ήταν η **ελεύθερη πρόσβαση** όλων στην αληθινή γνώση.

Η διαφορά της γνώσης που εκφράστηκε και συζητήθηκε ελεύθερα στην Αγορά των αρχαίων Ελλήνων, από τη γνώση που παρέμεινε απόκρυφη και προνόμιο μικρών ελιτίστικων ομάδων στο ιερατείο της Αιγύπτου, είναι ολοφάνερη από την τεράστια επίδραση της πρώτης στον παγκόσμιο πολιτισμό.

Επιστήμη σημαίνει αναζήτηση και απόκτηση της αληθινής γνώσης και σε αυτό το πλαίσιο οι επιστήμες συνεργάστηκαν και συνεργάζονται.



Αν και η Βιολογία είναι εδώ και αιώνες συνυφασμένη με τα Μαθηματικά, η Βιολογία ήταν κυρίως μια επιστήμη περιγραφική και η μαθηματική έκφραση είχε θέση μόνο στις πιο «σκληρές» συγγενείς επιστήμες, όπως η Βιοφυσική και η Βιοχημεία.

Η ποσοτική απόδοση των βιολογικών νόμων άρχισε να γίνεται πράξη **στη δεκαετία του 1960**, συμπίπτοντας χρονικά με την επανάσταση που σημειώθηκε την εποχή εκείνη στους τομείς της Μοριακής και της Πληθυσμιακής Βιολογίας.

Είναι βέβαιο πως τα επόμενα χρόνια προβλέπεται μια ακόμα μεγαλύτερη έκρηξη στη συνέργεια αυτών των δύο επιστημών, η οποία θα εμπλουτίσει και τα δύο πεδία σε πολύ σημαντικό βαθμό.

Και αυτό γιατί ο 21ος αιώνας έχει δικαίως ονομασθεί ως **Αιώνας της Βιολογίας** και των **Επιστημών Ζωής** και τα **Μαθηματικά** είναι ικανά να προσφέρουν τα απαραίτητα εργαλεία στη διαχείριση τέτοιων δεδομένων.

Σήμερα οι επιστήμονες Ζωής έρχονται διαρκώς σε επαφή με αριθμούς αστρονομικού μεγέθους, κάτι πρωτόγνωρο για αυτούς.

Μην ξεχνάμε πως η πλήρης ακολουθία ένας απλού γονιδίου από τον τεράστιο αριθμό γονιδίων που περιέχει το ανθρώπινο κύτταρο αποτελείται από 3,2 δισεκατομμύρια γράμματα και είναι τόσο μεγάλη που μπορεί να δημοσιευθεί μόνο στο διαδίκτυο, αφού χρειάζεται 70.000 σελίδες για να γραφεί.

Ή ότι ένας ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελείται από 100 δισεκατομμύρια νευρώνες με πάνω από 100 τρισεκατομμύρια συνάψεις, τους οποίους αν βάλουμε στη σειρά, τον ένα πίσω από τον άλλο, θα κάνουν αρκετές φορές τον γύρο της Γης.

Αυτά τα δεδομένα δοκιμάζουν καθημερινά τα όρια των Μαθηματικών, ενισχύουν την φύση και την πολυπλοκότητά τους και πυροδοτούν την επινόηση καλύτερων **Μαθηματικών Μοντέλων** για τη μελέτη τους.

Με άλλα λόγια, όπως το μικροσκόπιο συνέβαλε στα τέλη του 17ου αιώνα στην ανάπτυξη της Βιολογίας, αφού αποκάλυψε έναν απρόσμενο και απρόσιτο με το γυμνό μάτι κόσμο, έτσι και τα Μαθηματικά σήμερα, αποτελούν ένα διαφορετικό μικροσκόπιο, ευρύτερο, αφού μπορούν να αποκαλύψουν αόρατους κόσμους σε όλο το φάσμα των βιολογικών δεδομένων και όχι μόνο στα οπτικά.

Ταυτόχρονα όμως και η Βιολογία παρέχει πλέον στα Μαθηματικά μια τεράστια χωρική και χρονική ποικιλότητα, μεγαλύτερη από αυτή της Φυσικής και της Χημείας, η οποία οδηγεί τη μαθηματική σκέψη στην ανάπτυξη νέων εννοιών και σύγχρονων εφαρμογών που θα μπορούν να την ερμηνεύσουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

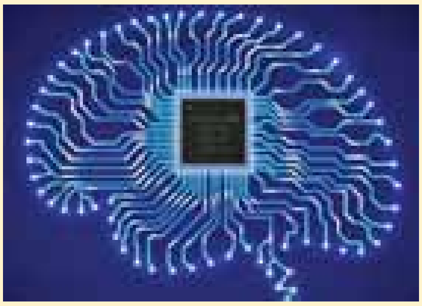
Ας θυμηθούμε μερικά παραδείγματα συνέργειας των δύο επιστημών από το παρελθόν και για αρχή ας ταξιδέψουμε πίσω στον $12^{ο}$ αιώνα.

Το 1202 ο Ιταλός μαθηματικός **Λεονάρντο της Πίζας** ή αλλιώς **Fibonacci** εισαγάγει, για πρώτη φορά στη Δυτική Ευρώπη, την ομώνυμη ακολουθία του

$$0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8, 13 , 21 , 34 , \ldots$$

μια σειρά αριθμών, στην οποία ο καθένας είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων του.

Ο Fibonacci παρατήρησε πως η ακολουθία αυτή εμφανίζεται ξανά και ξανά στη φύση, καθορίζοντας ουσιαστικά την ίδια τη βάση της πραγματικότητας του κόσμου που ζούμε και με αυτή κατάφερε να εκφράσει την μαθηματική σύνθεση των φυτών. Ταυτόχρονα όμως έδωσε λύση και σε **προβλήματα Οικολογίας**, συντονίζοντας έτσι τον τρόπο με τον οποίο, στο βιολογικό μας κόσμο, τα πάντα ενώνονται.



Το 1760, ο διάσημος μαθηματικός **Daniel Bernoulli**, δημιουργεί ένα μοντέλο επιδημίας και αποσαφηνίζει με έναν απλό και αιτιοκρατικό τρόπο λειτουργίας την εξάπλωση της ευλογιάς που δοκίμαζε τον κόσμο την περίοδο εκείνη.

Πρόκειται αναμφίβολα για μια από τις πρώτες προσπάθειες ανάλυσης ενός στατιστικού προβλήματος, σχετικά με τη νοσηρότητα και τη θνησιμότητα μιας επιδημίας και σκοπό είχε να δείξει την αποτελεσματικότητα των εμβολιασμών.

Αυτό αποτέλεσε και την αρχή των Στοχαστικών Μοντέλων που αναπτύχθηκαν αργότερα κατά τη διάρκεια του $19^{ου}$ και $20^{ου}$ αιώνα και τα οποία αποτελούν την σπουδαιότερη νοητική αναπαράσταση όλων των περίπλοκων και αλληλένδετων διαδικασιών που συνθέτουν σήμερα τα σημαντικότερα προβλήματα της Βιολογίας, της Φαρμακολογίας και της Ιατρικής.

Την ίδια περίοδο, οι σπουδαιότεροι μαθηματικοί στον κόσμο, ασχολούνται με την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, ώστε να εξηγήσουν με μαθηματικό τρόπο, το πως μεταβάλλονται διάφορα μεγέθη με την πάροδο του χρόνου.

Οι παράγωγοι, τα ολοκληρώματα, τα όρια και οι διαφορικές εξισώσεις αποτελούν πλέον τα εργαλεία μελέτης της δυναμικής των πληθυσμών, με τους επιστήμονες να ενδιαφέρονται όχι μόνο για τον ρυθμό αύξησης του ανθρώπινου πληθυσμού, αλλά και για την αύξηση του πληθυσμού των ζώων, των μικροβίων κλπ.

Έκτοτε, η εξέλιξη της αλληλεπίδρασης των δύο επιστημών είναι ραγδαία, η συνέχεια συναρπαστική και τα παραδείγματα πάρα πολλά.

Η **Βιομηχανική** του **Borelli**, η οποία μελέτησε τη δομή, την κίνηση και τη **λειτουργία των βιολογικών συστημάτων** μέσω των Μαθηματικών και της Μηχανικής και που σήμερα χρησιμοποιείται στην κατασκευή τεχνικών μελών, αλλά και στην εξελισσόμενη **Βιομιμητική**.

Η **Βιοχημική Κινητική** και τα μαθηματικά μοντέλα για την αποτελεσματικότητα των ατελών εμβολίων στην Επιδημιολογία.

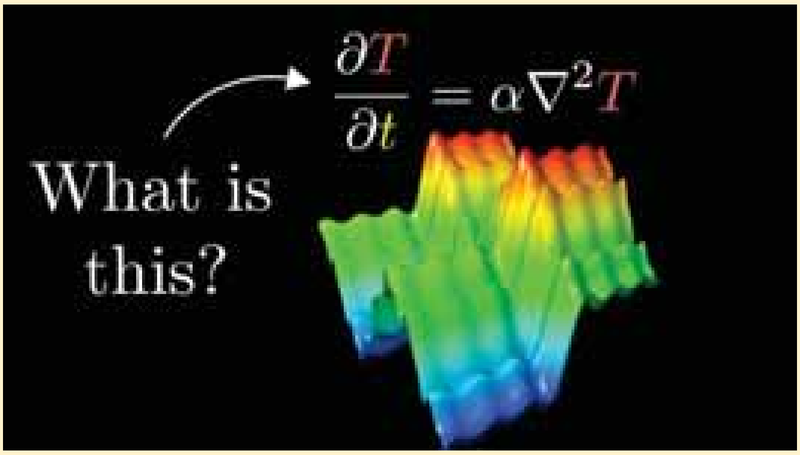
Ο διάσημος μετασχηματισμός του Αυστριακού μαθηματικού **Radon** και η αξιοποίησή του στην τεχνολογία της **αξονικής τομογραφίας**, βοηθώντας τους γιατρούς και τους **νευροεπιστήμονες** να απεικονίζουν τομές του ανθρώπινου εγκεφάλου χωρίς να προβούν σε καμία εγχείρηση.

Η κατασκευή στοχαστικών μοντέλων που μελετούν όλες τις περίπλοκες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των καρκινικών κυττάρων και με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων που θα συμβάλλουν στην πρόοδο της ανοσοθεραπείας.

Πριν λίγο καιρό μάλιστα, δημοσιεύθηκε από το τμήμα Βιολογίας του M.I.T. μια πολύ σημαντική έρευνα, η οποία αφορά την πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης του γονιδιακού κανονισμού. Επιστήμονες **της Βιολογίας και των Μαθηματικών** κατάφεραν και δημιούργησαν ένα μαθηματικό μοντέλο για να **αποσαφηνίσουν το εξελικτικό παρελθόν** και μέλλον του **μη ρυθμιστικού DNA**, που αποτελεί το 99% του ανθρώπινου DNA και είναι υπεύθυνο για την ζωτική λειτουργία της ενεργοποίησης και απενεργοποίησης των γονιδίων.

Καθώς με την πάροδο του χρόνου τα κύτταρα αναπαράγουν το DNA τους για να αναπτυχθούν και να διαιρεθούν, εμφανίζονται συχνά μεταλλάξεις σε αυτές τις μη ρυθμιστικές περιοχές, αλλάζοντας την γονιδιακή έκφραση. Πολλές από αυτές τις μεταλλάξεις είναι ασήμαντες και μερικές είναι ακόμα και ευεργετικές. Περιστασιακά ωστόσο, μπορεί να σχετίζονται με αυξημένο κίνδυνο κοινών ασθενειών, όπως ο διαβήτης τύπου 2, ή ακόμα και πιο απειλητικές για τη ζωή, όπως ο καρκίνος.

Οι ερευνητές εργάσθηκαν σε **μαθηματικούς χάρτες** που τους επέτρεψαν να μελετήσουν **και να προβλέψουν** το πως θα εκφραστούν τα γονίδια και να κατανοήσουν με τον τρόπο αυτό τις επιπτώσεις των πιθανών μεταλλάξεων. Ένα μαθηματικό «μαντείο» με απλά λόγια, το οποίο ο κάθε επιστήμονας πλέον μπορεί να χρησιμοποιήσει για τη δική του εξελικτική ερώτηση ή σενάριο, δοκιμάζοντας όλες τις πιθανές μεταλλάξεις και σχεδιάζοντας αυτή που θα δώσει την επιθυμητή έκφραση.

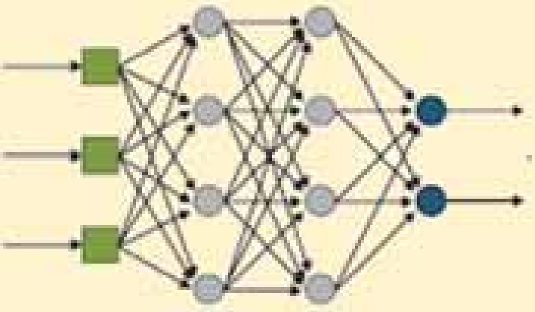


Το ερώτημα που τίθεται για τη συνέχεια είναι **τι είδους Μαθηματικά** χρειάζονται οι **Βιολόγοι** και ποια θα πρέπει να είναι η δομή των προγραμμάτων σπουδών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά και της Μαθηματικής Βιολογίας στα πρώτα έτη σπουδών, ερώτημα που απασχόλησε και απασχολεί και σήμερα τα πανεπιστήμια σε όλο τον κόσμο.

Το βασικό πρόβλημα των βιοεπιστημονικών σχολών στην Αμερική για παράδειγμα, ήταν πως η πλειοψηφία των φοιτητών **απέφευγαν να διαλέξουν** το επιλεγόμενο μάθημα των **Μαθηματικών**, αφού ήταν κατά βάση καθαρά μαθηματικά, αριθμητική ανάλυση και δύσκολες διαφορικές εξισώσεις.

Σε μια συνέντευξη του μάλιστα, ένας καθηγητής από το Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια είχε χαρακτηριστικά αναφέρει πως ακόμα και αν ο **Cauchy** (Γάλλος μαθηματικός 1789 – 1857) αναστηθεί το πρωί, **το απόγευμα** θα **μπορούσε** να διδάξει το μάθημα των Μαθηματικών που διδάσκονταν οι φοιτητές της σχολής του, θέλοντας να δείξει την προσκόλληση των προγραμμάτων σπουδών στα μαθηματικά του 19^{ου} αιώνα.

Τα προγράμματα στο συγκεκριμένο πανεπιστήμιο άλλαξαν στη συνέχεια, γράφηκαν νέα συγγράμματα μόνο με εφαρμογές της Βιολογίας, χωρίς πολλά Μαθηματικά, αλλά τα πράγματα μάλλον έγιναν χειρότερα από πριν. Το πρόβλημα είχε μετατοπιστεί στους διδακτορικούς φοιτητές των Μαθηματικών, καθώς δεν μπορούσαν πλέον να τα διδάξουν.



«Αυτά δεν είναι Μαθηματικά» έλεγαν χαρακτηριστικά.

Η εκ διαμέτρου αυτή αλλαγή των προγραμμάτων βρήκε αντίθετους και τους ίδιους τους καθηγητές των τμημάτων της Βιολογίας που δεν ήταν μαθηματικοί, καθώς οι Διαφορικές Εξισώσεις έχουν τεράστια εφαρμογή σε κλασικά προβλήματα της Οικολογίας, αλλά και σε **σύγχρονα προβλήματα της Επιδημιολογίας.**

Όταν τελικά βρέθηκε μια χρυσή τομή σε κάποια συγγράμματα και αντί για θεωρήματα και παραδοσιακούς κανόνες λογισμού η ύλη επικεντρώθηκε **στην ανάπτυξη μαθηματικών απαντήσεων** σε βιολογικά ερωτήματα, το ενδιαφέρον των φοιτητών αναζωπυρώθηκε.

«Τι θα συνέβαινε αν ένας δεδομένος αριθμός από τόνους έπεφτε σε μια δεξαμενή με μερικούς καρχαρίες; Οι καρχαρίες θα φάνε τον πληθυσμό του τόνου, αλλά τότε και ο πληθυσμός των καρχαριών θα μειωθεί επίσης». Οι διδάσκοντες με τη φράση *«Ας κάνουμε* ***διαφορικές εξισώσεις*** *για να*

***μελετήσουμε μοντέλα** για την διαδικασία αυτή»* κατάφεραν και άλλαξαν σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο που οι φοιτητές τους έβλεπαν τα Μαθηματικά, με την ύλη να περιλαμβάνει κυρίως μοντελοποίηση και υπολογιστικά μαθηματικά προγράμματα σε υπολογιστή.

Τι συμβαίνει όμως σήμερα στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα; Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση τα πράγματα έχουν ως εξής: τα σχολικά βιβλία **προσπαθούν**, μέσω κάποιων ασκήσεων, να μεταφέρουν στους μαθητές αυτή τη σχέση των **Μαθηματικών** με τις **Επιστήμες Ζωής**. Ωστόσο, οι περισσότερες από αυτές τις ασκήσεις είναι εκτός ύλης και οι ελάχιστες, αν διδαχθούν, θα γίνει με τρόπο φορμαλιστικό, χωρίς καμία **διαθεματική προσέγγιση**.

«Τα Μαθηματικά λοιπόν γίνονται, ολοένα και περισσότερο, αναπόσπαστο συστατικό της καθημερινής ζωής και σημαντικό ερευνητικό εργαλείο αρκετών ακόμα επιστημονικών κλάδων: της Βιολογίας, της Ιατρικής, των Κοινωνικών Επιστημών και της μελέτης του κλίματος». Αυτό τονίζεται στην τελευταία έκθεση του αμερικάνικου Εθνικού Συμβουλίου Έρευνας με τίτλο **«Η επιστήμη των Μαθηματικών το 2025»** στην οποία γίνεται αναφορά στην νέα εποχή των Μαθηματικών, στις προκλήσεις, στους στόχους αλλά και στις **αδυναμίες της επιστημονικής κοινότητας**.

Και σίγουρα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το 65% των παιδιών που μπαίνουν στο δημοτικό σήμερα θα ασκούν επαγγέλματα που ακόμα δεν υπάρχουν.

*Το μέλλον είναι γεμάτο επιστημονικές υποθέσεις με τη **Βιολογία** και τα **Μαθηματικά** να παίζουν **πρωτεύοντα ρόλο** σε αυτές. Μηχανές με υψηλό δείκτη νοημοσύνης, Νευρωνικά Δίκτυα, DNA, Εικονική Πραγματικότητα, Γενετικοί Αλγόριθμοι, Μοριακά Αυτόματα, Βιοτεχνολογία, Νανοτεχνολογία, Βιομιμητική, Ασφάλεια Περιβάλλοντος και Προστασία Τροφίμων.*

Τομείς που επειδή τα όρια τους από την πραγματικότητα και την επιστημονική φαντασία γίνονται ασαφή και δυσδιάκριτα πολλές φορές, προκαλούν στο σύγχρονο άνθρωπο συναισθήματα αισιοδοξίας αλλά και φόβου. Έτσι ζωτικής σημασίας ζήτημα θεωρείται σήμερα η ενασχόληση όλων μας με **υπευθυνότητα**, σοβαρότητα και **ηθικό όραμα**, ώστε να προετοιμάσουμε μια **αισιόδοξη** ανάπτυξη όλων των επιστημών, που κύριο στόχο θα έχει τη βελτίωση των συνθηκών ζωής και την ασφάλεια της κοινωνίας. Τις νέες αυτές κατευθύνσεις θα πρέπει να τις αντανακλά και η εκπαίδευση, τόσο στις Μαθηματικές Επιστήμες, όσο και στις Επιστήμες Ζωής.

Μη ξεχνάμε ότι **5 χρόνια** αλλαγής στη ψηφιακή εποχή που ζούμε **αντιστοιχούν με 30 χρόνια** αλλαγής στη βιομηχανική εποχή του χτες και οι μαθητές χρειάζεται να έχουν συνεχώς το βλέμμα τους στην ευελιξία, στην προσαρμοστικότητα και στη διαρκή αναπροσαρμογή γνώσεων και δεξιοτήτων.

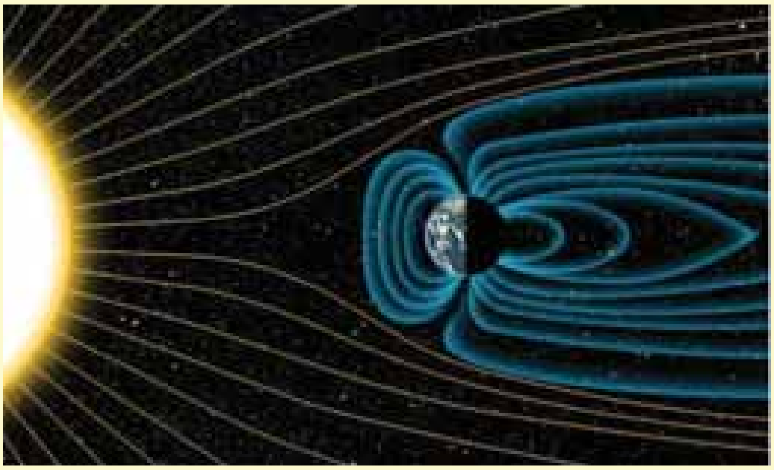
Είναι κάτι που μπορούμε να το κάνουμε, αφού και η ίδια η φύση το κάνει διαρκώς. Λέγεται εξέλιξη!

Πηγές:

1) Marriages of mathematics and physics: A challenge for biology, Arezoo Islami , Giuseppe Longo
2) Mathematics Is Biology's Next Microscope, Only Better; Biology Is Mathematics' Next Physics, Only Better, Cohen.
3) THE MEMORY EVOLUTIVE SYSTEMS AS A MODEL OF ROSEN'S ORGANISMS – (METABOLIC, REPLICATION SYSTEMS)
4) Εισαγωγή στην Πληθυσμιακή Βιολογία – Wilson, Bossert. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Ο ήχος του μαγνητικού πεδίου της Γης

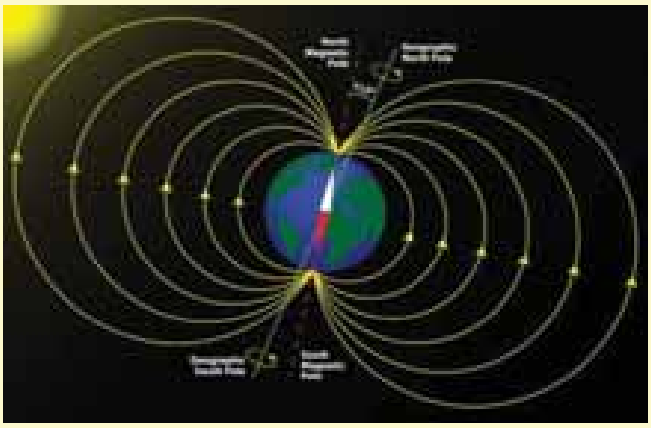
Ο ήχος του μαγνητικού πεδίου της Γης **καταγράφηκε** για πρώτη φορά και θυμίζει ταινία τρόμου. *Ακούγεται κάπως ανησυχητικό, αλλά ουσιαστικά η ζωή στη Γη, εξαρτάται από αυτό.*



Καταγράφηκε, για πρώτη φορά στις **22 Οκτωβρίου 2022,** ο ήχος του προστατευτικού μαγνητικού πεδίου της Γης και θυμίζει ταινία τρόμου.

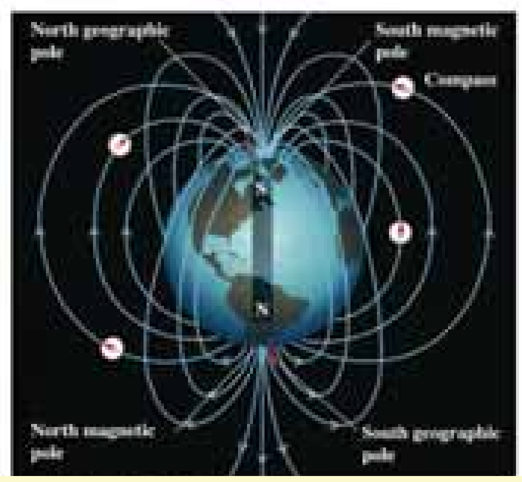
Όπως ανακοίνωσε ο **Ευρωπαϊκός Οργανισμός Διαστήματος** (ESA), επιστήμονες του Τεχνικού Πανεπιστημίου της Δανίας πήραν μαγνητικά σήματα που είχαν καταγράψει **οι ευρωπαϊκοί δορυφόροι Swarm και τα μετέτρεψαν σε ήχους.**

Στην πραγματικότητα το ίδιο το μαγνητικό πεδίο γύρω από τον πλανήτη μας, δεν μπορεί να παρατηρηθεί ούτε να ακουστεί άμεσα. Είναι μια πολύπλοκη και δυναμική «φυσαλίδα» που μας κρατά ασφαλείς από την κοσμική ακτινοβολία και τα φορτισμένα σωματίδια του ισχυρού ηλιακού «ανέμου». Όταν αυτά τα σωματίδια συγκρούονται με τα άτομα και τα μόρια -κυρίως οξυγόνου και αζώτου- στην ανώτερη γήινη ατμόσφαιρα, τότε ένα μέρος από τις συγκρούσεις μετατρέπεται στο πράσινο-μπλε θεαματικό πολικό σέλας.



Το γήινο μαγνητικό πεδίο παράγεται κυρίως από έναν «ωκεανό» πολύ θερμού και στροβιλιζόμενου λιωμένου σιδήρου στον εξωτερικό πυρήνα του πλανήτη μας, ο οποίος **δημιουργεί ηλεκτρικά ρεύματα**, τα οποία με τη σειρά τους γεννούν το **ηλεκτρομαγνητικό πεδίο**.

Το «τρίο» των δορυφόρων της αποστολής Swarm της ESA, που **εκτοξεύτηκαν το 2013**, μελετούν το γήινο μαγνητικό πεδίο καταγράφοντας με ακρίβεια τα σήματά του. Οι Δανοί **ερευνητές και μουσικοί** χρησιμοποίησαν αυτά τα μαγνητικά δεδομένα, τόσο του πυρήνα της Γης όσο και μιας γεωμαγνητικής καταιγίδας που είχε δημιουργηθεί μετά από μια ηλιακή έκρηξη, για να τα μετατρέψουν σε ήχους, οι οποίοι ακούγονται λιγάκι σαν … υπόκρουση σε εφιάλτη.



Όπως ανέφεραν, η πρόθεση τους δεν είναι να τρομάξουν τους ανθρώπους, αλλά να υπενθυμίσουν ότι το μαγνητικό πεδίο υπάρχει και, μολονότι ακούγεται κάπως ανησυχητικό, στην πραγματικότητα η ζωή στη Γη εξαρτάται από αυτό.

Μια σειρά από ηχεία στην πλατεία Σόλμπγιερκ της Κοπεγχάγης έχουν ήδη εκπέμψει ανά περιοδικά διαστήματα, τον ήχο του μαγνητικού πεδίου καθ' όλη την εβδομάδα 24-30 Οκτωβρίου 2022, σαν μια ευκαιρία και δυνατότητα να υπάρξει άμεση επαφή του κόσμου με αυτό το γεγονός.

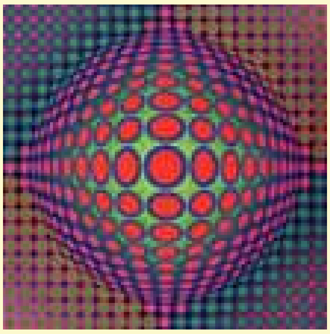
Vasarely, «το απόλυτο μάτι»

Victor Vasarely
1906 - 1997

Victor Vasarely: Ούγγρος ζωγράφος της μοντέρνας τέχνης και διάσημος καλλιτέχνης κατά τη μεταπολεμική περίοδο. Ανήκε στην παράδοση του Μπάουχαους και του κονστρουκτιβισμού, ενώ ο ίδιος υπήρξε πρόδρομος της «οπτικής τέχνης» (Op Art). Και κεντρική φυσιογνωμία των νεωτεριστικών τάσεων που απασχόλησαν την μεταπολεμική ευρωπαϊκή τέχνη.

Από νωρίς ήρθε σε επαφή με τη ζωγραφική και ξεκίνησε να καλλιεργεί συστηματικά το ταλέντο του.

Στη συνέχεια πήρε μαθήματα που περιλάμβαναν θεωρία και πρακτική στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική, με έμφαση στις γραφικές τέχνες και στην τυπογραφία, όπου ήρθε σε επαφή με τις αρχές του αφηρημένου σχεδίου. Το 1930 εγκαταστάθηκε στο Παρίσι, όπου ξεκίνησε να εργάζεται ως σχεδιαστής για λογαριασμό διαφημιστικών εταιριών.

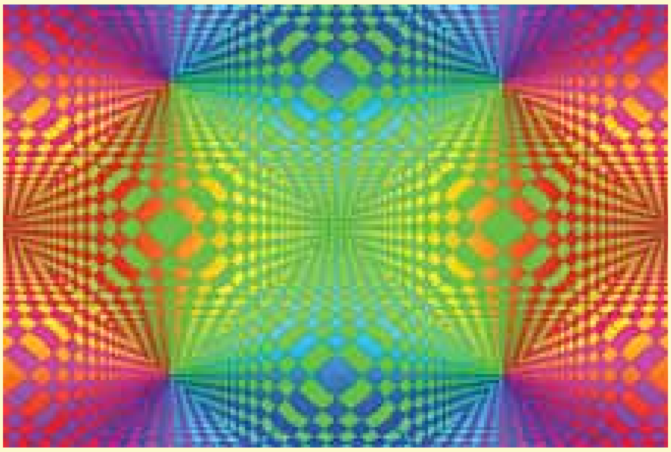


Το 1944, πραγματοποιήθηκε μία γενική έκθεση ζωγραφικής με γραφιστικά έργα και διαφημίσεις του Vasarely, στα εγκαίνια της γκαλερί της Ντενίζ Ρενέ. Το 1955 έλαβε την πρωτοβουλία για την πραγματοποίηση μίας ομαδικής έκθεσης με τίτλο Le Mouvement (Η Κίνηση). Η έκθεση ήταν επικεντρωμένη στην «κινητική τέχνη». Μέσω αυτής, καθιερώθηκε ως ένας από τους προδρόμους της Op Art και ηγετική μορφή των νεωτεριστικών καλλιτεχνικών τάσεων στο μεταπολεμικό Παρίσι.

Το έργο του διαπνέεται συνολικά από την πίστη του στην κοινωνική λειτουργία της τέχνης και την επιδίωξή του να ενσωματώσει το καλλιτεχνικό έργο στην καθημερινότητα. Συχνά υποστήριζε πως η τέχνη του μέλλοντος θα έπρεπε να είναι προϊόν προγραμματισμού και μαζικής παραγωγής, με βάση το «πλαστικό αλφάβητο».

Το έργο του απέκτησε μία νέα ώθηση στην προσπάθειά του να αναπαραστήσει την κίνηση και το χρόνο στις επίπεδες επιφάνειες που δημιουργούσε. Οι πίνακες του σχεδιάζονταν με τρόπο ώστε να γίνονται πλήρως αντιληπτοί μόνο μέσα από την κίνηση του θεατή, ο οποίος πλέον διαδραμάτιζε το δικό του ρόλο στην κατανόηση του καλλιτεχνικού έργου.

Το «πλαστικό αλφάβητο» υπήρξε μία από τις σημαντικότερες συνεισφορές του, ένα είδος **γλώσσας προγραμματισμού** των καλών τεχνών, το οποίο κατά τον ίδιο αποτελούσε το δρόμο για μία μαζική παραγωγή έργων τέχνης με χρήση βιομηχανικών μεθόδων, αλλά και μέσο μίας παγκόσμια κατανοητής **αισθητικής έκφρασης**, ικανό να εκφράσει ένα παγκόσμιο χαρακτήρα χωρίς να αγνοεί παράλληλα την ατομική ιδιαιτερότητα του δημιουργού.

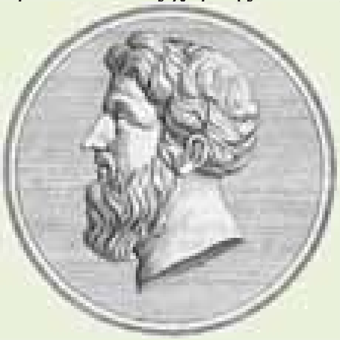


Οραματιζόταν μια μηχανή που θα μπορούσε να παράγει χιλιάδες χρωματικούς συνδιασμούς θα ελεγχόταν ηλεκτρονικά και θα ολοκληρωνόταν από ένα σύστημα ρεοστατών όπως και έγινε. Με τα «κινητικά πειράματά του μεταμόρφωσε την **επίπεδη επιφάνεια** σε ένα κόσμο ατελείωτων δυνατοτήτων, σηματοδοτώντας μια παγκόσμια πραγματικότητα.

Είχε προβλέψει την ενεργό συμμετοχή του θεατή και την ελεύθερη τέχνη καθώς και την δυνατότητα δημιουργίας πλαστικής γλώσσας που θα μπορούσε να εισαχθεί σε ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα.

Βρέθηκε μέρος του πρώτου «χάρτη» του ουρανού του Ίππαρχου. Κρυμμένος σε περγαμηνή

Μια μεγάλη **έκπληξη** έκρυβε μεσαιωνική περγαμηνή στην ελληνορθόδοξη Μονή Αγίας Αικατερίνης του Σινά. Κάτω από το χριστιανικό κείμενο **ανακαλύφθηκε μέρος** του καταλόγου **άστρων** του αρχαίου Έλληνα **αστρονόμου Ιππάρχου**, την πρώτη προσπάθεια πλήρους «χαρτογράφησης» του νυχτερινού ουρανού. Ένας χάρτης του ουρανού 2.151 χρόνια μετά.



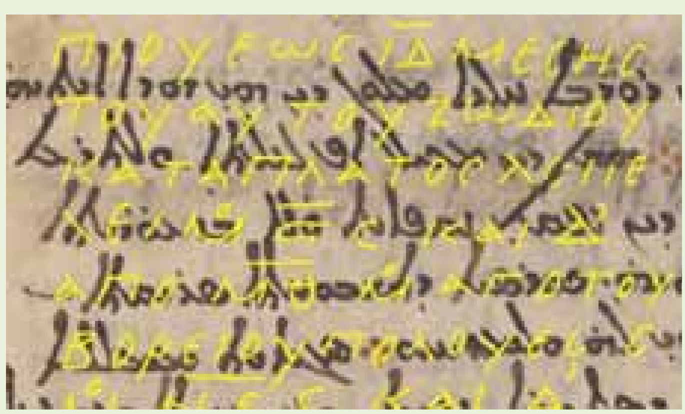
ο Ίππαρχος ο Ρόδιος (190-120 π.Χ.)

Η ανακάλυψη χαρακτηρίζεται σπάνια και σημαντική, καθώς οι επιστήμονες αναζητούσαν εδώ και αιώνες το έργο του Ιππάρχου. Το εύρημα αποδεικνύει ότι ο Ίππαρχος, που θεωρείται ο σημαντικότερος αστρονόμος της αρχαίας Ελλάδας, είχε φτιάξει πράγματι έναν «χάρτη» του ουρανού, αιώνες προτού επιχειρηθεί κάτι παρόμοιο.

Η περγαμηνή ανήκε στη Μονή Αγίας Αικατερίνης, αλλά σήμερα το μεγαλύτερο μέρος των 146 φύλλων της έχει περάσει στην κατοχή του Μουσείου της Βίβλου στην Ουάσινγκτον. Η περγαμηνή περιέχει τον Κώδικα Climaci Rescriptus, μια συλλογή συριακών κειμένων του 10ου ή 11ου αιώνα. Ο κώδικας είναι παλίμψηστο, δηλαδή από κάτω ήταν γραμμένο ένα αρχαιότερο κείμενο.

Αρχικά θεωρούνταν πως το αρχαιότερο κείμενο ήταν επίσης χριστιανικό. Όμως, όταν το 2012 ο ειδικός στα βιβλικά κείμενα Πίτερ Ουίλιαμς, του πανεπιστημίου του Κέιμπριτζ, ζήτησε από τους φοιτητές του να μελετήσουν τον κώδικα, εντοπίστηκε μια **παράγραφος στα ελληνικά**, η οποία αποδιδόταν **στον Ερατοσθένη**, άλλον ένα σημαντικό Έλληνα αστρονόμο.

Αμερικανοί ερευνητές έκαναν, το 2017, νέα ανάλυση με χρήση της τεχνολογίας **πολυφασματικής απεικόνισης**. Φωτογράφησαν τις σελίδες της περγαμηνής σε διαφορετικά μήκη κύματος του φωτός και χρησιμοποίησαν υπολογιστικούς αλγόριθμους για να διαβάσουν κείμενο που κρυβόταν από κάτω.



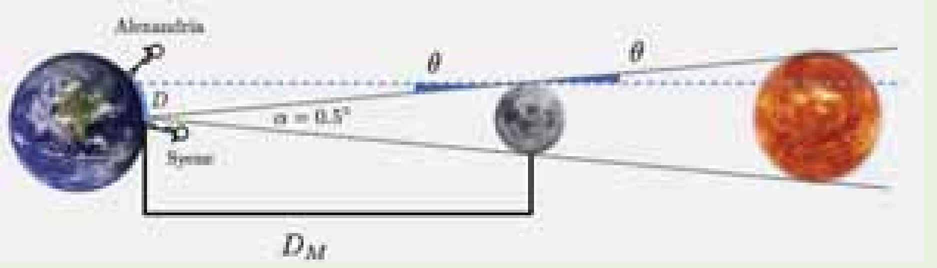
Σε εννέα σελίδες αποκαλύφθηκε αστρονομικό υλικό το οποίο- με τη μέθοδο του ραδιενεργού άνθρακα και την ανάλυση του τρόπου γραφής- χρονολογήθηκε από τον 5ο-6ο αιώνα. Μεταξύ άλλων, το κείμενο περιελάμβανε μύθους για τη γέννηση των άστρων από τον Ερατοσθένη, αλλά και τμήματα διάσημου ποιήματος του 3ου αιώνα, τα «Φαινόμενα» του Αράτου, που περιγράφει αστερισμούς.

Δεν είχαν αποκαλυφθεί όμως όλα τα «μυστικά». Ο Ουίλιαμς εντόπισε στο κείμενο συντεταγμένες άστρων και έκανε περαιτέρω ανάλυση, σε συνεργασία με τον ιστορικό της επιστήμης Victor Gizenberg του Γαλλικού Εθνικού Ινστιτούτου Επιστημονικών Ερευνών και τον Emanuel Zingg του πανεπιστημίου της Σορβόνης.

Έτσι, αποκαλύφθηκε ότι σε τουλάχιστον μία σελίδα της περγαμηνής δίνονταν **ακριβείς συντεταγμένες** για τα άστρα στα τέσσερα άκρα του αστερισμού Corona Borealis (Βόρειου Στέφανου). Επίσης, προέκυψαν βάσιμες ενδείξεις ότι η πηγή αυτών των μετρήσεων ήταν ο Ίππαρχος ο Ρόδιος και πως οι υπολογισμοί του είχαν γίνει περίπου το 129 π.Χ.

Μέχρι σήμερα ο μοναδικός κατάλογος άστρων που είχε διασωθεί από την αρχαιότητα, ήταν του αστρονόμου **Πτολεμαίου στην Αλεξάνδρεια** της Αιγύπτου, τον 2ο αιώνα μ.Χ. Η «**Αλμαγέστη**» («Μαθηματική σύνταξις») υπήρξε ένα από τα πιο επιδραστικά επιστημονικά κείμενα στην ιστορία, προβάλλοντας ένα γεωκεντρικό μαθηματικό μοντέλο για τον Κόσμο, το οποίο είχε γίνει αποδεκτό ευρέως για πάνω από 1.200 χρόνια. Ο Πτολεμαίος, μεταξύ άλλων, είχε δώσει τις συντεταγμένες πάνω από 1.000 άστρων.

Στα αρχαία κείμενα υπάρχουν πολλές αναφορές πως ο Ίππαρχος ο Ρόδιος (190-120 π.Χ.) ήταν ο πρώτος που είχε κάνει τέτοιες αστρικές μετρήσεις, τρεις αιώνες νωρίτερα. Πριν από αυτόν, οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι είχαν μετρήσει τις θέσεις μερικών άστρων αλλά μόνο γύρω από τον **Ζωδιακό.** Ο Ίππαρχος ήταν ο πρώτος που προσδιόρισε τις θέσεις των άστρων με χρήση δύο συντεταγμένων και επιχείρησε να δημιουργήσει έναν «χάρτη» όλου του νυχτερινού ουρανού. «Αυτός ο κατάλογος άστρων που έως τώρα αιωρείτο στα κείμενα, ως σχεδόν κάτι υποθετικό, έγινε πλέον κάτι πολύ συγκεκριμένο», δήλωσε ο ιστορικός της αστρονομίας Mathieu Ossendrijver του Ελεύθερου Πανεπιστημίου του Βερολίνου.



Οι ερευνητές πιστεύουν ότι ο αρχικός κατάλογος του Ίππαρχου- όπως και εκείνος του Πτολεμαίου- θα περιλάμβανε **παρατηρήσεις** σχεδόν κάθε ορατού **άστρου** στον ουρανό. Λόγω της έλλειψης τηλεσκοπίου, πιθανώς ο Ίππαρχος είχε χρησιμοποιήσει κάποιο άλλο όργανο παρατήρησης όπως τη διόπτρα και ασφαλώς «θα είχε αφιερώσει ατελείωτες ώρες δουλειάς», σημείωνε ο Gizenberg από το Γαλλικό Ινστιτούτο Ερευνών.

Η σχέση Ίππαρχου-Πτολεμαίου ήταν πάντα ένα νεφελώδες **ζήτημα**. Κάποιοι ειδικοί είχαν ισχυριστεί, ότι δεν υπήρξε ποτέ ο κατάλογος άστρων του Ιππάρχου. Άλλοι, με πρώτο τον αστρονόμο του 16ου αιώνα Τίχο Μπράχε, είχαν υποστηρίξει ότι ο Πτολεμαίος, απλά έκλεψε τις προϋπάρχουσες μετρήσεις του Ιππάρχου και τις παρουσίασε για δικές του.

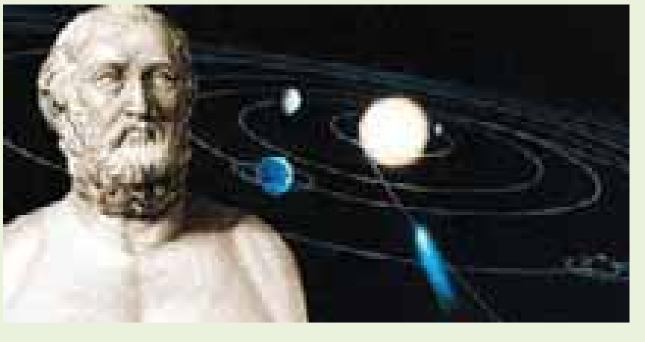
Με τη μέχρι τώρα ανάλυση του κειμένου που αποκαλύφθηκε στην περγαμηνή, οι ερευνητές έχουν καταλήξει στο αρχικό συμπέρασμα πως ο Πτολεμαίος, δεν έκανε απλή αντιγραφή των στοιχείων του Ιππάρχου. Επεσήμαναν πως οι αριθμοί του Ίππαρχου για τις θέσεις των άστρων (με απόκλιση το πολύ μιας μοίρας από τις πραγματικές) είναι πολύ πιο ακριβείς από εκείνες του Πτολεμαίου.

Η ανακάλυψη αυτή «εμπλουτίζει την εικόνα μας για τον Ίππαρχο και μας δίνει μια γοητευτική ιδέα για το τι έκανε πραγματικά», σημείωσε ο ιστορικός της αστρονομίας Τζέιμς Έβανς του πανεπιστημίου Puget Sound. Το έργο του, συμπλήρωσε, υπήρξε καθοριστικό, επειδή αποτέλεσε **ορόσημο για την «μαθηματικοποίηση της φύσης»**, δηλαδή την **μετατόπιση** από την απλή περιγραφή των φυσικών φαινομένων στη **μέτρηση**, τον υπολογισμό και την **πρόβλεψη** τους.

Ο Ίππαρχος είχε επικρίνει τους προδρόμους του στην αστρονομία, ότι δεν νοιάζονταν για την αριθμητική ακρίβεια. Κατά την άποψη του Έβανς, ο Ίππαρχος αξιοποίησε τη βαβυλωνιακή παράδοση των ακριβών αστρονομικών μαθηματικών παρατηρήσεων και χάρη σε αυτόν έγινε το «πάντρεμα» με την ελληνική **γεωμετρική παράδοση**, με αποτέλεσμα «να ξεκινήσει έτσι πραγματικά η **σύγχρονη αστρονομία**».

Καθώς βελτιώνονται οι απεικονιστικές τεχνικές, οι ερευνητές ελπίζουν ότι θα ανακαλύψουν και άλλες συντεταγμένες **άστρων στον Κώδικα**, αρκετά τμήματα του οποίου δεν έχουν διαβαστεί ακόμη.

Παράλληλα θεωρούν πιθανό να διασώζονται επιπλέον σελίδες του καταλόγου άστρων του Ιππάρχου στη βιβλιοθήκη της Μονής Αγίας Αικατερίνης, η οποία περιέχει περισσότερα από **160 παλίμψηστα**.



Η έρευνα όμως απέδειξε πως η περγαμηνή είχε χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές και πως πριν καθαριστεί για να γραφούν τα χριστιανικού περιεχομένου κείμενα στην επιφάνειά της ήταν γραμμένες αστρονομικές μελέτες.

Αρκετοί ερευνητές αναφέρουν ότι ο Ίππαρχος μαζί με τον Αρχιμήδη και τον Ποσειδώνιο τον Ρόδιο, ήταν από τους δημιουργούς του μηχανισμού των Αντικυθήρων.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

39η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Κύπρος 4- 9 Μαΐου 2022

Η **39η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα** (BMO), διοργανώθηκε από την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία και την Μαθηματική Εταιρεία της Νοτιοανατολικής Ευρώπη με φυσική παρουσία στην πόλη Αγρός της Κύπρου στις 4-9 Μαΐου 2022.

Όλοι οι Έλληνες μαθητές κατάφεραν να διακριθούν σε αυτόν τον ιδιαίτερα δύσκολο και απαιτητικό διαγωνισμό, κατακτώντας 2 Χρυσά, 2 Αργυρά και 2 Χάλκινα Μετάλλια, **φέρνοντας την Ελληνική ομάδα στη 2η θέση της γενικής κατάταξης. Η επίδοση αυτή είναι η καλύτερη όλων των εποχών στη συγκεκριμένη διοργάνωση.**

Λιγνός Ορέστης	**Εκπαιδευτήρια Ελληνική Παιδεία**	**Χρυσό Μετάλλιο**
Φωτιάδης Πρόδρομος	**Γυμνάσιο – Λ.Τ. Νικηφόρου Δράμας**	**Χρυσό Μετάλλιο**
Λιάμπας Παναγιώτης	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Πετράκης Εμμανουήλ	**2Ο ΓΕΛ Αγρινίου**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Τζαχρήστας Γεώργιος	**Δωδωναία Εκπαιδευτήρια Ιωαννίνων**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Γεωργελές Γεώργιος	**2ο ΓΕΛ Ξάνθης**	**Χάλκινο Μετάλλιο**

Συνοδοί της Ελληνικής αποστολής ήταν ο μαθηματικός **Αλέξανδρος Συγκελάκης (αρχηγός)** και ο μαθηματικός **Αθανάσιος Μάγκος (υπαρχηγός)** στους οποίους οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1

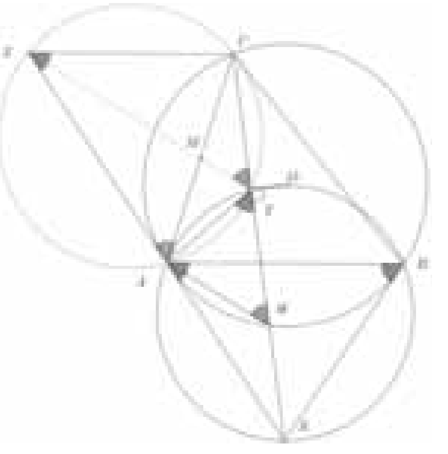
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC, με $CA \neq CB$, εγγεγραμμένο σε κύκλο ω κέντρου Ο. Έστω t_A και t_B οι εφαπτόμενες του ω στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο X. Έστω Y το ίχνος της καθέτου από το σημείο Ο στο ευθύγραμμο τμήμα CX. Η παράλληλη από το σημείο C προς την ευθεία AB τέμνει την t_A στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΥΖ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AC.

(Ηνωμένο Βασίλειο)

Λύση 1η. Αρχικά παρατηρούμε ότι το $OAXB$ είναι εγγράψιμο με διάμετρο την OX και ότι το Y ανήκει επίσης σε αυτό τον κύκλο καθώς $OY \perp XC$. Συνεπώς: $\angle AZC = \angle XAB = \angle ABX = \angle AYX$
κι έτσι, το $CYAZ$ είναι εγγράψιμο.

Έστω M η τομή των YZ και AC και έστω ότι η CY τέμνει τον ω ξανά στο σημείο W. Από το εγγράψιμο $CYAZ$ παίρνουμε $$\angle CYZ = \angle CAZ$$
και έπειτα χρησιμοποιώντας ότι η ZA είναι εφαπτομένη του ω έχουμε $\angle CAZ = \angle CWA$, οπότε:
$$\angle CYM = \angle CWA.$$
Συνεπώς τα τρίγωνα CWA και CYM είναι όμοια. Όμως η CW είναι χορδή του ω και το Y είναι το

ίχνος της καθέτου από το O, άρα το Y είναι το μέσο του CW. Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση ομοιότητας ότι το M είναι το μέσο του AC που είναι το ζητούμενο.



Λύση 2η. Έστω M το μέσο του AC. Έχουμε $\angle CAZ = \angle CBA$ και $\angle ZCA = \angle BAC$ άρα τα τρίγωνα CAZ και ABC είναι όμοια. Η ευθεία CYX είναι η C-συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ABC και η ZM είναι η αντίστοιχη διάμεσος του τριγώνου CAZ, συνεπώς $\angle AZM = \angle ACY$. Άρα

$$\angle ZMA = 180^\circ - \angle AZM - \angle MAZ = 180^\circ - \angle ACY - \angle CBA \quad (1)$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $\angle OMC = \angle OYC = 90^\circ$, άρα το $CMYO$ είναι εγγράψιμο. Έτσι:

$$\angle CYM = \angle COM = \frac{1}{2}\angle COA = \angle CBA.$$

Αυτό δείχνει ότι: $\angle YMC = 180^\circ - \angle MCY - \angle CYM = 180^\circ - \angle ACY - \angle CBA$

Συνδυάζοντας την τελευταία με την (1) παίρνουμε ότι $\angle YMC = \angle ZMA$ και καθώς τα A, C, M είναι συνευθειακά, προκύπτει ότι τα Z, M, Y είναι συνευθειακά όπως το θέλαμε..

Λύση 3η. Όπως στη 2η λύση παίρνουμε ότι η CX είναι η A- συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ABC και ότι το τρίγωνο ABC είναι όμοιο με το CAZ.

Έστω f η σπειροειδής ομοιότητα (spiral similarity) που απεικονίζει το AC στο AB και g η ανάκλαση στη μεσοκάθετη του AB. Ας σημειώσουμε ότι η f είναι μία στροφή γύρω από το A κατά γωνία $\angle CAB$ (με τη φορά του ρολογιού στο σχήμα μας) ακολουθούμενη από μία ομοιοθεσία κέντρου A και με λόγο AB/AC. Από την ομοιότητα των τριγώνων ABC και CAZ παίρνουμε ότι $g(f(Z)) = C$, συνεπώς το $f(Z)$ είναι το άλλο σημείο τομής, έστω C', της CZ με τον κύκλο ω.

Όπως στην πρώτη λύση έχουμε ότι το $CYAZ$ είναι εγγράψιμο. Συνεπώς, παίρνοντας W να είναι το άλλο σημείο τομής της CY με τον ω, έχουμε $\angle WAB = \angle WCB = \angle CAY$. Επίσης έχουμε $\angle ACY = \angle ABW$, κι έτσι προκύπτει ότι $f(Y) = W$. Έστω $W' = g(W)$. Τότε $W' \in \omega$ και καθώς η CW είναι η A-συμμετροδιάμεσος, η CW' περνάει από το μέσο N του AB. Οι CW' και $C'W$ τέμνονται στην μεσοκάθετη του AB κι έτσι τέμνονται στο N. Προκύπτει λοιπόν ότι το $N = AB \cap C'W = Af(C) \cap f(Z)f(Y)$ είναι η εικόνα του $M = AC \cap ZY$ μέσω της f. Καθώς το N είναι το μέσο του AB, το M είναι το μέσο του AC.

Λύση 4η. Έστω $E = AB \cap CX$ και $F = AW \cap CZ$. Έχουμε $(C, W; X, E) = -1$. Προβάλλοντας από την ευθεία CX στην ευθεία CZ από το A παίρνουμε ότι $(C, F; Z, \infty) = -1$. Συνεπώς το Z είναι το μέσο του CF. Καθώς επίσης το σημείο Y είναι το μέσον του CW, παίρνουμε ότι η ZY διχοτομεί το τμήμα CA.

Λύση 5η. Καθώς η CX είναι η C- συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ABC και $OY \perp CX$, άρα το Y είναι το C- Dumpty point του τριγώνου ABC. Συνεπώς έχουμε $\angle YAC = \angle YCB$.

Όπως στις προηγούμενες λύσεις παίρνουμε ότι το τετράπλευρο $CYAZ$ είναι εγγράψιμο.

Συνεπώς $\angle YZC = \angle YAC = \angle YCB = \angle WCB = \angle WAB$. Καθώς η AB είναι παράλληλη στη ZC, προκύπτει ότι η YZ είναι παράλληλη στην WA. Συνεπώς, καθώς το Y είναι το μέσο του CW, έχουμε ότι η YZ διέρχεται από το μέσο του AC που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 2

Έστω a, b και n θετικοί ακέραιοι με $a > b$ τέτοιοι, ώστε να ισχύουν τα εξής:

i. **ο αριθμός a^{2021} διαιρεί τον n,**

ii. **ο αριθμός b^{2021} διαιρεί τον n,**

iii. **ο αριθμός 2022 διαιρεί τον $a - b$.**

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο T του συνόλου των θετικών διαιρετών του αριθμού n τέτοιο, ώστε το άθροισμα των στοιχείων του T να διαιρείται από το 2022, αλλά όχι από το 2022^2.

(Ελλάδα, Σ. Μπραζιτίκος)

Λύση

Αν $1011 \mid a$, τότε $1011^{2021} \mid n$ και μπορούμε να επιλέξουμε $T=\{1011, 1011^2\}$. Υποθέτουμε τώρα ότι $3 \nmid a$ ή $337 \nmid a$. Συνεχίζουμε με τον επόμενο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός: Αν k είναι θετικός ακέραιος, ισχύει $a^k b^{2021-k} \mid n$.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Παρατηρούμε ότι ο $n^{2021}=n^k \cdot n^{2021-k}$ διαιρείται από τον $a^{2021k} \cdot b^{2021(2021-k)}$, οπότε παίρνοντας την 2021-στή ρίζα προκύπτει το ζητούμενο.

Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα, θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $T=\left\{a^k b^{2021-k} : k \geq 0\right\}$ που αποτελείται από 2022 διαιρέτες του n, έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Το άθροισμα των στοιχείων του είναι

$$S=\sum_{k=0}^{2021} a^k b^{2021-k} \equiv \sum_{k=0}^{2021} a^{2021} \equiv 0 \bmod 2022.$$

Εξάλλου, το τελευταίο άθροισμα ισούται με $\dfrac{a^{2022}-b^{2022}}{a-b}$.

Αν $3 \nmid a$, θα αποδείξουμε ότι το S δεν διαιρείται με το 9. Πράγματι, αν $3 \nmid a$, είναι και $3 \nmid b$.

Επομένως αν $3^t \mid\mid a-b$ τότε, επειδή $3^1 \mid\mid 2022$, από το λήμμα Lifting the Exponent, έχουμε $3^{t+1} \mid\mid a^{2022}-b^{2022}$. Αυτό σημαίνει ότι το S δεν διαιρείται με το 9, οπότε το 2022^2 δεν διαιρεί το S.

Αν $3 \mid a$, τότε είναι $337 \nmid \alpha$ και με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $337^2 \nmid S$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ τέτοιες, ώστε

$$f\Big(y\big(f(x)\big)^3+x\Big)=x^3 f(y)+f(x), \text{ για κάθε } x,y>0.$$

(Ελλάδα, Ι. Προδρομίδης)

Λύση. Θέτοντας $y=\dfrac{t}{f(x)^3}$ λαμβάνουμε $f(x+t)=x^3 f\left(\dfrac{t}{f(x)^3}\right)+f(x)$ για όλους τους $x,t>0$. (1)

Από την (1) είναι άμεσο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Ισχυρισμός: $f(1)=1$

Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω $c=f(1)$. Αν $c<1$, θέτοντας $x=1$, $y=\dfrac{1}{1-c^3}$ έχουμε $y-yc^3=1$, οπότε $yf(1)^3+1=y$ και $f(yf(1)^3+1)=f(y)=1^3 f(y)$. Άρα $f(1)=0$, άτοπο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $c>1$. Ισχυριζόμαστε ότι: $f(1+c^3+\cdots+c^{3n})=(n+1)c$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Η περίπτωση $n=0$ είναι προφανής. Το επαγωγικό βήμα προκύπτει εύκολα θέτοντας $x=1, t=c^3+c^6+\cdots+c^{3(k+1)}$ στην (1).

Θέτουμε τώρα $x=1+c^3+\cdots+c^{3n-3}, t=c^{3n}$ στη σχέση (1), οπότε έχουμε:

$$(n+1)c=f(1+c^3+\cdots+c^{3n})=(1+c^3+\cdots+c^{3n-3})^3 f\left(\frac{c^{3n}}{(cn)^3}\right)+nc$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{c^{3n-3}}{n^3}\right)=\frac{c}{(1+c^3+\cdots+c^{3n})^3}<c=f(1)\Rightarrow \frac{c^{3n-3}}{n^3}<1.$$

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει για αρκούντως μεγάλο n.

Τώρα, για $x=1$ έχουμε $f(y+1)=f(y)+1$ και επειδή $f(1)=1$ επαγωγικά προκύπτει $f(n)=n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν $m,n\in\mathbb{N}$, θέτοντας $x=n, y=q=\dfrac{m}{n}$ λαμβάνουμε

$$mn^2+n=f\left(qn^3+n\right)=f(yf(x)^3+x)=x^3 f(y)+f(x)=n^3 f\left(q\right)+n\Rightarrow f(q)=q.$$

Καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα και είναι $f(q)=q$ για κάθε $q\in\mathbb{Q}_{>0}$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x>0$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

Παρατήρηση. Μπορούμε να αποκλείσουμε την περίπτωση $c>1$ και ως εξής:

Καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$f(y)+f(1)=f(yf(1)^3+1)>f(yf(1)^3)\Rightarrow f(c^3y)<f(y)+c$$

για κάθε $y>0$. Τότε, επαγωγικά προκύπτει $f(c^{3n})<(n+1)c$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Θέτοντας $x=c^{3n}$ και $t=c^{3n+3}-c^{3n}$ στην (1) προκύπτει ότι:

$$(n+2)c>f(c^{3n+3})>f(c^{3n+3})-f(c^{3n})=c^{9n}f\left(\frac{c^{3n+3}-c^{3n}}{f(c^{3n})^3}\right)>c^{9n}f\left(\frac{c^{3n+3}-c^{3n}}{c^3(n+1)^3}\right)$$

Όμως
$$\frac{c^{3n+3}-c^{3n}}{c^3(n+1)^3}=\frac{c^{3n}}{(n+1)^3}\cdot\frac{c^3-1}{c^3}>1$$

για αρκούντως μεγάλα c. Επομένως είναι $(n+2)c>c^{9n+1}$, το οποίο είναι αδύνατον για αρκούντως μεγάλα n.

Πρόβλημα 4

Ένα τετράγωνο διαστάσεων $n\times n$ διαιρείται σε n^2 μοναδιαία τετραγωνάκια, όπου $n\geq 3$ είναι ένας δεδομένος περιττός θετικός ακέραιος. Αρχικά, ο Διόνυσος χρωματίζει κάθε τετραγωνάκι κόκκινο ή μπλε. Ένας βάτραχος μπορεί να πηδήξει από ένα τετραγωνάκι σε ένα άλλο αν και μόνο αν αυτά έχουν το ίδιο χρώμα και επιπλέον τουλάχιστον μία κοινή κορυφή. Μετά, ο Ξανθίας παρατηρεί τον χρωματισμό των τετραγώνων και έπειτα τοποθετεί k βατράχους στα τετραγωνάκια με τέτοιο τρόπο, ώστε σε κάθε ένα από τα n^2 τετραγωνάκια κάποιος βάτραχος να μπορεί να φτάσει κάνοντας πεπερασμένου πλήθους (πιθανόν και κανένα) πηδήματα. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του k για την οποία αυτό είναι πάντοτε δυνατόν, ανεξάρτητα από τον χρωματισμό που επέλεξε ο Διόνυσος.

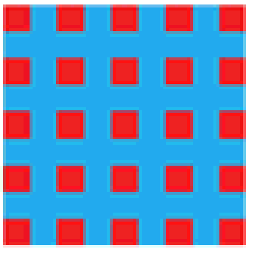
(Ηνωμένο Βασίλειο)

Λύση 1η

Σημείωση: *Ο Διόνυσος και ο Ξανθίας είναι χαρακτήρες της κωμωδίας του Αριστοφάνη «Βάτραχοι». Ο Διόνυσος είναι ο γνωστός θεός του κρασιού και ο Ξανθίας είναι δούλος του.*

Ας είναι G το γράφημα του οποίου οι κορυφές είναι όλες οι $(n+1)^2$ κορυφές του πλέγματος και δύο κορυφές θα λέγονται γειτονικές αν και μόνο αν είναι γειτονικές στο πλέγμα και επιπλέον τα τετραγωνάκια εκατέρωθεν της κοινής πλευράς έχουν διαφορετικό χρώμα.

Οι συνεκτικές συνιστώσες του G, με εξαίρεση τις απομονωμένες κορυφές, είναι ακριβώς τα σύνορα μεταξύ ζευγών μονοχρωματικών περιοχών, κάθε μία εκ των οποίων μπορεί να καλυφθεί από έναν ακριβώς βάτραχο. Κάθε φορά που προσθέτουμε μία από αυτές τις συνιστώσες στο πλέγμα, δημιουργείται ακριβώς μία καινούρια μονοχρωματική περιοχή. Επομένως ο αριθμός των βατράχων που απαιτούνται είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό αυτών των συνιστωσών του G.



Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε γωνιακή κορυφή του πλέγματος έχει βαθμό 0, κάθε συνοριακή κορυφή έχει βαθμό 0 ή 1 και κάθε εσωτερική κορυφή έχει βαθμό 0, 2 ή 4. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι κάθε συνιστώσα του G που δεν είναι απομονωμένη κορυφή πρέπει να περιέχει τουλάχιστον τέσσερις κορυφές, εκτός αν είναι το σύνορο μιας γωνίας του πλέγματος, οπότε περιέχει μόνο τρεις κορυφές.

Συμβολίζοντας με N το αριθμό των συνιστωσών που δεν είναι απομονωμένες κορυφές, βλέπουμε ότι συνολικά περιέχουν τουλάχιστον $4N-4$ κορυφές. (Δεδομένου ότι το πολύ τέσσερις εξ αυτών περιέχουν τρεις κορυφές και όλες οι υπόλοιπες περιέχουν τέσσερις κορυφές). Αφού έχουμε ακόμα τουλάχιστον 4 συνιστώσες που είναι απομονωμένες κορυφές, ισχύει $4N=(4N-4)+4\leq(n+1)^2$. Επομένως ισχύει $N\leq\dfrac{(n+1)^2}{4}$ και ο ελάχιστος αριθμός βατράχων που απαιτούνται είναι $\dfrac{(n+1)^2}{4}+1$.

Το φράγμα για $n=2m+1$ επιτυγχάνεται τοποθετώντας στα τετραγωνάκια συντεταγμένες (x,y) με $x,y\in\{0,1,2,\ldots,2m\}$ και χρωματίζοντας κόκκινα τα τετραγωνάκια του οποίου αμφότερες οι συντεταγμένες είναι άρτιες, και μπλε όλα τα υπόλοιπα. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Λύση 2η: Θεωρούμε ένα πλέγμα $n\times m$ με περιττούς $n,m\geq 3$. Λέμε ότι μία στήλη είναι «Τύπου Α» αν, όταν αναλυθεί στα μονοχρωματικά της μέρη, το πρώτο και το τελευταίο μέρος έχουν το ίδιο χρώμα, με το καθένα από αυτά τα δύο μέρη να περιέχει τουλάχιστον δύο κελιά. Διαφορετικά λέμε ότι είναι «Τύπου Β». Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο απαιτούμενος αριθμός βατράχων, F, ικανοποιεί την ανισότητα

$$F \le \frac{(m+1)(n+1)}{4} + 1 - C \qquad (1)$$

Όπου C είναι ο αριθμός των συνοριακών στηλών Τύπου Α.

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά, αλλά πρώτα αποδεικνύουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός: Θεωρούμε δύο γειτονικές στήλες ύψους n, οι οποίες θεωρούμενες ξεχωριστά χρειάζονται k και ℓ βατράχους, αντίστοιχα. Ας είναι $k+t$ ο αριθμός των βατράχων που απαιτούνται όταν οι δύο στήλες θεωρούνται μαζί. (Ο t μπορεί να είναι αρνητικός.) Τότε, η μέγιστη τιμή του t φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, ανάλογα με το είδος της κάθε στήλης.

Στήλη 1	**Στήλη 2**	***t***
Α	Α	$\min\left\{\frac{\ell+1}{2}, \frac{n-k}{2}\right\}$
Α	Β	$\min\left\{\frac{\ell+1}{2}, \frac{n-k+2}{2}\right\}$
Β	Α	$\min\left\{\frac{\ell-1}{2}, \frac{n-k}{2}\right\}$
Β	Β	$\min\left\{\frac{\ell}{2}, \frac{n-k+1}{2}\right\}$

Απόδειξη του ισχυρισμού:

Παρατηρούμε ότι για κάθε δύο μονοχρωματικές περιοχές της δεύτερης στήλης, μία μπορεί να καλυφθεί από βάτραχο της πρώτης στήλης. Αυτό συμβαίνει επειδή υπάρχει ένα τετραγωνάκι στην πρώτη στήλη, που συνορεύει και με τις δύο και ένας βάτραχος μπορεί να πηδήξει από αυτό το τετραγωνάκι στην περιοχή του αντίστοιχου χρώματος. Επομένως πέραν των k βατράχων που καλύπτουν την πρώτη στήλη, οι απαιτούμενοι επιπλέον βάτραχοι που χρειάζονται για να καλύψουν τη δεύτερη στήλη είναι το πολύ $\frac{\ell+1}{2}$.

Επίσης, αν ισχύει η ισότητα, ο ℓ πρέπει να είναι περιττός, οπότε το πρώτο και το τελευταίο τετραγωνάκι της δεύτερης στήλης έχουν το ίδιο χρώμα, έστω μπλε. Επιπλέον, τα γειτονικά τους τετραγωνάκια στην πρώτη στήλη (δύο πάνω και δύο κάτω) πρέπει να είναι κόκκινα. Οπότε η πρώτη στήλη είναι Τύπου Α. Αν η πρώτη στήλη είναι Τύπου Β και η δεύτερη Τύπου Α, δεν επιτυγχάνεται ούτε το $\frac{\ell}{2}$, αφού τότε το ℓ θα έπρεπε να είναι άρτιος, το οποίο αντιβαίνει στο ότι η δεύτερη στήλη είναι Τύπου Α.

Θεωρούμε τώρα τις $k-1$ οριζόντιες ευθείες που χωρίζουν την πρώτη στήλη σε μονοχρωματικές περιοχές και υποθέτουμε ότι αυτές έχουν ύψη $h_1, h_2, \ldots, h_k$. Παρατηρούμε ότι τα τετραγωνάκια της δεύτερης στήλης που «ακουμπούνε» αυτές τις ευθείες δεν χρειάζονται κανέναν βάτραχο, αφού ένας βάτραχος από την πρώτη στήλη μπορεί να πηδήξει σε αυτά. Άρα τα εναπομείναντα τετραγωνάκια χωρίζονται σε στήλες με ύψη $h_1-1,\ h_2-2, \ldots, h_{k-1}-2,\ h_k-1,$ στις οποίες όλα τα τετραγωνάκια προς τα αριστερά είναι του ίδιου χρώματος. Σε κάθε μία από αυτές χρειαζόμαστε το πολύ $\frac{h_1}{2}, \frac{h_2-1}{2}, \ldots, \frac{h_{k-1}-1}{2}, \frac{h_k}{2}$ βατράχους. Το άθροισμά τους είναι ίσο με $\frac{n-k+2}{2}$, οπότε χρειαζόμαστε τόσους το πολύ βατράχους.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν οι h_1, h_k είναι άρτιοι και όλα οι υπόλοιποι h_i είναι περιττοί. Σε αυτή την περίπτωση, αφού το άθροισμά τους ισούται με n, που είναι περιττός, πρέπει και ο k να είναι περιττός. Επομένως η πρώτη στήλη θα είναι Τύπου Α. Επίσης, αν η δεύτερη στήλη είναι Τύπου Α, τότε η πρώτη και η τελευταία μονοχρωματική περιοχή θα χρειάζονται το πολύ $\frac{h_1-1}{2}$ και $\frac{h_k-1}{2}$ καινούριους βατράχους, αντίστοιχα. Επομένως ο ολικός αριθμός των νέων βατράχων που απαιτούνται είναι το πολύ $\frac{n-k}{2}$. Υποθέτουμε τώρα ότι $m=3$ και ότι η μεσαία στήλη χρειάζεται k βατράχους. Ανάλογα με τον τύπο των τριών στηλών, χρειάζονται το πολύ τόσοι βάτραχοι για να καλύψουμε τις στήλες 1 και 3, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Στήλη 1	Στήλη 2	Στήλη 3	Αριθμός βατράχων
A	A	A	$k+\frac{n-k}{2}+\frac{n-k}{2}=n$
A	A	B	$k+\frac{n-k}{2}+\frac{n-k+2}{2}=n+1$
A	B	A	$k+\frac{n-k}{2}+\frac{n-k}{2}=n$
A	B	B	$k+\frac{n-k}{2}+\frac{n-k+1}{2}=n+\frac{1}{2}$
B	A	A	$k+\frac{n-k+2}{2}+\frac{n-k}{2}=n+1$
B	A	B	$k+\frac{n-k+2}{2}+\frac{n-k+2}{2}=n+2$
B	B	A	$k+\frac{n-k+1}{2}+\frac{n-k}{2}=n+\frac{1}{2}$
B	B	B	$k+\frac{n-k+1}{2}+\frac{n-k+1}{2}=n+1$

Αυτό αποδεικνύει την (1) όταν $m=3$, αφού τότε η ανισότητα γίνεται $F\leq n+2-C$ και μπορούμε να δούμε ότι αυτή ικανοποιείται σε κάθε περίπτωση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει για τον αριθμό m. Θα το αποδείξουμε για τον αριθμό $m+2$. Κολλάμε δύο στήλες στο τέλος του τετραγώνου. Πρέπει να δείξουμε ότι χρειαζόμαστε επιπλέον το πολύ $\frac{n+1}{2}+C_{old}-C_{new}$ βατράχους. Κοιτάζουμε τις τρεις τελευταίες στήλες. Η πρώτη ήδη προϋπήρχε από τον προηγούμενο πίνακα. Υποθέτουμε ότι οι δυο καινούργιες χρειάζονται k και ℓ βατράχους αντίστοιχα. Ανάλογα με το είδος αυτών των δύο στηλών και της προηγούμενής τους χρειαζόμαστε το πολύ τον ακόλουθο αριθμό από επιπλέον βατράχους:

Στήλη 1	Στήλη 2	Στήλη 3	Αριθμός βατράχων
A	A	A	$\frac{k+1}{2}+\frac{n-k}{2}=\frac{n+1}{2}$
A	A	B	$\frac{k+1}{2}+\frac{n-k+2}{2}=\frac{n+3}{2}$
A	B	A	$\frac{k+1}{2}+\frac{n-k}{2}=\frac{n+1}{2}$
A	B	B	$\frac{k+1}{2}+\frac{n-k+1}{2}=\frac{n+2}{2}$
B	A	A	$\frac{k-1}{2}+\frac{n-k}{2}=\frac{n-1}{2}$
B	A	B	$\frac{k-1}{2}+\frac{n-k+2}{2}=\frac{n+1}{2}$
B	B	A	$\frac{k}{2}+\frac{n-k}{2}=\frac{n}{2}$
B	B	B	$\frac{k}{2}+\frac{n-k+1}{2}=\frac{n+1}{2}$

Μπορεί τώρα να ελεγχθεί ότι ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα. Π.χ. όταν και οι τρεις στήλες είναι τύπου A έχουμε $C_{old}=C_{new}$ και χρειαζόμαστε το πολύ $\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2}+C_{old}-C_{new}$ επιπλέον βατράχους. Η μόνη περίπτωση που χρειάζεται κάποια επιπλέον προσοχή είναι όταν οι στήλες 1 και 2 είναι τύπου B και η στήλη 3 είναι τύπου B. Εδώ χρειαζόμαστε το πολύ $\frac{n}{2}$ επιπλέον βατράχους αλλά επειδή υποθέσαμε ήδη ότι ο n είναι περιττός, στην πραγματικότητα χρειαζόμαστε το πολύ $\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}+C_{old}-C_{new}$ επιπλέον βατράχους αφού τώρα έχουμε $C_{old}=C_{new}-1$ (η τελευταία στήλη από τύπου B έγινε τύπου A και άρα το C αυξήθηκε κατά 1).

XXV ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ 2022

Memorial Peter o' Halloran

17 Απριλίου 2022

Πρόβλημα 1

Έστω $S=\{1,2,...,999\}$. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο ακέραιο m για τον οποίο υπάρχουν m κάρτες δύο όψεων $C_1, C_2, ..., C_m$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- **Κάθε κάρτα C_i έχει έναν ακέραιο από το σύνολο S στη μία όψη της και έναν άλλο ακέραιο από το σύνολο S στην άλλη όψη της.**
- **Για όλα τα $x, y \in S$ με $x \neq y$ είναι δυνατόν να επιλέξουμε μία κάρτα C_i η οποία έχει το x σε μία όψη της και μία άλλη κάρτα C_j, $j \neq i$, η οποία έχει το y σε μία από τις όψεις της.**

Λύση: Κατασκευάζουμε πρώτα ένα σύνολο από 666 κάρτες που πληρούν τη ζητούμενη ιδιότητα ως εξής: Για κάθε τριάδα $\{3\kappa-2, 3\kappa-1, 3\kappa\}$ με $1 \leq \kappa \leq 333$, εισάγουμε μία κάρτα με αριθμούς $3\kappa-2$ και $3\kappa-1$ και μία κάρτα με αριθμούς $3\kappa-2$ *και* 3κ. Έτσι δημιουργούμε $2 \cdot 336 = 666$ κάρτες.
Θεωρούμε τώρα $x, y \in S$ με $x < y$.
Αν $x, y \in \{3\kappa-2, 3\kappa-1, 3\kappa\}$ για κάποιο κ, *τότε* η κάρτα με τους αριθμούς $3\kappa-2$ και $3\kappa-1$ έχει το x στη μία όψη της και η άλλη κάρτα με τους αριθμούς $3\kappa-2$ και 3κ έχει το y σε μία όψη της.
Αν τα $x, y \in S$ με $x < y$ ανήκουν σε διαφορετικές κάρτες, τότε εύκολα μπορούμε να επιλέξουμε δύο διαφορετικές κάρτες που εμφανίζουν τα x, y σε μία όψη τους.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση: $m \geq 666$.
Για αυτό το λόγο θεωρούμε ένα σύστημα καρτών $C_1, C_2, ..., C_m$ που ικανοποιούν τη ζητούμενη ιδιότητα και χωρίζουμε το σύνολο $S=\{1,2,...,999\}$ σε δύο τμήματα S_1 και S_2 ως εξής:

- Το σύνολο S_1 περιέχει όλα τα στοιχεία του S που εμφανίζονται μόνο σε μία κάρτα.
- Το σύνολο S_2 περιέχει όλα τα στοιχεία του S που εμφανίζονται σε δύο τουλάχιστον κάρτες.

Από τον ορισμό των δύο συνόλων εύκολα προκύπτει για το πλήθος των στοιχείων τους η σχέση:
$$|S_1| + |S_2| = 999.$$
Επειδή κάθε κάρτα έχει δύο όψεις, οι m κάρτες θα εμφανίζουν συνολικά $2m$ αριθμούς, οπότε:
$$|S_1| + 2|S_2| \leq 2m. \qquad (1)$$
Παρατηρούμε επίσης ότι δεν μπορεί να υπάρχει κάρτα που να έχει στις δύο όψεις της δύο αριθμούς x και y από το σύνολο S_1. Πράγματι, αν αυτό συνέβαινε, τότε θα ήταν αδύνατο να επιλέξουμε μία κάρτα C_i που να έχει το x και μία κάρτα C_j, $j \neq i$, που να έχει το y. Επομένως:
$$|S_1| \leq m. \qquad (2)$$
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε τη σχέση $2 \cdot 999 = 2 \cdot (|S_1| + |S_2|) \leq m + 2m = 3m$, από την οποία έπεται ότι $m \geq 2 \cdot \frac{999}{3} = 666$.

Πρόβλημα 2

(α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία a και b τέτοια ώστε κάθε ακέραιος με δεκαδική αναπαράσταση $ab222...231$ να διαιρείται με το 73.

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο δεκαδικά ψηφία c και d τέτοια ώστε κάθε ακέραιος με δεκαδική αναπαράσταση $cd222...231$ να διαιρείται με το 79.

Λύση: (α) Υποθέτουμε ότι δύο τέτοια ψηφία a, b υπάρχουν. Τότε οι αριθμοί $x = ab2231$ και $y = ab231$ διαιρούνται με το 73, οπότε θα διαιρείται με το 73 και ο αριθμός $10y - x = 79$, άτοπο.
(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι οι τιμές $c = 7$ και $d = 0$ ικανοποιούν το πρόβλημα, αφού κάθε αριθμός $70222 \ldots 231$, έστω με $m + 2$ ψηφία, μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$70 \cdot 10^m + 2 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{m-2\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha} \cdot 10^2 + 9 = 70 \cdot 10^m + \frac{2}{9}(10^{m-2} - 1) \cdot 10^2 + 31 =$$
$$\frac{1}{9} \cdot 632 \cdot 10^m - \frac{200}{9} + 31 = \frac{1}{9}(632 \cdot 10^m + 79) = 79 \cdot \frac{1}{9}(8 \cdot 10^m + 1),$$
οπότε διαιρείται με το 79, γιατί ο αριθμός $8 \cdot 10^m + 1$ διαιρείται με το 9, αφού το άθροισμα των ψηφίων του ισούται με 9, για κάθε φυσικό αριθμό m.

Πρόβλημα 3

Αν a,b,c,d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(b+c+d)^3}{b^3+c^3+d^3}+\frac{(c+d+a)^4}{c^4+d^4+a^4}+\frac{(d+a+b)^5}{d^5+a^5+b^5}\le 120\,.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^n, n\ge 2$.
Επειδή $f'(x)=nx^{n-1}$ και $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$, για $x\in(0,+\infty)$, η συνάρτηση f είναι κυρτή, οπότε από την ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\le\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\Rightarrow\frac{(x+y+z)^n}{3^n}\le\frac{x^n+y^n+z^n}{3}\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)^n}{x^n+y^n+z^n}\le 3^{n-1}$$

Εφαρμόζουμε την τελευταία ανισότητα για $n\in\{2,3,4,5\}$ και τις κατάλληλες μεταβλητές κάθε φορά, οπότε λαμβάνουμε τις ανισότητες:

Για $n=2$: $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\le 3$, για $n=3$: $\frac{(b+c+d)^3}{b^3+c^3+d^3}\le 3^2=9$,

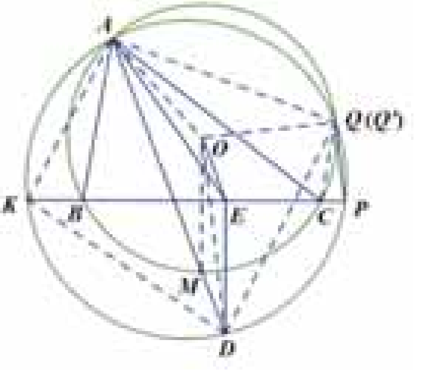
για $n=4$: $\frac{(c+d+a)^4}{c^4+d^4+a^4}\le 3^3=27$ και για $n=5$: $\frac{(d+a+c)^5}{d^5+a^5+c^5}\le 3^4=81$,

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.
Η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c=d$.

Πρόβλημα 4

Έστω τρίγωνο ABC με $AB<AC$ εγγεγραμμένο σε κύκλο γ κέντρου O. Θεωρούμε σημείο D στη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{A}C$ και σημείο E στο ευθύγραμμο τμήμα BC τέτοια ώστε η ευθεία OE να είναι παράλληλη προς την ευθεία AD και $DE\perp BC$. Θεωρούμε και σημείο K στην προέκταση του EB προς το μέρος του B, έτσι ώστε $EA=EK$. Ο κύκλος που περνάει από τα σημεία A,K,D τέμνει την προέκταση της πλευράς BC στο σημείο P και τον κύκλο γ κέντρου O σε σημείο $Q\ne A$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία PQ είναι εφαπτομένη του κύκλου γ.

Λύση: Φέρουμε τα τμήματα OA και OD. Έστω Q' σημείο πάνω στον κύκλο γ τέτοιο ώστε $Q'\hat{O}D=90^0$ και το σημείο Q' ανήκει σε διαφορετικό ημιεπίπεδο από το D ως προς την ευθεία AO. Θα αποδείξουμε ότι: $Q'=Q$.
Φέρνουμε και τα τμήματα AK, KD, AQ' και $Q'D$. Υποθέτουμε ότι η ευθεία AD τέμνει τον κύκλο γ ξανά στο σημείο $M\ne A$. Τότε το M είναι το μέσο του τόξου $\widehat{BC}$ και $MO\perp BC$.
Επειδή είναι και $DE\perp BC$, έπεται ότι: $OM\parallel DE$.
Επειδή $OE\parallel MD$, το τετράπλευρο $OMDE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε: $DE=OM=OA$.
Επομένως, το τετράπλευρο $AOED$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε:



$$DE=AO=OQ' \text{ και } EK=EA=OD.$$

Επειδή επιπλέον, $D\hat{E}K=Q'\hat{O}D=90^0$, τα τρίγωνα DEK και $Q'OD$ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε και τις ισότητες: $O\widehat{Q'}D+D\hat{K}E=E\hat{D}K+D\hat{K}E=90^0$.

Επιπλέον, έχουμε: $A\widehat{Q'}O=90^0-\frac{A\hat{O}Q'}{2}=90^0-\frac{1}{2}\left(270^0-A\hat{O}D\right)=\frac{1}{2}\left(A\hat{O}D-90^0\right)$
$=\frac{1}{2}\left(A\hat{E}D-90^0\right)=\frac{1}{2}\cdot A\hat{E}K=90^0-A\hat{K}E.$

Επομένως, έχουμε: $A\widehat{Q'}D+A\hat{K}D=\left(A\widehat{Q'}O+A\hat{K}E\right)+\left(O\widehat{Q'}D+D\hat{K}E\right)=90^0+90^0=180^0$,
οπότε τα σημεία A, K, D, Q' είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο και επειδή είναι $Q'\ne A$, έπεται ότι το σημείο Q' ταυτίζεται με το σημείο Q.
Τώρα από την ισότητα των τριγώνων DEK και QOD συμπεραίνουμε ότι $DK=DQ$ και $K\hat{A}D=Q\hat{A}D$.
Επειδή η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}C$ έχουμε: $K\hat{A}B=Q\hat{A}C$. Επομένως, προκύπτουν η ισότητα:

$$P\hat{Q}C=B\hat{C}Q-K\hat{P}Q=\left(180^0-B\hat{A}Q\right)-\left(180^0-K\hat{A}Q\right)=K\hat{A}B=Q\hat{A}C,$$

από την οποία έπεται ότι η ευθεία PQ είναι εφαπτομένη του κύκλου γ.

83^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1, \quad \frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=1.$$

Λύση

Για $x,y\neq 0$ θέτουμε $\frac{1}{x}=\varphi\neq 0, \frac{1}{y}=\omega\neq 0$, οπότε το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi+\omega=1\\ \frac{\varphi^2}{\omega}+\frac{\omega^2}{\varphi}=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\varphi+\omega=1\\ \varphi^3+\omega^3=\varphi\omega\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ (1-\omega)^3+\omega^3=(1-\omega)\omega\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ 1-3\omega+3\omega^2-\omega^3+\omega^3=\omega-\omega^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ 1-4\omega+4\omega^2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ (1-2\omega)^2=0\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\varphi=1-\omega\\ 1-2\omega=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow(\varphi,\omega)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow(x,y)=(2,2).$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος $\left\{\begin{array}{c}\varphi+\omega=1\\ \varphi^3+\omega^3=\varphi\omega\end{array}\right\}$,

οπότε θα προέκυπτε η εξίσωση:

$$\frac{\varphi^3+\omega^3}{\varphi+\omega}=\varphi\omega\Leftrightarrow\frac{(\varphi+\omega)(\varphi^2-\varphi\omega+\omega^2)}{\varphi+\omega}=\varphi\omega\Leftrightarrow\varphi^2-\varphi\omega+\omega^2=\varphi\omega\Leftrightarrow(\varphi-\omega)^2=0\Leftrightarrow\varphi=\omega \text{ κλπ.}$$

2^{ος} τρόπος

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, για $xy\neq 0$, παίρνουμε: $y+x=xy$ και $y^3+x^3=x^2y^2$.

Έτσι, $$y^3+x^3=xy(y+x)=xy^2+x^2y,$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα $y^2(y-x)+x^2(x-y)=0\Leftrightarrow(y-x)^2(y+x)=0$.

Αφού $y+x=xy\neq 0$, παίρνουμε $y=x$, και εύκολα από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι $x=y=2$.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ ένα σημείο στο εσωτερικό του, έτσι ώστε $ΑΓ > ΑΒ/2$. Σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ να είναι ισοσκελή, με $ΔΑ = ΔΓ > ΕΑ = ΕΒ$ και $ΔΑ \parallel ΕΓ$. Η παράλληλη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΕΑ τέμνει την ευθεία ΕΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) ΓΔ = ΕΖ και ΔΖ = ΒΕ (β) ΒΖ ∥ ΔΓ.

Λύση

(α) Το τετράπλευρο ΕΑΔΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Επομένως, έχουμε: $\Delta\Gamma = \Delta A = EZ$ (1).

$EB = EA = \Delta Z$ (2)

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΓΔΖ και ΖΕΒ, έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία. Θα αποδείξουμε ότι έχουν και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή $Z\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{E}Z$.

Έχουμε: $Z\hat{\Delta}\Gamma = Z\hat{\Delta}A - \Gamma\hat{\Delta}A = A\hat{E}Z - \Gamma\hat{\Delta}A$

και $B\hat{E}Z = B\hat{E}A - Z\hat{E}A$.

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι $Z\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{E}Z$,

αρκεί να αποδείξουμε ότι : $B\hat{E}A + \Gamma\hat{\Delta}A = 2 \cdot Z\hat{E}A$ (3)

Από τα ισοσκελή ΒΕΑ, ΓΔΑ, παίρνουμε ότι

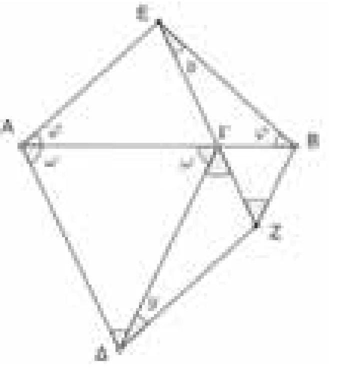
$$B\hat{E}A = 180° - 2 \cdot E\hat{A}B$$

και $\Gamma\hat{\Delta}A = 180° - 2 \cdot \Gamma\hat{A}\Delta$.

Επομένως $B\hat{E}A + \Gamma\hat{\Delta}A = 2 \cdot \left(180° - \Gamma\hat{A}\Delta - E\hat{A}B\right)$

$= 2 \cdot \left(180° - E\hat{A}\Delta\right) = 2 \cdot A\hat{\Delta}Z = 2 \cdot Z\hat{E}A$,

που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

Επομένως, τα τρίγωνα ΓΔΖ και ΖΕΒ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{\Gamma}Z = B\hat{Z}E$, δηλαδή οι ευθείες ΓΔ και ΒΖ τεμνόμενες από την ευθεία ΓΖ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Άρα είναι $BZ \parallel \Delta\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Έστω $n > 2$ ένας περιττός ακέραιος. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n+2$. Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, τότε ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Αφού ο k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n+2$, θα έχουμε ότι $k < \sqrt{n+2} \leq k+1$, οπότε $k^2 < n+2 \leq k^2+2k+1$.

Διαιρώντας με k, παίρνουμε $k < \frac{n}{k} + \frac{2}{k} \leq k+2+\frac{1}{k}$, δηλαδή $k - \frac{2}{k} < \frac{n}{k} \leq k+2-\frac{1}{k}$.

Αφού ο $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, από την παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\frac{n}{k} \in \{k, \ k+1\}$.

Όμως, αν $\frac{n}{k} = k+1$, τότε $n = k(k+1)$, οπότε ο n διαιρείται από το 2 (αφού κάποιος από τους $k, k+1$ διαιρείται από το 2). Αυτό είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση ο n είναι περιττός ακέραιος. Επομένως, αναγκαστικά έχουμε $\frac{n}{k} = k$, οπότε $n = k^2$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \neq 0,\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = \frac{1}{9},\ xyz = 27\right\}.$$

Λύση

Για $xyz \neq 0$, θέτουμε $\frac{1}{x}=\alpha, \frac{1}{y}=\beta, \frac{1}{z}=\gamma$, οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\left\{\alpha+\beta+\gamma \neq 0, \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\frac{1}{9}, \quad \alpha\beta\gamma=\frac{1}{27}\right\}.$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση έχουμε:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=0$$

$$\overset{\alpha+\beta+\gamma\neq 0}{\Longleftrightarrow} (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=(\beta-\gamma)^2=(\gamma-\alpha)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma.$$

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε:

$$\alpha^3=\frac{1}{27} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{3}, \text{ οπότε έχουμε: } \alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3} \text{ και τελικά } \frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=y=z=3.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbf{x, y}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{2(x-1)(y-1)-2(x-1)\sqrt{y-1}-2(y-1)\sqrt{x-1}+x+y-2 \leq 0.}$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για $x \geq 1$ και $y \geq 1$. Θέτουμε $\alpha=\sqrt{x-1} \geq 0$ και $\beta=\sqrt{y-1} \geq 0$,

οπότε η δεδομένη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\alpha^2+\beta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta+\alpha^2\right)+\left(\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta^2+\beta^2\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\left(\beta^2-2\beta+1\right)+\beta^2\left(\alpha^2-2\alpha+1\right) \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2(\beta-1)^2+\beta^2(\alpha-1)^2 \leq 0. \qquad (1)$$

Αν ήταν κάποιος από τους όρους $\alpha(\beta-1), \beta(\alpha-1)$ διάφορος του μηδενός, τότε θα είχαμε $\alpha^2(\beta-1)^2+\beta^2(\alpha-1)^2>0$, άτοπο. Άρα η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\alpha(\beta-1)=0,\ \beta(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0 \text{ ή } \alpha=\beta=1$$
$$\sqrt{x-1}=0=\sqrt{y-1} \text{ ή } \sqrt{x-1}=1=\sqrt{y-1}$$
$$x=y=1 \text{ ή } x=y=2.$$

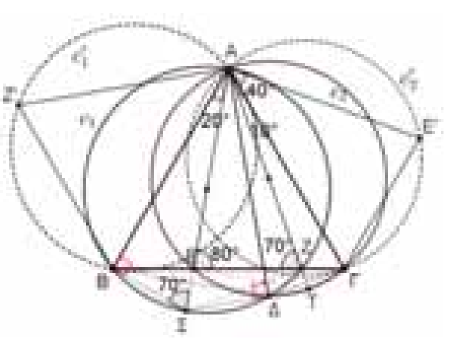
Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο επίπεδό του μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε $\mathbf{A\hat{\Delta}B=70^0}$ και $\mathbf{A\hat{\Delta}\Gamma=80^0}$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}\Delta$.

Λύση

Θεωρούμε (τα μοναδικά) σημεία Ε και Ζ στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}E=20°$ και $Z\hat{A}\Gamma=10°$. Τότε είναι $A\hat{E}\Gamma=80°$ και $A\hat{Z}B=70°$. Έστω c_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΖ και c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΓΕ. Τότε οι κύκλοι c_1 και c_2 τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο Δ διαφορετικό του Α, για το οποίο ισχύει:

$$A\hat{\Delta}B=A\hat{Z}B=70° \text{ και } A\hat{\Delta}\Gamma=A\hat{E}\Gamma=80°.$$



Σχήμα 2

Επίσης, έστω Ε' το συμμετρικό του Ε ως προς την ΑΓ και Ζ' το συμμετρικό του Ζ ως προς την ΑΒ. Έστω c_1' ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΖ' και c_2' ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΓΕ'. Τότε είναι:

$$\angle \text{ΑΕ}'\text{Γ} = 80^\circ \text{ και } \angle \text{ΑΖ}'\text{Β} = 70^\circ$$

Προφανώς το τόξο ΑΖ'Β του c_1' και το τόξο ΑΕ'Γ του c_2', δεν τέμνονται σε σημείο διαφορετικό από το Α. Το τόξο ΑΖ'Β του c_1' δεν τέμνει το τόξο ΑΕΓ του c_2, αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά ΑΒ σε εσωτερικό της σημείο. Επίσης, το τόξο ΑΕ'Γ του c_2', δεν τέμνει το τόξο ΑΖΒ του c_1, αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο. Συνεπώς, το Δ είναι μοναδικό.

Έστω Σ το σημείο τομής της προέκτασης της ΑΕ και του c_1, και έστω Τ το σημείο τομής της προέκτασης της ΑΖ και του c_2 . Αφού τα σημεία Α, Β, Σ, Δ, Ζ είναι ομοκυκλικά και $\text{Β}\hat{\text{Ζ}}\text{Σ} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Σ} = 20^\circ$ έχουμε

$$\text{Α}\hat{\Delta}\Sigma = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\Sigma = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Β} + \text{Β}\hat{\text{Ζ}}\Sigma = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ.$$

Ομοίως, αφού τα σημεία Α, Ε, Δ, Τ, Γ είναι ομοκυκλικά και $\Gamma\hat{\text{Ε}}\text{Τ} = \Gamma\hat{\text{Α}}\text{Τ} = 10^\circ$ έχουμε

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Τ} = \text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Τ} = \text{Α}\hat{\text{Ε}}\Gamma + \Gamma\hat{\text{Ε}}\text{Τ} = 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ.$$

Συνεπώς, τα σημεία Σ, Δ, Τ είναι συνευθειακά. Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΒΣΖ και ΑΕΤΓ έχουμε $\text{Ε}\hat{\text{Τ}}\text{Α} = \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Α} = 60^\circ$ και $\text{Α}\hat{\Sigma}\text{Ζ} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ζ} = 60^\circ$.

Άρα $\text{Ε}\hat{\text{Τ}}\text{Ζ} = 60^\circ = \text{Ε}\hat{\Sigma}\text{Ζ}$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΕΖΤΣ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $\text{Α}\hat{\Sigma}\Delta = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε} = 70^\circ$, και άρα $\Sigma\hat{\text{Α}}\Delta = 20^\circ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΣ. Συνεπώς,

$$\text{Β}\hat{\text{Α}}\Delta = \text{Β}\hat{\text{Α}}\Sigma + \Sigma\hat{\text{Α}}\Delta = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω a, b μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b = 2$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = 8(a^3 + b^3) - 3(a^4 + b^4)$.

Λύση

Θέτουμε $p = ab$. Τότε έχουμε:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 8 - 6p. \quad (1)$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = \left((a+b)^2 - 2ab\right)^2 - 2a^2b^2 = (4-2p)^2 - 2p^2 = 16 - 16p + 2p^2. \quad (2)$$

Επομένως, η δεδομένη παράσταση γίνεται:

$$A = 8(8 - 6p) - 3(16 - 16p + 2p^2) = -6p^2 + 16.$$

Επειδή $0 \le p = ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, έπεται ότι:

$$0 \le p^2 \le 1 \Rightarrow -6 \le -6p^2 \le 0 \Rightarrow 10 \le A = -6p^2 + 16 \le 16.$$

Η ισότητα στο αριστερό μέλος ισχύει όταν $p^2 = 1 \Leftrightarrow ab = 1 \overset{a+b=2}{\Longleftrightarrow} a = b = 1$.

Η ισότητα στο δεξιό μέλος ισχύει όταν $p^2 = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \overset{a+b=2}{\Longleftrightarrow} (a,b) = (2,0)$ ή $(a,b) = (0,2)$.

Επομένως, η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι 10 και η μέγιστη 16.

Πρόβλημα 2

Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ. Έστω Δ σημείο στη διχοτόμο της γωνίας Β τέτοιο ώστε ΜΔ = ΜΒ και έστω Ε σημείο στη διχοτόμο της γωνίας Γ τέτοιο ώστε ΜΕ = ΜΓ. Έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων ΒΔ και ΓΕ, έστω Κ το σημείο τομής των

ευθειών ΑΒ και ΕΔ, και έστω Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΓ και ΕΔ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Κ, Ι, Ν είναι ομοκυκλικά.

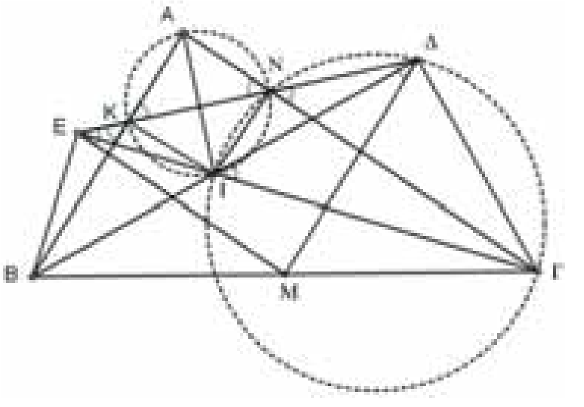
Λύση

Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και ΜΒ = ΜΔ, έπεται ότι: $M\hat{\Delta}B = M\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}A$, οπότε θα είναι $M\Delta \parallel BA$. Ομοίως, προκύπτει και ότι: $ME \parallel \Gamma A$.

Άρα έχουμε:

$$A\hat{N}K = \Delta\hat{N}\Gamma = \Delta\hat{E}M \text{ και } A\hat{K}N = E\hat{K}B = E\hat{\Delta}M.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΜΔ έχουμε $\Delta\hat{E}M = E\hat{\Delta}M$, οπότε από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η ισότητα $A\hat{N}K = A\hat{K}N$. Άρα το τρίγωνο ΑΚΝ είναι ισοσκελές με ΑΚ = ΑΝ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι κάθετη προς την πλευρά ΚΝ.



Σχήμα 3

Επομένως, έχουμε: $\Delta\hat{N}\Gamma = 90 - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \Delta\hat{I}\Gamma$, αφού η γωνία $\Delta\hat{I}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΙΓ.

Επομένως, το τετράπλευρο ΔΝΙΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο, αφού $M\Delta = BM = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, οπότε θα είναι και $I\hat{\Delta}\Gamma = 90^0$, Άρα είναι και $I\hat{N}\Gamma = 90^0 \Rightarrow I\hat{N}A = 90^0$. Ομοίως προκύπτει ότι $I\hat{K}A = 90^0$. Επομένως, $I\hat{N}A + I\hat{K}A = 180^0$, οπότε το τετράπλευρο ΑΚΙΝ είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Η συνάρτηση $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{N}^*) \subseteq \mathbb{N}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(6n+7) = 6f(n)+7 \qquad \text{και} \qquad f(7n-1) = 7f(n)-1,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να προσδιορίσετε την τιμή $f(2029)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $2029 = 6\cdot 338+1 = 6\cdot 337+7$, $\quad 337 = 6\cdot 56+1 = 6\cdot 55+7$, $\quad 55 = 6\cdot 9+1 = 6\cdot 8+7$

και επίσης ότι: $7n-1 = 6n+7 \Leftrightarrow n = 8$.

Με $n=8$ στις δεδομένες σχέσεις λαμβάνουμε: $f(55) = 6f(8)+7$ και $f(55) = 7f(8)-1$,

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα $7f(8)-1 = 6f(8)+7$, οπότε $f(8)=8$. Άρα έχουμε:

$f(55) = 6f(8)+7 = 6\cdot 8+7 = 55$, $\quad f(337) = 6f(55)+7 = 6\cdot 55+7 = 337$, $\quad f(2029) = 6f(337)+7 = 6\cdot 337+7 = 2029$.

Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 125

Α70. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b,c είναι τέτοιοι ώστε: $ab+bc+ca \geq 1$. να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{abc}.$$

(ΜΟ Ουκρανίας 2020-21)

Λύση

Επειδή $a,b,c > 0$, η δεδομένη ανισότητα μπορεί να πάρει τη μορφή

$$abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c} \geq \sqrt{3}.$$

Με αναδιάταξη των όρων και χρήση γνωστών ανισοτήτων, προκύπτει το ζητούμενο.

Πράγματι, έχουμε: $$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)\right)$$

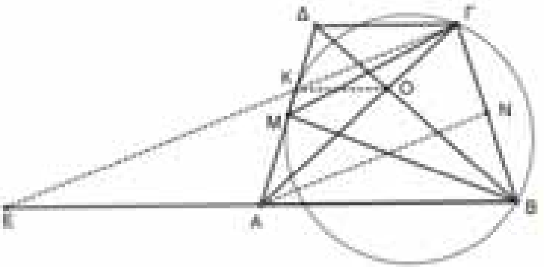
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+a\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+b\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\right)\geq\frac{1}{2}\cdot(2c+2a+2b)=a+b+c$$

$$=\sqrt{(a+b+c)^2}=\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ca)}\geq\sqrt{3(ab+bc+ca)}\geq\sqrt{3}$$

Γ62. Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο με $AB \parallel \Gamma\Delta$, του οποίου οι διαγώνιοι του τέμνονται στο Ο. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΔ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΜ τέμνει για δεύτερη φορά την πλευρά ΑΔ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι: $OK \parallel AB$.

(ΜΟ Ουκρανίας 2020-21)

Λύση



Έστω ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΚ τέμνονται στο σημείο Ε. θεωρούμε και το μέσο Ν της πλευράς ΒΓ. Επειδή το τετράπλευρο ΜΒΓΚ είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΓΜ, έπεται ότι:

$$A\hat{M}B = B\hat{\Gamma}K = B\hat{\Gamma}E \qquad (1)$$

Επίσης από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΝΒ είναι ίσα, αφού έχουν την ΑΒ κοινή πλευρά, $AM=\frac{A\Delta}{2}=\frac{B\Gamma}{2}=BN$ και $B\hat{A}M = A\hat{B}N$. Άρα έχουμε: $A\hat{M}B = A\hat{N}B \qquad (2)$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $B\hat{\Gamma}E = A\hat{N}B$, οπότε συμπεραίνουμε ότι: $AN \parallel \Gamma E$.

Τότε, από το θεώρημα του Θαλή λαμβάνουμε: $\frac{BA}{AE}=\frac{BN}{N\Gamma}=1 \Rightarrow BA = AE$.

Τέλος, από τις ομοιότητες τριγώνων $\Gamma\Delta K \approx EAK$ και $AOB \approx \Gamma O\Delta$ έχουμε:

$$\frac{\Delta K}{KA}=\frac{\Gamma\Delta}{AE}=\frac{\Gamma\Delta}{AB}=\frac{\Delta O}{OB}.$$

οπότε τελικά προκύπτει η παραλληλία: $OK \parallel AB$.

Ασκήσεις για λύση

N54. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $n \geq 2$, οι οποίοι έχουν ένα θετικό διαιρέτη m έτσι ώστε να ισχύει: $$n = d^3 + n^3,$$
όπου d είναι ο μικρότερος διαιρέτης του n που είναι μεγαλύτερος του 1.

Α71. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ορίζουμε ως $M(x,y)$ τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς xy, $(x-1)(y-1)$, $x+y-2xy$. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του $M(x,y)$, αν $0 \leq x, y \leq 1$.

Α72. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ η οποία ικανοποιεί, για κάθε $x, y \in \mathbb{N}^*$ τη σχέση:

$$\frac{x^3+3x^2 f(y)}{x+f(y)}+\frac{y^3+3y^2 f(x)}{y+f(x)}=\frac{(x+y)^3}{f(x+y)}. \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(1) = 1$ **(β)** Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση (1).

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.
συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Η στήλη μας HOMO MATHEMATICUS, δεν ξεχνά τους «εργάτες» της

Η φετινή χρονιά (2022) δεν ήταν καθόλου καλή για τη στήλη μας, (την Homo mathematicus). Ο λόγος είναι ότι **έφυγαν από κοντά μας** (και από τη ζωή) τρεις σημαντικοί συνεργάτες της στήλης:

† ο ***Ευγένιος Αγγελόπουλος***, ομότιμος καθηγητής Μαθηματικών στη Σχολή ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ (ένας άνθρωπος με ανησυχίες για το κοινωνικό γίγνεσθαι),

† ο ***Γιώργος Τσαγκαράκης***, ένας ευφυέστατος δάσκαλος της αίθουσας, γεμάτος αγάπη, ευαισθησίες και αφοσίωση στο έργο που τάχθηκε. Θα μείνουν παροιμιώδεις οι μεθοδεύσεις του για να πετύχει τον παιδαγωγικό του στόχο, όπως μας τις αποκάλυπτε κάθε φορά που ανταλλάσσαμε απόψεις,

† ο ***Παναγιώτης Οικονομάκος*** είναι ο δάσκαλος που, πρώτος, εργάσθηκε σε σχολική αίθουσα, την διαπραγμάτευση θεμάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας με μεθόδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Θέματα αυτού του είδους βρίσκει κανείς στις σελίδες του περιοδικού "Ευκλείδης Β΄"(στην στήλη Homo mathematicus)

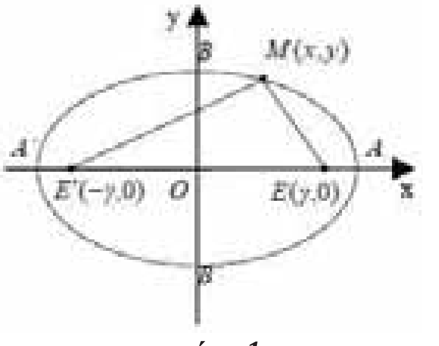
Οι άνθρωποι που «έφυγαν από τη ζωή» μας διδάσκουν;

Ελάχιστες μέρες πριν φύγει από τη ζωή ο Παναγιώτης Οικονομάκος μου παρέδωσε για δημοσίευση ένα σημείωμα με θέμα «άλλος ορισμός της έλλειψης». Δεν πρόλαβε όμως, γιατί έφυγε:

Για καθαρά ιστορικούς λόγους παραθέτουμε τα δύο θέματα:

Ευκλείδειες κατασκευές στην έλλειψη[1]

Δίνονται τα σημεία F_1,F_2 κι ένα μήκος α με $2α> F_1F_2$. Σε επίπεδο που περιέχει την ευθεία F_1F_2, γράφουμε τον κύκλο $(F_1,2α)$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο P πάνω σ΄ αυτόν.
Η μεσοκάθετη του τμήματος F_2P τέμνει την ευθεία F_1P στο σημείο M, οπότε θα έχουμε $MF_2=MP$, δηλ. το σημείο M ισαπέχει από τον κύκλο $(F_1,2α)$ και από το εσωτερικό σημείο F_2 αυτού, άρα ανήκει στον γ.τ. των σημείων του επιπέδου του κύκλου αυτού, που ισαπέχουν απ' αυτόν και από το εσωτερικό σημείο F_2.
Επειδή, όμως, $MP+MF_1=2α$, θα έχουμε και $MF_2+MF_1=2α$, δηλ. ο γ.τ. ταυτίζεται με έλλειψη που έχει εστίες F_1,F_2 και μεγάλο άξονα ίσο με 2α.



σχήμα 1

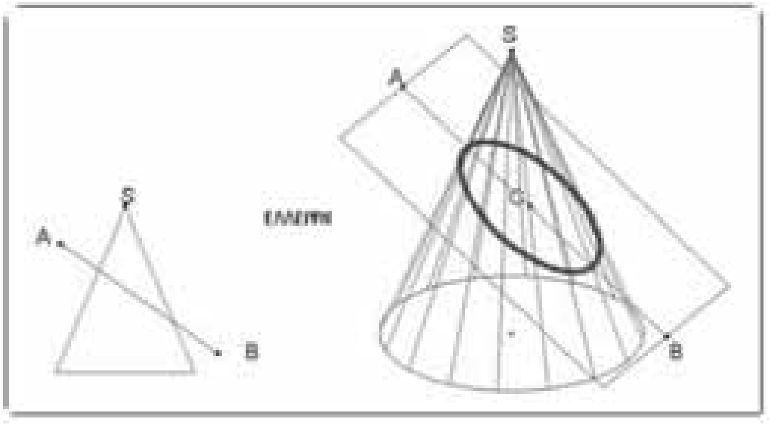
Ο κύκλος $(F_1,2α)$ ονομάζεται *διευθετών κύκλος* αυτής, γιατί με τη βοήθειά του μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρα σημεία της έλλειψης. Γενικά, σε κάθε σημείο του κύκλου, κατασκευάζουμε ένα σημείο της έλλειψης και αντίστροφα. Επίσης, τον ίδιο ρόλο παίζει κι ο κύκλος $(F_2,2α)$.

---

[1] Τα σχήματα που αναφέρονται στις ευκλείδειες κατασκευές στην έλλειψη, από τον ίδιο τον εισηγητή αφήνονται στον αναγνώστη σαν άσκηση, δηλαδή ο σχεδιασμός τους, όσο και η πλήρης απόδειξη του θέματος. Στο κείμενο υπάρχει μια αναφορά σχολιασμού. Επίσης το ίδιο να γίνει και στο δεύτερο θέμα, στην κατασκευή εφαπτόμενης σε έλλειψη από σημείο εκτός αυτής (θεώρημα Poncelet) Επαφίεται στον αναγνώστη η αναλυτική κατασκευή του σχήματος και η πλήρης απόδειξη.

Ευκλείδεια κατασκευή της εφαπτομένης σε έλλειψη, από σημείο εκτός αυτής (Θεώρημα του Poncelet)

Δίνεται έλλειψη με άξονες ΑΒ=2α και ΚΛ=2β, όπου α>β [Οι εστίες F_1,F_2 αυτής κατασκευάζονται ως σημεία τομής της ευθείας ΑΒ με τον κύκλο (Κ,α)] και σημείο P εκτός αυτής (δηλ. έχουμε $PF_1+PF_2>2α$). Θα αποδείξω ότι από το σημείο P υπάρχουν δυο ευθείες, τις οποίες και θα κατασκευάσω, που εφάπτονται της έλλειψης.



σχήμα 2

κατασκευή

(i) Με κάντρο το F_1 και ακτίνα 2α γράφω κύκλο (διευθετών κύκλος της έλλειψης)

(ii) Πάνω σ' αυτόν ορίζω τα σημεία Γ,Δ έτσι ώστε $PΓ=PΔ=PF_2$

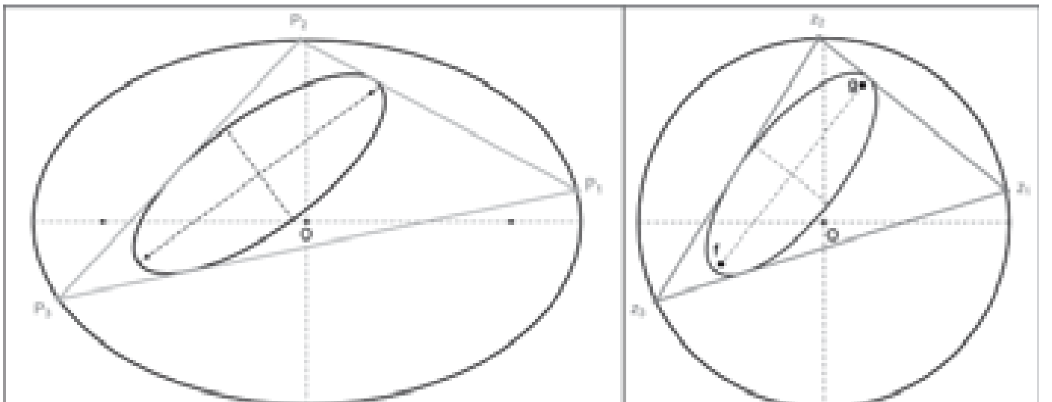
(iii) Φέρω την μεσοκάθετη του τμήματος $F_2Γ$ που τέμνει το τμήμα $F_1Γ$ στο M και διέρχεται από το P.

Οπότε $MF_2=MΓ$ κι επειδή $MΓ+MF_1=2.α$, θα είναι και $MF_1+MF_2=2.α$, άρα το Μ θα είναι σημείο της έλλειψης. Αλλά για να δείξουμε ότι η PM είναι εφαπτομένη της έλλειψης, θα πρέπει να δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλο σημείο της ευθείας PM που να ανήκει στην έλλειψη. Πράγματι, αν και το σημείο Μ΄Μ της PM είναι σημείο της έλλειψης τότε θα έχουμε $M΄F_1+M΄F_2=2.α$ ή $M΄F_1+M΄Γ=2.α$ ή $M΄F_1+M΄Γ= F_1Γ$ (άτοπο). Επίσης, επειδή στο ισοσκελές τρίγωνο $ΓPF_2$, η PM είναι μεσοκάθετη της βάσης του $F_2Γ$, θα διχοτομεί τη γωνία της κορυφής P, δηλ. θα έχουμε $ΓPM= MPF_2=φ$.

(iv) Τέλος, φέρω τη μεσοκάθετη του ευθ. τμήματος $F_2Δ$. Αυτή τέμνει την $F_1Δ$ στο σημείο Ν. Έτσι θα έχουμε $F_2N=ΔN$ και $ΔN+NF_1=2.α$ οπότε, απ' αυτές προκύπτει ότι $NF_1+NF_2=2.α$, άρα το Ν είναι σημείο της έλλειψης και, όπως δείξαμε στην (iii), είναι το μοναδικό.

Δηλ. η PN είναι η δεύτερη εφαπτόμενη από το P προς την έλλειψη.

Θεώρημα Poncelet



Στο προηγούμενο σχήμα, προεκτείνω την F_2N κατά τμήμα $NE=NF_1$, οπότε $F_2E=2α=F_1Δ$. Και επειδή η PN είναι μεσοκάθετη του τμήματος $F_2Δ$, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας Ν, άρα και της κατακορυφή γωνία αυτής, Δηλ. στο ισοσκελές τρίγωνο F_1NE η ευθεία PN διχοτομεί τη γωνία της κορυφής N, άρα είναι μεσοκάθετη του F_1E, άρα $F_1PN=NPE=θ$ και $PE=PF_1$. Τέλος, από τη σύγκριση των τριγώνων $F_1PΓ$ και F_2PE προκύπτει ότι αυτά είναι ίσα. Οπότε είναι $F_1PΓ=F_2PE$ ή $ΓPF_2= EPF_1$ ή 2φ=2θ ή φ=θ.

Ασκήσεις Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

Άρης Αεράκης

Εξισώσεις–Ανισώσεις

Άσκηση 1η. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί καθένας από τους οποίους είναι διαφορετικός από το 0 και ισχύουν: $x+y=4$ και $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\alpha^2}$

α. Να αποδείξετε ότι $xy=4\alpha^2$

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x, y.

γ. Να αποδείξετε ότι $|\alpha|\le 1$.

Λύση

α. Είναι: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\alpha^2}\Rightarrow\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{\alpha^2}\Rightarrow\frac{4}{xy}=\frac{1}{\alpha^2}$

$$\Rightarrow 4\alpha^2=xy\Rightarrow xy=4\alpha^2$$

β. Οι αριθμοί x, y έχουν άθροισμα $x+y=4$ και γινόμενο $xy=4\alpha^2$ δηλαδή $S=4$, $P=4\alpha^2$ οπότε η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς αυτούς είναι η $t^2-4t+4\alpha^2=0$, (1)

γ. Η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς x, y, οπότε για τη διακρίνουσα της Δ ισχύει $\Delta\ge 0$. Είναι:

$$\Delta\ge 0\Rightarrow 16-16\alpha^2\ge 0\Rightarrow -16\alpha^2\ge -16\Rightarrow 16\alpha^2\le 16$$

$$\Rightarrow\alpha^2\le 1\Rightarrow\sqrt{\alpha^2}\le\sqrt{1}\Rightarrow|\alpha|\le 1$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 2η. Δίνεται το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ όπου $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $1+\beta+\gamma<0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \text{με } x_1<x_2$$

β) Να δείξετε ότι $x_1<1<x_2$

γ) Αν επιπλέον ο αριθμός 1 ισαπέχει πάνω στον άξονα από τους αριθμούς x_1, x_2, να αποδείξετε ότι $\beta=-2$.

Λύση

α) 1ος τρόπος

Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ έχει $\alpha=1>0$ και $1+\beta+\gamma<0$, δηλαδή το τριώνυμο για $x=1$ γίνεται ετερόσημο του α. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta>0$.

Συνεπώς η εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

2ος τρόπος: Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma$

Όμως $1+\beta+\gamma<0\Leftrightarrow\gamma<-1-\beta\Leftrightarrow -4\gamma>4+4\beta$

$$\Leftrightarrow\beta^2-4\gamma>\beta^2+4+4\beta\Leftrightarrow\Delta>(\beta+2)^2\ge 0$$

Συνεπώς $\Delta>0$ οπότε η εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) 1ος τρόπος: Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ έχει $\alpha=1>0$ και ισχύει $1+\beta+\gamma<0$ δηλαδή το τριώνυμο για $x=1$ γίνεται ετερόσημο του α. Αυτό συμβαίνει μόνο για τιμές του x που είναι μεταξύ των ριζών του τριωνύμου.

Συνεπώς $x_1<1<x_2$.

2ος τρόπος $1+\beta+\gamma<0\Leftrightarrow 1-(x_1+x_2)+x_1x_2<0$

$\Leftrightarrow 1-x_1-x_2+x_1x_2<0\Leftrightarrow 1-x_1-x_2(1-x_1)<0$

$(1-x_1)(1-x_2)<0$ οπότε οι αριθμοί $(1-x_1),(1-x_2)$ είναι ετερόσημοι. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $1-x_1<0$ και $1-x_2>0$ τότε $x_2<1<x_1$, άτοπο αφού $x_1<x_2$.

Συνεπώς, $1-x_1>0$ και $1-x_2<0$ οπότε

$$x_1<1<x_2$$

γ) Αφού ο αριθμός 1 ισαπέχει πάνω στον άξονα από τους αριθμούς x_1, x_2 έχουμε

$$|1-x_1|=|1-x_2|\overset{x_1<1<x_2}{\Rightarrow}1-x_1=-1+x_2$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=2\Rightarrow -\beta=2\Rightarrow\beta=-2$$

Άσκηση 3η. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+2\lambda=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Για τις τιμές του λ που βρήκατε να δείξετε ότι το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι διπλάσιο του αθροίσματός τους

γ) Έστω ένα ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις α, β μεταβάλλονται έτσι ώστε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου να είναι πάντα αριθμητικά ίσο με την περίμετρό του Π.

i) Να δείξετε ότι οι διαστάσεις α, β είναι ρίζες εξίσωσης 2ου βαθμού της μορφής

$$\mathbf{x^2-\lambda x+2\lambda=0\ ,\lambda\in\mathbb{R}}$$

και να βρείτε τι εκφράζει ο αριθμός λ για το ορθογώνιο.

ii) Να δείξετε ότι για το εμβαδόν Ε των παραπάνω ορθογωνίων ισχύει ότι $E\geq 16$.

iii) Από όλα τα παραπάνω ορθογώνια, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου του οποίου το εμβαδόν γίνεται το ελάχιστο δυνατόν, δηλαδή Ε = 16.

Λύση

α) Η εξίσωση $x^2-\lambda x+2\lambda=0$ είναι 2ου βαθμού για κάθε $\lambda\in\Re$ με διακρίνουσα $\Delta=\lambda^2-8\lambda$ το πρόσημο της οποίας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$\lambda^2-8\lambda$		+	0	-	0	+	

Για να έχει η εξίσωση πραγματικές ρίζες πρέπει και αρκεί:

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow\lambda^2-8\lambda\geq 0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,0]\cup[8,+\infty)$$

β) Έστω x_1,x_2 οι πραγματικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Από τύπους Vieta έχουμε

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-\lambda}{1}=\lambda \text{ και } x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2\lambda}{1}=2\lambda$$

οπότε πράγματι $x_1\cdot x_2=2(x_1+x_2)$

γ) **i)** Αφού α, β οι διαστάσεις του ορθογώνιου έχουμε ότι η περίμετρος είναι $\Pi=2(\alpha+\beta)$, το εμβαδόν του $E=\alpha\cdot\beta$, και ισχύει

$$\alpha\cdot\beta=2(\alpha+\beta) \text{ με } \alpha>0,\ \beta>0$$

Θέτουμε $\alpha+\beta=\lambda$ οπότε $\alpha\cdot\beta=2\lambda$ όπου $\lambda>0$ αφού $\alpha>0$, $\beta>0$.

Οι αριθμοί α, β θα είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-\lambda x+2\lambda=0$$

όπου λ εκφράζει την ημιπερίμετρο του ορθογωνίου, δηλαδή $\lambda=\frac{\Pi}{2}=\frac{E}{2}$.

ii) Η εξίσωση $x^2-\lambda x+2\lambda=0$ όπως δείξαμε στο ερώτημα α) έχει πραγματικές ρίζες όταν

$$\lambda\in(-\infty,0]\cup[8,+\infty).$$

Όμως πρέπει $\lambda>0$ οπότε τελικά θα πρέπει

$$\lambda\geq 8\Leftrightarrow 2\lambda\geq 16\Leftrightarrow E\geq 16$$

Συνεπώς η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν είναι 16 και αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\lambda=8$

iii) Είναι: $E=16$ οπότε $\lambda=8$ και η εξίσωση γίνεται $x^2-8x+16=0$ που έχει 1 διπλή ρίζα τη $x=4$.

Άρα το ζητούμενο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο πλευράς 4.

Άσκηση 4η. Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\lambda x+\lambda$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $(\alpha^2-\lambda\alpha+\lambda)\cdot(\beta^2-\lambda\beta+\lambda)<0$ να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) $\lambda<0$ ή $\lambda>4$

γ) $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

Λύση

α) Αφού υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $(\alpha^2-\lambda\alpha+\lambda)\cdot(\beta^2-\lambda\beta+\lambda)<0$

σημαίνει ότι το τριώνυμο $x^2-\lambda x+\lambda$ μπορεί να πάρει τιμές ετερόσημες. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta>0$.

Συνεπώς η εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ είναι 2ου βαθμού και έχει $\Delta=\lambda^2-4\lambda$.

Είναι: $\Delta>0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda>0$

Το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2-4\lambda$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

λ	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$\lambda^2-4\lambda$		+	0	-	0	+	

οπότε $\lambda^2-4\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<0$ ή $\lambda>4$

γ) Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών έχουμε

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda \text{ και } x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda$$

οπότε $$x_1+x_2=x_1\cdot x_2$$

Άσκηση 5η. Δίνεται το τριώνυμο $x^2-7x+12$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $\pi^2-7\pi+12<0$, όπου $\pi=3{,}14\ldots$

ii. $65^{\frac{2}{3}}-7\cdot 65^{\frac{1}{3}}+12>0$

iii. $(\sqrt{2}+\frac{11}{7})^2-7\sqrt{2}+1>0$

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\alpha^2-2\alpha+13<7|\alpha-1|$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του $\omega\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $|\omega^4-7\omega^2+12|\le 7\omega^2-\omega^4-12$.

ε) Αν $|\beta-3|+|\beta-4|=1$ να αποδείξετε ότι

$$\beta^2-7\beta+12\le 0.$$

στ) Αν $||\gamma-3|-|\gamma-4||=1$ να αποδείξετε ότι

$$\gamma^2-7\gamma+12\ge 0.$$

Λύση

α) Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2-7x+12$ δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		+	0	-	0	+	

β) i. Ισχύει $3<\pi<4$, δηλαδή ο αριθμός π περιέχεται ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου, οπότε συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο $x^2-7x+12$ για $x=\pi$ είναι αρνητικό, δηλαδή $\pi^2-7\pi+12<0$.

ii. Ισχύει: $65^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{65}>\sqrt[3]{64}=4$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο

$$x^2-7x+12 \text{ για } x=65^{\frac{1}{3}}$$

είναι θετικό δηλαδή $65^{\frac{2}{3}}-7\cdot 65^{\frac{1}{3}}+12>0$.

iii. Ισχύει: $\sqrt{2}+\frac{11}{7}<3\Leftrightarrow\sqrt{2}<3-\frac{11}{7}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}<\frac{10}{7}\Leftrightarrow 2<\frac{100}{49}$$

που ισχύει, οπότε ο αριθμός $x=\sqrt{2}+\frac{11}{7}$ βρίσκεται εκτός των ριζών του τριωνύμου. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο $x^2-7x+12$

για $x=\sqrt{2}+\frac{11}{7}$ είναι θετικό, δηλαδή

$$(\sqrt{2}+\frac{11}{7})^2-7(\sqrt{2}+\frac{11}{7})+12>0$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{2}+\frac{11}{7})^2-7\sqrt{2}+1>0$$

γ) Είναι:

$\alpha^2-2\alpha+13<7|\alpha-1|\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1+12<7|\alpha-1|$

$(\alpha-1)^2-7|\alpha-1|+12<0\Leftrightarrow$

$|\alpha-1|^2-7|\alpha-1|+12<0$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο $x^2-7x+12$ για $x=|\alpha-1|$ είναι αρνητικό, άρα $3<|\alpha-1|<4\Leftrightarrow\begin{cases}|\alpha-1|<4\\ \text{και}\\ |\alpha-1|>3\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-4<\alpha-1<4\\ \text{και}\\ \alpha-1>3 \quad \text{ή} \quad \alpha-1<-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-3<\alpha<5\\ \text{και}\\ \alpha>4 \quad \text{ή} \quad \alpha<-2\end{cases}\Leftrightarrow\alpha\in(-3,-2)\cup(4,5)$$

δ) Από την ανισότητα

$$|\omega^4-7\omega^2+12|\le 7\omega^2-\omega^4-12$$

συμπεραίνουμε ότι $\omega^4-7\omega^2+12\le 0$ δηλαδή ότι το τριώνυμο $x^2-7x+12$ για $x=\omega^2$ είναι μη θετικό οπότε $3\le\omega^2\le 4\Leftrightarrow\begin{cases}\omega^2\le 4\\ \text{και}\\ \omega^2\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\omega|\le 2\\ \text{και}\\ |\omega|\ge\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{cases}-2\le\omega\le 2\\ \text{και}\\ \omega\ge\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \omega\le-\sqrt{3}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\alpha\in[-2,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2]$$

ε) Αφού $|\beta-3|+|\beta-4|=1$ δηλαδή

$$d(\beta,3)+d(\beta,4)=d(3,4)$$

Συμπεραίνουμε ότι $3\le\beta\le 4$ οπότε $\beta^2-7\beta+12\le 0$

στ) Αφού $||\gamma-3|-|\gamma-4||=1$ δηλαδή

$$|d(\gamma,3)-d(\gamma,4)|=d(3,4)$$

συμπεραίνουμε ότι $\gamma\le 3$ ή $\gamma\ge 4$ οπότε

$$\gamma^2-7\gamma+12\ge 0.$$

Παρατήρηση: Έστω α, β δυο πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$ και $x\in\mathbb{R}$.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε εποπτικά και να αποδείξουμε Αλγεβρικά τις παρακάτω ισοδυναμίες: $d(\alpha, x)+d(\beta, x)=d(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\alpha\le x\le\beta$ και

$|d(\alpha, x)-d(\beta, x)|=d(\alpha,\beta)\Leftrightarrow x\le\alpha$ ή $x\ge\beta$

Άσκηση 6η. Να λύσετε καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις

α) $(x-1)^2-\sqrt{x^2-2x+1}-2=0$

β) $x^2-4x-|x-2|+2=0$

γ) $x^2+\frac{1}{x^2}-2\left|x-\frac{1}{x}\right|-5=0$

Λύση

α) Είναι $(x-1)^2-\sqrt{x^2-2x+1}-2=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2-\sqrt{(x-1)^2}-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-|x-1|-2=0$

Αν θέσουμε $|x-1|=\omega$ τότε έχουμε

$$(x-1)^2=|x-1|^2=\omega^2$$

και η εξίσωση γίνεται $\omega^2-\omega-2=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega=2$ ή $\omega=-1$

Για $\omega=2$ είναι

$|x-1|=2 \Leftrightarrow x-1=2$ ή $x-1=-2 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-1$

Για $\omega=-1$ είναι $|x-1|=-1$ που είναι αδύνατη.

β) Είναι $x^2-4x-|x-2|+2=0 \Leftrightarrow$

$$x^2-4x+4-|x-2|+2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2-|x-2|-2=0$$

Αν θέσουμε $|x-2|=\omega$ τότε δεδομένου ότι

$$(x-2)^2=|x-2|^2=\omega^2$$

η εξίσωση γίνεται $\omega^2-\omega-2=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega=2$ ή $\omega=-1$. Για $\omega=2$ είναι

$$|x-2|=2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-2=-2 \\ \text{ή} \\ x-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \text{ή} \\ x=4 \end{array}\right.$$

Για $\omega=-1$ είναι $|x-2|=-1$ που είναι αδύνατη.

γ) Είναι $x^2+\frac{1}{x^2}-2\left|x-\frac{1}{x}\right|-5=0 \Leftrightarrow$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2-2\left|x-\frac{1}{x}\right|-5+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left|x-\frac{1}{x}\right|-3=0$$

Αν θέσουμε $\left|x-\frac{1}{x}\right|=\omega$, $x\neq 0$ τότε έχουμε

$$(x-\frac{1}{x})^2=\left|x-\frac{1}{x}\right|^2=\omega^2$$

και η εξίσωση γίνεται $\omega^2-2\omega-3=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega=3$ ή $\omega=-1$

Για $\omega=3$ είναι

$$\left|x-\frac{1}{x}\right|=3 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=3 \text{ ή } x-\frac{1}{x}=-3$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=3x \text{ ή } x^2-1=-3x$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-1=0 \text{ ή } x^2+3x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \text{ ή } x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

Για $\omega=-1$ είναι $\left|x-\frac{1}{x}\right|=-1$ που είναι αδύνατη

Άσκηση 7η. Να λύσετε καθεμιά από τις παρακάτω ανισώσεις α) $x^2-5|x|+6\geq 0$

β) $x^4-5x^2+4\geq 0$ **γ)** $|-x^2+2x-2|<3x-2$

Λύση

α) Αν θέσουμε $|x|=\omega$, τότε έχουμε:

$$\omega^2-5\omega+6\geq 0 \Leftrightarrow \omega\leq 2 \text{ ή } \omega\geq 3$$

Έτσι, έχουμε: $\left\{\begin{array}{c} |x|\leq 2 \\ \text{ή} \\ |x|\geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -2\leq x\leq 2 \\ \text{ή} \\ x\geq 3 \text{ ή } x\leq -3 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[-2,2]\cup[3,+\infty)$$

β) Αν θέσουμε $x^2=\omega$, τότε έχουμε:

$$\omega^2-5\omega+4\geq 0$$

οπότε $\omega^2-5\omega+4\geq 0 \Leftrightarrow \omega\leq 1$ ή $\omega\geq 4$

Έχουμε λοιπόν: $x^2\leq 1$ ή $x^2\geq 4 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2\leq 1 \\ \text{ή} \\ x^2\geq 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c} -1\leq x\leq 1 \\ \text{ή} \\ x\geq 2 \text{ ή } x\leq -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$x\in(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$

γ) Είναι $-x^2+2x-2<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ διότι το αντίστοιχο τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$ και $\alpha=-1<0$ οπότε η ανίσωση γίνεται

$$x^2-2x+2<3x-2 \Leftrightarrow x^2-5x+4<0 \Leftrightarrow x\in(1,\,4)$$

Άσκηση 8η. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+\lambda-1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ **η οποία έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.**

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda<2$

β. Να βρείτε για ποια τιμή του λ **η απόσταση των ριζών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 4**

γ. Να εξετάσετε αν για κάποια από τις επιτρεπόμενες τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης είναι αριθμοί αντίστροφοι.

Λύση

α. Η εξίσωση $x^2-2x+\lambda-1=0$ έχει πραγματικές ρίζες, οπότε για τη διακρίνουσα Δ ισχύει $\Delta>0$

Είναι: $\Delta>0 \Leftrightarrow 4-4(\lambda-1)>0 \Leftrightarrow 1-\lambda+1>0$

$$\Leftrightarrow -\lambda>-2 \Leftrightarrow \lambda<2$$

που είναι το ζητούμενο.

β. Η απόσταση των ριζών είναι:

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{2+\sqrt{\Delta}}{2}-\frac{2-\sqrt{\Delta}}{2}\right|=\sqrt{\Delta}$$

οπότε $|x_1-x_2|=4 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=4 \Leftrightarrow \Delta=16$

$$\Leftrightarrow 4-4\lambda+4=16 \Leftrightarrow -4\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=-2$$

γ. Έστω ότι με $\lambda<2$ οι ρίζες της εξίσωσης είναι αριθμοί αντίστροφοι.

Τότε, δεδομένου ότι το γινόμενο των ριζών είναι ίσο με $\lambda-1$, έχουμε:

$$x_1x_2=1 \Leftrightarrow \lambda-1=1 \Leftrightarrow \lambda=2$$

που αποκλείεται. Άρα οι ρίζες της εξίσωσης δεν μπορεί να είναι αντίστροφες.

Άσκηση 9η. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $|\alpha+\beta|<|\alpha-\beta|$.

Θεωρούμε επίσης την εξίσωση $x^2-2x+\alpha\beta=0$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta<0$

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Κατόπιν, να αιτιολογήσετε γιατί είναι ετερόσημες.

γ. Αν $x_2<0<x_1$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $|x_1|>|x_2|$.

Λύση

α. Από την ανισότητα $|\alpha+\beta|<|\alpha-\beta|$

με τετραγωνισμό των μελών της παίρνουμε

$|\alpha+\beta|^2<|\alpha-\beta|^2$, οπότε $(\alpha+\beta)^2<(\alpha-\beta)^2$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2<\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow 4\alpha\beta<0$ Άρα,

$\alpha\beta<0$

β. Η εξίσωση $x^2-2x+\alpha\beta=0$

έχει διακρίνουσα $\Delta=4-4\alpha\beta=4(1-\alpha\beta)>0$,

αφού από το ερώτημα (α) συνεπάγεται ότι $-\alpha\beta>0$ οπότε $1-\alpha\beta>0$.

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Επιπλέον, το γινόμενο P των ριζών είναι $P=\alpha\beta<0$, οπότε οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ. Αν $x_2<0<x_1$, τότε $|x_2|=-x_2$, $|x_1|=x_1$

οπότε, αρκεί να αποδείξουμε $x_1>-x_2$ δηλαδή $x_1+x_2>0$ που ισχύει, αφού το άθροισμα $S=x_1+x_2$ των ριζών της δοσμένης εξίσωσης είναι $S=2$, οπότε $x_1+x_2=2>0$

Άσκηση 10η. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-8x+15$ και έστω α, β θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$3\alpha+5\beta=15.$$

α) Να αποδείξετε ότι $3<\alpha+\beta<5$.

β) Να αποδείξετε ότι $d(\alpha+\beta,4)<1$.

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του x, το πρόσημο του τριωνύμου.

δ) Να εξετάσετε αν ο αριθμός

$$f(\alpha+\beta-2)f(\alpha+\beta)f(\alpha+\beta+2)$$

είναι θετικός ή αρνητικός.

Λύση

α) Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί, οπότε έχουμε:

$$3\alpha+3\beta<3\alpha+5\beta$$

δηλαδή $3\alpha+3\beta<15$, οπότε $\alpha+\beta<5$.

Επιπλέον, $3\alpha+5\beta<5\alpha+5\beta$, δηλαδή $15<5\alpha+5\beta$, οπότε $3<\alpha+\beta$. Επομένως, $3<\alpha+\beta<5$.

β) Είναι: $3<\alpha+\beta<5$, οπότε $-1<\alpha+\beta-4<1$ που γράφεται $|\alpha+\beta-4|<1$. Άρα, $d(\alpha+\beta,4)<1$.

γ) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=4$ ρίζες τους αριθμούς 3, 5 και το πρόσημό του φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$x^2-8x+15$		+	0	−	0	+	

Το τριώνυμο, όταν δεν μηδενίζεται, παίρνει

- θετικές τιμές για $x\in(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$ και
- αρνητικές για $x\in(3,5)$

δ) Από το ερώτημα (α) έχουμε $3<\alpha+\beta<5$, οπότε $f(\alpha+\beta)<0$. Επιπλέον:

- $\alpha+\beta-2<3$, οπότε $f(\alpha+\beta-2)>0$.
- $\alpha+\beta+2>5$, οπότε $f(\alpha+\beta+2)>0$.

Επομένως ο αριθμός

$f(\alpha+\beta-2)f(\alpha+\beta)f(\alpha+\beta+2)$ είναι αρνητικός.

Άσκηση 11^η. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-2)x-\lambda+2=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$(x_1+x_2)^4+2(x_1\cdot x_2)^2-3=0.$$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$\left|\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2-3}\right|<2.$$

Λύση

α) Η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες μόνο όταν $\Delta>0$. Είναι:

$$\Delta>0\Leftrightarrow(\lambda-2)^2+4(\lambda-2)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda-2+4)>0$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda+2)>0$$

Η διακρίνουσα είναι τριώνυμο του λ με ρίζες τους αριθμούς $-2, 2$ και είναι θετικό (ομόσημο του $\alpha=1$) εκτός των ριζών του. Επομένως η διακρίνουσα Δ είναι θετική μόνο όταν $\lambda<-2$ ή $\lambda>2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε με $\lambda<-2$ ή $\lambda>2$ ισχύουν:

$$x_1+x_2=\lambda-2 \text{ και } x_1x_2=-\lambda+2,$$

οπότε έχουμε:

$$(x_1+x_2)^4+2(x_1\cdot x_2)^2-3=0$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-2)^4+2(-\lambda+2)^2-3=0$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-2)^4+2(\lambda-2)^2-3=0$$

Αν θέσουμε $(\lambda-2)^2=u$, τότε η εξίσωση γράφεται $u^2+2u-3=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -2. Έχουμε λοιπόν:

- $u=1$:

$$(\lambda-2)^2=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda-2=1 \text{ ή } \lambda-2=-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda=3 \text{ ή } \lambda=1$$

- $u=-2$:

$$(\lambda-1)^2=-2, \text{ αδύνατη.}$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν τη δοσμένη ισότητα μόνο όταν $\lambda=1$ ή $\lambda=3$, από τις οποίες αποδεκτή είναι μόνο η τιμή $\lambda=3$.

γ) Με τον περιορισμό $\lambda<-2$ ή $\lambda>2$ και $x_1x_2\neq-3$, δηλαδή $\lambda\neq-1$ έχουμε:

$$\left|\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2-3}\right|<2\Leftrightarrow|x_1+x_2|<2|x_1\cdot x_2-3|$$
$$\Leftrightarrow|\lambda-2|<2|\lambda+1|\Leftrightarrow(\lambda-2)^2<4(\lambda+1)^2$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-2-2\lambda-2)(\lambda-2+2\lambda+2)<0$$
$$\Leftrightarrow-(\lambda+4)3\lambda<0\Leftrightarrow\lambda(\lambda+4)>0$$
$$\Leftrightarrow\lambda<-4 \text{ ή } \lambda>0$$

και σε συνδυασμό με τους περιορισμούς που προαναφέραμε, βρίσκουμε ότι η δοσμένη ανισότητα ισχύει μόνο όταν $\lambda\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$.

Άσκηση 12^η. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+\lambda-1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ η οποία έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda<2$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η απόσταση των ριζών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 4.

γ) Να εξετάσετε αν για κάποια από τις επιτρεπόμενες τιμές του λ οι ρίζες της εξίσωσης είναι αριθμοί αντίστροφοι.

Λύση

α. Η εξίσωση $x^2-2x+\lambda-1=0$ έχει πραγματικές και άνισες ρίζες, οπότε για τη διακρίνουσα της Δ ισχύει $\Delta>0$.
Είναι:

$$\Delta>0\Leftrightarrow4-4(\lambda-1)>0$$
$$\Leftrightarrow-\lambda>-2\Leftrightarrow\lambda<2$$

που είναι το ζητούμενο.

β. Η απόσταση των ριζών είναι:

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{2+\sqrt{\Delta}}{2}-\frac{2-\sqrt{\Delta}}{2}\right|=\sqrt{\Delta}$$

οπότε

$$|x_1-x_2|=4\Leftrightarrow\sqrt{\Delta}=4\Leftrightarrow\Delta=16$$
$$\Leftrightarrow4-4\lambda+4=16\Leftrightarrow-4\lambda=8\Leftrightarrow\lambda=-2$$

γ. Έστω ότι για κάποια τιμή του λ, με $\lambda<2$ οι ρίζες της εξίσωσης είναι αριθμοί αντίστροφοι. Τότε, δεδομένου ότι το γινόμενο των ριζών είναι ίσο με $\lambda-1$, έχουμε:

$$x_1x_2=1\Leftrightarrow\lambda-1=1\Leftrightarrow\lambda=2$$

που αποκλείεται. Άρα οι ρίζες της εξίσωσης δεν μπορεί να είναι αντίστροφες.

Τάξη: Α΄

Παράλληλες Ευθείες

Κανάβης Χρήστος

«Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ΄ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.»

Πρώτο βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη

Ερώτηση κατανόησης

Να αναφέρετε 5 τρόπους για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Απάντηση

(1) Είναι κάθετες στην ίδια ευθεία

(2) Τέμνονται από τρίτη ευθεία και σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

(3) Τέμνονται από τρίτη ευθεία και σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

(4) Τέμνονται από τρίτη ευθεία και σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

(5) Είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία.

Εφαρμογή 1

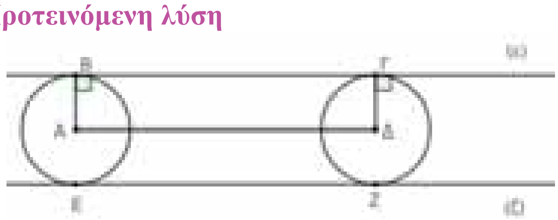
Να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη δύο κύκλους $C_1(A,1)$ και $C_2(\Delta,1)$ με διάκεντρο $A\Delta = 4$ και τις δύο εξωτερικές εφαπτόμενές τους (ε) και (ζ). Να δείξετε ότι:

α) $AB//\Delta\Gamma$

β) $A\Delta//(\varepsilon)$

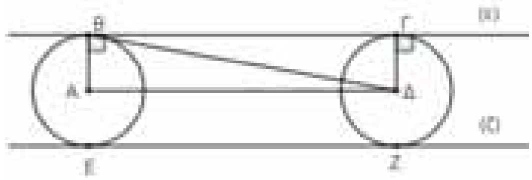
γ) $(\zeta)//(\varepsilon)$

Προτεινόμενη λύση



α) Γνωρίζουμε ότι ΑΒ και ΒΓ είναι κάθετες στην ευθεία εφαπτομένης (ε). Αφού λοιπόν ισχύει $AB \perp (\varepsilon)$ και $\Delta\Gamma \perp (\varepsilon)$ σύμφωνα με το **(1)** της ερώτησης κατανόησης είναι $AB//\Delta\Gamma$.

β) Φέρουμε την ΒΔ.



Τότε τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΔΓΒ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια, $AB = \Gamma\Delta$ ως ακτίνες και ΒΔ κοινή. Άρα σύμφωνα με το **(2)** της ερώτησης κατανόησης, αφού οι εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{\Delta}B$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες θα είναι και $A\Delta//(\varepsilon)$.

γ) Αφού $A\Delta//(\varepsilon)$ είναι και $A\Delta//B\Gamma$. Επίσης ομοίως αποδεικνύεται πως $EZ//A\Delta$. Επομένως σύμφωνα με το **(5)** της ερώτησης κατανόησης, αφού $A\Delta//EZ$ και $A\Delta//B\Gamma$ άρα και $EZ//B\Gamma$, συνεπώς $(\zeta)//(\varepsilon)$.

Εφαρμογή 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Αx μια εσωτερική ημιευθεία της εξωτερικής γωνίας Α.

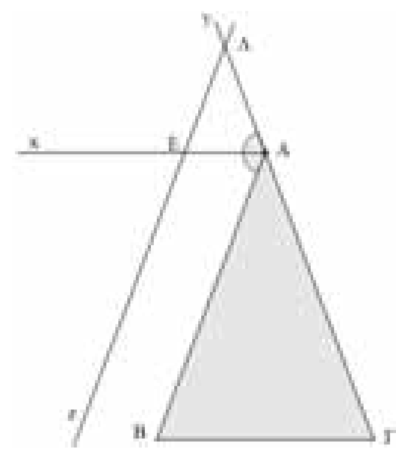
α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $Ax//B\Gamma$ τότε να δείξετε ότι Αx διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της Α.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ είναι ισοσκελές και Αx διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της Α τότε να δείξετε ότι $Ax//B\Gamma$.

γ) Αν Αx διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της Α και $Ax//B\Gamma$ τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

δ) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ τότε οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την Αy στο Δ και την Αx στο Ε, δημιουργεί τρίγωνο ΔΕΑ ισοσκελές.

Λύση



α) Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = B\hat{A}x$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{\Gamma} = x\hat{A}y$ ως εντός εκτός και επί τα' αυτά αφού $Ax//B\Gamma$. Επομένως $x\hat{A}y = B\hat{A}x$, άρα Αx διχοτόμος.

β) Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $x\hat{A}y = B\hat{A}x$. Όμως $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = y\hat{A}x + x\hat{A}B = 2x\hat{A}B$ αλλά και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$. Επομένως $x\hat{A}B = \hat{B}$. Άρα από τι **(2)** της ερώτησης κατανόησης, εφόσον οι εντός εναλλάξ είναι ίσες έχουμε $Ax//B\Gamma$.

γ) Είναι $x\hat{A}y = B\hat{A}x$ και $Ax//B\Gamma$. Άρα $\hat{B} = B\hat{A}x$ και $\hat{\Gamma} = x\hat{A}y$. Επομένως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Συνεπώς το ΑΒΓ ισοσκελές.

δ) Είναι $\hat{B} = B\hat{A}E$ ως εντός εναλλάξ αφού $Ax//B\Gamma$, $B\hat{A}E = A\hat{E}\Delta$ ως εντός εναλλάξ αφού $\Delta z//AB$ άρα $\hat{B} = A\hat{E}\Delta$. Ομοίως $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}E$ ως εντός εκτός και επί τα' αυτά αφού $Ax//B\Gamma$ και αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ είναι $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{E}A$. Δηλαδή ΔΕΑ ισοσκελές.

Παρατήρηση – Ενασχόληση 1: Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα στην περίπτωση που η παράλληλη ευθεία στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ, δηλαδή το Δ είναι εσωτερικό σημείο της ΑΓ; (Εφόσον ισχύει να αποδειχθεί)

Παρατήρηση – Ενασχόληση 2: Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και Bx εσωτερική ημιευθεία της εξωτερικής γωνίας της Β με $Bx//A\Gamma$ τότε η Bx είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της Β του τριγώνου ΑΒΓ; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Σχόλιο

Ουσιαστικά στα τρία πρώτα ερωτήματα της παραπάνω εφαρμογής, αποδείξαμε πως αν αληθεύουν δύο από τις τρεις παρακάτω προτάσεις (Ι), (ΙΙ), (ΙΙΙ) θα αληθεύει και η τρίτη.

Ι) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

ΙΙ) Η Αx είναι παράλληλη στην ΒΓ.

ΙΙΙ) Η Αx είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της Α του τριγώνου ΑΒΓ.

Εφαρμογή 3

Έστω κύκλοι $C_1(A,\rho)$, $C_2(E,\rho)$ με $AE = AB + \Delta E$ όπου Β και Δ σημεία των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα.

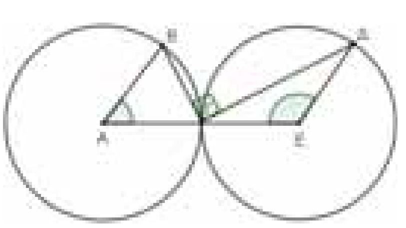
α) Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

β) Θεωρούμε χορδή ΒΓ του κύκλου C_1 και χορδή ΔΓ του C_2 ώστε $B\Gamma \perp \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΕΔ

Λύση

α) Αφού Β και Δ σημεία των κύκλων και Α, Ε τα κέντρα τους, άρα ΑΒ και ΕΔ ακτίνες των κύκλων. Επομένως αφού $AE = AB + \Delta E = \rho + \rho = 2\rho$ οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά με σημείο επαφής, έστω Γ.

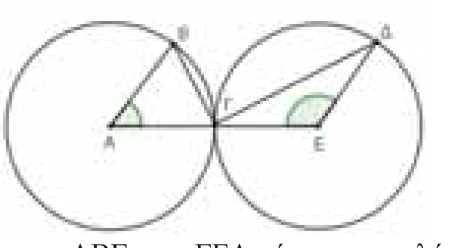
β)



Φέρουμε τη διάκεντρο ΑΕ. Είναι Α, Γ, Ε συνευθειακά (γιατί;). Επομένως,

$$A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta + E\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow$$

$$A\hat{\Gamma}B + E\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - 90^o = 90^o \quad (*)$$



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΔ είναι ισοσκελή διότι ΑΒ=ΑΓ=ΕΓ=ΕΔ=ρ.

Επομένως $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$ και $E\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$. Επομένως $\hat{A} + 2A\hat{\Gamma}B = 180^o$ και $\hat{E} + 2E\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$. Από πρόσθεση κατά μέλη των δύο τελευταίων σχέσεων προκύπτει ότι

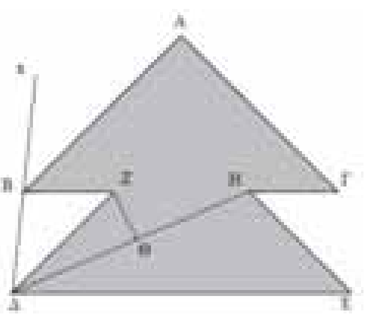
$$\hat{A} + \hat{E} + 2\left(A\hat{\Gamma}B + E\hat{\Gamma}\Delta\right) = 360^o \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$\hat{A} + \hat{E} + 2\cdot 90^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{E} = 180^o$$

Επομένως σύμφωνα με το **(4)** της ερώτησης κατανόησης, αφού οι δύο εντός και επί τα' αυτά μέρη γωνίες $\hat{A}, \hat{E}$ είναι παραπληρωματικές είναι ΑΒ//ΔΕ.

Εφαρμογή 4

α) Στο σχήμα που ακολουθεί είναι $A\hat{B}x = Z\hat{\Delta}B$, $\Delta Z = ZH$, ΔΗ διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Delta}E$ και ΖΘ μεσοκάθετος της ΔΗ.



Να δείξετε ότι τα σημεία Β, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

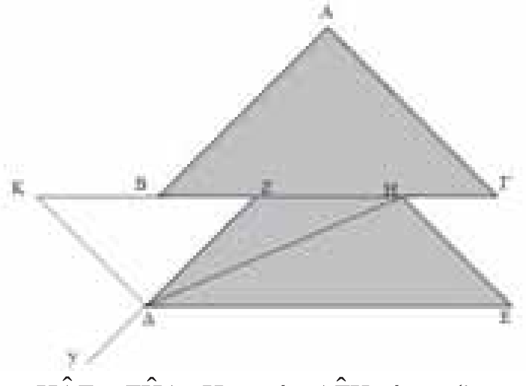
β) Αν επιπλέον είναι $K\hat{\Delta}y = 96^o$ και $K\Delta = ZH$, να υπολογιστεί η γωνία $Z\hat{H}\Delta$.

Λύση

α) Αφού ΔΗ διχοτόμος είναι $E\hat{\Delta}H = H\hat{\Delta}Z$ (1) και αφού ΖΘ μεσοκάθετος της ΔΗ το τρίγωνο ΒΖΗ είναι ισοσκελές με $H\hat{\Delta}Z = Z\hat{H}\Delta$ (2). Από (1), (2) προκύπτει $E\hat{\Delta}H = Z\hat{H}\Delta$, επομένως $ZH//\Delta E$.

Επίσης εφόσον δύο εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες $A\hat{B}x = Z\hat{\Delta}B$ σύμφωνα με το **(3)** της ερώτησης κατανόησης είναι ΖΒ//ΔΕ. Επομένως σύμφωνα με το **Ευκλείδειο αίτημα** «από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε μοναδική παράλληλη στην ευθεία» θα είναι Β, Ζ, Η συνευθειακά, διαφορετικά από το σημείο Ζ θα είχαμε δύο παράλληλες στην ΔΕ άτοπο.

β)



Είναι $H\hat{\Delta}Z = Z\hat{H}\Delta$. Η γωνία $\Delta\hat{Z}K$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΖΗΔ επομένως,

$$\Delta\hat{Z}K = H\hat{\Delta}Z + Z\hat{H}\Delta = 2Z\hat{H}\Delta$$

Επίσης ΚΔ=ΖΗ=ΖΔ άρα $\Delta\hat{K}Z = \Delta\hat{Z}K = 2Z\hat{H}\Delta$ αφού $\Delta\hat{Z}K$ εξωτερική του ΔΖΗ. Στο τρίγωνο ΚΔΖ ισχύει ότι $\Delta\hat{K}Z + \Delta\hat{Z}K + Z\hat{\Delta}K = 180^o$ άρα $Z\hat{\Delta}K = 180^o - 4\Delta\hat{K}Z$.

Όμως,

$Z\hat{\Delta}K + K\hat{\Delta}y = 180^o \Leftrightarrow 180^o - 4Z\hat{H}\Delta + K\hat{\Delta}y = 180^o$

$\Leftrightarrow 4Z\hat{H}\Delta = 96^o \Leftrightarrow Z\hat{H}\Delta = 24^o$

Εφαρμογή 5

α) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}_{\varepsilon\xi} < \hat{A}$, μια γωνία του ισούται με τα $\frac{3}{5}$ μιας άλλης και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 80^o$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

β) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}_{\varepsilon\xi} < \hat{A} = 108^o$ και μια γωνία του ισούται με $\frac{3}{x}\cdot\hat{A}$, να βρεθεί ο θετικός ακέραιος x ώστε το τρίγωνο να είναι αμβλυγώνιο και ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$.

Λύση:

α) Είναι $\hat{A} = 180^o - \hat{A}_{\varepsilon\xi} = 100^o$.

Έστω,

$$\hat{B} = \frac{3}{5}\hat{A} = \frac{3}{5}100^o = 60^o$$

και άρα $\hat{\Gamma} = 20^o$.

Έστω,

$$\hat{B} = \frac{3}{5}\hat{\Gamma}$$

τότε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 100^0 + \frac{3}{5}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow$

$\frac{8}{5}\hat{\Gamma} = 80^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 50^o$. Άρα $\hat{B} = 30^o$.

β) Εφόσον $\hat{A}_{\varepsilon\xi} < \hat{A}$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία την $\hat{A}$ (βλέπε το σχόλιο που ακολουθεί). Για να είναι και ισοσκελές πρέπει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Επομένως,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 2\hat{B} = 180^o \Leftrightarrow$$

$$\hat{A} + 2\cdot\frac{3}{x}\hat{A} = 180^o \Leftrightarrow x\cdot\hat{A} + 6\hat{A} = x\cdot 180^0 \Leftrightarrow$$

$$(x+6)\hat{A} = x\cdot 180^0 \Leftrightarrow$$

$$x + 6 = x\cdot\frac{180^0}{108^o} \Leftrightarrow 72\cdot x = 648 \Leftrightarrow x = 9$$

και άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{3}{9}\cdot\hat{A} = \frac{3}{9}\cdot 108^o = 36^o$

Σχόλιο:

- Αν για μια γωνία $\hat{A}$ ισχύει $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{A}$ τότε η γωνία είναι ορθή.

Απόδειξη:

Είναι,

$\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} \Leftrightarrow 180^o - \hat{A} = \hat{A} \Leftrightarrow 2\hat{A} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 90^o$

- Αν για μια γωνία $\hat{A}$ ισχύει $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{A}$ τότε η γωνία είναι οξεία.

Απόδειξη:

Είναι,

$\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{A} \Leftrightarrow 180^o - \hat{A} > \hat{A} \Leftrightarrow 2\hat{A} < 180^o \Leftrightarrow \hat{A} < 90^o$

- Αν για μια γωνία $\hat{A}$ ισχύει $\hat{A}_{\varepsilon\xi} < \hat{A}$ τότε η γωνία είναι αμβλεία.

Απόδειξη:

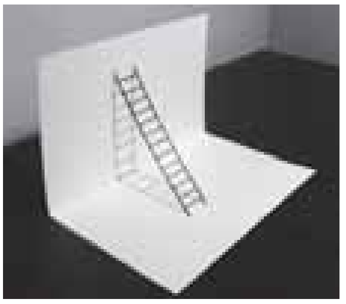
Είναι,

$\hat{A}_{\varepsilon\xi} < \hat{A} \Leftrightarrow 180^o - \hat{A} < \hat{A} \Leftrightarrow 2\hat{A} > 180^o \Leftrightarrow \hat{A} > 90^o$

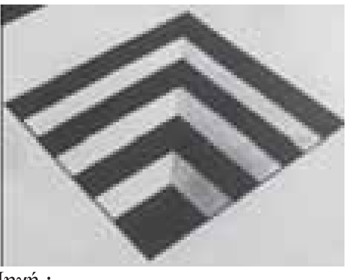
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (Ας ζωγραφίσουμε τρισδιάστατα 3D)

Προσπαθήστε σχεδιάζοντας με κανόνα και διαβήτη παράλληλες ευθείες να σχεδιάσετε το παρακάτω τρισδιάστατα σχήματα!



Υπόδειξη – Πηγή :
https://www.youtube.com/watch?v=OAq2X-0FbGM&ab_channel=JonHarris



Υπόδειξη – Πηγή :
https://www.youtube.com/watch?v=2j8zqkQqqB0&ab_channel=Calligraphy%26Art

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Τεχνική σχεδίασης γραμμάτων

Πως μπορούμε να σχεδιάσουμε τα κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτα ώστε τα γράμματα να είναι σε ευθεία γραμμή;

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

Απάντηση

Για τη σχεδίαση κεφαλαίων γραμμάτων, σχεδιάζουμε δύο παράλληλες γραμμές μεταξύ τους και σε απόσταση η μία από την άλλη, όσο θέλουμε να είναι το ύψος των γραμμάτων. Για παράδειγμα θα σχεδιάσουμε τα κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτου με ύψος 1cm.

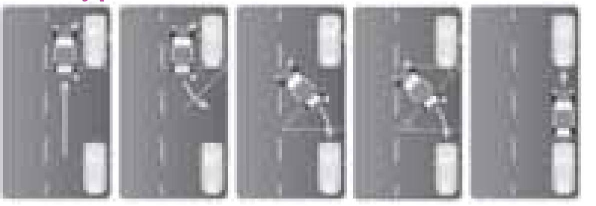
Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Εργασία για τους μαθητές:

Πως θα μπορούσε ένας οδηγός να παρκάρει εύκολα το αυτοκίνητό του χρησιμοποιώντας τη Γεωμετρία. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Υπόδειξη

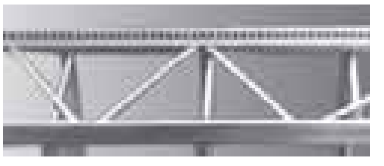


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4

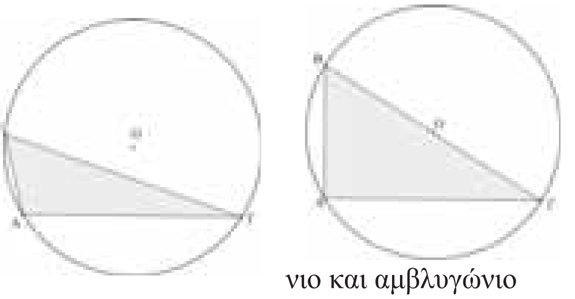
Βάζω το σχήμα βάζεις την Άσκηση;

Δοκιμάστε, βάζοντας την προσωπική σας πινελιά, να δώσετε τη δική σας εκφώνηση και να φτιάξετε τη δική σας άσκηση για τα σχήματα των περιπτώσεων Α, Β, Γ, Δ και Ε.

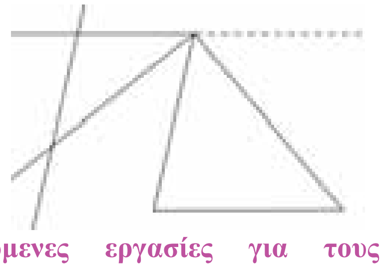
Α)



Β) Σχόλιο – Υπόδειξη : Στα σχήματα αυτά απεικονίζονται οι περιγεγραμμένοι κύκλοι για ορθογώνιο και αμβλυγώνιο τρίγωνο αντίστοιχα.



Γ)



Προτεινόμενες εργασίες για τους μαθητές/μαθήτριες.

Α) Σερφάρετε στο διαδίκτυο και φτιάξτε μια εργασία με θέμα «τρόποι κατασκευής παράλληλων ευθειών».

Β) Σερφάρετε στο διαδίκτυο και φτιάξτε μια εργασία με θέμα «Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου». Λέξεις κλειδιά: περιγεγραμμένος, εγγεγραμμένος, παρεγγεγραμμένος κύκλος.

Γ) Να βρείτε εφαρμογές και χρήση των παράλληλων ευθειών όπως για παράδειγμα στη καθημερινή ζωή, στη φυσική, στη ζωγραφική κ.α.

Τριγωνομετρία - Πολυώνυμα

Για τα παιδιά που ονειρεύονται…για τα παιδιά που προσπαθούν

Τσιφάκης Χρήστος

Άσκηση 1η. Εάν $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x$ και να κυκλώσετε την σωστή απάντηση:

i) $A=\frac{1}{8}$ ii) $A=\frac{11}{16}$ ii) $A=-\frac{11}{16}$ iv) $A=-\frac{7}{16}$

Λύση: $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Rightarrow(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\eta\mu^2 x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=-\frac{3}{4}\Rightarrow\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=-\frac{3}{8}$

$A=\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x=$

$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^3-3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=$

$\frac{1}{8}-3\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$.

Άρα κυκλώνουμε το ii)

Άσκηση 2η. Να λυθεί η εξίσωση στο R:

$$2\eta\mu^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\frac{3}{2}=0$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x=\frac{\pi}{2}$, άρα τα τόξα είναι συμπληρωματικά. Έτσι έχουμε

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow$

$4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-8\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+3=0$.

Θέτουμε $y=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ με $|y|\le 1$ και έχουμε:

$4y^2-8y+3=0\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}\vee y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$. Άρα

$y=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$x-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\kappa\in Z\Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\vee x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\kappa\in Z$

Άσκηση 3η. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες η εξίσωση $2\eta\mu^2 x-(2\lambda+1)\eta\mu x+2\lambda-1=0$ έχει λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και κυκλώστε την σωστή απάντηση α) $-1<\lambda<0$ β) $0<\lambda<1$ γ) $1<\lambda<2$ δ) $-\frac{1}{2}<\lambda<\frac{1}{2}$

Λύση: Αφού $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\Leftrightarrow\eta\mu x\in(-1,0)$. Θέτουμε $\eta\mu x=y$ με $y\in(-1,0)$ και η εξίσωση γίνεται: $2y^2-(2\lambda+1)y+2\lambda-1=0\Leftrightarrow$

$2y^2-y-1-2\lambda(y-1)=0\Leftrightarrow$

$(2y+1)(y-1)-2\lambda(y-1)=0\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow}\quad 2y+1=2\lambda\Leftrightarrow$

$\lambda=y+\frac{1}{2}$. Αφού $y\in(-1,0)\Leftrightarrow -1<y<0\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}<y+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<\lambda<\frac{1}{2}$.

Άρα κυκλώνουμε το δ)

Άσκηση 4η. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(2x)+\beta$, $x\in R$ όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B\left(\frac{\pi}{4},4\right)$ τότε:

i) Να δείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=4$.

ii) Να βρείτε την περίοδο Τ.

iii) Να δείξετε ότι $1\le f(x)\le 7$ για κάθε $x\in R$.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή και να σχεδιαστεί η γραφική παράστασή της σε διάστημα μιας περιόδου.

Λύση: i) Αφού η f διέρχεται από τα σημεία Α, Β έχουμε: $f(0)=1\Leftrightarrow\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 0+\beta=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1$ και

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\Leftrightarrow\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\beta=4\Leftrightarrow\beta=4$, οπότε $\alpha=-3$.

ii) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$, δηλαδή κάθε τιμή της επαναλαμβάνεται, αν το x αυξηθεί κατά 2π. Όμοια κάθε τιμή της συνάρτησης $f(x)$ επαναλαμβάνεται αν το $2x$ αυξηθεί κατά 2π, δηλαδή αν το x αυξηθεί κατά π. Άρα η f έχει περίοδο $T=\pi$

iii) $f(x)=-3\cdot\sigma\upsilon\nu(2x)+4$ για κάθε $x\in R$, οπότε έχουμε: $-1\le\sigma\upsilon\nu(2x)\le 1\overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow}-3\le-3\sigma\upsilon\nu(2x)\le 3\Leftrightarrow$

$1\le-3\sigma\upsilon\nu(2x)+4\le 7\Leftrightarrow 1\le f(x)\le 7$, για κάθε $x\in R$.

iv) θα εργαστούμε σε διάστημα μιας περιόδου και έχουμε: $f(x)=7\Leftrightarrow-3\cdot\sigma\upsilon\nu(2x)+4=7\Leftrightarrow$

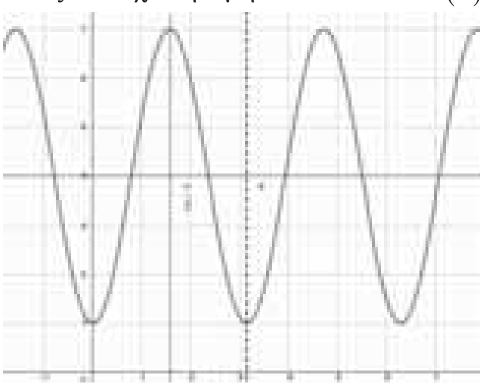
$\sigma\upsilon\nu(2x)=-1\Leftrightarrow 2x=\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$.

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x=\dfrac{\pi}{2}$ το

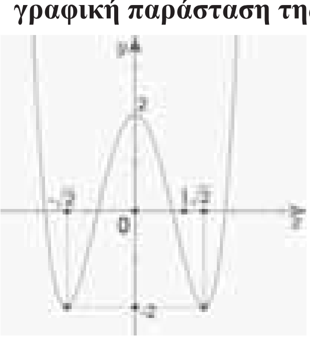
$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=7$. Όμοια

$f(x)=1\Leftrightarrow-3\cdot\sigma\upsilon\nu(2x)+4=1\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(2x)=1\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x=0$ το $f(0)=1$



Άσκηση 5η. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)$.



Να βρεθεί το πλήθος των ακεραίων τιμών του α για τις οποίες η εξίσωση $f(x)+2\alpha=0$, έχει 4 διαφορετικές λύσεις, και κυκλώστε την σωστή απάντηση

i) 2 **ii)** 1
iii) 3 **iv)** 4

Λύση: Για να έχει η εξίσωση 4 διαφορετικές λύσεις, πρέπει η ευθεία $y=-2\alpha$ να τέμνει την γραφική παράσταση ανάμεσα στο -2 και στο 2, δηλαδή $-2<-2\alpha<2\Leftrightarrow-1<\alpha<1$ και αφού το $\alpha\in Z$ έχουμε ότι $\alpha=0$. Άρα σωστή απάντηση το ii)

Άσκηση 6η. Να λυθεί η εξίσωση στο R:

$$\mathbf{\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}}$$

Λύση: Για $x\neq\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, θέτουμε $x^2+3=y$ και η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{4x}{y+x}+\dfrac{5x}{y-5x}-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$2\left(3xy-5x^2\right)=-\left(y^2-4xy-5x^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15x^2-2xy-y^2=0\overset{:y^2\neq 0}{\Leftrightarrow}15\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-2\left(\dfrac{x}{y}\right)-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}\vee\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow y=3x\vee y=-5x$. Αν

$y=3x\Leftrightarrow x^2-3x+3=0$, αδύνατη.

Αν $y=-5x\Leftrightarrow x^2+5x+3=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Μπορείτε να βρείτε και άλλο τρόπο λύσης;

Άσκηση 7η. Να λυθεί η εξίσωση στο R:

$$\mathbf{4\eta\mu^4x+4\eta\mu^3x-7\eta\mu^2x+4\eta\mu x+4=0}$$

Λύση

Αν $\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\kappa\in Z$ προκύπτει ότι $4=0$, άτοπο. Άρα $\eta\mu x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\kappa\pi,\kappa\in Z$ οπότε διαιρούμε με $\eta\mu^2x$ και έχουμε:

$4\eta\mu^4x+4\eta\mu^3x-7\eta\mu^2x+4\eta\mu x+4=0\Leftrightarrow$

$4\eta\mu^2x+4\eta\mu x-7+4\dfrac{1}{\eta\mu x}+\dfrac{4}{\eta\mu^2x}=0\Leftrightarrow$

$4\left(\eta\mu^2x+\dfrac{1}{\eta\mu^2x}\right)+4\left(\eta\mu x+\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)-7=0$.

Θέτουμε $\eta\mu x+\dfrac{1}{\eta\mu x}=y\Rightarrow\eta\mu^2x+\dfrac{1}{\eta\mu^2x}=y^2-2$

και έχουμε: $4y^2+4y-15=0\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}\vee y=-\dfrac{5}{2}$.

Επειδή $|y|\ge 2$ (γιατί;) έχουμε ότι η τιμή $y=\dfrac{3}{2}$ απορρίπτεται. Έτσι έχουμε: $y=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x+\dfrac{1}{\eta\mu x}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow$

$2\eta\mu^2x+5\eta\mu x+2=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\dfrac{1}{2}\vee\ \eta\mu x=-2\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\dfrac{7\pi}{6}$, $\kappa\in Z$.

Άσκηση 8η. Έστω το πολυώνυμο $f(x)=x^5+3x^2+\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο

της διαίρεσης του $f(x)$ με το x^2-2, είναι το $\upsilon(x)=5x+8$, τότε:

i. Να δείξετε ότι α και β.

ii. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του

$$f(x):(x^2-2).$$

iii. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ βρίσκεται πάνω από την $y=5x+8$

Λύση: i. Το $x^2-2=(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})$, οπότε

$$\left.\begin{array}{r} f(\sqrt{2})=5\sqrt{2}+8 \\ f(-\sqrt{2})=-5\sqrt{2}+8 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 4\sqrt{2}+6+\alpha\sqrt{2}+\beta=5\sqrt{2}+8 \\ -4\sqrt{2}+6-\alpha\sqrt{2}+\beta=-5\sqrt{2}+8 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ και } \beta=2$$

ii. Κάνοντας την διαίρεση, έχουμε

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad +3x^2+\alpha x+\beta & x^2-2 \\ \cline{2-2} -x^3 \quad +2x^2 & x^3+2x+3 \\ \cline{1-1} \quad 2x^3+3x^2+\alpha x+\beta & \\ \quad -2x^3 \quad +4x & \\ \cline{1-1} \quad 3x^2+(\alpha+4)x+\beta & \\ \quad -3x^2 \quad +6 & \\ \cline{1-1} \quad (\alpha+4)x+\beta+6 & \end{array}$$

Άρα $\upsilon(x)=(\alpha+4)x+\beta+6\equiv 5x+8$, οπότε

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+4=5 \\ \beta+6=8 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ και } \beta=2$$

και το πηλίκο είναι $\pi(x)=x^3+2x+3$.

iii. $f(x)=(x^2-2)\cdot(x^3+2x+3)+5x+8$.

Η C_f θα βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=5x+8$ όταν $f(x)>y\Leftrightarrow f(x)-(5x+8)>0\Leftrightarrow$

$(x^2-2)\cdot(x^3+2x+3)>0 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$

$(x^2-2)\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+3)>0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+1$		−		−	0	+		+	
x^2-2		+	0	−		−	0	+	
x^2-x+3		+		+		+		+	
Γινόμενο		−		+		−		+	

Άρα $x\in(-\sqrt{2},-1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$

Άσκηση 9η. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **Το υπόλοιπο της διαίρεσης της $f(x)$ διά $(x+2)$ είναι 24.**
- **Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,8)$.**
- **Η $f(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.**

α. Να δείξετε ότι: $\alpha=1$, $\beta=-10$ και $\gamma=8$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

γ. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x+4}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)+f(-x)-18}.$$

Λύση: α. Έχουμε ότι $\left.\begin{array}{r} f(-2)=24 \\ f(0)=8 \\ f(1)=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 4\alpha-2\beta=24 \\ \gamma=8 \\ \alpha+\beta=-9 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha-\beta=12 \\ \gamma=8 \\ \alpha+\beta=-9 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha=1 \\ \gamma=8 \\ \beta=-10 \end{array}\right\}$$

β. $f(x)=0\Leftrightarrow x^3+x^2-10x+8=0 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} x=1$ ή $x^2+2x-8=0\Leftrightarrow x=1,\ x=-4,\ x=2$.

γ. $f(x)<0\Leftrightarrow x^3+x^2-10x+8<0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2+2x-8)<0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x+4)(x-2)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(1,2)$.

δ. $f(x)+f(-x)-18=2(x^2-1)$. Άρα για $x\neq -4,\pm1,2$ έχουμε: $\dfrac{x+4}{f(x)}\le\dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}\le\frac{1}{(x-1)(x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{(x-1)(x-2)(x+1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$(x-1)(x-2)(x+1)\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

Άσκηση 10η. Να λυθεί στο R η εξίσωση:

$$3\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1$$

Λύση

Πρέπει και αρκεί $x\ge 1$.

$3\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}-1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}+\frac{2x-2}{\sqrt[3]{2x-1}^2+\sqrt[3]{2x-1}+1}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}+\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{2x-1}^2+\sqrt[3]{2x-1}+1}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left[3+\underbrace{\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}^{2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}}_{>0}\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$$

Β΄ τρόπος

Με $x\geq 1$, θέτουμε $\sqrt{x-1}=\alpha\geq 0$ και $\sqrt[3]{2x-1}=\beta>0$ τότε: $\left.\begin{array}{l} x-1=\alpha^2 \\ 2x-1=\beta^3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\alpha^2+1 \\ x=\dfrac{\beta^3+1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\beta^3+1}{2}=\alpha^2+1 \Leftrightarrow \beta^3-2\alpha^2-1=0$ και $3\alpha+\beta=1$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \beta^3-2\alpha^2-1=0 \\ 3\alpha+\beta=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta^3-2\alpha^2-1=0 \\ \alpha=\dfrac{1-\beta}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta^3-2\left(\dfrac{1-\beta}{3}\right)^2-1=0 \\ \alpha=\dfrac{1-\beta}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 9\beta^3-2\beta^2+4\beta-11=0 \\ \alpha=\dfrac{1-\beta}{3} \end{array}\right\} \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\beta-1)\left(\underbrace{9\beta^2+7\beta+11}_{>0}\right)=0 \\ \alpha=\dfrac{1-\beta}{3} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=1 \\ \alpha=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=1$$

Άσκηση 11η. Να λυθεί η εξίσωση στο R:

$$\mathbf{x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^3+x\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}}$$

Λύση: Πρέπει και αρκεί: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1-x^2}{x}\geq 0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\left(1-x^2\right)\geq 0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1]\cup(0,1]$. Αφού $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=$ $x^4+2x^3+x^2+x^2-2x+1=\left(x^2+x\right)^2+(x-1)^2>0$, άρα $x^3+x>0 \Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)>0 \Leftrightarrow x>0$ και το $x=1$ δεν επαληθεύει, άρα τελικά προκύπτει $x\in(0,1)$.

$$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^3+x\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+1\right)^2-2x\left(1-x^2\right)=x\left(x^2+1\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+1\right)^2-2x\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2\cdot\frac{1-x^2}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+1\right)^2-2x\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\sqrt{x\left(1-x^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+1\right)^2-2\sqrt{x\left(1-x^2\right)}^{\,2}=\left(x^2+1\right)\sqrt{x\left(1-x^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}-2\frac{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}{x^2+1}=1 \overset{\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}=y}{\Leftrightarrow}$$

$$y-\frac{2}{y}=1 \Leftrightarrow y^2-y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$y=2 \vee y=-1 \Leftrightarrow y=2.$$

Άρα $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}=2 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2=4x\left(1-x^2\right) \Leftrightarrow$

$$x^4+4x^3+2x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+2x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=-1-\sqrt{2} \vee x=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2}\in(0,1)$$

Άσκηση 12η. Να λυθεί η εξίσωση στο R:

$$\mathbf{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Λύση: Πρέπει και αρκεί $\left.\begin{array}{l} 1-x^2\geq 0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0<x\leq 1$.

Θέτουμε $x=\sigma\upsilon\nu\theta$ με $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και έχουμε:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}}=\sigma\upsilon\nu\theta\left(1+2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{\eta\mu^2\theta}}=\sigma\upsilon\nu\theta\left(1+2\sqrt{\eta\mu^2\theta}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\eta\mu\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta\left(1+2\eta\mu\theta\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\eta\mu\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta\left(1+4\eta\mu\theta+4\eta\mu^2\theta\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\eta\mu\theta=\left(1-\eta\mu^2\theta\right)\left(1+4\eta\mu\theta+4\eta\mu^2\theta\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta=-1 \vee (1-\eta\mu\theta)\left(1+4\eta\mu\theta+4\eta\mu^2\theta\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\eta\mu\theta)\left(1+4\eta\mu\theta+4\eta\mu^2\theta\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+4\eta\mu\theta+4\eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta-4\eta\mu^2\theta-4\eta\mu^3\theta=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\eta\mu^3\theta-3\eta\mu\theta=0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta\left(4\eta\mu^2\theta-3\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta=0 \vee \eta\mu^2\theta=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\theta=0 \vee \sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta=0 \vee \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\theta=0 \Leftrightarrow \theta=0 \Leftrightarrow x=1$$

ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Μπορείτε να βρείτε και άλλους τρόπους λύσης;

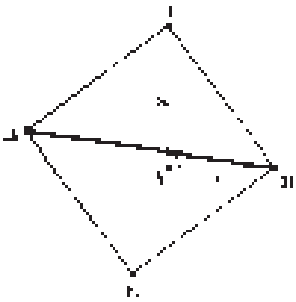
Τάξη: Β΄

Μετρικές σχέσεις σε τρίγωνο – Εμβαδά επιπέδων σχημάτων

Καρδαμίτσης Σπύρος

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι ορθή, Α=6cm, ΑΓ=8cm και το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο που περιέχει το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε η διαγώνιος του ΒΔ είναι ίση με:

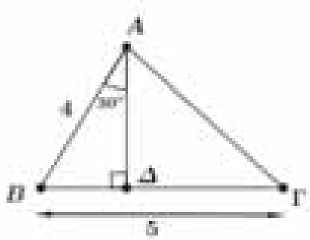


Α. $2\sqrt{10}$ **Β.** $10\sqrt{5}$ **Γ.** $10\sqrt{2}$ **Δ.** $14\sqrt{2}$ **Ε.** 100

2. Αν α = 10 cm, β = 9 cm και γ = 7 cm είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου ΑΒΓ τότε η προβολή ΑΔ της πλευράς γ πάνω στη β σε cm είναι:

Α. $\frac{5}{3}$ **Β.** 8 **Γ.** 9 **Δ.** $\frac{17}{2}$ **Ε.** $\frac{19}{2}$

3. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ=4 cm, ΒΓ=5cm, το ΑΔ ύψος και η γωνία ΒΑΔ = 30°. Το μήκος της πλευράς ΑΓ ισούται:

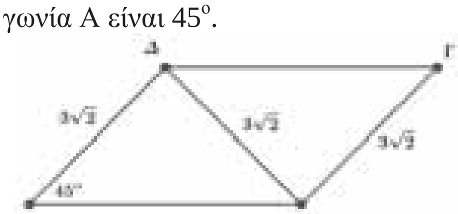


Α. 3 **Β.** $\sqrt{41}$ **Γ.** $\sqrt{10}$ **Δ.** $\sqrt{21}$ **Ε.** $\sqrt{20}$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ.
Αν α = 13 β = 7 και γ = 8, τότε το μέτρο της μεγαλύτερης γωνίας του τριγώνου είναι:

Α. 60^0 **Β.** 80^0 **Γ.** 90^0 **Δ.** 100^0 **Ε.** 120^0

5. Στο σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με $ΑΔ = ΔΒ = ΒΓ = 3\sqrt{2}$ cm και η γωνία Α είναι 45^o.



Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι:

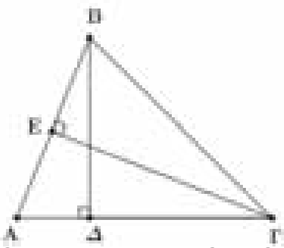
Α. $18\sqrt{2}$ **Β.** $2(2+\sqrt{2})$ **Γ.** $6(2+\sqrt{2})$

Δ. $6\sqrt{2}+10$ **Ε.** $6\sqrt{2}+8$

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει $α^2=β^2+γ^2+βγ$. Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ = ΑΒ στην ΑΓ τότε η γωνία ΑΒΔ είναι:

Α. 45° **Β.** 30° **Γ.** 60° **Δ.** 75° **Ε.** 15°

7. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}<90°$ και ΒΔ, ΓΕ είναι ύψη του. Από τις παρακάτω ισότητες **λανθασμένη** είναι:

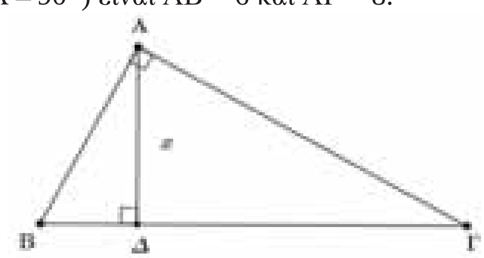


Α. $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βΑΔ$ **Β.** $α^2 = β^2 + γ^2 - 2γΑΕ$

Γ. $α^2 = ΒΔ^2 + ΔΓ^2$ **Δ.** $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βΑΕ$

Ε. $α^2 = ΕΒ^2 + ΕΓ^2$

8. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) είναι ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8.



Το ύψος ΑΔ = x του τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του είναι:

Α. $\frac{26}{5}$ **Β.** $\frac{24}{5}$ **Γ.** 6,4 **Δ.** 5 **Ε.** $\frac{10}{3}$

Απαντήσεις

Γ – Α – Δ – Ε – Γ – Β – Δ – Β

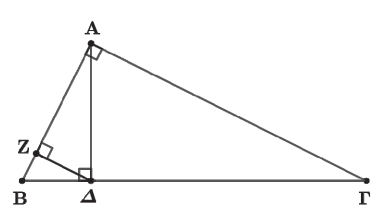
Άσκηση 1η.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του. Από το σημείο Δ φέρνουμε την κάθετη ΔΖ στην πλευρά του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathbf{ΔΒ \cdot ΔΓ = ΑΖ^2 + ΖΔ^2}$

β) $\mathbf{ΑΖ \cdot ΑΒ = ΑΖ^2 + ΒΔ^2}$

Λύση.



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$ΑΔ^2 = ΑΖ^2 + ΖΔ^2 \quad (1)$$

Επειδή το ΑΔ είναι το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$ (2)

από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$ΔΒ \cdot ΔΓ = ΑΖ^2 + ΖΔ^2$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ το ΔΖ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, επομένως $ΔΖ^2 = ΖΑ \cdot ΖΒ$ (3)

και από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει:

$$ΔΖ^2 + ΖΒ^2 = ΒΔ^2 \quad (4)$$

Είναι $ΑΖ \cdot ΑΒ + ΖΒ^2 = ΑΖ \cdot (ΑΖ + ΖΒ) + ΖΒ^2 =$

$$= ΑΖ^2 + ΑΖ \cdot ΖΒ + ΖΒ^2 \overset{(3)}{=} ΑΖ^2 + ΔΖ + ΖΒ^2 \overset{(4)}{=}$$
$$= ΑΖ^2 + ΒΔ^2$$

Άσκηση 2η.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο εσωτερικό του τριγώνου παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ τέτοιο ώστε $\hat{ΒΜΓ} = 150^o$. Από το σημείο Μ φέρνουμε την κάθετη στην ΜΓ και προς το μέρος της πλευράς ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΜΔ = ΜΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισόπλευρο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΜΔ είναι ίσα.

γ) $ΜΑ^2 = ΜΒ^2 + ΜΓ^2$.

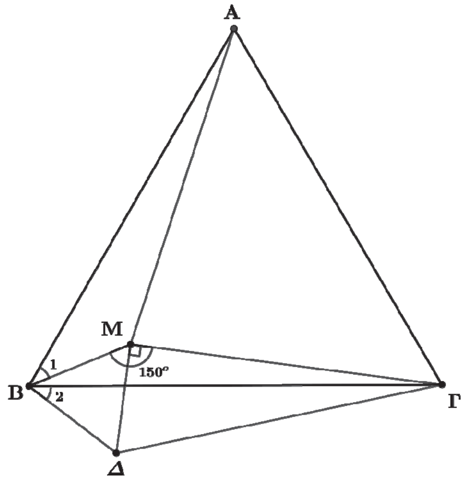
Λύση.

α) Επειδή είναι ΜΔ = ΜΒ το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισοσκελές. Επιπλέον είναι

$$\hat{ΒΜΔ} = \hat{ΒΜΓ} - \hat{ΔΜΓ} = 150^o - 90^o = 60^o$$

συνεπώς το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισόπλευρο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΜΔ έχουν: ΑΒ= ΒΓ (επειδή το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο), ΒΜ=ΒΔ (επειδή το ΒΜΔ είναι ισόπλευρο).



Επιπλέον είναι: $\hat{Β}_1 = \hat{ΑΒΓ} - \hat{ΜΒΓ} = 60^o - \hat{ΜΒΓ}$ και $\hat{Β}_2 = \hat{ΜΒΔ} - \hat{ΜΒΓ} = 60^o - \hat{ΜΒΓ}$ άρα $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$, συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΜΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΓΔ^2 = ΜΔ^2 + ΜΓ^2$ (1)

Αλλά από το ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΔ είναι ΜΔ=ΜΒ και από τα ίσα τρίγωνα ΑΜΒ και ΓΒΔ είναι ΓΔ = ΜΑ, τότε η (1) σχέση γίνεται:

$$ΜΑ^2 = ΜΒ^2 + ΜΓ^2$$

Άσκηση 3η.

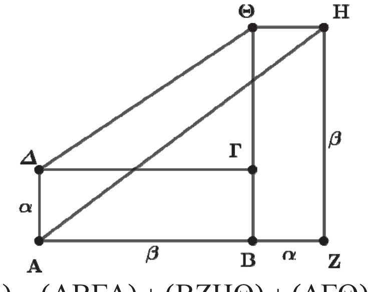
Δίνονται δύο ίσα ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΒΖΗΘ με διαστάσεις α και β όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδό του πολυγώνου ΑΖΗΘΔ ως συνάρτηση των α και β.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΗΘΔ είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση.

α) Είναι $ΘΓ = ΘΒ - ΒΓ = β - α$, επομένως



$$(ΑΖΗΘΔ) = (ΑΒΓΔ) + (ΒΖΗΘ) + (ΔΓΘ) =$$
$$= α \cdot β + α \cdot β + \frac{1}{2}β \cdot (β - α) =$$
$$= 2α \cdot β + \frac{1}{2}β^2 - \frac{1}{2}α \cdot β = \frac{3}{2}α \cdot β + \frac{1}{2}β^2 .$$

β) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΖΗ είναι:

$$(ΑΖΗ) = \frac{1}{2}(α + β) \cdot β = \frac{1}{2}α \cdot β + \frac{1}{2}β^2$$

επομένως για το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΗΘΔ έχουμε: $(ΑΗΘΔ) = (ΑΖΗΘΔ) - (ΑΖΗ) \overset{(α)\ ερώτ.}{=}$

$$= \frac{3}{2}α \cdot β + \frac{1}{2}β^2 - \left(\frac{1}{2}α \cdot β - \frac{1}{2}β^2\right) =$$
$$= \frac{3}{2}α \cdot β + \cancel{\frac{1}{2}β^2} - \frac{1}{2}α \cdot β - \cancel{\frac{1}{2}β^2} = αβ = (ΑΒΓΔ)$$

Άσκηση 4η.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ είναι το ύψος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του. Αν ΒΓ = 10 και ΑΒ = 6 τότε:

α) Να υπολογίστε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.

β) Να αποδείξετε ότι $16 \cdot (ΑΒΔ) = 9 \cdot (ΑΔΓ)$

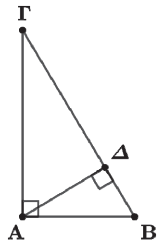
γ) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ + ΒΓ > ΑΔ + ΑΒ$

Λύση.

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ \Rightarrow 6^2 = 10 \cdot ΒΔ \Rightarrow ΒΔ = \frac{36}{10} = 3,6$$

$$\text{και } ΓΔ = ΒΓ - ΒΔ = 10 - 3,6 = 6,4$$



ακόμη

$$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ = 3,6 \cdot 6,4 = \frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10}$$

, άρα $ΑΔ = \sqrt{\frac{36 \cdot 64}{100}} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$

β) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι:

$$\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{ΑΔ} \cdot ΒΔ}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{ΑΔ} \cdot ΓΔ} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ} = \frac{3,6}{6,4} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

επομένως $16 \cdot (ΑΒΔ) = 9 \cdot (ΑΔΓ)$

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουν: $\hat{Β} = \hat{Β}$ (κοινή γωνία) και είναι και ορθογώνια, άρα είναι όμοια, τότε ισχύει:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} \Rightarrow \frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ + ΒΓ}{ΑΔ + ΑΒ} \quad (1)$$

Επειδή η υποτείνουσα του τριγώνου είναι η μεγαλύτερη πλευρά του έχουμε:

$$ΒΓ > ΑΒ \Rightarrow \frac{ΒΓ}{ΑΒ} > 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{ΑΓ + ΒΓ}{ΑΔ + ΑΒ} > 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ΑΓ + ΒΓ > ΑΔ + ΑΒ$$

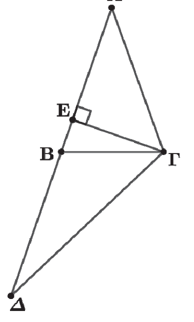
Άσκηση 5η.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΓΕ το ύψος του. Αν είναι $(ΑΕΓ) = 3 \cdot (ΒΕΓ)$ και Δ το συμμετρικό του Α ως προς την κορυφή του τριγώνου Β, τότε να αποδείξετε:

α) $\mathbf{ΑΕ = 4 \cdot ΒΕ}$ **β)** $\mathbf{ΓΔ^2 = \frac{25}{16}ΑΒ^2 + ΕΓ^2}$

γ) $\mathbf{ΓΔ^2 - ΒΓ^2 = \frac{3}{2}ΑΒ^2}$

Λύση.



α) Είναι $(ΑΕΓ) = 3 \cdot (ΒΕΓ) \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}ΑΕ \cdot \cancel{ΕΓ} = 3 \cdot \cancel{\frac{1}{2}}ΒΕ \cdot \cancel{ΕΓ}$

$$\Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΒΕ} = 3 \Rightarrow \frac{ΑΕ + ΒΕ}{ΒΕ} = \frac{3+1}{1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{ΑΒ}{ΒΕ} = 4 \Rightarrow ΑΒ = 4 \cdot ΒΕ$$

β) Επειδή το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την κορυφή του τριγώνου Β είναι $ΒΔ = ΑΒ$ και με βάση το (α) ερώτημα έχουμε:

$$ΔΕ = ΒΔ + ΒΕ = ΑΒ + \frac{1}{4}ΑΒ = \frac{5}{4}ΑΒ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΔ με εφαρμογή του πυθαγόρειο θεωρήματος έχουμε:

$$ΓΔ^2 = ΔΕ^2 + ΕΓ^2 = \left(\frac{5}{4}ΑΒ\right)^2 + ΕΓ^2 = \frac{25}{16}ΑΒ^2 + ΕΓ^2$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΕΓ^2 + ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + \left(\frac{1}{4}ΑΒ\right)^2 =$$
$$= ΕΓ^2 + \frac{1}{16}ΑΒ^2 \quad (1)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$ΓΔ^2 - ΒΓ^2 = \frac{25}{16}ΑΒ^2 + \cancel{ΕΓ^2} - \cancel{ΕΓ^2} - \frac{1}{16}ΑΒ^2 =$$
$$= \frac{24}{16}ΑΒ^2 = \frac{3}{2}ΑΒ^2$$

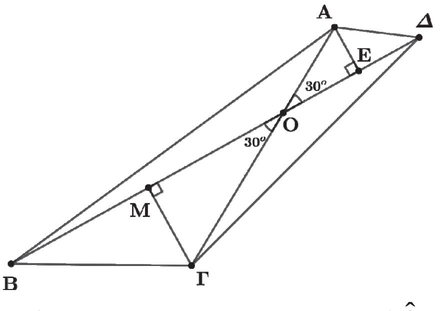
Άσκηση 6η.

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στο οποίο οι διαγώνιες του ΑΒ και ΒΔ τέμνονται στο Ο και σχηματίζουν την οξεία γωνία τους $\mathbf{Α\hat{Ο}Δ = 30^o}$. Αν Ε και Μ είναι προβολές των κορυφών Α και Γ στην διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε

α) $\mathbf{(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{4}ΑΓ \cdot ΒΔ}$

β) $\mathbf{ΑΔ^2 + ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΓΔ^2 + 2ΒΔ \cdot ΜΕ}$

Λύση.



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΕ είναι $Α\hat{Ο}Ε = 30^o$, τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσάς του, δηλαδή $ΑΕ = \frac{ΟΑ}{2}$.

Ανάλογα στο ορθογώνιο τρίγωνο είναι $Β\hat{Ο}Γ = 30^o$ και $ΜΓ = \frac{ΟΓ}{2}$ τότε: $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) =$

$$= \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΑΕ + \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΜΓ = \frac{1}{2}ΒΔ \cdot \frac{ΟΑ}{2} + \frac{1}{2}ΒΔ \cdot \frac{ΟΓ}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}ΒΔ \cdot (ΟΑ + ΟΓ) = \frac{1}{4}ΒΔ \cdot ΑΓ$$

β) Στο τρίγωνο ΑΟΓ είναι $\hat{AOΔ} = 30^o < 90^o$, τότε από το θεώρημα οξείας γωνίας έχουμε:

$$AΔ^2 = OA^2 + OΔ^2 - 2OΔ \cdot OE \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΒΟΓ είναι $\hat{BOΓ} = 30^o < 90^o$, όπου αντίστοιχα έχουμε:

$$BΓ^2 = OΓ^2 + OB^2 - 2OB \cdot OM \quad (2)$$

Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι $\hat{AOB} = 150^o > 90^o$, τότε από το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 + 2OB \cdot OE \quad (3)$$

Στο τρίγωνο ΓΟΔ είναι $\hat{ΓOΔ} = 150^o > 90^o$, όπου αντίστοιχα έχουμε:

$$ΓΔ^2 = OΓ^2 + OΔ^2 + 2OΔ \cdot OM \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και από το άθροισμά τους αφαιρούμε κατά μέλη τις (3) και (4) οπότε προκύπτει:

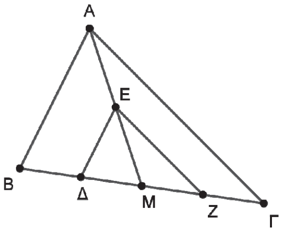
$$AΔ^2 + BΓ^2 - AB^2 - ΓΔ^2 =$$
$$= 2OΔ \cdot (OE + OM) + 2OB \cdot (OE + OM) =$$
$$= 2OΔ \cdot ME + 2OB \cdot ME =$$
$$= 2ME \cdot (OΔ + OB) = 2BΔ \cdot ME$$

Άσκηση 7η.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Ε το μέσον της ΑΜ. Από το σημείο Ε φέρνουμε ΔΕ//ΑΒ και ΕΖ//ΑΓ (τα Δ, Ζ σημεία της ΒΓ).

Να αποδείξετε α) $(MEΔ) = \frac{1}{4}(ABΓ)$

β) $(ABΔE) = (AΓZE)$



Λύση.

α) Η διάμεσος ενός τριγώνου, χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, συνεπώς για την διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ)

Στο τρίγωνο ΑΜΒ το Ε είναι το μέσο της ΑΜ και ΕΔ//ΑΒ, επομένως και το Δ είναι το μέσο της ΒΜ, άρα $MΔ = \frac{1}{2} \cdot BM$ και $ME = \frac{1}{2} \cdot AM$

Από το (α) ερώτημα έχουμε

$$(AMB) = (AMΓ) = \frac{1}{2} \cdot (ABΓ)$$

Τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΑΜΒ έχουν την γωνία $\hat{AMB}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(MEΔ)}{(AMB)} = \frac{ME \cdot MΔ}{AM \cdot BM} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot \frac{1}{2} \cdot BM}{AM \cdot BM} = \frac{1}{4}$$

Άρα $(MEΔ) = \frac{1}{2} \cdot (AMB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (ABΓ) = \frac{1}{4} \cdot (ABΓ)$

β) Από το (α) ερώτημα είναι (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι

$$ΔM = \frac{1}{2} \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot MΓ = MZ$$

συνεπώς η ΕΜ είναι διάμεσος του, άρα

(ΜΕΔ) = (ΜΕΖ) (2)

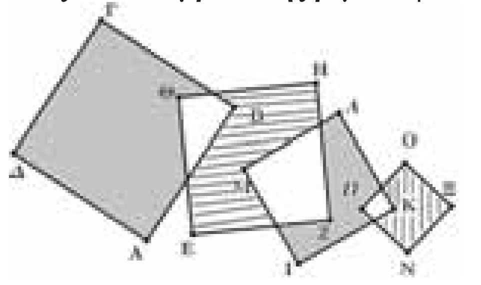
Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) – (2) έχουμε:

(ΑΜΒ) – (ΜΕΔ) = (ΑΜΓ) – (ΜΕΖ)

ή (ΑΒΓΔ) = (ΑΓΖΕ)

Άσκηση 8η.

Στο παρακάτω σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ και ΝΞΟΠ είναι τετράγωνα. Υπάρχουν κάποιες επικαλύψεις μεταξύ τους και τα κοινά κομμάτια τετραγώνων είναι λευκά. Δίνεται ότι ΑΒ = 11, ΕΖ = 9 και ΝΞ = 5. Να βρεθεί η διαφορά του εμβαδού της γκρίζας επιφάνειας από το εμβαδό της ριγέ επιφάνειας.



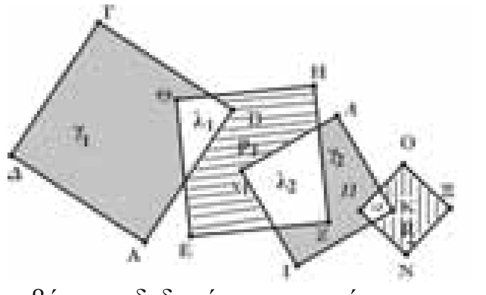
Λύση.

Στο σχήμα και από τα αριστερά προς τα δεξιά συμβολίζουμε τα εμβαδά των τμημάτων των τετραγώνων ως εξής:

$γ_1$ και $γ_2$ τα γκρι τμήματα των τετραγώνων

$ρ_1$ και $ρ_2$ τα ριγέ τμήματα των τετραγώνων

$λ_1, λ_2$ και $λ_3$ τα λευκά τμήματα των τετραγώνων



τότε με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης και τον τύπο που υπολογίζει το εμβαδό ενός τετραγώνου προκύπτει ότι: $γ_1 + λ_1 = 11^2$ (1)

$$ρ_1 + λ_1 + λ_2 = 9^2 \quad (2)$$
$$γ_2 + λ_2 + λ_3 = 7^2 \quad (3)$$
$$ρ_2 + λ_3 = 5^2 \quad (4)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$γ_1 + γ_2 + (λ_1 + λ_2 + λ_3) = 11^2 + 7^2 \quad (5)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$ρ_1 + ρ_2 + (λ_1 + λ_2 + λ_3) = 9^2 + 5^2 \quad (6)$$

Αφαιρώντας την (6) σχέση από την (5) προκύπτει το ζητούμενο εμβαδό που είναι:

$$(γ_1 + γ_2) - (ρ_1 + ρ_2) = 11^2 + 7^2 - (9^2 + 5^2) = 64.$$

Τάξη: Β΄

Σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο

Κώστας Βακαλόπουλος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο άρθρο αυτό θα διαπραγματευτούμε τη σχετική «θέση δύο ευθειών» στο επίπεδο, δηλαδή το αν και πότε δύο ευθείες

- *τέμνονται*
- *είναι μεταξύ τους παράλληλες ή*
- *ταυτίζονται*

Θα έχουμε την ευκαιρία να αναπτύξουμε και τη μέθοδο των οριζουσών για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2 δηλαδή δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους της μορφής: $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2 \end{cases}$ *με* $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R}$, *αφού η μέθοδος αυτή «παίζει» σημαντικό ρόλο στη παραπάνω διαδικασία.*

Σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. (τις οποίες έχουμε ακολουθήσει στο άρθρο αυτό), με την ευκαιρία της σχετικής θέσης δύο ευθειών θα λυθούν τα παραμετρικά συστήματα 2x2 που υπήρχαν στην Άλγεβρα της γενικής παιδείας στο 1^o *κεφάλαιο των συστημάτων.*

Μια διευκρίνηση:

Στο παρακάτω άρθρο θα λέμε ότι δυο ευθείες (ε_1) *και* (ε_2) *είναι* ***«παράλληλες» υπό την αναλυτική έννοια*** *και θα εννοούμε ότι: είτε ταυτίζονται είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο δηλαδή είναι παράλληλες υπό την* ***γεωμετρική έννοια.***

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ:

Α. Αν $(\varepsilon): \alpha x+\beta y+\gamma=0$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ η εξίσωση μιας ευθείας τότε:

- το διάνυσμα $\vec{\delta}_1=(\beta,-\alpha)$ ή $\vec{\delta}_2=(-\beta,\alpha)$ είναι παράλληλο στην ευθεία (ε)

ενώ

- το διάνυσμα $\vec{\eta}_1=(\alpha,\beta)$ ή $\vec{\eta}_2=(-\alpha,-\beta)$ είναι κάθετο στην ευθεία (ε)

Β. ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2

Έστω το σύστημα: $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2 \end{cases}$ και

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\alpha_1\cdot\beta_2-\alpha_2\cdot\beta_1,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\gamma_1\cdot\beta_2-\gamma_2\cdot\beta_1$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=\alpha_1\cdot\gamma_2-\alpha_2\cdot\gamma_1.$$

Αποδεικνύεται ότι:

✓ Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την: $(x_0,y_0)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$

✓ Αν $D=0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Την ποσότητα D ονομάζουμε ορίζουσα του συστήματος ενώ D_x προκύπτει από την D αν στη θέση των συντελεστών του x, θέσουμε τους σταθερούς όρους. Αντίστοιχα η D_y προκύπτει από την D αν στη θέση των συντελεστών του y, θέσουμε τους σταθερούς όρους.

Γ. ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ:

Έστω δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις:

$(\varepsilon_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ με $A_1 \neq 0$ ή $B_1 \neq 0$ και

$(\varepsilon_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ με $A_2 \neq 0$ ή $B_2 \neq 0$.

Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε:

$$(1):\begin{cases} A_1x+B_1y=-\Gamma_1 \text{ με } A_1\neq 0 \text{ ή } B_1\neq 0 \\ A_2x+B_2y=-\Gamma_2 \text{ με } A_2\neq 0 \text{ ή } B_2\neq 0 \end{cases}.$$

Το σύστημα των παραπάνω δύο εξισώσεων είναι ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή απλά ένα **γραμμικό σύστημα** 2x2 του οποίου οι εξισώσεις παριστάνουν τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Όπως αναφέραμε πριν ισχύει: $\vec{\eta}_1=(A_1,B_1)\perp(\varepsilon_1)$ και $\vec{\eta}_2=(A_2,B_2)\perp(\varepsilon_2)$. Επομένως τη **σχετική θέση** των ευθειών (ε_1) και (ε_2) θα προσδιορίζουν τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$. Η ορίζουσα των $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ δηλαδή η ποσότητα: $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$ ταυτίζεται με την ορίζουσα $D=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$ του συστήματος (1). Έτσι έχουμε:

- Αν $\det(\overrightarrow{\eta_1},\overrightarrow{\eta_2})\neq 0$ δηλαδή αν $D\neq 0$ τότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ **δεν είναι συγγραμμικά** οπότε οι ευθείες **τέμνονται** στο σημείο $M(x_0,y_0)$ του οποίου οι συντεταγμένες είναι η μοναδική λύση του συστήματος (1) δηλαδή στο σημείο: $M\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$.
- Αν $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0$ δηλαδή $D=0$ τότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ **είναι συγγραμμικά (παράλληλα)** οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **«παράλληλες»,** υπό την αναλυτική τους έκφραση, δηλαδή οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο οπότε είναι παράλληλες υπό την γεωμετρική τους έννοια, είτε **ταυτίζονται** και έχουν άπειρα κοινά σημεία**.** Επομένως το σύστημα (1), όταν $D=0$, είτε είναι **αδύνατο** είτε έχει **άπειρες λύσεις**.

Θυμηθείτε ότι:

*Στον διανυσματικό λογισμό όταν λέμε ότι δυο διανύσματα είναι «παράλληλα», εννοούμε ότι οι φορείς τους (ευθείες) είτε **ταυτίζονται** είτε **είναι παράλληλες**.*

Παράδειγμα

Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon_1):(\lambda+2)x-y-\lambda=0 \quad \text{και}$$

$$(\varepsilon_2):3x+(\lambda-2)y-1=0$$

Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών αυτών για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$

Λύση

Κατ' αρχήν οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, αφού σε καθεμιά τους οι συντελεστές του x και y δεν μηδενίζονται συγχρόνως. Έστω:

$\vec{\eta}_1=(\lambda+2,-1)\perp(\varepsilon_1)$ και $\vec{\eta}_2=(3,\lambda-2)\perp(\varepsilon_2)$,

$$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ 3 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)+3=$$

$$=\lambda^2-1$$

$$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0\Leftrightarrow\lambda^2-1=0\Leftrightarrow\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1$$

- Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{1,-1\}$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)\neq 0$ οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ δεν είναι συγγραμμικά και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **τέμνονται σε ένα σημείο** $M(x_0,y_0)$ που θα το προσδιορίσουμε από την επίλυση του συστήματος: $\begin{cases}(\lambda+2)x-y=\lambda\\ 3x+(\lambda-2)y=1\end{cases}$ (1).

Έχουμε:

$D=\ldots=\lambda^2-1\neq 0$, $D_x=\ldots=(\lambda-1)^2$,

$D_y=\ldots=-2(\lambda-1)$. Άρα: $M\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$, δηλαδή

$M\left(\frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)(\lambda+1)},\frac{-2(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}\right)$, δηλαδή

$M\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1},-\frac{2}{\lambda+1}\right)$, με $\lambda\neq 1,-1$

- Αν $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0$ οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Συγκεκριμένα:
  - Αν $\lambda=1$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1):3x-y-1=0$ ή $(\varepsilon_1):y=3x-1$ και $(\varepsilon_2):3x-y-1=0$ ή $(\varepsilon_2):y=3x-1$ οπότε **ταυτίζονται**
  - Αν $\lambda=-1$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1):x-y+1=0$ ή $(\varepsilon_1):y=x+1$ και $(\varepsilon_2):3x-3y-1=0$ ή $(\varepsilon_2):y=x-\frac{1}{3}$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **παράλληλες.**

Την 2^{η} περίπτωση θα μπορούσαμε να την αντιμετωπίσουμε και ως εξής:

- Αν $\lambda = 1$ το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις, οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **ταυτίζονται**
- Αν $\lambda = -1$ το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ που είναι αδύνατο, οπότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες.**

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να κάνουμε ακόμα ένα σημαντικό «θεωρητικό» σχόλιο!

Έστω οι παράλληλες ευθείες:

$(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ με $A_1 \neq 0$ ή $B_1 \neq 0$ και

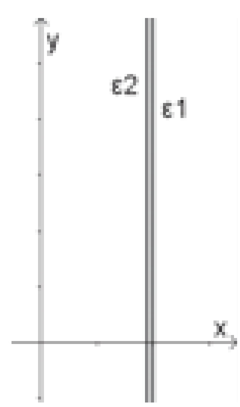
$(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ με $A_2 \neq 0$ ή $B_2 \neq 0$

Ως γνωστόν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνουν τουλάχιστον έναν από τους άξονες.

Έστω ότι τέμνουν τον $y'y$ (σχ.1) $(B_1, B_2 \neq 0)$. Τότε, η (ε_1) τον τέμνει στο σημείο με τεταγμένη $-\dfrac{\Gamma_1}{B_1}$ και η (ε_2) στο σημείο με τεταγμένη $-\dfrac{\Gamma_2}{B_2}$. Στη περίπτωση αυτή, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2):

- Ταυτίζονται αν και μόνο αν $\dfrac{\Gamma_1}{B_1} = \dfrac{\Gamma_2}{B_2}$.

σχ.1



σχ.2

Όμως:

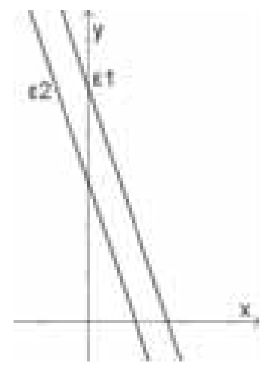
$$\frac{\Gamma_1}{B_1} = \frac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \Gamma_1 \cdot B_2 = \Gamma_2 \cdot B_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow D_x = 0$$

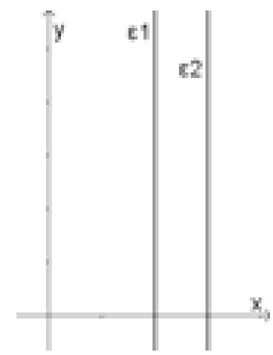
Έστω τώρα ότι τέμνουν μόνο τον άξονα $x'x$ (σχ.2) $(A_1, A_2 \neq 0)$. Τότε η ευθεία (ε_1) τον τέμνει στο σημείο με τετμημένη $-\dfrac{\Gamma_1}{A_1}$ και η (ε_2) στο σημείο με τετμημένη $-\dfrac{\Gamma_2}{A_2}$ Στη περίπτωση αυτή, οι ευθείες ε_1 και ε_2:

Ταυτίζονται αν και μόνο αν $\dfrac{\Gamma_1}{A_1} = \dfrac{\Gamma_2}{A_2}$. Όμως,

$$\frac{\Gamma_1}{A_1} = \frac{\Gamma_2}{A_2} \Leftrightarrow \Gamma_1 \cdot A_2 = \Gamma_2 \cdot A_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow D_y = 0$$

- Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο αν και μόνο αν $\dfrac{\Gamma_1}{B_1} \neq \dfrac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow D_x \neq 0$. Όμοια $D_y \neq 0$





Στις παραπάνω περιπτώσεις λάβαμε υπ' όψη ότι υπάρχει συντελεστής διαφορετικός από το μηδέν.

Παραδείγματα:

1ο: Έστω οι ευθείες: $(\varepsilon_1): x + 2y = 5$, $(\varepsilon_2): 2x + 4y = 10$. Ισχύει:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Όταν λοιπόν η ορίζουσα $D = 0$ ισχύει η αναλογία των συντελεστών των αγνώστων και οι ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε είναι «παράλληλες» υπό την αναλυτική έκφραση.

Επίσης: $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{10}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν ισχύει και η αναλογία με το λόγο των σταθερών όρων (Γ_1, Γ_2), τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

Προφανώς διαιρώντας τα δύο μέλη της (ε_2) με το 2 προκύπτει ίδια ευθεία με την (ε_1), οπότε ταυτίζονται.

2ο: Έστω οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x+4y=7$, $\varepsilon_2: 4x+8y=12$. Ισχύει:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}=2\cdot 8-4\cdot 4=0 \Leftrightarrow 2\cdot 8=4\cdot 4 \Leftrightarrow \frac{2}{4}=\frac{4}{8}$$

Όταν λοιπόν η ορίζουσα $D=0$ ισχύει η αναλογία των συντελεστών. Τότε οι ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε είναι «παράλληλες» υπό την αναλυτική έκφραση. Όμως,

$$D_x=\begin{vmatrix}7 & 4\\ 12 & 8\end{vmatrix}=7\cdot 8-12\cdot 4=20\neq 0 \Leftrightarrow 7\cdot 8-12\cdot 4$$

$7\cdot 8\neq 12\cdot 4 \Leftrightarrow \frac{4}{8}\neq\frac{7}{12}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν δεν ισχύει και η αναλογία με τον λόγο των σταθερών όρων (Γ_1,Γ_2), τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Προφανώς διαιρώντας τα δύο μέλη της (ε_2) με το 2 προκύπτει: $(\varepsilon_2): 2x+4y=6$, οπότε το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αδύνατο και οι ευθείες είναι παράλληλες.

Συμπέρασμα: *Η συνθήκη: $D=0$ δηλώνει ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές των αγνώστων, είναι ανάλογοι και οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών είναι ίσοι οπότε οι ευθείες είναι «παράλληλες» (υπό την αναλυτική έννοια), ενώ οι ορίζουσες D_x και D_y καθορίζουν αν η αναλογία ισχύει και για τον λόγο των σταθερών όρων, οπότε οι ευθείες ταυτίζονται, ή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο δηλαδή είναι παράλληλες (υπό τη γεωμετρική έννοια).*

Άσκηση 1 *(6/ Α΄ Ομ. §1.1 Γενικής Παιδείας)*

Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων:

$$\alpha)\begin{cases}2x-5y=4\\ 6x+7y=100\end{cases},$$

$$\beta)\begin{cases}2x-3y=40\\ 4x-6y=80\end{cases},$$

$$\gamma)\begin{cases}3x+y=11\\ -9x-3y=2\end{cases}$$

Λύση

α) Αν (ε_1) και (ε_2) οι ευθείες των οποίων οι εξισώσεις είναι οι δύο εξισώσεις του συστήματος, παρατηρούμε ότι: $\frac{2}{6}\neq\frac{-5}{7}$ αφού $2\cdot 7=14\neq(-5)\cdot 6=-30$. Άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται οπότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση.**

Β) Αν (ε_1) και (ε_2) οι ευθείες των οποίων οι εξισώσεις είναι οι δύο εξισώσεις του συστήματος, παρατηρούμε ότι: $\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\left(=\frac{1}{2}\right)$. Άρα οι ευθείες είναι «παράλληλες». Επίσης: $\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$. Άρα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται. Οπότε το σύστημα **έχει άπειρες λύσεις.**

Γ) Αν (ε_1) και (ε_2) οι ευθείες των οποίων οι εξισώσεις είναι οι δύο εξισώσεις του συστήματος, παρατηρούμε ότι: $\frac{3}{-9}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$. Άρα οι ευθείες είναι «παράλληλες». Όμως: $\frac{11}{2}\neq-\frac{1}{3}$. Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες. Οπότε το σύστημα **δεν έχει καμία λύση.**

Συνεχίζουμε με ασκήσεις στις οποίες θα βρούμε τη σχετική θέση ευθειών και θα λύσουμε παραμετρικά γραμμικά συστήματα 2x2 που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας λύνοντάς τα υπό το «πρίσμα» της σχετικής θέσης των ευθειών που εκφράζουν οι εξισώσεις τους. Αν οι συντελεστές των μεταβλητών είναι διάφοροι του μηδενός μπορούμε να εφαρμόζουμε και το παραπάνω σχόλιο.

Άσκηση 2

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x+6y-5=0$ και $(\varepsilon_2): x+2y-\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Α) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των (ε_1) και (ε_2)

Β) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;

Γ) Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ οι ευθείες είναι παράλληλες;

Λύση

Α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_1) είναι: $\lambda_1=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$ και της ευθείας (ε_2) είναι: $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

Β) Επειδή οι ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι «παράλληλες» (με την αναλυτική τους έκφραση) δηλαδή ταυτίζονται ή είναι παράλληλες (με τη γεωμετρική τους έννοια). Άρα δεν υπάρχει τιμή του λ για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται.

Γ) Οι ευθείες είναι παράλληλες αν δεν ταυτίζονται δηλαδή αν τέμνουν τον άξονα y΄y σε διαφορετικό σημείο, δηλαδή αν $\frac{5}{6}\neq\frac{\lambda}{2}$ δηλαδή αν $\lambda\neq\frac{5}{3}$.

Υπ' όψιν ότι:

η ευθεία: $\alpha x+\beta y=\gamma \overset{\beta\neq 0}{\Leftrightarrow} y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$ *τέμνει τον άξονα y΄y αν* $x=0$ *δηλαδή στο σημείο:* $\left(0,\frac{\gamma}{\beta}\right)$.

Σύμφωνα με το σχόλιο που αναφέραμε πιο πάνω, οι ευθείες θα είναι παράλληλες δηλαδή δεν θα ταυτίζονται αν $\frac{-5}{-\lambda}\neq\frac{6}{2}$, (με $\lambda\neq 0$) δηλαδή αν $\lambda\neq\frac{5}{3}$. Αν $\lambda=0$ είναι επίσης παράλληλες. Παρατηρούμε λοιπόν ότι καταλήγουμε στα ίδια ακριβώς συμπεράσματα.

Άσκηση 3

Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών: $(\varepsilon_1): \lambda x+2y-\lambda^2=0$ και $(\varepsilon_2): 2x+\lambda y+4=0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Λύση

Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{\eta}_1=(\lambda,2)\perp(\varepsilon_1)$ και $\vec{\eta}_2=(2,\lambda)\perp(\varepsilon_2)$. Έχουμε:

$$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4=(\lambda-2)(\lambda+2)$$

οπότε,

$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0\Leftrightarrow\lambda^2-4=0\Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=-2$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{2,-2\}$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)\neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ δεν είναι συγγραμμικά (παράλληλα) οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(x_0,y_0)$ που θα προκύψει από την επίλυση του συστήματος : $\begin{cases}\lambda x+2y=\lambda^2\\ 2x+\lambda y=-4\end{cases}$. Έχουμε:

$D=...=(\lambda-2)(\lambda+2)\neq 0$, $D_x=...=\lambda^3+8$ και $D_y=...=-2\lambda(2+\lambda)$ οπότε: $M(x_0,y_0)$, δηλαδή

$M\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$, δηλαδή

$M\left(\frac{\lambda^3+8}{(\lambda-2)(\lambda+2)},\frac{-2\lambda(\lambda+2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)}\right)$, δηλαδή,

$M\left(\frac{\cancel{(\lambda+2)}(\lambda^2-2\lambda+4)}{(\lambda-2)\cancel{(\lambda+2)}},\frac{-2\lambda\cancel{(\lambda+2)}}{(\lambda-2)\cancel{(\lambda+2)}}\right)$ δηλαδή

$M\left(\frac{\lambda^2-2\lambda+4}{\lambda-2},\frac{-2\lambda}{\lambda-2}\right)$, με $\lambda\neq 2,-2$.

- Αν $\lambda=2$ ή $\lambda=-2$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) και οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Συγκεκριμένα:
  - Αν $\lambda=2$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x+2y-4=0$ ή $(\varepsilon_1): y=-x+2$ και $(\varepsilon_2): 2x+2y+4=0$ ή $(\varepsilon_2): y=-x-2$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **παράλληλες**.
  - Αν $\lambda=-2$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): -2x+2y-4=0$ ή $(\varepsilon_1): y=x+2$ και $(\varepsilon_2): 2x-2y+4=0$ ή $(\varepsilon_2): y=x+2$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **ταυτίζονται**

Την 2^{η} περίπτωση θα μπορούσαμε να την αντιμετωπίσουμε και ως εξής:

- Αν $\lambda=2$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases}2x+2y=4\\ 2x+2y=-4\end{cases}$

που είναι **αδύνατο** οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **παράλληλες**

- Αν $\lambda=-2$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases}-2x+2y=4\\ 2x-2y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-2\\ x-y=-2\end{cases}$

που έχει **άπειρες λύσεις** οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **ταυτίζονται.**

Άσκηση 4

Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών:

$$(\varepsilon_1):(\mu-2)x+5y-5=0 \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2):x+(\mu+2)y-5=0 \quad \text{για κάθε } \mu\in\mathbb{R}$$

Λύση

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{\eta_1}=(\mu-2,5)\perp(\varepsilon_1)$ και $\eta_2=(1,\mu+2)\perp(\varepsilon_2)$.

Έχουμε:

$$\det(\vec{\eta_1},\vec{\eta_2})=\begin{vmatrix}\mu-2 & 5\\ 1 & \mu+2\end{vmatrix}=(\mu-2)(\mu+2)-5=$$

$$=\mu^2-9=(\mu-3)(\mu+3)$$

$$\det(\vec{\eta_1},\vec{\eta_2})=0\Leftrightarrow \mu^2-9=0\Leftrightarrow \mu=3 \text{ ή } \mu=-3$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\mu\in\mathbb{R}-\{3,-3\}$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)\neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ δεν είναι συγγραμμικά (παράλληλα) οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(x_0,y_0)$ που θα προκύψει από την επίλυση του συστήματος: $\begin{cases}(\mu-2)x+5y=5\\ x+(\mu+2)y=5\end{cases}$ (1). Έχουμε:

$D=\ldots=(\mu-3)(\mu+3)\neq 0$, $D_x=\ldots=5(\mu-3)$ και $D_y=\ldots=5(\mu-3)$ οπότε: $M\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$, δηλαδή

$$M\left(\frac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)},\frac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)}\right), \text{ δηλαδή}$$

$$M\left(\frac{5}{\mu+3},\frac{5}{\mu+3}\right), \text{ με } \mu\neq 3,-3.$$

- Αν $\mu=3$ ή $\mu=-3$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Συγκεκριμένα:

- Αν $\mu=3$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1):x+5y-5=0$ ή $(\varepsilon_1):y=-\frac{1}{5}x+1$ και $(\varepsilon_2):x+5y-5=0$ ή $(\varepsilon_2):y=-\frac{1}{5}x+1$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **ταυτίζονται.**
- Αν $\mu=-3$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1):-5x+5y-5=0$ ή $(\varepsilon_1):y=x+5$ και $(\varepsilon_2):x-y-5=0$ ή $(\varepsilon_2):y=x-5$ οπότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες**

Εναλλακτικά:

- Αν $\mu=3$ τότε το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases}x+5y=5\\ x+5y=5\end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις οπότε οι ευθείες ταυτίζονται
- Αν $\mu=-3$ τότε το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases}x-y=-5\\ x-y=5\end{cases}$ που είναι αδύνατο οπότε οι ευθείες είναι παράλληλες

Άσκηση 5 *(Άσκηση 8/Β΄ Ομ. §1.1 Γενικής Παιδείας)*

Να λύσετε (διερευνήσετε) τα συστήματα:

i) $\begin{cases}(\lambda-1)x-2y=1\\ 4x-(\lambda+1)y=-2\end{cases}$**, για κάθε** $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) $\begin{cases}(\mu-2)x+5y=5\\ x+(\mu+2)y=5\end{cases}$**, για κάθε** $\mu\in\mathbb{R}$

Λύση

i) Έστω (ε_1) και (ε_2) οι ευθείες των οποίων οι εξισώσεις είναι οι δύο εξισώσεις του συστήματος, συγκεκριμένα: $(\varepsilon_1):(\lambda-1)x-2y-1=0$ και $(\varepsilon_2):4x-(\lambda+1)y=-2$.

Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{\eta}_1=(\lambda-1,-2)\perp(\varepsilon_1)$ και $\vec{\eta}_2=(4,-(\lambda+1))\perp(\varepsilon_2)$. Έχουμε:

$$\det(\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 4 & -(\lambda+1)\end{vmatrix}=-(\lambda^2-1)+8=$$

$$=-(\lambda^2-9)=-(\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$\det(\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)=0\Leftrightarrow -(\lambda^2-9)=0\Leftrightarrow \lambda=3 \text{ ή } \lambda=-3$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{3,-3\}$ τότε $\det(\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)\neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ δεν είναι συγγραμμικά (παράλληλα) οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(x_0,y_0)$ που θα προκύψει από την επίλυση του συστήματος:

$\begin{cases}(\lambda-1)x-2y=1\\ 4x-(\lambda+1)y=-2\end{cases}$ (1). Έχουμε:

$D=...=-(\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0$, $D_x=...=-(\lambda+5)$ και $D_y=...=-2(\lambda+1)$ οπότε: $M\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$,

δηλαδή $M\left(\frac{-(\lambda+5)}{-(\lambda-3)(\lambda+3)},\frac{-2(\lambda+1)}{-(\lambda-3)(\lambda+3)}\right)$,

δηλαδή $M\left(\frac{\lambda+5}{(\lambda-3)(\lambda+3)},\frac{2(\lambda+1)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}\right)$,

$\lambda\neq 3,-3$

- Αν $\lambda=3$ ή $\lambda=-3$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Συγκεκριμένα:

- Αν $\lambda=3$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x-2y-1=0$ ή $(\varepsilon_1): y=x-\frac{1}{2}$ και $(\varepsilon_2): 4x-4y+2=0$ ή $(\varepsilon_2): y=x+\frac{1}{2}$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **παράλληλες** και το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda=-3$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): -4x-2y-1=0$ ή $(\varepsilon_1): y=-2x-\frac{1}{2}$ $(\varepsilon_2): 4x+2y+2=0$ ή $(\varepsilon_2): y=-2x-1$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι επίσης **παράλληλες** και το σύστημα είναι αδύνατο.

Εναλλακτικά:

- Αν $\lambda=3$ τότε το σύστημα (1) γίνεται:
$\begin{cases}2x-2y=1\\2x-2y=-1\end{cases}$ που είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda=-3$ τότε το σύστημα (1) γίνεται:
$\begin{cases}4x+2y=-1\\4x+2y=-2\end{cases}$ που είναι επίσης αδύνατο.

ii) Έστω (ε_1) και (ε_2) οι ευθείες των οποίων οι εξισώσεις είναι οι δύο εξισώσεις του συστήματος, συγκεκριμένα: $(\varepsilon_1): (\mu-2)x+5y-5=0$ και $(\varepsilon_2): x+(\mu+2)y=5$.

Για τη συνέχεια της λύσης (διερεύνησης) βλέπετε άσκηση 4.

Άσκηση 6

Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών:

$$\mathbf{(\varepsilon_1): (\lambda^2+1)x+(\lambda^2-1)y-\lambda=0} \text{ και}$$

$$\mathbf{(\varepsilon_2): (\lambda+1)x+(\lambda-1)y-\lambda^2=0}$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Λύση

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{\eta}_2=(\lambda^2+1,\lambda^2-1)\perp(\varepsilon_1)$ και

$\vec{\eta}_2=(\lambda+1,\lambda-1)\perp(\varepsilon_2)$. Έχουμε:

$$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=\begin{vmatrix}\lambda^2+1 & \lambda^2-1\\ \lambda+1 & \lambda-1\end{vmatrix}=..=-2\lambda(\lambda-1)$$

οπότε,

$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=1$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ τότε $\det(\overrightarrow{\eta_1},\overrightarrow{\eta_2})\neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ δεν είναι συγγραμμικά (παράλληλα) οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(x_0,y_0)$ που θα προκύψει από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases}(\lambda^2+1)x+(\lambda^2-1)y=1\\(\lambda+1)x+(\lambda-1)y=-\lambda^2\end{cases}\quad(1).$$

Έχουμε:

$D=...=-2\lambda(\lambda-1)\neq 0$,

$D_x=...=-\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-1)$ και

$D_y=...=\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$ οπότε:

$M\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$ δηλαδή

$$M\left(\frac{-\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-1)}{-2\lambda(\lambda-1)},\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{-2\lambda(\lambda-1)}\right),$$

οπότε: $M\left(\frac{\lambda^2+\lambda-1}{2},-\frac{\lambda^2+\lambda+1}{2}\right)$, με $\lambda\neq 0,1$.

- Αν $\lambda=0$ ή $\lambda=1$ τότε $\det(\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)=0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Συγκεκριμένα:
  - Αν $\lambda=0$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): x-y=0$ ή $(\varepsilon_1): y=x$ και

$(\varepsilon_2): x-y=0$ ή $(\varepsilon_2): y=x$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) **ταυτίζονται** και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τα ζεύγη της μορφής: $(y,y), y\in\mathbb{R}$.

- Αν $\lambda=1$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x=1$ ή $(\varepsilon_1): x=\frac{1}{2}$ και $(\varepsilon_2): 2x=1$ ή $(\varepsilon_2): x=\frac{1}{2}$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) επίσης **ταυτίζονται** και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τα ζεύγη της μορφής $\left(\frac{1}{2},y\right), y\in\mathbb{R}$

Εναλλακτικά:

- Αν $\lambda=0$ τότε το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases}x-y=0\\x-y=0\end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις, τα ζεύγη της μορφής: $(y,y), y\in\mathbb{R}$.
- Αν $\lambda=-3$ τότε το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases}4x+2y=-1\\4x+2y=-2\end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις, τα ζεύγη της μορφής $\left(\frac{1}{2},y\right), y\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Να λυθεί (διερευνηθεί) το σύστημα $\begin{cases}(\lambda-1)x-2y=1\\2x-(\lambda-1)y=-2\end{cases}$, για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$

Λύση

Έστω (ε_1) και (ε_2) οι ευθείες των οποίων οι εξισώσεις είναι οι δύο εξισώσεις του συστήματος, συγκεκριμένα: $(\varepsilon_1): (\lambda-1)x-2y-1=0$ και

$$(\varepsilon_2): 2x-(\lambda-1)y+2=0$$

Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{\eta}_1=(\lambda-1,-2)$ και $\vec{\eta}_2=(2,-(\lambda-1))$.

Έχουμε:

$$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 2 & -(\lambda-1)\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2+4=$$
$$=-\lambda^2+2\lambda+3=-(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)=0 \Leftrightarrow -\lambda^2+2\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=3$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,3\}$ τότε $\det(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)\neq0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ δεν είναι συγγραμμικά (παράλληλα) οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(x_0,y_0)$ που θα προκύψει από την επίλυση του συστήματος:

$\begin{cases}(\lambda-1)x-2y=1\\2x-(\lambda-1)y=-2\end{cases}$ (1).

Έχουμε:

$D=\ldots=-(\lambda+1)(\lambda-3)\neq0$, $\quad D_x=\ldots=-(\lambda+3)$

και $D_y=\ldots=-2\lambda$ οπότε: $M\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$, δηλαδή

$M\left(\frac{\lambda+3}{(\lambda+1)(\lambda-3)},\frac{2\lambda}{(\lambda+1)(\lambda-3)}\right)$, $\lambda\neq-1,3$.

- Αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=3$ τότε $\det(\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)=0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\eta}_1$ και $\vec{\eta}_2$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Συγκεκριμένα:

- Αν $\lambda=-1$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): -2x-2y-1=0$ ή $(\varepsilon_1): y=-x-\frac{1}{2}$ και $(\varepsilon_2): 2x+2y+2=0$ ή $(\varepsilon_2): y=-x-1$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι **παράλληλες** και το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda=3$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): x-y-\frac{1}{2}=0$ ή $(\varepsilon_1): y=x-\frac{1}{2}$ και $(\varepsilon_2): 2x-2y+2=0$ ή $(\varepsilon_2): y=x+1$ οπότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι επίσης **παράλληλες** και το σύστημα είναι αδύνατο.

Εναλλακτικά:

- Αν $\lambda=-1$ τότε το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases}x+y=-\frac{1}{2}\\x+y=-1\end{cases}$ που είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda=3$ τότε το σύστημα (1) γίνεται: $\begin{cases}x-y=\frac{1}{2}\\x-y=-1\end{cases}$ που είναι επίσης αδύνατο.

Γενικά Θέματα Παραγώγου

Γιάννης Λουριδάς

$1^{ο}$ Γενικό θέμα

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=x^2+4-4\lambda\ell n(x+1),\ x\in(-1,+\infty),\lambda\in\mathbb{R}$$

α. **Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.**

Για $\lambda=1$:

β. **Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.**

γ. **Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.**

δ. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση**
$$(x+1)^4=e^{x^2-2023},\ x\in(-1,+\infty)$$
έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ε. **Αν x_2 είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (δ), τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $p(x)=e^x(f(x)-2027)$ έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(1,x_2)$.**

στ. **Να εξετάσετε αν οι επόμενες εξισώσεις έχουν λύση.**

i. $(x+4)f(x+1)=(x+1)f(x+4)+12,x>-1$

ii. $2f(x)+4x-9+4\ell n2=0,x>-1$

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=x^2,x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=4\ell n(x+1)-4,\ x\in(-1,+\infty)$

ζ. **Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(2,g(2))$ εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της h.**

η. **Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.**

θ. **Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.**

ι. **Θεωρούμε τα σημεία $B(x,g(x))$, $\Gamma(x,h(x))$ με $x\in(-1,+\infty)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και h αντίστοιχα.**

i. **Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της απόστασης (ΒΓ).**

ii. **Όταν η απόσταση (ΒΓ) γίνεται ελάχιστη να βρείτε την απόσταση των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και h στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα.**

ια. **Σημείο $M(x,g(x)),x>0$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι συντεταγμένες του Μ είναι ίσες μεταξύ τους να βρείτε τη σχέση που συνδέει τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του Μ με τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ΟΜ με τον άξονα x΄x, όπου Ο η αρχή των αξόνων.**

Απαντήσεις

α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με
$$f'(x)=\left(x^2+4-4\lambda\ell n(x+1)\right)'$$
$$=2x-\frac{4\lambda}{x+1}=2\frac{x^2+x-2\lambda}{x+1},\ x\in(-1,+\infty),\lambda\in\mathbb{R}.$$
Οι ρίζες και το πρόσημο της f' προκύπτουν από το τριώνυμο $x^2+x-2\lambda$, αφού $x+1>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=1+8\lambda$ και $\alpha=1>0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $\Delta<0\Leftrightarrow1+8\lambda<0\Leftrightarrow\lambda<-\frac{1}{8}$, τότε $x^2+x-2\lambda>0$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν $\Delta=0\Leftrightarrow1+8\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-\frac{1}{8}$, τότε $x^2+x-2\lambda=x^2+x+\frac{1}{4}>0$ για κάθε $x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$, δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=-\frac{1}{2}$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν $\Delta>0\Leftrightarrow1+8\lambda>0\Leftrightarrow\lambda>-\frac{1}{8}$, τότε το τριώνυμο $x^2+x-2\lambda$, καθώς και η f', έχουν μία ή δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,+\infty)$ εκατέρωθεν των οποίων αλλάζουν πρόσημο. Οπότε, η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $(-1,+\infty)$.

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$ όταν $\lambda \le -\frac{1}{8}$.

Σημείωση 1: Για $\lambda = -\frac{1}{2}$ να παραστήσετε γραφικά την f.

Σημείωση 2: Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η f έχει ακριβώς μία θέση τοπικού ακροτάτου ή ακριβώς δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Για $\lambda = 1$ είναι:

$$f(x) = x^2 + 4 - 4\ell n(x+1), x \in (-1,+\infty)$$

β. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2 + 4 - 4\ell n(x+1)\right) = +\infty$,

διότι $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+4\right) = 5$ και

$$\lim_{x\to -1^+}\left(-4\ell n(x+1)\right) \overset{u=x+1}{=} -4\lim_{u\to 0^+}\ell nu = -4(-\infty) = +\infty$$

Άρα, η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-1,+\infty)$, οπότε δεν έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη εκτός από την $x=-1$.

γ. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(x^2 + 4 - 4\ell n(x+1)\right)' = 2x - 4\frac{(x+1)'}{x+1}$$

$$= 2\frac{x^2+x-2}{x+1},\ x \in (-1,+\infty).$$

Για $x \in (-1,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\frac{x^2+x-2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\frac{x^2+x-2}{x+1} > 0 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} x^2+x-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1.$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\frac{x^2+x-2}{x+1} < 0 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} x^2+x-2 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Η ρίζα και το πρόσημο της f΄ δίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	−1		1		+∞
f΄(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	Ο.Ε. $f(1)=5-4\ell n2$	↗	+∞

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και η f συνεχής στο $(-1,1]$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1]$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ και η f συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f για $x=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5 - 4\ell n2$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-1,1]$, οπότε

$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\right) = [5-4\ell n2, +\infty)$, διότι

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ από το ερώτημα (β).

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (1,+\infty)$, οπότε

$f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (5-4\ell n2, +\infty)$,

διότι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 5 - 4\ell n2$ και

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x^2 + 4 - 4\ell n(x+1)\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(x^2\left(1 + \frac{4}{x^2} - 4\frac{\ell n(x+1)}{x^2}\right)\right) = +\infty,$$

αφού …

Άρα, $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [5-4\ell n2, +\infty)$.

δ. Για $x \in (-1,+\infty)$ έχουμε:

$$(x+1)^4 = e^{x^2-2023} \overset{\ell n\ 1-1}{\Leftrightarrow} \ell n(x+1)^4 = \ell ne^{x^2-2023}$$

$$\Leftrightarrow 4\ell n(x+1) = x^2 - 2023$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 - 4\ell n(x+1) = 2027$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2027.$$

Το $2027 \in f(\Delta_1) = [5-4\ell n2, +\infty)$ και η f είναι 1-1 στο $\Delta_1 = (-1,1]$ ως γνησίως φθίνουσα. Οπότε, η εξίσωση $f(x) = 2027$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ_1.

Το $2027 \in f(\Delta_2) = (5-4\ell n2, +\infty)$ και η f είναι 1-1 στο $\Delta_2 = (1,+\infty)$ ως γνησίως αύξουσα. Οπότε, η εξίσωση $f(x) = 2027$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ_2.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 2027$, οπότε και η ισοδύναμη της εξίσωση $(x+1)^4 = e^{x^2-2023}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

ε. Η συνάρτηση

$p(x)=e^x(f(x)-2027), x\in(-1,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,x_2)\subset(-1,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με
$p'(x)=...=e^x(f'(x)+f(x)-2027), x\in(-1,+\infty)$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $p'(x)=0$ ή ισοδύναμα η εξίσωση $\varphi(x)=0$, όπου
$\varphi(x)=f'(x)+f(x)-2027, x\in(-1,+\infty)$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,x_2)$.
Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,x_2]\subset(-1,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών. Επίσης $\varphi(1)\varphi(x_2)<0$, διότι

$$\varphi(1)=f'(1)+f(1)-2027\overset{f'(1)=0}{=}-2022-4\ell n2<0$$

και $\varphi(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2027\overset{(\delta)}{=}f'(x_2)>0$, λόγω των ερωτημάτων (γ) και (δ).
Άρα, από το θεώρημα του Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,x_2)$. Η ρίζα αυτή είναι και μοναδική, διότι η φ είναι 1-1 στο διάστημα $(1,x_2)$ ως γνησίως αύξουσα σε αυτό, αφού $\varphi'(x)=f''(x)+f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,x_2)$.
Πράγματι, για κάθε $x\in(1,x_2)\subset(-1,+\infty)$ ισχύει $f'(x)>0$ από το ερώτημα (γ), και $f''(x)=2+\dfrac{4}{(x+1)^2}>0$. Άρα, η συνάρτηση p έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(1,x_2)$.
Σημείωση: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση p έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο στο $(-1,+\infty)$.
στ. i. Η εξίσωση είναι αδύνατη, διότι για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ισχύει
$(x+4)f(x+1)<(x+1)f(x+4)+3f(0)$
$\Leftrightarrow(x+4)f(x+1)<(x+1)f(x+4)+12$.
Πράγματι, για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ η f στα διαστήματα $[0,x+1]$, $[x+1,x+4]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής ως συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x+1)-f(0)}{x+1}$$

και $\xi_2\in(x+1,x+4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x+4)-f(x+1)}{3}.$$

Είναι:

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$$

$$\Rightarrow\frac{f(x+1)-f(0)}{x+1}<\frac{f(x+4)-f(x+1)}{3}$$

$$\overset{x+1>0}{\Rightarrow}...\Rightarrow(x+4)f(x+1)<(x+1)f(x+4)+3f(0)$$

$$\Rightarrow(x+4)f(x+1)<(x+1)f(x+4)+12$$

Σημείωση: Να λύσετε την εξίσωση

$$(x+4)f(x+1)=(x+1)f(x+4)+12$$

αν $x\in(-2,-1]$.
ii. Η f για $x=1$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=5-4\ell n2$, οπότε
$f(x)\ge5-4\ell n2$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$. (1)
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(0,f(0))$ είναι
$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ ή $y=-4x+4$.
Η f είναι κυρτή, οπότε ισχύει
$f(x)\ge-4x+4$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=0$ (2)
Από (1), (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε
$2f(x)>-4x+9-4\ell n2\Leftrightarrow2f(x)+4x-9+4\ell n2>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.
Άρα, η εξίσωση $2f(x)+4x-9+4\ell n2=0$ είναι αδύνατη.
ζ. Οι συναρτήσεις g, h είναι παραγωγίσιμες με $g'(x)=2x, x\in\mathbb{R}$ και $h'(x)=\dfrac{4}{x+1}, x\in(-1,+\infty)$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(2,g(2))$ είναι $(\varepsilon): y-g(2)=g'(2)(x-2)$, δηλαδή $(\varepsilon): y=4x-4$.
Η (ε) εφάπτεται της C_h στο σημείο $(x_1,h(x_1))$, αν και μόνο αν, $h'(x_1)=4$ και $h(x_1)=4x_1-4$.
Είναι:
$h'(x_1)=4\Leftrightarrow\dfrac{4}{x_1+1}=4\Leftrightarrow1=x_1+1\Leftrightarrow x_1=0$ και $h(0)=4\cdot0-4=-4$. Άρα, η (ε) εφάπτεται της C_h στο σημείο $(0,-4)$.

η. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $\left(\alpha, g(\alpha)\right), \alpha \in \mathbb{R}$ είναι:

$(\delta_1): y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\delta_1): y = 2\alpha x - \alpha^2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο σημείο $\left(\beta, h(\beta)\right)$, $\beta \in (-1, +\infty)$ είναι:

$(\delta_2): y - h(\beta) = h'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow \ldots$

$$\Leftrightarrow (\delta_2): y = \frac{4}{\beta+1}x - \frac{4\beta}{\beta+1} + 4\ell n(\beta+1) - 4.$$

Οι $(\delta_1), (\delta_2)$ ταυτίζονται, αν και μόνο αν,

$$2\alpha = \frac{4}{\beta+1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{\beta+1} > 0 \qquad (1) \quad \text{και}$$

$$-\alpha^2 = -\frac{4\beta}{\beta+1} + 4\ell n(\beta+1) - 4 \qquad (2)$$

Για $\beta \in (-1, +\infty)$ η (2) λόγω της (1) γίνεται

$$\ell n(\beta+1) + \frac{1}{(\beta+1)^2} - \frac{\beta}{\beta+1} - 1 = 0 \qquad (3)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (3) έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(\beta) = \ell n(\beta+1) + \frac{1}{(\beta+1)^2} - \frac{\beta}{\beta+1} - 1,\ \beta \in (-1, +\infty)$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(\beta) = \ldots = \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{(\beta+1)^3} - \frac{1}{(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{(\beta+1)^2 - (\beta+1) - 2}{(\beta+1)^3},\ \beta \in (-1, +\infty)$$

Η ρίζα και το πρόσημο της φ΄ δίνονται στον επόμενο πίνακα:

β	-1		1		+∞
φ΄(β)		-	0	+	
φ(β)		↘	Ο.Ε. $\varphi(1) = \ell n2 - \frac{5}{4} < 0$	↗	+∞

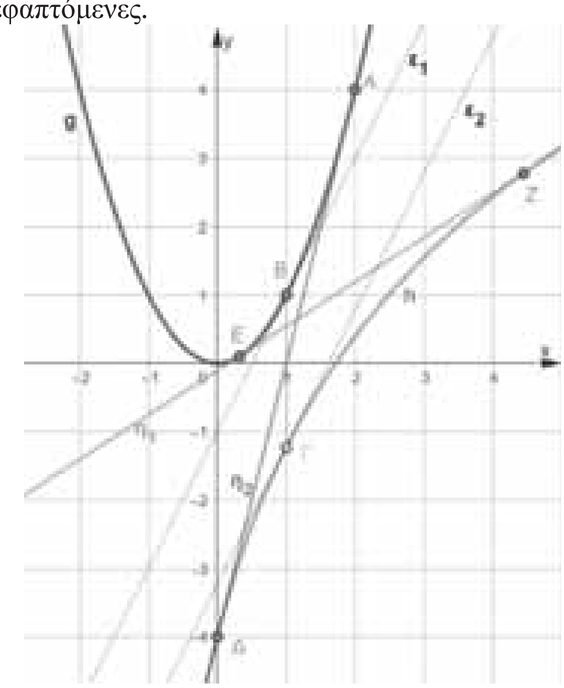
Η εξίσωση $\varphi(\beta) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\Delta_1 = (-1, 1)$, την $\beta_1 = 0$, διότι $\varphi(0) = 0$ και η φ είναι 1-1 σε αυτό ως γνησίως φθίνουσα.

Το $0 \in \varphi(\Delta_2) = \left[\varphi(1), \lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta)\right) = \left[\ell n2 - \frac{5}{4}, +\infty\right)$

και η φ είναι 1-1 στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ ως γνησίως αύξουσα. Οπότε, η εξίσωση $\varphi(\beta) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα β_2 στο Δ_2.

Άρα, η εξίσωση $\varphi(\beta) = 0$, δηλαδή η εξίσωση (3), έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.



θ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για $x \in (-1, +\infty)$ η εξίσωση $g(x) = h(x)$ είναι αδύνατη.

1^{ος} τρόπος: Για $x \in (-1, +\infty)$ έχουμε:

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

η οποία είναι αδύνατη, διότι

$f(A) = [5 - 4\ell n2, +\infty) \subset (0, +\infty)$ από το ερώτημα (γ).

2^{ος} τρόπος: (υπόδειξη) με κυρτότητα και κοινή εφαπτομένη …

ι. i. Για $x \in (-1, +\infty)$ έχουμε

$$(B\Gamma) = \left|g(x) - h(x)\right| = \left|f(x)\right| \overset{(\gamma)}{\underset{(\delta)}{=}} f(x)$$

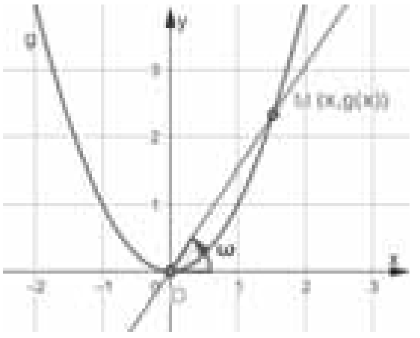
Άρα, η ελάχιστη τιμή της απόστασης (ΒΓ) είναι ίση με το ελάχιστο της f, δηλαδή $5 - 4\ell n2$.

ii. Για $x = 1$ οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και h στα σημεία $B\left(1, g(1)\right)$ και $\Gamma\left(1, h(1)\right)$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες, διότι $g'(1) = h'(1) = 2$. Οπότε, $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(\Gamma, \varepsilon_1)$, όπου $\Gamma(1, 4\ell n2 - 4)$ και $(\varepsilon_1): 2x - y - 1 = 0$ η εφαπτομένη της C_g στο Β. Άρα,

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(\Gamma, \varepsilon_1) = \frac{\left|2\cdot 1 - (4\ell n2 - 4) - 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$=\frac{|5-4\ell n2|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(5-4\ell n2)}{5}$$

ια.



Οι συντεταγμένες του Μ ως συναρτήσεις του χρόνου είναι $x(t)$ και $y(t)=g(x(t))=x^2(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι συντεταγμένες του Μ είναι ίσες έχουμε:

$$x(t_0)=y(t_0)\Leftrightarrow x(t_0)=x^2(t)\overset{x(t_0)>0}{\Leftrightarrow} x(t_0)=1.$$

Για $x>0$ είναι $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{OM}=\frac{g(x)}{x}=\frac{x^2}{x}=x$ και ως συναρτήσεις του χρόνου $\varepsilon\varphi(\omega(t))=x(t)$.

Παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t))\right)\cdot\omega'(t)=x'(t).$$

Για $t=t_0$ ισχύει:

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t_0))\right)\cdot\omega'(t_0)=x'(t_0)\Leftrightarrow 2\omega'(t_0)=x'(t_0)$$

διότι $\varepsilon\varphi(\omega(t_0))=x(t_0)=1$.

Άρα, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία οι συντεταγμένες του Μ είναι ίσες μεταξύ τους, η σχέση που συνδέει τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του Μ με τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ΟΜ με τον άξονα x΄x, είναι: $2\omega'(t_0)=x'(t_0)$.

2^{o} Γενικό θέμα

Έστω μια παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$(\lambda^2x^2-1)f(x)+xf'(x)=0 \qquad (1)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\lambda\in(0,+\infty)$, και $f(1)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}+1}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-1}f(x)}{x},x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι

$$f(x)=xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1},x\in\mathbb{R},\text{ όπου }\lambda\in(0,+\infty)$$

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να βρείτε πού ανήκει το σημείο μεγίστου της f καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0,+\infty)$.

δ. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

ε. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του λ ώστε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $x\le e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-\frac{1}{2}}$

Για $\lambda=1$:

στ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[\alpha,\beta]$, όπου $0<\alpha<\beta$, όταν $\ell n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\alpha^2-\beta^2$.

ζ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1,-1)$.

η. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x_0)+1}{x_0+1}, x\in[0,x_0)\cup(x_0,\sqrt{3}]\\ 0,\ x=x_0\end{cases}$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος (ζ).

θ. Για κάθε $x,y\in[0,x_0]$ να αποδείξετε ότι

$$(x_0+1)|f(x)-f(y)|\ge(f(x_0)+1)|x-y|$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος (ζ).

Απαντήσεις

α. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=\left(\frac{e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-1}f(x)}{x}\right)'=\ldots$$

$$=\frac{e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-1}}{x^2}\left((\lambda^2x^2-1)f(x)+xf'(x)\right)=0,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ λόγω της υπόθεσης.

Άρα, $g(x)=\begin{cases}c_1,\ \text{αν } x<0\\ c_2,\ \text{αν } x>0\end{cases}$.

Για $x=1$ έχουμε $g(1)=c_2$, δηλαδή $e^{\frac{\lambda^2}{2}-1}f(1)=c_2$ και $f(1)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}+1}$ από υπόθεση, οπότε $c_2=1$.

Άρα, $g(x)=1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Για $x=-1$ έχουμε $g(-1)=c_1$, δηλαδή $-e^{\frac{\lambda^2}{2}-1}f(-1)=c_1$ και $f(-1)\overset{f\text{ περιττή}}{=}-f(1)=-e^{-\frac{\lambda^2}{2}+1}$, οπότε $c_1=1$.

Άρα, $g(x)=1$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

Δηλαδή, $g(x)=1$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επομένως η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}-\{0\}$.

Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι:

$$g(x)=1\Leftrightarrow\frac{e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-1}f(x)}{x}=1\Leftrightarrow f(x)=xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}$$

και από την (1) για $x=0$ έχουμε $f(0)=0$.

Άρα, $f(x)=xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Σημείωση 1.: Το $f(0)$ μπορούμε να το βρούμε και από τη συνέχεια της f στο $x_0=0$. Είναι:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}\right)=\ldots=0$$

Σημείωση 2: Η συνάρτηση g είναι άρτια, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι είναι σταθερή και να βρούμε τον τύπο της στο διάστημα $(0,+\infty)$. Πράγματι, αποδείξαμε ότι $g(x)=1$, $x\in(0,+\infty)$, οπότε για $x\in(-\infty,0)$ έχουμε $g(x)=g(-x)=1$, αφού $-x\in(0,+\infty)$.

Άρα, $g(x)=1$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Σημείωση 3: Τον τύπο της f μπορούμε να τον βρούμε και από την (1). Είναι:

$$(\lambda^2x^2-1)f(x)+xf'(x)=0$$

$$\overset{:x\neq0}{\Rightarrow}f'(x)+\left(\lambda^2x-\frac{1}{x}\right)f(x)=0,$$

πολλαπλασιάζουμε με $e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-\ell n|x|}$ και έχουμε:

$$\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-\ell n|x|}f(x)\right)'=0\Rightarrow e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-\ell n|x|}f(x)=\begin{cases}c_1,\text{αν }x<0\\c_2,\text{αν }x>0\end{cases}$$

…

Σημείωση 4: Επειδή η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε τον τύπο της στο διάστημα $(0,+\infty)$, δηλαδή $f(x)=xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}$ $x\in(0,+\infty)$ και για $x\in(-\infty,0)$ έχουμε:

$$f(x)=-f(-x)=-\left(-xe^{-\frac{\lambda^2}{2}(-x)^2+1}\right)=xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1},$$

αφού $-x\in(0,+\infty)$. Δηλαδή,

$f(x)=xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και

$f(0)=0$, οπότε $f(x)=xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}\right)'=\ldots=(1-\lambda^2x^2)e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1},x\in\mathbb{R}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(1-\lambda^2x^2)e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}=0\Leftrightarrow1-\lambda^2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{\lambda^2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\lambda}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow(1-\lambda^2x^2)e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}>0\Leftrightarrow1-\lambda^2x^2>0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right).$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f' δίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\lambda}$		$\frac{1}{\lambda}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	Ο.Ε. $f\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=-\frac{\sqrt{e}}{\lambda}$	$\nearrow$	Ο.Μ. $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{\sqrt{e}}{\lambda}$	$\searrow$	0

Είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\lambda}\right)$ και η f συνεχής στο $\left(-\infty,-\frac{1}{\lambda}\right]$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{\lambda}\right]$.

Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right)$ και η f συνεχής στο $\left[-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right]$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right]$.

Είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$ και η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$.

Η f για $x=-\frac{1}{\lambda}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=-\frac{\sqrt{e}}{\lambda}$ και για $x=\frac{1}{\lambda}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{\sqrt{e}}{\lambda}$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(-\infty,-\frac{1}{\lambda}\right]$, οπότε

$$f(\Delta_1)=\left[f\left(-\frac{1}{\lambda}\right),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{\sqrt{e}}{\lambda},0\right),$$ διότι $\lim_{x\to-\infty}f(x)=...=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left(-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right)$, οπότε

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to-\frac{1}{\lambda}^+}f(x),\lim_{x\to\frac{1}{\lambda}^-}f(x)\right)=\left(-\frac{\sqrt{e}}{\lambda},\frac{\sqrt{e}}{\lambda}\right),$$

διότι $\lim_{x\to-\frac{1}{\lambda}^+}f(x)=f\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=-\frac{\sqrt{e}}{\lambda}$ και

$$\lim_{x\to\frac{1}{\lambda}^-}f(x)=f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{\sqrt{e}}{\lambda}$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3=\left[\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$, οπότε

$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]=\left(0,\frac{\sqrt{e}}{\lambda}\right],$$

διότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=...=0$.

Άρα,

$$f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\left[-\frac{\sqrt{e}}{\lambda},\frac{\sqrt{e}}{\lambda}\right].$$

γ. Το σημείο μεγίστου της f είναι το $M\left(\frac{1}{\lambda},\frac{\sqrt{e}}{\lambda}\right)$.

Έστω $M(x,y)$, τότε $\begin{cases}x=\frac{1}{\lambda}\\ y=\frac{\sqrt{e}}{\lambda}\end{cases}$ με $\lambda>0$.

Δηλαδή, $y=\sqrt{e}\,x, x>0$.

Άρα, το σημείο μεγίστου της f ανήκει στην ημιευθεία $y=\sqrt{e}\,x, x>0$, καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,+\infty)$.

δ. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left(\left(1-\lambda^2x^2\right)e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}\right)'=...$$

$$=\lambda^2x\left(\lambda^2x^2-3\right)e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1},x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\lambda^2x\left(\lambda^2x^2-3\right)e^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\lambda^2x^2-3\right)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\lambda}$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f'' δίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	-∞		$-\frac{\sqrt{3}}{\lambda}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{\lambda}$		+∞
$f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Η f'' μηδενίζεται στα σημεία $-\frac{\sqrt{3}}{\lambda}$, 0, $\frac{\sqrt{3}}{\lambda}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα, τα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{\lambda},-\frac{\sqrt{3e}}{\lambda e}\right)$, $O(0,0)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda},\frac{\sqrt{3e}}{\lambda e}\right)$ είναι τα σημεία καμπής της C_f και μάλιστα τα Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο, αφού έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

Σημείωση: Το Ο είναι το μέσο του ΑΒ

ε. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ισοδύναμα:

$$x\le e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x\le e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-1+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow xe^{-\frac{\lambda^2}{2}x^2+1}\le e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)\le\sqrt{e}$$

που συμβαίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν και μόνο αν, το μέγιστο της f είναι μικρότερο ή ίσο από το $\sqrt{e}$.

Δηλαδή: $\frac{\sqrt{e}}{\lambda}\le\sqrt{e}\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\lambda\ge1$.

Άρα, η μικρότερη τιμή του $\lambda\in(0,+\infty)$, ώστε να ισχύει $x\le e^{\frac{\lambda^2}{2}x^2-\frac{1}{2}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι η $\lambda=1$.

Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2+1},x\in\mathbb{R}$

στ. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), ως συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Εξετάζουμε αν $f(\alpha)=f(\beta)$.

Για $0<\alpha<\beta$ έχουμε:

$$f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow \alpha e^{-\frac{1}{2}\alpha^2+1}=\beta e^{-\frac{1}{2}\beta^2+1}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=e^{-\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \ell n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)\Leftrightarrow 2\ell n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\alpha^2-\beta^2$$

$\Leftrightarrow \ell n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\alpha^2-\beta^2$ που ισχύει από υπόθεση.

Οπότε $f(\alpha)=f(\beta)$. Άρα, η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

ζ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ με $x_0\in(0,1)$ είναι

$$(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1,-1)$, αν και μόνο αν :

$$-1-f(x_0)=f'(x_0)(-1-x_0)$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)(x_0+1)-f(x_0)-1=0 \quad (2)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει η ισότητα (2).

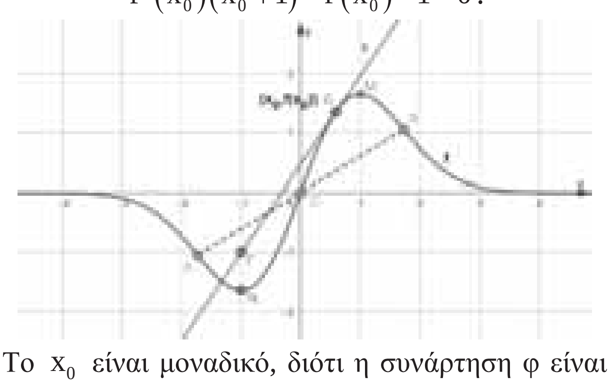
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f'(x)(x+1)-f(x)-1, x\in[0,1].$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$, αφού $\varphi(0)=e-1>0$ και $\varphi(1)=-\sqrt{e}-1<0$.

Άρα, από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$, δηλαδή

$$f'(x_0)(x_0+1)-f(x_0)-1=0.$$



Το x_0 είναι μοναδικό, διότι η συνάρτηση φ είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα, αφού $\varphi'(x)=f''(x)(x+1)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, λόγω του ερωτήματος (δ).

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1,-1)$.

η. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο σημείο x_0, διότι $\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x_0)+1}{x_0+1}\right)$

$$=f'(x_0)-f'(x_0)=0=h(x_0),$$

αφού από το ερώτημα (ζ) έχουμε:

$$f'(x_0)(x_0+1)-f(x_0)-1=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_0)+1}{x_0+1}$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,x_0)\cup(x_0,\sqrt{3}]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x_0)+1}{x_0+1}\right)'=\ldots$$

$$=\frac{f'(x)(x-x_0)-f(x)+f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0$$

για κάθε $x\in[0,x_0)\cup(x_0,\sqrt{3}]$. Πράγματι:

$(x-x_0)^2>0$ για κάθε $x\in[0,x_0)\cup(x_0,\sqrt{3}]$.

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,\sqrt{3}]$, από το ερώτημα (δ), και η ευθεία $(\varepsilon): y=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$, οπότε

$$f(x)<f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x-x_0)-f(x)+f(x_0)>0 \quad (3)$$

για κάθε $x\in[0,x_0)\cup(x_0,\sqrt{3}]$.

Δ

ηλαδή, $h'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,x_0)\cup(x_0,\sqrt{3}]$ και η h είναι συνεχής στο x_0, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\sqrt{3}]$.

Σημείωση: Η ανισότητα (3) μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια ακροτάτου ή με Θ.Μ.Τ.

θ. **(Υπόδειξη)** Για $x=y$ ισχύει ως ισότητα. Για $x\neq y$ υποθέτουμε ότι $x<y$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. …

Το Βήμα του Ευκλείδη

Συστήματα και Ανισότητες

Μάριος Καμμένος - *μαθητής Λυκείου-Αγρίνιο*

Οι συνηθισμένες μέθοδοι λύσης μη γραμμικών συστημάτων είναι: της αντικατάστασης, της συμμετρίας, της ομοιογένειας και της πρόσθεσης ή αφαίρεσης ανά δύο εξισώσεων του συστήματος. Η λύση όμως πολλών συστημάτων που τέθηκαν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς απαιτεί αρκετές φορές, άλλη αντιμετώπιση, η οποία στηρίζεται στη χρήση γνωστών ανισοτήτων, όπως φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν:

Να λυθούν στο R τα συστήματα:

1. $\left.\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x^2+y^2+z^2&=3\end{aligned}\right\}$

Λύση: $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yx+2zx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=\left(x+y+z\right)^2 \Leftrightarrow 3\cdot 3\geq 3^2\Leftrightarrow 9\geq 9$

άρα ισχύει η ισότητα. Επομένως πρέπει $x=y=z$, άρα $3x=3\Leftrightarrow x=1$. Δηλαδή $x=y=z=1$.

2. $x+\dfrac{1}{x}=y,\quad y+\dfrac{1}{y}=z,\quad z+\dfrac{1}{z}=x$

Λύση: Με $xyz\neq 0$, $\left.\begin{aligned} x+\frac{1}{x}=y &\Leftrightarrow x^2+1=xy\\ y+\frac{1}{y}=z &\Leftrightarrow y^2+1=yz\\ z+\frac{1}{z}=x &\Leftrightarrow z^2+1=zx\end{aligned}\right\}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:
$xy+yz+zx=x^2+y^2+z^2+3\geq xy+yz+zx+3$,
άρα $xy+yz+zx\geq xy+yz+zx+3\Leftrightarrow 0\geq 3$
(άτοπο), άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

3. $\left.\begin{aligned} x^2-|x|&=|yz|\\ y^2-|y|&=|zx|\\ z^2-|z|&=|xy|\end{aligned}\right\}$

Λύση: Έστω $xyz\neq 0$ τότε $x^2=|yz|+|x|\Rightarrow x^2>|yz|$ (1). Όμοια $y^2>|zx|$ (2), $z^2>|xy|$ (3)

$(1)\cdot(2)\cdot(3): x^2y^2z^2>x^2y^2z^2$ (άτοπο) άρα κάποιος από τους x,y,z είναι 0.

Αν $x=0,\text{τότε}(\Sigma)\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0&=|yz|\\ y^2-|y|&=0\\ z^2-|z|&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y=0 \text{ ή } z&=0\\ y^2&=|y|\\ z^2&=|z|\end{aligned}\right\}$

- $y=0$ και $z=0$ ή $z=\pm 1$
- $z=0, y=0$ ή $y=\pm 1$ και κυκλικά.

Αν $x=y=0$, τότε $z=0$. Άρα $(x,y,z)\in\{(0,0,0),(0,0,\pm 1),(0,\pm 1,0),(\pm 1,0,0)\}$.

4. $x+\dfrac{2}{x}=2y,\quad y+\dfrac{2}{y}=2z,\quad z+\dfrac{2}{z}=2x$

Λύση: Αν $x>0$, τότε $x+\dfrac{2}{x}>0$, άρα $2y>0$ και $y>0$, άρα και $z>0$ με όμοιο τρόπο. $2y=x+\dfrac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}=2\sqrt{2}\Rightarrow 2y\geq 2\sqrt{2}\Leftrightarrow y\geq\sqrt{2}$. Όμοια $x\geq\sqrt{2}$ και $z\geq\sqrt{2}$. Άρα $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και $\dfrac{1}{y}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και $\dfrac{1}{z}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Έτσι $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leq\dfrac{x+y+z}{2}\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\leq x+y+z$. Όμως από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε $x+y+z+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2(x+y+z)\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=x+y+z$. Επομένως στην παραπάνω ανισότητα ισχύει η ισότητα άρα $x=y=z=\sqrt{2}$. Αν $x<0$ όμοια $x=y=z=-\sqrt{2}$.

5. $\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x^3=9\left(y^2-3y+3\right)}\\ \boldsymbol{y^3=9\left(z^2-3z+3\right)}\\ \boldsymbol{z^3=9\left(x^2-3x+3\right)}\end{aligned}\right\}$

Λύση: $x^3=9y^2-27y+27\Leftrightarrow x^3-27=9\left(y^2-3y\right)\Leftrightarrow(x-3)\left(x^2+3x+9\right)=9y(y-3)$. Όμοια $(y-3)\left(y^2+3y+9\right)=9z(z-3)$ και $(z-3)\left(z^2+3z+9\right)=9x(x-3)$. Αν $x=3$ τότε $(z-3)\left(z^2+3z+9\right)=0$, και αφού $z^2+3z+9>0(\Delta=12-36=-24)$, τότε $(z-3)=0$ άρα $z=3$. Όμοια $y=3$. Αν $x\neq 3$, τότε $y\neq 3$ και $z\neq 3$, άρα $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)(y-3)\left(y^2+3y+9\right)(z--3)\left(z^2+3z+9\right)=$
$=9y(y-3)9z(z-3)9x(x-3)\Leftrightarrow 9^3xyz=(x^2+3x+9)(y^2++3y+9)(z^2+3z+9).$
Είναι $x^2-3x+3>0$, αφού $\Delta=9-12=-3$, δηλαδή $9\left(x^2-3x+3\right)>0\Leftrightarrow x^3>0\Leftrightarrow x>0$. Όμοια $y>0$ και $z>0$. Τότε $x^2+3x+9\geq 3\sqrt[3]{27x^3}=9x$ και $y^2+3y+9\geq 9y$ και $z^2+3z+9\geq 9z.$ Άρα $\left(x^2+3x+9\right)\left(y^2++3y+9\right)\left(z^2+3z+9\right)\geq 9^3xyz\Leftrightarrow 9^3xyz\geq 9^3xyz$. Ισχύει το ίσο, άρα πρέπει $x^2=3x=9\Leftrightarrow x=3(\acute{\alpha}\tau o\pi o)$. Έτσι μόνη λύση $x=y=z=3.$

6. $\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\frac{4x^2}{1+4x^2}=y}\\ \boldsymbol{\frac{4y^2}{1+4y^2}=z}\\ \boldsymbol{\frac{4z^2}{1+4z^2}=x}\end{aligned}\right\}$

Λύση: Είναι: $4x^2\geq 0$ και $4x^2+1>0$ άρα $\frac{4x^2}{1+4x^2}\geq 0\Leftrightarrow y\geq 0$. Όμοια $x\geq 0$ και $z\geq 0$. Αν $x=0$ τότε $\frac{0}{1}=y\Leftrightarrow y=0$ και $\frac{0}{1}=z\Leftrightarrow z=0$ άρα μία λύση είναι η $x=y=z=0$. Αν $x\neq 0$, τότε $y\neq 0$ και $z\neq 0$, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος παίρνουμε:
$$\frac{4^3x^2y^2z^2}{\left(1+4x^2\right)\left(1+4y^2\right)(1+4z^2)}=xyz\Leftrightarrow 4^3xyz=\left(1+4x^2\right)\left(1+4y^2\right)\left(1+4z^2\right)(1)$$
Είναι $1+4x^2\geq 2\sqrt{4x^2\cdot 1}=4x$. Όμοια $1+4y^2\geq 4y$ και $1+4z^2\geq 4z.$ Έτσι
$\left(1+4x^2\right)\left(1+4y^2\right)\left(1+4z^2\right)\geq 4^3xyz\overset{(1)}{\Leftrightarrow}4^3xyz\geq 4^3xyz$. Αφού ισχύει η ισότητα θα έχουμε
$1+4x^2=4x\Leftrightarrow(2x-1)^2=0\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Όμοια $y=z=\frac{1}{2}$.

7. $\left.\begin{aligned}\boldsymbol{2^x+3^x+x=y+13\ (1)}\\ \boldsymbol{2^y+3^y+y=z+13\ (2)}\\ \boldsymbol{2^z+3^z+z=x+13\ (3)}\end{aligned}\right\}$

Λύση: Αν $x>2$ τότε $2^x+3^x>13 \Leftrightarrow 2^x+3^x+x>x+13 \Leftrightarrow y+13>x+13 \Leftrightarrow y>x$. Όμοια από τη (2) $z>y$ και από την (3) $x>z$ (άτοπο). Αν $x<2$ τότε $2^x+3^x<13 \Leftrightarrow 2^x+3^x+x<x+13 \Leftrightarrow y+13<x+13 \Leftrightarrow y<x$. Όμοια από τη (2) $z<y$ και από την (3) $x<z$ (άτοπο). Άρα $x=2$. Έτσι $13+2=13+y \Leftrightarrow y=2$ και όμοια $z=2$.

8. $\boldsymbol{(x+y)^3=z, \quad (y+z)^3=x, \quad (z+x)^3=y}$

Λύση: Αν $x \neq z$ τότε $(x+y)^3-(y+z)^3=z-x \Leftrightarrow (x-z)\left((x+y)^2+(x+y)(y+z)++(y+z)^2\right)=z-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2=-1$, άτοπο αφού $(x+y)^2+(y+z)^2+(x+y)(y+z)\geq 0$. Άρα $x=z$. Όμοια $x=y=z$. Έτσι $(2x)^3=...=x \Leftrightarrow 8x^3=x \Leftrightarrow x\left(8x^2-1\right)=0$. Άρα ή $x=0$ ή $x=\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Άρα ή $x=y=z=0$ ή $x=y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$.

9. $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y^2=x^3-3x^2+2x} \\ \boldsymbol{x^2=y^3-3y^2+2y} \end{array}\right\}$

Λύση: Είναι: $y^2=x^3-3x^2+2x \Leftrightarrow y^2+3x^2=x(x^2+2)$. Ισχύει ότι $y^2+3x^2\geq 0$ άρα $x\left(x^2+2\right)\geq 0$ και αφού $x^2+2>0$, τότε $x\geq 0$. Όμοια $y\geq 0$.

$y^2-x^2=x^3-y^3++3y^2-3x^2+2x-2y \Leftrightarrow 2x^2-2y^2=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+2(x-y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-y)(x+y)=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+2(x-y)$.

Αν $x\neq y$ τότε $2x+2y=x^2+xy+y^2+2 \Leftrightarrow x^2+x(y-2)+y^2-2y+2=0$,

$\Delta=y^2-4y+4-4y^2+8y-8=-3y^2+4y-4$, $\Delta'=16-16\cdot 3<0$, άρα για κάθε $y\in R$, ισχύει $-3y^2+4y-4<0$, έτσι για κάθε $x\in R$, $x^2+(y-2)x+y^2-2y+2>0$(*άτοπο*). Άρα $x=y$.

Έτσι $4x^2=x^3+2x$. Αν $x=0$ ισχύει. Αν $x\neq 0$ τότε $4x=x^2+2 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0$, $\Delta=16-8=8$ άρα $x=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$. Έτσι λύσεις έχουμε για $x=y=0$ ή $x=y=2\pm\sqrt{2}$.

10. $\boldsymbol{x+\sqrt{x}=2\sqrt[3]{y}, \quad y+\sqrt{y}=2\sqrt[3]{z}, \quad z+\sqrt{z}=2\sqrt[3]{x}}$

Λύση: Αν $x\geq 1$ τότε $x+\sqrt{x}\geq 2$ άρα $\sqrt[3]{y}\geq 1 \Leftrightarrow y\geq 1$. Όμοια $z\geq 1$. Όμως τότε $x+\sqrt{x}\geq 2\sqrt[3]{x}$ αφού $x+\sqrt{x}\geq 2\sqrt{x\sqrt{x}}$ και ισχύει ότι $\sqrt{x\sqrt{x}}\geq\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^3\sqrt{x^3}\geq x^2 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{x}\geq 1$ αφού $x\geq 1$. Όμοια $y+\sqrt{y}\geq 2\sqrt[3]{y}$ και $z+\sqrt{z}\geq 2\sqrt[3]{z}$ άρα $x+y+z+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq \geq 2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}+2\sqrt[3]{z}$. Άρα ισχύει το = και πρέπει $y=\sqrt{y}=1=x=z$. Αν $x<1(x\geq 0$ αφού έχουμε $\sqrt{x})$ και $x\neq 0$. Τότε $\sqrt[3]{x}>x \Leftrightarrow x>x^3 \Leftrightarrow 1>x^2\,(\text{ισχύει})\,\text{και}\,\sqrt[3]{x}>\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2>x^3 \Leftrightarrow 1>x(\text{ισχύει})$. Άρα $2\sqrt[3]{x}>x+\sqrt{x}$. Όμοια $2\sqrt[3]{y}>y+\sqrt{y}$ και $2\sqrt[3]{z}>z+\sqrt{z}$ άρα $2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}+2\sqrt[3]{z}>x+\sqrt{x}+y+\sqrt{y}+z+\sqrt{z}$ άτοπο. Αν $x=0$ τότε $y=0$ και $z=0$ (δεκτή).

Βιβλιογραφία:

1. T. Andreescu, 105 Algebra Problems, XYZ Press, USA, 2013.
2. T. Andreescu, A. Ganesh, 108 Algebra Problems, XYZ Press, USA, 2014.
3. A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York, 1998.
4. V.A. Krechar, A Problem Book in Algebra, Mir Publishers, Moscow, 1974.
5. V. Lydsky κ.α., Problems in Elementary Mathematics, Mir Publishers, Moscow, 1973.
6. Μ. Μαραγκάκης, Μ. Μεταξάς, Ουσιώδη Μαθηματικά, Τόμος ΙΙ, Dynamic Ideas, USA, 2013.

Εύρεση μιας γενικής λύσης της διοφαντικής εξίσωσης: $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega+\varepsilon\varphi+\ldots+\kappa\nu=\lambda$ (1), αν είναι γνωστή μια μερική λύση της $(x_0, y_0, z_0, \ldots, \nu_0)$ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots, \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Τσιλιακός Λευτέρης

Παρουσίαση: Έστω ότι η (1) έχει 3 προσθετέους στο 1^{ο} μέλος της και ότι (x_0, y_0, z_0) είναι μια λύση της, δηλαδή ότι $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0=\lambda$ (2).

Παρατηρούμε ότι: $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)=\ldots=0 \Leftrightarrow \alpha(\beta-\gamma)t+\beta(\gamma-\alpha)t+\gamma(\alpha-\beta)t=0$ (3), $t\in\mathbb{Z}$.

Η παράσταση: $\alpha\cdot\left[x_0+(\beta-\gamma)t\right]+\beta\left[y_0+(\gamma-\alpha)t\right]+\gamma\left[x_0+(\alpha-\beta)t\right]=$

$$=(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)+\alpha(\beta-\gamma)t+\beta(\gamma-\alpha)t+\gamma(\alpha-\beta)t \overset{(2),\,(3)}{=\!=\!=} \lambda+0=\lambda,$$

που σημαίνει ότι μια μερική λύση της $\alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda$ είναι η:

$$x=x_0+(\beta-\gamma)t,\quad y=y_0+(\gamma-\alpha)t,\quad z=z_0+(\alpha-\beta)t \qquad (4).$$

Αν η (1) έχει 4 προσθετέους στο 1^{ο} μέλος της και $(x_0, y_0, z_0, \omega_0)$ είναι μία λύση της, τότε $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\delta\omega_0=\lambda$ (5).

Παρατηρούμε ότι $A=\alpha\beta(\gamma-\delta)+\beta\gamma(\delta-\alpha)+\gamma\delta(\alpha-\beta)+\delta\alpha(\beta-\gamma)=\ldots=0 \Leftrightarrow A\cdot t=0$ (6), $t\in\mathbb{Z}$.

Η παράσταση: $\alpha\left[x_0+\beta(\gamma-\delta)t\right]+\beta\left[y_0+\gamma(\delta-\alpha)t\right]+\gamma\left[z_0+\delta(\alpha-\beta)t\right]+\delta\left[\omega_0+\alpha(\beta-\gamma)t\right]=$

$$=(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\delta\omega_0)+\left[\alpha\beta(\gamma-\delta)+\beta\gamma(\delta-\alpha)+\gamma\delta(\alpha-\beta)+\delta\alpha(\beta-\gamma)\right]t=\lambda+At \underset{(5),\,(6)}{=\!=\!=} \lambda+0=\lambda,$$

που σημαίνει ότι μια γενική λύση της $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega=\lambda$ είναι η:

$$x=x_0+\beta(\gamma-\delta)t,\quad y=y_0+\gamma(\delta-\alpha)t,\quad z=z_0+\delta(\alpha-\beta)t,\quad \omega=\omega_0+\alpha(\beta-\gamma)t.$$

Παρατηρούμε ότι: $B=\alpha\beta\gamma(\delta-\varepsilon)+\beta\gamma\delta(\varepsilon-\alpha)+\gamma\delta\varepsilon(\alpha-\beta)+\delta\varepsilon\alpha(\beta-\gamma)+\varepsilon\alpha\beta(\gamma-\delta)=\ldots=0$,

από την οποία, με ανάλογο τρόπο, έχουμε μια γενική λύση της εξίσωσης:

$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega+\varepsilon\varphi=\lambda$, που είναι η:

$$x=x_0+\beta\gamma(\delta-\varepsilon)t,\ y=y_0+\gamma\delta(\varepsilon-\alpha)t,\ z=z_0+\delta\varepsilon(\alpha-\beta)t,\ \omega=\omega_0+\varepsilon\alpha(\beta-\gamma)t,\ \varphi=\varphi_0+\alpha\beta(\gamma-\delta)t, \text{ με } t\in\mathbb{Z}.$$

Αντίστοιχες γενικές λύσεις έχουμε και για διοφαντικές εξισώσεις όπως η (1) με περισσότερους, αλλά πεπερασμένου πλήθους, προσθετέους στο 1^{ο} μέλος της. Για την εξίσωση π.χ. $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega+\varepsilon\varphi+\kappa\nu=\lambda$ με μερική λύση την $(x_0, y_0, z_0, \omega_0, \varphi_0, \nu_0)$ έχουμε ως μια γενική λύση της την:

$$\begin{aligned} &x=x_0+\beta\gamma\delta(\varepsilon-\kappa)t,\quad y=y_0+\gamma\delta\varepsilon(\kappa-\alpha)t,\quad z=z_0+\delta\varepsilon\kappa(\alpha-\beta)t, \\ &\omega=\omega_0+\varepsilon\kappa\alpha(\beta-\gamma)t,\quad \varphi=\varphi_0+\kappa\alpha\beta(\gamma-\delta)t,\quad \nu=\nu_0+\alpha\beta\gamma(\delta-\varepsilon)t \end{aligned} \qquad (7)$$

Παραδείγματα

Π1. Η διοφαντική εξίσωση $x-2y+3z-5\omega+\varphi-2\nu=-11$ (8) έχει ως μια μερική λύση την $(x_0, y_0, z_0, \omega_0, \varphi_0, \nu_0)=(1, 2, -1, 2, 1, -2)$. Να βρεθεί και μια δεύτερη λύση της.

Λύση: Για τη δεδομένη εξίσωση είναι $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=3$, $\delta=-5$, $\varepsilon=1$, $\kappa=-2$. Αντικαθιστώντας αυτά τα δεδομένα στις (7), π.χ. για $t=1$, βρίσκουμε: $x=91$, $y=47$, $z=29$, $\omega=12$, $\varphi=33$, $\nu=34$, που ικανοποιούν την (8).

Π2. Η διοφαντική εξίσωση $2x-3y-11z+47\omega=151$ (9) έχει ως μια λύση της την $(x_0,y_0,z_0,\omega_0)=(1,2,3,4)$. Να βρεθούν δύο ακόμη λύσεις της.

Λύση: Η (9) έχει: α=2, β=–3, γ=–11, δ=47. Αντικαθιστώντας στην (7) που δίνει τη γενική λύση της και για t=–2 βρίσκουμε: $x=1+(-3)(-11-47)\cdot(-2)=-347$, $y=2+(-11)(47-2)\cdot(-2)=992$, $z=3+47\cdot(2+3)\cdot(-2)=-467$, $\omega=4+2\cdot(-3+11)\cdot(-2)=-28$ και η λύση αυτή επαληθεύει την (9). Επίσης αν τεθεί t=1 βρίσκουμε: x=175, y=–493, z=238, ω=20, λύση που επαληθεύει την (9).

Π3. Η διοφαντική εξίσωση $x+2y+3z+4\omega-5\varphi=1$ (10) έχει ως μια λύση της την $(x_0,y_0,z_0,\omega_0,\varphi_0)=(1,2,1,2,3)$. Να βρεθεί μια ακόμη λύση της.

Λύση: Η (10) έχει: α=1, β=2, γ=3, δ=4, ε=–5. Αντικαθιστώντας στην (7) που δίνει τη γενική λύση της και για t=2 βρίσκουμε: x=109, y=–142, z=41, ω=12, φ=–1 λύση που επαληθεύει την (10).

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».

P. R. HALMOS

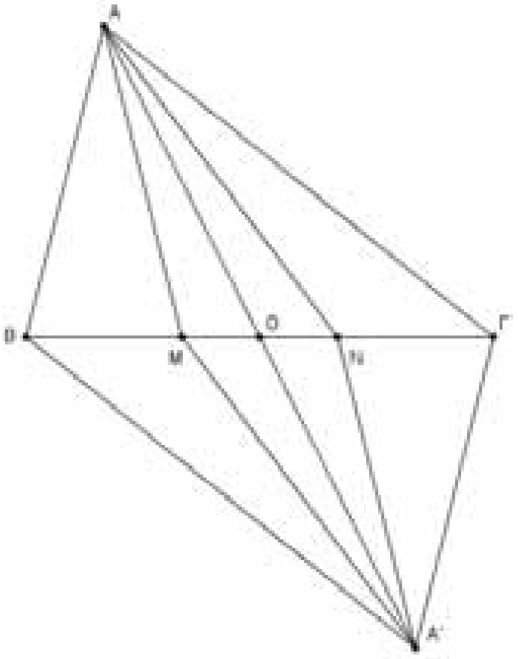
Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 388 (ΤΕΥΧΟΣ 123)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ, Ν εσωτερικά σημεία της πλευράς ΒΓ, ώστε $BM=N\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{A\Gamma^2}{AM}+\dfrac{AB^2}{AN}>B\Gamma$

Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι.

ΛΥΣΗ Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος



Έστω Ο το μέσο της ΒΓ που είναι και μέσο της ΜΝ. Προεκτείνουμε το ΑΟ κατά ίσο τμήμα ΟΑ΄, οπότε τα τετράπλευρα ΑΒΑ΄Γ και ΑΜΑ΄Ν είναι παραλληλόγραμμα. Έτσι έχουμε:

$$BA'=A\Gamma \text{ και } MA'=AN$$

Επιπλέον, από γνωστή εφαρμογή (σχολικού βιβλίου) προκύπτει ότι

$$AM+MA'<AB+BA'$$
$$\Rightarrow AB+A\Gamma>AM+AN,\ (1)$$

Από την γνωστή Αλγεβρική ανισότητα

$$\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}\geq\frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y}$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β αν $x,y>0$, παίρνουμε:

$$\frac{A\Gamma^2}{AM}+\frac{AB^2}{AN}\geq\frac{(AB+A\Gamma)^2}{AM+MN}\Rightarrow 2\left(\frac{A\Gamma^2}{AM}+\frac{AB^2}{AN}\right)\geq 2\frac{(AB+A\Gamma)^2}{AM+MN}$$

$$=\frac{(AB+A\Gamma)^2}{AM+AN}+\frac{(AB+A\Gamma)^2}{AM+AN}$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{(AM+AN)^2}{AM+AN}+\frac{(AB+A\Gamma)^2}{AM+AN}=AM+AN+\frac{(AB+A\Gamma)^2}{AM+AN}$$

$$>AM+AN+\frac{B\Gamma^2}{AM+AN}\geq 2\sqrt{(AM+AN)\frac{B\Gamma^2}{AM+AN}}$$

$$=2B\Gamma$$

οπότε $\dfrac{A\Gamma^2}{AM}+\dfrac{AB^2}{AN}>B\Gamma$ που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός και Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια, Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο

ΑΣΚΗΣΗ 389 (ΤΕΥΧΟΣ 123)

Τρένο αφήνει τον σιδηροδρομικό σταθμό όταν το ρολόι δείχνει h ώρες, m λεπτά και 0 δευτερόλεπτα. Αφού διανύσει 8 Km ο οδηγός του παρατηρεί ότι ο λεπτοδείκτης είναι ακριβώς πάνω από τον ωροδείκτη. Αν η μέση ταχύτητα στα 8Km διαδρομής είναι $33Km/h$, να βρείτε την ώρα αναχώρησης του τρένου. Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα.

ΛΥΣΗ

Από τον γνωστό τύπο $\bar{\upsilon}=\dfrac{s}{t}$ εύκολα βρίσκουμε ότι $t=14\dfrac{6}{11}$ λεπτά. Αυτό σημαίνει ότι μετά από χρόνο $14\dfrac{6}{11}$ λεπτά ο λεπτοδείκτης βρίσκεται πάνω από τον ωροδείκτη. Έστω ότι κατά την εκκίνηση του τραίνου το ρολόι έδειχνε h ώρες, m λεπτά και 0 δευτερόλεπτα με h, m ακέραιους. Τη στιγμή που ο λεπτοδείκτης βρίσκεται στο λεπτό m, ο ωροδείκτης θα βρίσκεται $\dfrac{5m}{60}$ γραμμές μετά την ένδειξη h, αφού κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα λεπτό του λεπτοδείκτη και κάθε ώρα πέντε γραμμές για τον ωροδείκτη.

Η συνολική μετακίνηση των δεικτών από την ώρα 00:00 έως την χρονική στιγμή που οι δείκτες ταυτίζονται είναι:

- Για τον λεπτοδείκτη $m+t$ λεπτά, όπου $t=14\frac{6}{11}$, άρα $m+t$ γραμμές.
- Για τον ωροδείκτη κατά h ώρες δηλαδή 5h γραμμές και $\frac{5m}{60}+\frac{5t}{60}$ επιπλέον γραμμές (ο λεπτοδείκτης κινείται 12 φορές γρηγορότερα από τον ωροδείκτη).

Επειδή οι δείκτες «συμπίπτουν» έχουμε:

$$5h+\frac{5m}{60}+\frac{5t}{60}=m+t$$

$$\Leftrightarrow 5h+\frac{m}{12}+\frac{t}{12}=m+t \Leftrightarrow 60h=11m+11t$$

Αλλά, $t=14\frac{6}{11}=\frac{160}{11}$, έτσι έχουμε :

$60h=11m+160$, (1) και η (1) γίνεται:

$5h\equiv 6(\bmod 11)$ ή $h\equiv 10(\bmod 11)$ ή $h=10+11\kappa$, (2)

Αν $\kappa=0$, τότε έχουμε $h=10$ και από την (1) βρίσκουμε $m=40$.

Επομένως η ώρα εκκίνησης είναι 10^{40}.

Αν $\kappa=1$, τότε έχουμε $h=21$ και από την (1) βρίσκουμε $m=100$ λεπτά, δηλαδή 1 ώρα και 40 λεπτά. Επομένως η ώρα εκκίνησης είναι 22^{40}.

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο

ΑΣΚΗΣΗ 390 (ΤΕΥΧΟΣ 123)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\eta\mu^2x\cdot\eta\mu x^2-x^2\eta\mu(\eta\mu^2x)}{x^{10}}$$

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Παπαδόπουλος Δήμος – Έδεσα.

ΛΥΣΗ Δελησταθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια.

Παρατηρούμε ότι

$$f(x)=\frac{1}{x^{10}}\left[\frac{\eta\mu x^2}{x^2}-\frac{\eta\mu(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x}\right]x^2\cdot\eta\mu^2x$$

$$=\frac{\dfrac{\eta\mu x^2}{x^2}-\dfrac{\eta\mu(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x}}{x^6}\cdot\frac{\eta\mu^2x}{x^2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2}{x^2}=1.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g(x)=\frac{\eta\mu x}{x},\ x\neq 0 \quad \text{και} \quad h(x)=g(x^2)=\frac{\eta\mu x^2}{x^2}$$

Είναι: $g'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$ και

$$h'(x)=2xg'(x^2)=2x\frac{x^2\sigma\upsilon\nu x^2-\eta\mu x^2}{x^4}=\frac{2(x^2\sigma\upsilon\nu x^2-\eta\mu x^2)}{x^3}$$

οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[\eta\mu x, x]$ αν $x>0$ και $[x,\eta\mu x]$, αν $x<0$, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x^2}{x^2}-\frac{\eta\mu(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x}=h(x)-h(\eta\mu x)=h'(\xi_x)(x-\eta\mu x)$$

Επειδή όταν $x\to 0$ τότε $\xi_x\to 0$, είναι:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{h'(\xi_x)(x-\eta\mu x)}{x^6}$$

και επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\ \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\ \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}$$

αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h'(\xi_x)}{x^3}$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h'(\xi_x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h'(\xi_x)}{\xi_x^3}\left(\dfrac{\xi_x}{x}\right)^3$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\xi_x}{x}\right)^3=1$ ενώ

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{h'(\xi)}{\xi^3}\ \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ 2\lim_{\xi\to 0}\frac{\xi^2\sigma\upsilon\nu\xi^2-\eta\mu\xi^2}{\xi^6}\ \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$2\lim_{\xi\to 0}\frac{\xi^2(-2\xi\eta\mu\xi^2)+2\xi\sigma\upsilon\nu\xi^2-2\xi\sigma\upsilon\nu\xi^2}{6\xi^5}=-\frac{2}{3}\lim_{\xi\to 0}\frac{\eta\mu\xi^2}{\xi^2}=-\frac{2}{3}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$$

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι.

ΑΣΚΗΣΗ 391 (ΤΕΥΧΟΣ 123)

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{7\pi}{9}}=40$$

Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη

ΛΥΣΗ Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο.

Παρατηρούμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\left(3\cdot\frac{\pi}{9}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(3\cdot\frac{5\pi}{9}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(3\cdot\frac{7\pi}{9}\right)=\frac{1}{2}$$

δηλαδή οι αριθμοί $\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{9},\frac{7\pi}{9}$ είναι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 3\omega=\frac{1}{2}$. Επομένως, λόγω της γνωστής ταυτότητας $\sigma\upsilon\nu 3\omega=4\sigma\upsilon\nu^3\omega-3\sigma\upsilon\nu\omega$ οι αριθμοί

$$x_1=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9},\ x_2=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{9},\ x_3=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{9}$$

είναι ρίζες της εξίσωσης $4x^3-3x=\frac{1}{2}$ που γράφεται $\quad 4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$

Έτσι, από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1+x_2+x_3=0,\ (1)$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-\frac{3}{4},\ (2)$$

$$\text{και } x_1x_2x_3=\frac{1}{8},\ (3)$$

Από τις (1) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=0,\ (4)$$

και από τις (2) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-6\Rightarrow\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=36$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+2\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}\right)=36$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=36$$

Άρα, $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{7\pi}{9}}=36$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{9}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{7\pi}{9}}=40$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος, Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια και Σαμουηλίδης Χρήστος – Θεσσαλονίκη.

ΑΣΚΗΣΗ 392 (ΤΕΥΧΟΣ 124)

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του AH_1, BH_2, ΓH_3. Αν B_1, Γ_1 οι προβολές των Β και Γ στην ευθεία H_2H_3, να αποδείξετε ότι:

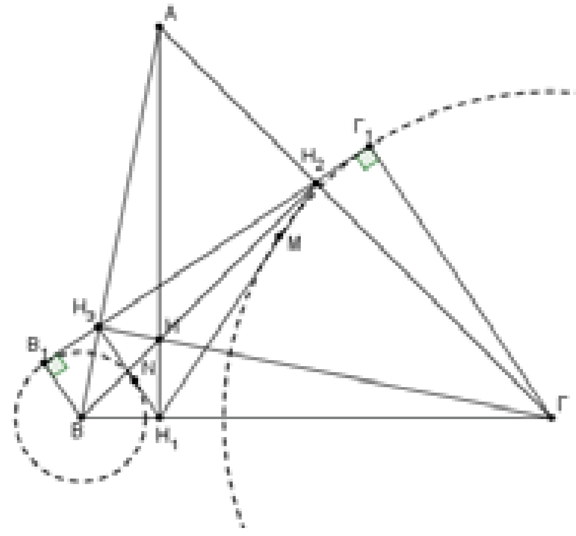
α. $H_3B_1=H_2\Gamma_1$.

β. $B_1\Gamma_1=H_1H_2+H_1H_3$.

Σταματιάδης Βαγγέλης – Ν. Ιωνία

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

α) Επειδή οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις εξωτερικές γωνίες του ορθικού τριγώνου $H_1H_2H_3$, το Β είναι το παράκεντρο I_{H2} του τριγώνου $H_1H_2H_3$ που αντιστοιχεί στην γωνία $H_3\hat{H}_2H_1$ και το Γ είναι το παράκεντρο I_{H3} του τριγώνου $\triangle H_1H_2H_3$ που αντιστοιχεί στη γωνία $H_1\hat{H}_3H_2$.



Η $B_1\Gamma_1$ είναι η κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο παρεγεγραμμένων κύκλων (B,BB_1) και $(\Gamma,\Gamma\Gamma_1)$. Έστω 2s η περίμετρος του τριγώνου $H_1H_2H_3$. Από τους τύπους που δίνουν τις αποστάσεις των σημείων επαφής των παρεγεγραμμένων κύκλων από τις κορυφές του τριγώνου, βρίσκουμε:

$$H_2B_1=H_3\Gamma_1=s=\frac{H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1}{2}\ (1)$$

Έτσι από την (1) έχουμε:

$$H_2B_1=H_3\Gamma_1\Rightarrow H_2H_3+H_3B_1=H_2H_3+H_2\Gamma_1$$

$$\Rightarrow\boxed{H_3B_1=H_2\Gamma_1}$$

β) Είναι: $H_2B_1=\frac{H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1}{2}$

$$\Rightarrow H_2H_3+H_3B_1=\frac{H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1}{2}$$

$$\Rightarrow H_2H_3+2H_3B_1=H_1H_2+H_1H_3$$

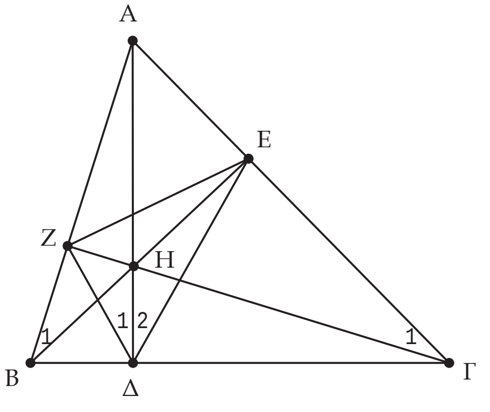
$$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}H_2H_3+H_3B_1+H_2\Gamma_1=H_1H_2+H_1H_3$$

$$\Rightarrow\boxed{B_1\Gamma_1=H_1H_2+H_1H_3}$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Ιωαννίδης Αντώνιος – Χολαργός, Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος και Σαμουηλίδης Χρήστος – Θεσσαλονίκη.

Σημείωμα σύνταξης

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Το τρίγωνο με κορυφές τα ίχνη των υψών του, δηλαδή το τρίγωνο ΔΕΖ, το λέμε **ορθικό τρίγωνο** του ΑΒΓ.



Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο, τότε το Η είναι αντίστοιχα εσωτερικό σημείο του τριγώνου, η κορυφή της ορθής γωνίας ή εξωτερικό σημείο του τριγώνου.

Σχετικά με το ορθικό τρίγωνο αποδεικνύεται ότι:

i. Τα ύψη τριγώνου είναι διχοτόμοι των γωνιών του ορθικού τριγώνου.

ii. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του ΑΒΓ, τότε το Η είναι το έγκεντρο του ορθικού. Στην περίπτωση που το ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο, τότε το Η είναι παράκεντρο του ορθικού.

iii. Οι πλευρές του αρχικού τριγώνου είναι κάθετες στις διχοτόμους των γωνιών του ορθικού, οπότε περιέχονται στις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του. Από αυτό συνάγεται ότι οι κορυφές του ΑΒΓ είναι τα παράκεντρα του ορθικού τριγώνου.

iv. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, τότε

$$B\hat{H}\Gamma = 180^{o} - \hat{A} \qquad Z\hat{\Delta}E = 180^{o} - 2\hat{A}$$

ενώ αν κάποια γωνία του είναι αμβλεία, για παράδειγμα $\hat{A} > 90^{o}$, έχουμε $Z\hat{\Delta}E = 2\hat{A} - 180^{o}$.

v. Για τις πλευρές του ορθικού ισχύει

$$ZE = \alpha \cdot \text{συν}A,\ Z\Delta = \beta \cdot \text{συν}B, \text{ και } \Delta E = \gamma \cdot \text{συν}\Gamma$$

vi. Η περίμετρος s του ορθικού τριγώνου είναι

$$s = 4R\text{ημ}A\text{ημ}B\text{ημ}\Gamma$$

vii. το εμβαδόν του ορθικού τριγώνου ΔΕΖ, είναι:

$$(\Delta EZ) = \frac{R^2}{2}\text{ημ}2A\text{ημ}2B\text{ημ}2\Gamma$$

Προτεινόμενα Θέματα

402. Να αποδείξετε ότι τα κοινά σημεία της καμπύλης

$$(C_1): x^4 + \kappa x^3 y - 6x^2y^2 - \kappa xy^3 + y^4 = 0,\ \kappa \in \mathbb{R}$$

με τον κύκλο $(C_2): x^2 + y^2 = 1$ είναι κορυφές κανονικού οκταγώνου.

Δεληστάθης Γεώργιος – Κ. Πατήσια

403. Έστω ΑΒΓ σκαληνό τρίγωνο ΑΔ, ΒΖ, ΓΚ οι διχοτόμοι και ΑΕ, ΒΗ, ΓΛ οι εξωτερικές διχοτόμοι του. Ο κύκλος C_α με διάμετρο ΔΕ ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος για την πλευρά ΒΓ, ο κύκλος C_β με διάμετρο ΖΗ ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος για την πλευρά ΑΓ και ο κύκλος C_γ με διάμετρο ΚΛ ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος για την πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\hat{A} = 60^{o}$, τότε οι κύκλοι $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$ τέμνονται στο Ε.

β) Αν $\hat{A} = 120^{o}$, τότε οι κύκλοι $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$ τέμνονται στο Δ.

γ) Αν O_β, O_γ είναι τα κέντρα των κύκλων C_β, C_γ αντίστοιχα, τότε $A\hat{\Gamma}O_\gamma = \hat{B}$ και $A\hat{B}O_\beta = \hat{\Gamma}$.

δ) Αν $\hat{A} = 90^{o}$ τότε η ευθεία ΒΓ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_β, C_γ.

Κοντογιάννης Δ. Γιώργος – Αθήνα.

404. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\text{συν}\frac{A-B}{2} + \text{συν}\frac{B-\Gamma}{2} + \text{συν}\frac{3(A+\Gamma)}{2} = \frac{3}{2}$$

να βρείτε τις γωνίες του.

Καρτσακλής Δημήτρης – Αγρίνιο

405. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί μονοψήφιοι αριθμοί. Αν $P(13) = 4160$, να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο κ ώστε όλες οι ρίζες του $P(x)$ να περιέχονται στο διάστημα $[-\kappa,\ 0]$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον.

Από παραδρομή στο προηγούμενο τεύχος δεν αναφέρθηκε στους λύτες της άσκησης 387 ο συνάδελφος Τζαφέρης Σωτήρης – Πετρούπολη.

Επίσης: Άσκηση 397 γ. Να γραφεί:

"… το ΡΜ·ΓΔ είναι σταθερό"

Αναλυτικές ... Συζητήσεις IV

Νίκου Θ. Αντωνόπουλου

Παρανοήσεις, λάθη και αβλεψίες στην τάξη των Μαθηματικών

Καθηγητής: Ας ξεκινήσουμε με κάτι απλό. Τι πιο απλό από την ισότητα συναρτήσεων. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις

$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ και $g(x)=\sqrt{x}-1$ είναι ίσες.

Μαθητής Α: Προφανώς οι συναρτήσεις έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

Μαθητής Γ: Ναι, και αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους του πρώτου κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή παίρνουμε

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}=$$

$$=\sqrt{x}-1$$

Άρα οι συναρτήσεις είναι ίσες.

Μαθητής Β: Εγώ προτείνω να γράψουμε

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$$

και να καταλήξουμε ότι πραγματικά οι συναρτήσεις είναι ίσες.

Καθηγητής: Θεωρείτε ότι και οι δύο προτάσεις - λύσεις είναι τα ίδιο σωστές;

Μαθητής Γ: Ναι, αφού και οι δυο βγάζουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Καθηγητής Α: Μήπως γίνεται κάτι με το πεδίο ορισμού της f;

Μαθητής Β: Ναι! Στην πρώτη απάντηση έχουμε «αλλοιώσει» το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μαθητής Γ: Τι εννοείς;

Μαθητής Β: Στη διάρκεια της **«λύσης»** σου, έχεις βάλει χωρίς να το θέλεις τον περιορισμό $x\neq 1$.

Μαθητής Α: Και τι γίνεται τώρα; Δηλαδή η πρώτη λύση είναι όλη λάθος;

Καθηγητής: Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι η ισότητα στην οποία καταλήξαμε ισχύει για όλα τα x από το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g εκτός της τιμής 1 και να επαληθεύσουμε στη συνέχεια ότι $f(1)=g(1)$, οπότε καταλήγουμε πάλι στο ίδιο συμπέρασμα.

Μαθητής Γ: Τόση φασαρία για το πεδίο ορισμού;

Καθηγητής: Μην το υποτιμάται, είναι δομικό συστατικό της έννοιας της συνάρτησης. Τι λέτε, μπορείτε να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$$

Μαθητής Α: Να μιλήσω εγώ;

Καθηγητής: Ναι, πάμε.

Μαθητής Α: Εδώ παίρνουμε περιορισμό $x\geq -2$ και $\sqrt{x+2}\neq x \Leftrightarrow x+2\neq x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2\neq 0$

$$\Leftrightarrow x\neq -1 \text{ και } x\neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι

$$\mathbb{D}_f=[-2,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$$

Καθηγητής: Δηλαδή αν βάλουμε $x=-1$, υπάρχει πρόβλημα;

Μαθητής Γ: Ναι αφού δεν είναι στο πεδίο ορισμού της f.

Μαθητής Β: Εμένα μου δίνει $f(-1)=\dfrac{1}{2}$.

Μαθητής Α: Ωχ, έχεις δίκιο. Πως γίνεται αυτό;

Μαθητής Β: Εκεί που τετραγωνίσαμε θα έπρεπε να πάρουμε $x\geq 0$.

Μαθητής Α: Γιατί, αν είναι αρνητικό, δεν ισχύει το $\sqrt{x+2}\neq x$;

Καθηγητής: Βεβαίως και ισχύει. Οπότε αν ήθελες να δουλέψεις με το σύμβολο $\neq$, που προσωπικά διαφωνώ, θα έπρεπε να αναφέρεις ότι με $x<0$ προφανώς ισχύει και να συνεχίσεις μόνο για θετικά x.

Μαθητής Α: Γιατί διαφωνείτε με τη χρήση του $\neq$ στις πράξεις;

Καθηγητής: Για την ισότητα ξέρουμε κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Για το **«διάφορο»** ξέρετε κάποιες;

Μαθητής Γ: Γιατί, δεν είναι οι ίδιες;

Καθηγητής: Φαντάζομαι ότι όλοι συμφωνούμε ότι μπορούμε να προσθέτουμε ισότητες κατά μέλη. Τι λέτε συμβαίνει το ίδιο με το διάφορο;

Μαθητής Γ: Γιατί όχι;

Καθηγητής: Ας το δούμε. Ισχύει $2\neq 5$ και $6\neq 3$. Τι λέτε, μπορούμε να προσθέσουμε;

Μαθητής Β: Φυσικά όχι.

Μαθητής Γ: Και τι έγινε, εγώ μπορώ να φτιάξω πολλά παραδείγματα που ισχύει. Επειδή βρήκαμε μια περίπτωση που δεν ισχύει, τελειώσαμε!

Καθηγητής: Ακριβώς. Στα Μαθηματικά, όταν ισχυριζόμαστε ότι κάτι ισχύει πρέπει να το αποδεικνύουμε, ενώ όταν ισχυριζόμαστε ότι κάτι δεν ισχύει, αρκεί να βρούμε μια περίπτωση που δεν ισχύει. Αυτή είναι η δύναμη του αντιπαραδείγματος.

Μαθητής Γ: Δηλαδή εδώ πως θα λύναμε;

Καθηγητής: Θα λύναμε με $=$ και θα εξαιρούσαμε τις τιμές που έδιναν παρονομαστή 0.

Μαθητής Α: Να πω εγώ;

Καθηγητής: Ναι.

Μαθητής Α: Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν:

$$x \geq 2 \text{ και } \sqrt{x+2} \neq x$$

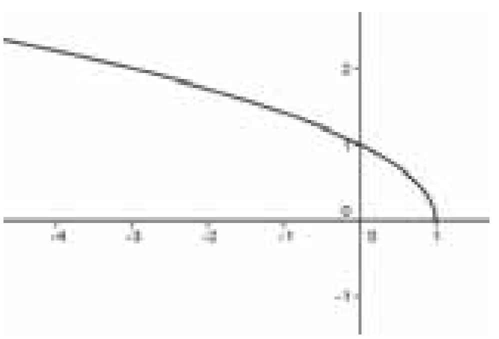
Είναι:

$$\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

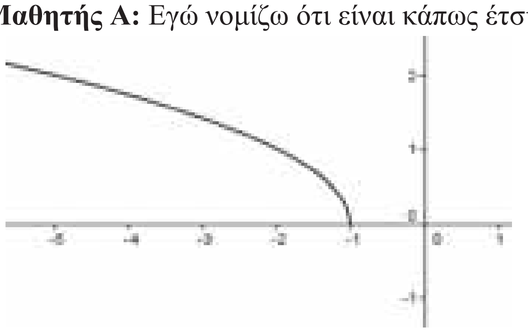
Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι

$$\mathbb{D}_f = [-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

Καθηγητής: Πολύ σωστά. Ας δούμε και μια γραφική παράσταση. Τι λέτε, μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{1-x}$



Μαθητής Α: Εγώ νομίζω ότι είναι κάπως έτσι



Μαθητής Γ: Η δική μου πρόταση είναι διαφορετική. Πιστεύω πως είναι κάπως έτσι:

Μαθητής Α: Μα τι λες! Δεν βλέπεις ότι το σχήμα σου, δεν συμφωνεί με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;

Μαθητής Γ: Δεν ξέρω τι λες, αλλά εγώ πήρα την $y = \sqrt{-x}$ και αφού είναι «πειραγμένο» το x, πήγα μια μονάδα ανάποδα από το πρόσημο του αριθμού. Είναι $+1$, πήγα μια μονάδα αριστερά.

Καθηγητής: Ο τύπος της συνάρτησης που σας έδωσα μπορεί να γραφεί $f(x) = \sqrt{-(x-1)}$;

Μαθητής Γ: Ναι είναι το ίδιο. Α… τώρα κατάλαβα, στη θέση του x στη συνάρτηση $y = \sqrt{-x}$ που είπα, μπήκε το $x-1$, άρα πάμε δεξιά.

Καθηγητής: Τι λέτε να περάσουμε λίγο στα όρια;

Μαθητής Γ: Τα όρια είναι η ειδικότητά μου.

Καθηγητής: Το ελπίζω. Τι λέτε για το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}x}{x^2};$$

Μαθητής Γ: Πολύ εύκολο. Ανάγεται σε γνωστό όριο. Αφού $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\text{συν}x}{x} = 0$

και $\dfrac{1-\text{συν}x}{x^2} = \dfrac{1-\text{συν}x}{x} \cdot \dfrac{1}{x}$ το όριο είναι ίσο με 0.

Μαθητής Α: Η πρόταση μου είναι διαφορετική.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\text{συν}x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1-\text{συν}^2 x}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\text{συν}x} \right)$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{ημ}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\text{συν}x} \right) = \frac{1}{2}$$

αφού εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}^2 x}{x^2} = 1$$

Μαθητής Β: Εγώ έχω άλλη πρόταση.

Καθηγητής: Ο πλουραλισμός σε όλο του το μεγαλείο. Μπορείς να μας την αναπτύξεις;

Μαθητής Β: Βεβαίως! Αφού το 1–συνx δεν μπορεί να είναι αρνητικό και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, το όριο είναι $+\infty$.

Καθηγητής: Ας δούμε, αν κάποιο από αυτά είναι το σωστό, και ας ξεκινήσουμε με το πρώτο.

Πολύ σωστά μας είπες ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\text{συν}x}{x} = 0$

αλλά παρέλειψες να κοιτάξεις τον άλλο όρο. Αν προσέξεις θα δεις ότι έχεις απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot (\pm\infty)$, οπότε το αποτέλεσμα μπορεί να είναι οποιοδήποτε.

Μαθητής Β: «Ανέβηκα» στο $50-50$.

Καθηγητής: Ας δούμε και την δική σου πρόταση. Αν σου ζητούσα να μας βρεις το όριο $\lim\limits_{x\to 0}(1-\text{συν}x)$, τι θα μας έλεγες;

Μαθητής Β: Όταν ψάχνουμε το όριο στο 0, τότε θεωρούμε ότι το x είναι κοντά στο 0, οπότε δεν μπορεί να είναι 0 άρα, όπως είπα το $1-\sigma\upsilon\nu x$ είναι θετικό.

Μαθητής Α: Δεν σου είπα αυτό. Σου ζήτησε το όριο.

Μαθητής Β: Αφού $1-\sigma\upsilon\nu x>0$ το όριο είναι θετικό.

Καθηγητής: Σκέψου λίγο. Σου ζητάμε το

$$\lim_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x).$$

Μαθητής Β: Α… ναι, αυτό είναι 0. Πως γίνεται αυτό;

Καθηγητής: Θυμηθείτε ότι τα όρια «μεταφέρουν ευρείες ανισότητες» δηλαδή αν κοντά στο x_o οι τιμές μιας συνάρτησης είναι θετικές, το όριό της μπορεί να είναι 0. Αυτό που αποκλείεται είναι να προκύψει αρνητικό όριο. Απ' ότι καταλαβαίνετε η σωστή απάντηση είναι αυτή που δεν σχολιάσαμε και δίνει αποτέλεσμα ίσο με $\frac{1}{2}$.

Αλλά ας περάσουμε τώρα σε ένα ερώτημα σχετικά με την αντίστροφη συνάρτηση. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x)=x+\ln(x-1),\ x>1$

Τι λέτε για τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της;

Μαθητής Α: Αν πάμε κατασκευαστικά, δεν αλλάζει κάπου η φορά της ανισότητας, οπότε μπορούμε να δείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης είναι συνεχής και με τη βοήθεια των ορίων στα άκρα του πεδίου ορισμού βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Καθηγητής: Ωραία, φυσικά η ερώτηση δεν ήταν αυτή. Μπορείτε να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$;

Μαθητής Α: Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Αν $x\le 1$ τότε , δεδομένου ότι $f^{-1}(x)\in(1,+\infty)$ η ανίσωση ισχύει. Αν $x>1$ τότε

$$f^{-1}(x)>x\overset{f<}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x)\right)>f(x)\Leftrightarrow x>x+\ln(x-1)$$

$$\Leftrightarrow\ln(x-1)<0\Leftrightarrow 0<x-1<1\Leftrightarrow 1<x<2$$

Άρα, κάθε αριθμός του διαστήματος $(-\infty,2)$ είναι λύση της ανίσωσης.

Μαθητής Β: Εγώ το σκέφθηκα γραφικά. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι πάνω από την διχοτόμο $y=x$ εκεί που η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την $y=x$. Έτσι, έχουμε:

$$f^{-1}(x)>x\Leftrightarrow f(x)<x\Leftrightarrow\ln(x-1)<0\Leftrightarrow 0<x-1<1$$
$$\Leftrightarrow 1<x<2$$

Μαθητής Γ: Και εγώ πήγα λίγο διαφορετικά αλλά βρίσκω το ίδιο. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $f^{-1}(x)>x\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)>f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x>f(x)\Leftrightarrow\ln(x-1)<0\Leftrightarrow 0<x-1<1\Leftrightarrow 1<x<2$$

Καθηγητής: Όταν ζητείται η λύση εξίσωσης ή ανίσωσης, ξεκινάμε πάντα με το σύνολο ορισμού της, αλλιώς δεν ξέρουμε **για ποια x μιλάμε**. Ακόμα και όταν ο περιορισμός οδηγεί σε πολύπλοκη εξίσωση ή ανίσωση, τον περιγράφουμε και συναληθεύουμε στη διάρκεια της λύσης της δοσμένης, ή στο τέλος της.

Εδώ εσείς δουλεύοντας με την f αντί της αντίστροφής της ουσιαστικά «πετάξατε» όλους τους αριθμούς που δεν είναι θετικοί και βρήκατε μόνο τις θετικές λύσεις της ανίσωσης.

Τι λέτε τώρα για το όριο της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{e^x}{x\eta\mu x}\ \text{στο}\ x_o=0\,;$$

Μαθητής Γ: Ο αριθμητής έχει όριο τη μονάδα, ο παρονομαστής το 0 και δεν έχει τετράγωνο ή απόλυτο, άρα θα πάρω πλευρικά όρια και θα βρω ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Μαθητής Β: Εγώ διαφωνώ.

Καθηγητής: Μας τα είπε όλα ο συμμαθητής σου... Ας ξεκινήσω από το τελευταίο.

Στα Μαθηματικά αποδίδουμε συμβολισμό σε κάποιο «μαθηματικό αντικείμενο», μόνο όταν υπάρχει και είναι μοναδικό, διαφορετικά δεν θα μιλάμε όλοι για το ίδιο πράγμα. Επομένως, αν καταλήξεις στο συμπέρασμα που μας λες, καλύτερα θα ήταν να έγραφες ότι η f δεν έχει όριο στο $x_o=0$. Θα προτιμούσα να μην υπάρχει ούτε καν το οριστικό άρθρο «το». Αυτά σε ότι αφορά το θέμα του συμβολισμού. Με την επισήμανση ότι πολλές φορές αυτό που αποκαλούμε **«Μεθοδολογία»** δεν αποδίδει, ας αφήσουμε τον συμμαθητή σου να μας αναπτύξει την άποψή του.

Μαθητής Β: Ναι, εδώ κοντά στο $x_o=0$ οι ποσότητες x και ημx είναι ομόσημες, οπότε $x\cdot\eta\mu x>0$. Επιπλέον, $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\eta\mu x)=0$ οπότε εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$.

Μαθητής Α: Ωραία γιατί όμως είπατε ότι να μην εφαρμόζουμε «Μεθοδολογία»;

Καθηγητής: Δεν είπα κάτι τέτοιο. Συχνά στα Μαθηματικά όταν ένας τρόπος αντιμετώπισης παρόμοιων ερωτημάτων φαίνεται να αποδίδει το θεωρούμε εσφαλμένα ως μέθοδο αντιμετώπισης όλων των ερωτημάτων αυτού του τύπου. Η δυστυχία μας όμως είναι ότι πάντα κάποιος μας δίνει παρόμοιο ερώτημα στο οποίο η μέθοδός μας αποτυγχάνει. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να στραφούμε εναντίον κάθε μεθόδου.

Η μέθοδος βγαίνει από τα μετα- οδός. Οδός σημαίνει δρόμος! Η μέθοδος συχνά είναι ο δρόμος που, αν τον ακολουθήσεις, οδηγεί στον στόχο.

Αλλά ας γίνουμε συγκεκριμένοι.

Μπορείτε να αποδείξετε ότι:

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός άρτιος $\nu \geq 3$ *και* $\alpha \neq 0$, *τότε η εξίσωση* $x^\nu + \alpha x + \beta = 0$ *έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες;* Τι λέει η μεθοδολογία σας;

Μαθητής Γ: Θα υποθέσουμε ότι έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες και θα προσπαθήσουμε με άτοπο.

Καθηγητής: Μπορείς να μου κάνεις μια αναλυτική σκιαγράφηση της λύσης;

Μαθητής Γ: Εύκολα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^\nu + \alpha x + \beta.$$

Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε απ' το Θ. Rolle στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_3, \rho_3]$ συμπεραίνουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, οπότε με εφαρμογή πάλι του Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$ στην $f'(x)$ συμπεραίνουμε ότι η $f''(x) = 0$ έχει ρίζα στο (x_1, x_2), που μάλλον είναι άτοπο, γιατί αυτή η εξίσωση δεν θα έχει ρίζα.

Καθηγητής: Ωραία. Μπορούμε να φθάσουμε στην $f''(x) = 0$, να δούμε το άτοπο;

Μαθητής Γ: Ναι, ισχύει:

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1} + \alpha \ \text{ και } \ f''(x) = \nu(\nu-1)x^{\nu-2}$$

Καθηγητής: Που είναι το άτοπο που περιμέναμε;

Μαθητής Γ: Ωχ, η $f''(x) = 0$ έχει ρίζα το 0. Και τι κάνουμε τώρα;

Καθηγητής: Μήπως πρέπει απλά να τροποποιήσουμε την μέθοδο που ακολούθησες;

Μαθητής Β: Δεν χρησιμοποιήσαμε καθόλου ότι ο αριθμός ν είναι άρτιος.

Καθηγητής: Μπορεί αυτό μέσα από την διαδικασία που ακολουθήσαμε να μας οδηγήσει σε άτοπο;

Μαθητής Β: Σίγουρα;

Μαθητής Α: Α… ναι κατάλαβα. Το άτοπο προκύπτει στο προηγούμενο βήμα. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες.

Μαθητής Γ: Γιατί όχι;

Μαθητής Α: Διότι είναι της μορφής $x^\nu = \alpha$ με ν θετικό περιττό, οπότε έχει μοναδική λύση είτε την $\sqrt[\nu]{\alpha}$ αν ο α δεν είναι αρνητικός, είτε την $-\sqrt[\nu]{-\alpha}$ αν ο α είναι αρνητικός.

Καθηγητής: Ας δούμε ένα ακόμα όριο. Τι λέτε για τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot \eta\mu\frac{1}{x^2+1}\right]$$

Μαθητής Β: Τις ξέρω εγώ, αυτές με τα περίεργα ημίτονα. Να πω την λύση της;

Καθηγητής: Ναι.

Μαθητής Β: Ισχύει:

$$\left|\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot \eta\mu\frac{1}{x^2+1}\right| \leq \sqrt{x^2+1}-1$$

$$\Rightarrow -\left(\sqrt{x^2+1}-1\right) \leq \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot \eta\mu\frac{1}{x^2+1} \leq \sqrt{x^2+1}-1$$

και

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right) = \lim_{x\to 0}\left[-\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\right] = 0$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής, έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot \eta\mu\frac{1}{x^2+1}\right] = 0$$

Καθηγητής: Τι λέτε;

Μαθητής Γ: Γιατί δεν είναι σωστό;

Καθηγητής: Βεβαίως!

Μαθητής Α: Ήταν απαραίτητο να κάνουμε κριτήριο παρεμβολής;

Μαθητής Β: Έτσι δεν κάνουμε σε αυτές που έχουν περίεργα ημίτονα;

Μαθητής Α: Εδώ δεν προκύπτει ημίτονο «μη πεπερασμένης ποσότητας» οπότε νομίζω ότι δεν χρειάζεται. Το όριο του πρώτου όρου του γινομένου είναι 0 και του δεύτερου είναι $\eta\mu 1$, οπότε το όριο είναι ίσο με μηδέν.

Μαθητής Γ: Και πού ξέρω το ημίτονο μιας μοίρας;

Καθηγητής: Όταν ορίσαμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, στη συνάρτηση ημίτονο είπαμε ότι έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε όταν βλέπουμε $\eta\mu x$, τότε $x \in \mathbb{R}$ και οι γωνίες μετρούνται σε ακτίνια, όχι σε μοίρες. Έτσι, εδώ έχουμε $1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αν μας ενδιέφερε το πρόσημο του αριθμού $\eta\mu 1$, που δεν το γνωρίζουμε, είναι θετικό.

Μαθητής Β: Πάντως η λύση μου δεν ήταν λάθος.

Μαθητής Α: Ναι, αλλά όταν τα πράγματα είναι απλά, καλό είναι να τα παρουσιάζουμε απλά.

Καθηγητής: Κάπως έτσι. Αλλά, μην θεωρήστε ότι μόνο εσείς έχετε λάθη και αστοχίες όταν προσπαθείτε να απαντήσετε σε κάποιο ερώτημα. Συχνά και εμείς ως «κατασκευαστές ερωτημάτων» έχουμε και εμείς τα προβλήματά μας.

Μαθητής Γ: Τι δηλαδή, να μας ζητήσετε να αποδείξουμε κάτι που δεν ισχύει;

Καθηγητής: Όχι, τόσο. Μπορεί όμως μέσα από μια διαδοχή σκέψεων να καταλήξουμε μέσα από δαιδαλώδεις διαδικασίες σε ένα συμπέρασμα στο οποίο ο μαθητής, όταν κληθεί να απαντήσει στο ερώτημα, να καταλήξει άμεσα με την ευθεία οδό. Ακόμα μπορούμε να δώσουμε ως υπόθεση κάτι που δεν ισχύει.

Μαθητής Β: Αυτό δεν είναι πρόβλημα;

Καθηγητής: Αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς, στα Μαθηματικά υπάρχουν ισχυρισμοί οι οποίοι έχουν εσφαλμένη υπόθεση.

Μαθητής Α: Τι γίνεται τότε;

Καθηγητής: Τέτοιους ισχυρισμούς τους θεωρούμε αληθείς χωρίς να χρειάζεται να ακολουθήσουμε κάποια διαδικασία απόδειξης.

Μαθητής Α: Τι μας αναγκάζει να έχουμε τέτοιους ισχυρισμούς;

Καθηγητής: Η ανάγκη σωστής θεμελίωσης πληρότητας και συνέπειας που πρέπει να έχει μια μαθηματική θεωρία.

Μαθητής Γ: Αν πω ότι κατάλαβα τι ακριβώς γίνεται θα πω ψέματα. Μπορείτε να μου δώσετε ένα παράδειγμα;

Καθηγητής: Θυμάστε πότε λέμε ότι ένα σύνολο Β είναι υποσύνολο ενός συνόλου Α;

Μαθητής Α: Ναι, όταν για κάθε $x \in B$ ισχύει $x \in A$.

Καθηγητής: Ωραία, τι έχετε να πείτε για το κενό σύνολο;

Μαθητής Β: Ότι είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Καθηγητής: Μπορούμε να το πούμε αυτό χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό.

Μαθητής Α: Ναι, όταν για κάθε $x \in \varnothing$ ισχύει $x \in A$.

Καθηγητής: Το κενό περιέχει κάποιο στοιχείο;

Μαθητής Β: Φυσικά όχι.

Καθηγητής: Ωραία, εδώ δεχόμαστε ότι η συνεπαγωγή $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ είναι αληθής, παρόλο που η υπόθεσή της είναι ψευδής.

Φυσικά τέτοια ερωτήματα καλό είναι να αποφεύγονται, όταν απευθυνόμαστε σε μαθητές.

Αλλά, ας μιλήσουμε λίγο πιο συγκεκριμένα.

Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «1-1» και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(f\circ f)(x)=x^2-2x+2$ να αποδείξετε ότι $f(1)+f(2)=3$.

Μαθητής Γ: Ξέρω τι κάνουμε με τέτοιες ασκήσεις!

Καθηγητής: Τι εννοείς;

Μαθητής Γ: Σε ασκήσεις που περιέχουν «αυτοσύνθεση» $f\circ f$, θέτοντας $f(x)$ στο x οδηγούμαστε σε ωραίες λύσεις.

Καθηγητής: Μπορείς να δοκιμάσεις;

Μαθητής Γ: Αν θέσουμε $f(x)$ στο x η δοσμένη ισότητα γίνεται

$$(f\circ f)(f(x))=f^2(x)-2f(x)+2 \Rightarrow f((f\circ f)(x))=$$
$$=f^2(x)-2f(x)+2 \Rightarrow f(x^2-2x+2)=f^2(x)-2f(x)+2$$

απ' όπου με $x=1$ και $x=2$, βρίσκουμε:

$$f^2(1)-3f(1)+2=0 \text{ και } f^2(2)-3f(2)+2=0$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $f(1)$ και $f(2)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $t^2-3t+2=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2. Επιπλέον, οι αριθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους αφού η f είναι «1-1», οπότε $f(1)+f(2)=3$.

Μαθητής Β: Υπάρχει κάποιο πρόβλημα με αυτή την λύση;

Καθηγητής: Κανένα απολύτως!

Μαθητής Β: Τότε γιατί το συζητάμε;

Καθηγητής: Τι λέτε, υπάρχει τέτοια συνάρτηση;

Μαθητής Α: Γιατί να μην υπάρχει;

Καθηγητής: Είπαμε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1». Τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή με την $f\circ f$;

Μαθητής Α: Είναι και αυτή «1-1».

Καθηγητής: Μπορείτε να το αποδείξετε;

Μαθητής Α: Να πω εγώ;

Καθηγητής: Ναι πες μας.

Μαθητής Α: Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με

$$(f\circ f)(x_1)=(f\circ f)(x_2)$$

αφού η f είναι «1-1», παίρνουμε $f(x_1)=f(x_2)$ και από την ίδια ιδιότητα $x_1=x_2$, οπότε η $f\circ f$ είναι «1-1».

Αλλά δεν κατάλαβα, γιατί να υπάρχει πρόβλημα;

Καθηγητής: Ωραία. Αν δεις το τριώνυμο του δευτέρου μέλους ως $x(x-2)+2$, αλλάζει κάτι;

Μαθητής Β: Να απαντήσω εγώ;

Καθηγητής: Ναι

Μαθητής Β: Με $x=0, x=2$ βρίσκουμε ίδιο αποτέλεσμα, οπότε έχουμε:

$$(f\circ f)(0)=(f\circ f)(2)\overset{f\text{"1–1"}}{\Rightarrow} f(0)=f(2)\overset{f\text{"1–1"}}{\Rightarrow} 0=2$$

που φυσικά είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Καθηγητής: Ας δούμε και μια ακόμα περίπτωση. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει

$$f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $f'(\xi)=0$

Μαθητής Α: Νομίζω ότι βγαίνει εύκολα. Αν θέσουμε 0 και π στην ισότητα που μας δώσατε παίρνουμε: $f(0)+f(1)=1$ και $f(0)+f(-1)=1$

οπότε $f(-1)=f(1)$. Αν τώρα εφαρμόσουμε το Θ. Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(-1, 1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

Μαθητής Β: Και εγώ στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξα, αλλά πήρα το διάστημα $[-1, 1]$ θέτοντας όχι το 0 και το π, αλλά $-\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}$.

Μαθητής Γ: Αυτό είναι πρόβλημα; Και οι δυο δεν απέδειξαν την ύπαρξη ξ και μάλιστα στο ίδιο διάστημα ώστε $f'(\xi)=0$;

Καθηγητής: Σου είναι εύκολο να παραγωγίσεις την ισότητα που σας έδωσα;

Μαθητής Γ: Ναι. Ισχύει:

$$f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x-f'(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x=0$$

Καθηγητής: Βλέπετε τώρα κάτι;

Μαθητής Α: Ναι αν βάλουμε όπου x το 0 προκύπτει άμεσα $f'(0)=0$, οπότε έχουμε ταυτοποιήσει το ξ.

Καθηγητής: Ακριβώς.

Μαθητής Γ: Αυτό σημαίνει ότι οι παραπάνω λύσεις είναι λάθος;

Καθηγητής: Όχι, οι λύσεις δεν έχουν κανένα πρόβλημα. Αν υπάρχει κάποιο θέμα έχει να κάνει με τον κατασκευαστή της άσκησης, αν ήθελε να εξετάσει την εφαρμογή του Θ. Rolle.

Μαθητής Β: Δηλαδή θα μπορούσε με μια τέτοια άσκηση να εξετάσει κάτι άλλο;

Καθηγητής: Ενδεχομένως ναι, αλλά και πάλι, κατά την άποψή μου, δεν είναι σωστό να θέτεις «υπαρξιακά ερωτήματα» στην περίπτωση που ο μαθητής μπορεί να προχωρήσει σε άμεσο υπολογισμό.

Μαθητής Γ: Είναι τυχαίο ότι και τις δυο φορές καταλήξαμε στο διάστημα $[-1, 1]$. Αν παίρναμε άλλα x, θα μπορούσαμε να βρούμε ξ έξω από αυτό;

Καθηγητής: Τι λέτε;

Μαθητής Α: Από την στιγμή που μας έδωσαν την συγκεκριμένη ισότητα και ισχύει

$$-1\le\eta\mu x\le 1 \text{ και } -1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$$

το διάστημα $[-1, 1]$ είναι το ευρύτερο στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε Θ. Rolle.

Καθηγητής: Πολύ σωστά. Μπορείτε όμως να μου βρείτε μια συνάρτηση που να ικανοποιεί την ισότητα που σας έδωσα ή φτιάχνουμε απίθανα ερωτήματα σε ανύπαρκτες συναρτήσεις;

Μαθητής Γ: Υπάρχει σίγουρα ή μήπως είναι σαν την προηγούμενη;

Καθηγητής: Όχι, εδώ υπάρχει.

Μαθητής Β: Α… εύκολο. Θα μπορούσε να είναι η συνάρτηση $f(x)=x^2$, αφού τότε θα είχαμε

$$f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$$

Δεν ξέρω αν υπάρχει άλλη, αλλά σ' αυτή το ξ του Rolle, σε όποιο συμμετρικό διάστημα ως προς το 0 το εφαρμόσουμε, είναι το 0.

Καθηγητής: Στο σημείο αυτό θα έλεγα να κλείσουμε.

Μαθητής Γ: Κύριε, να πω και εγώ κάτι άσχετο;

Καθηγητής: Άσχετο! Και γιατί δεν μας το έλεγες νωρίτερα; Τα άσχετα … προηγούνται. Πες μας.

Μαθητής Γ: Δεν είναι εντελώς άσχετο. Έχω λύση σε ένα ερώτημα από τις πανελλαδικές εξετάσεις.

Καθηγητής: Ωραία, πάμε.

Μαθητής Γ: Την περασμένη χρονιά στις εξετάσεις στο τελευταίο ερώτημα ζητούσε να εξετάσουν ουσιαστικά αν η εξίσωση

$$2f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2),\ (1)$$

έχει λύση, όπου $f(x)=x-\ln(3x),\ x>0$

και x_2 μια ρίζα της $f(x)=0$. Εγώ θα αποδείξω ότι δεν έχει ρίζα.

Αν θεωρήσουμε ότι η ρίζα της είναι ίση με τον αριθμό x_2 καταλήγουμε αμέσως σε άτοπο.

Με $x\neq x_2$ έχουμε: $2f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2)$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f(1)}{x-x_2}+\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=f'(x_2)$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f(1)}{x-x_2}=f'(x_2)-\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$

Αν τώρα πάρουμε όρια στα δυο μέλη της τελευταίας για $x\to x_2$, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού το δεύτερο μέλος έχει όριο το 0 και το πρώτο δεν έχει όριο αφού το ένα πλευρικό είναι $+\infty$ και το άλλο $-\infty$. Επομένως, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Καθηγητής: Μας άνοιξες μεγάλη κουβέντα, αλλά δεν μπορούμε να την κάνουμε τώρα λόγω χρόνου, ωστόσο μπορούμε να ξεδιαλύνουμε κάτι. Ξέρεις τι απέδειξες ουσιαστικά;

Μαθητής Γ: Ναι απέδειξα ότι η εξίσωση (1) δεν έχει λύση.

Καθηγητής: Όχι, απέδειξες ότι η (1) δεν ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς x.

Μαθητής Γ: Δηλαδή τι θα έπρεπε να κάνω. Που είναι το λάθος;

Καθηγητής: Ωραία. Θέλεις να αποδείξεις ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζα. Αν θέλουμε να δουλέψουμε με άτοπο θα θεωρήσουμε ότι έχει τουλάχιστον μια ρίζα ρ. Τότε, αν παρακάμψουμε τις ενδιάμεσες λεπτομέρειες, η τελευταία ισότητα γράφεται

$$\frac{f(\rho)-f(1)}{\rho-x_2}=f'(x_2)-\frac{f(\rho)-f(x_2)}{\rho-x_2}$$

με τον ρ να είναι συγκεκριμένος θετικός αριθμός. Αντιλαμβάνεσαι ότι δεν έχουμε κάτι που να μεταβάλλεται ώστε να πάρουμε όρια, οπότε δεν είναι αποδεκτή ως λύση αυτή που παρουσίασες. Ψάξε για κάτι διαφορετικό.

Μαθητής Α: Τι εννοούσατε προηγουμένως που είπατε «προηγούνται τα άσχετα».

Καθηγητής: Αυτό σαν έκφραση ενδεχομένως να ακούγεται λίγο υπερβολικό, αλλά συχνά το ζητούμενο δεν είναι να λύσουμε μια άσκηση παραπάνω μέσα στην ώρα και να καταλήξουμε σαν τους «κολεγιόπαιδες», όπως αναφέρει ένα από τα **Νόμπελ της χώρας μας**, αλλά να συζητήσουμε κάτι που απασχολεί κάποιον ή κάποιους από εσάς.

Μαθητής Β: Τι εννοείται να συζητήσουμε οτιδήποτε;

Καθηγητής: Ακριβώς, με μόνο περιορισμό την τήρηση των κανόνων ενός πολιτισμένου διαλόγου.

Μαθητής Γ: Λίγο δύσκολο μου φαίνεται. Δεν μας το λένε συχνά αυτό.

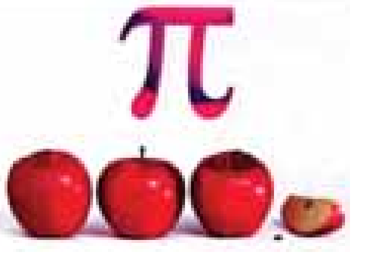
Καθηγητής: Παιδιά περνάτε πολλές ώρες στο σχολείο με τους καθηγητές σας. Καλό είναι να συνηθίσετε να το βλέπετε σαν δεύτερο σπίτι σας, σαν το «άσυλο» και το «θεραπευτήριό» σας στα διάφορα προβλήματα που πιθανόν να συναντάτε εσείς ή το κοντινό περιβάλλον σας. Και να θυμάστε: Εδώ έρχεστε και για περνάτε καλά.

Μαθητής Β: Αυτό το «και» δεν μπορούσατε να το παραλείψετε:

Καθηγητής: Όχι, δεν πρέπει να ξεχνάμε και το ρόλο του καθενός μας στην διαδικασία μεταφοράς ή κατασκευής ή εμπέδωσης της γνώσης, που μαζί με την **κοινωνικοποίηση** είναι οι βασικοί λόγοι που βρισκόμαστε εδώ.

Μαθητής Α: Εγώ δεν κατάλαβα αυτό με τους κολεγιόπαιδες.

Καθηγητής: Έχεις δίκιο, όπως το είπα…Πρόκειται για το **δοκίμιο του Ελύτη «Η μέθοδος του άρα».** Σ' αυτό, θεωρεί ότι κατά βάθος ποίηση και μαθηματικός λογισμός συγκλίνουν και συμμετέχουν σε κάτι πολύ ουσιαστικό: με οποιαδήποτε μορφή και αν εμφανίστηκαν μέσα στην ιστορία, αποτέλεσαν πρώτα απ' όλα **επικοινωνιακά εγχειρήματα.** Αποπειράθηκαν να μεταβιβάσουν σε έναν άλλο ανθρώπινο νου την **προσπάθεια να οριστεί** μέσω κάποιων συμβόλων, κάτι που ως εκείνη την στιγμή παρέμενε άμορφο, ασχημάτιστο, χαώδες. Στο συγκεκριμένο σημείο στο οποίο αναφέρθηκα, που ως ένα βαθμό αποτελεί κριτική πάνω στην τυπική λογική, αναφέρει: …οι «κολεγιόπαιδες» λύνουν εκπληκτικές εξισώσεις με ευκολία που είναι ν' απορείς: συν, πλην, δια, επί άρα…



Το μυαλό μας κάνει μαιάνδρους απίθανους προκειμένου στο μέλλον να σταδιοδρομήσει στα εργαστήρια, στους ηλεκτρονικούς εγκεφάλους, οπουδήποτε οσφραίνεται όφελος χειροπιαστό. Προκειμένου όμως να καταλήξει σε μια συνειδητοποίηση **του είναι** παραμένει στην **πρώτη Δημοτικού**…

Αλλά, ας κλείσουμε κάπου εδώ.

Μαθητής Γ: Ευχαριστούμε δάσκαλε. Πότε θα έχουμε τις επόμενες «Αναλυτικές… συζητήσεις»;

Καθηγητής: Δεν γνωρίζω ακριβώς, θα το κανονίσουμε, αλλά λέω η επόμενη συνάντησή μας να μην αναφέρεται ούτε σε **«Αναλυτικές»** ούτε σε **«Αλγεβρικές»**, αλλά σε **«Συνδυαστικές»** συζητήσεις.

Μαθητής Β: Δηλαδή θα είναι συνδυασμός τους;

Καθηγητής: Όχι, θα ασχοληθούμε με μια πολύ ενδιαφέρουσα ενότητα των Μαθηματικών, τη Συνδυαστική που φαίνεται να επανέρχεται στα σχολικά Μαθηματικά μετά από απουσία περίπου 25 χρόνων. Ευχαριστώ για την συμμετοχή σας.

3^{ος} τοπικός διαγωνισμός Ν. Νικολάου στην Καρδίτσα

Ν. Δ. Νικολάου
(1875-1963)

Πολύ συγκινητικές στιγμές έζησαν όσοι παρευρέθηκαν στην όμορφη εκδήλωση, για τη βράβευση των 128 μαθητών του Νομού Καρδίτσας, που διακρίθηκαν στους διαγωνισμούς της Ε. Μ. Ε., καθώς και στον τοπικό διαγωνισμό «Νικόλαος Νικολάου» το σχολικό έτος 2021-2022 που διοργάνωσε στις 13 Νοεμβρίου 2022, στο κατάμεστο Αμφιθέατρο του Τμήματος Δασολογίας το Παράρτημα Καρδίτσας της Ε. Μ. Ε..

"… *Είναι μια ημέρα τριπλής γιορτής για το Παράρτημά μας, πρώτα από όλα γιατί σήμερα βραβεύονται 128 μικροί μαθηματικοί για τη διάκρισή τους, στους καθιερωμένους διαγωνισμούς της ΕΜΕ και μαζί μ' αυτούς βραβεύεται η Παιδεία και τα αγαθά της, η ευγενής άμιλλα, η έντιμη και συνεχής προσπάθεια, ο πνευματικός μόχθος, ο καθορισμός στόχων, ή αυτοσυγκέντρωση η πειθαρχία, η επιμονή το θάρρος και η τόλμη. Δεύτερος* λόγος χαράς επειδή σήμερα για πρώτη φορά θα δοθούν οι διακρίσεις και τα βραβεία δύο νεοσύστατων μαθηματικών διαγωνισμών, ο «Πυθαγόρας της ΕΜΕ» και ο νέος τοπικός διαγωνισμός **Νικόλαος Νικολάου** που θεσμοθέτησε το παράρτημά μας και αφορά μαθητές της Α' Γυμνασίου. Το όνομά του δόθηκε προς τιμήν του μεγάλου συντοπίτης μας μαθηματικού Νικόλαου Νικολάου από τα Κανάλια για τον οποία θα μας κάνει την τιμή να μιλήσει ο επίσης καταγόμενος από τα Κανάλια κ. Κων. Μαυρομμάτης, τ. πρόεδρος της **Εταιρείας Αστρονομίας και Διαστήματος** που ευχαριστούμε θερμά για την παρουσία του.

Τρίτος και σημαντικός λόγος είναι η απονομή τιμής στους επίτιμους Προέδρους του Παραρτήματός μας, στο πρόσωπό των οποίων τιμούμε και όλα τα μέλη των Διοικουσών Επιτροπών ιδρυτικών και των μετέπειτα από τους οποίους λάβαμε τη σκυτάλη και προσπαθούμε να συνεχίσουμε το έργου τους" τόνισε μεταξύ άλλων καλωσορίζοντας το κοινό, η Πρόεδρος του Παραρτήματος κ. Αρετή Φαλάγγα.

Στην εκδήλωση παρευρέθηκαν και χαιρέτισαν ο Υπουργός Δικαιοσύνης κ. Κων. Τσιάρας και η βουλευτής κ. Ασ. Σκόνδρα, ενώ τις θερμές ευχές του Σεβασμιοτάτου Μητροπολίτη μετέφερε ο π. Παν. Καλλιώρας. Το Παράρτημα τίμησε τους επίτιμους Προέδρους του Παραρτήματος: Απ. Παππά, Σωκ. Ρόπη, Αθ. Μπαλιάκο και Θωμ. Ντηλιά.

Ακολούθησε η ομιλία του κ. Κων. Μαυρομμάτη, με θέμα: "Η ζωή και το έργο του Καρδιτσιώτη Μαθηματικού Νικόλαου Νικολάου", που έδωσε πολλά στοιχεία για τον συμπατριώτη μας αριστοβάθμιο διδάκτορα των μαθηματικών και συγγραφέα μαθηματικών βιβλίων όπως τη Θεωρητική Αριθμητική, τη Μεγάλη Στοιχειώδη Άλγεβρα, τη Μεγάλη Στοιχειώδη Γεωμετρία, την Κοσμογραφία, που γεννήθηκε το 1875 στα Κανάλια και πέθανε το 1963 αφήνοντας μια μεγάλη παρακαταθήκη στις επόμενες γενιές των μαθηματικών.

«Στην εκπαίδευση δεν επιβραβεύουμε μόνο τα παιδιά που είναι άριστοι και διακρίνονται. Επιβραβεύουμε και κάθε μαθητή που καταβάλει την προσπάθειά του. Η κάθε **προσπάθεια μας** πάει ένα **βήμα παραπέρα** κι αυτό είναι ένα **κέρδος για κάθε παιδί**. Αυτό το επιβραβεύουμε. Όσα παιδιά δεν είναι εδώ σήμερα αλλά προσπαθούν κάποια στιγμή θα δούν το αποτέλεσμα της προσπάθειάς τους να ανταμείβεται» τόνισε κλείνοντας την εκδήλωση ο Γεν. Γραμματέας του Παραρτήματος Καρδίτσας της Ε. Μ. Ε., κ. Γιώργος Βασιλόπουλος.

Αναλυτικό ρεπορτάζ της ομιλίας του Κ. Μαυρομάτη, θέματα και λύσεις του 1^{ου}. 2^{ου} και 3^{ου} διαγωνισμού Ν. Νικολάου καθώς και πολλές φωτογραφίες από την εκδήλωση θα βρείτε: στο mathkar.gr, στο ertnews.gr και στο karditsalive.net.

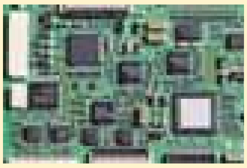
Τα Μαθηματικά μας διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

> **Όποιος διαβάζει τα έργα του Αρχιμήδη θαυμάζει λιγότερο τα επιτεύγματα των νεοτέρων.** **G. Leibnitz**

Το τρανζίστορ: Το τρανζίστορ ή κρυσταλλοτρίοδος, είναι μία από τις μεγαλύτερες εφευρέσεις του 20ου αιώνα. Από το 1928 έως το 2000 δόθηκαν πολλά βραβεία. Είναι το κυριότερο συστατικό όλων σχεδόν των σύγχρονων ηλεκτρονικών κατασκευών. Αντικατέστησε τις ογκώδεις λυχνίες. Το υλικό είναι συνήθως πυρίτιο ή Γερμάνιο. Το τρανζίστορ πλέον είναι μέρος κάθε ολοκληρωμένου κυκλώματος(chip), μαζί με αντιστάσεις, πυκνωτές, κλπ. Λειτουργεί ως διακόπτης, ως Ωμική αντίσταση, για διαμόρφωση συχνότητας, ενίσχυση ή σταθεροποίηση τάσης, κλπ.

Ολοκληρωμένο κύκλωμα είναι ένα κύκλωμα πάνω σε ένα φύλλο ημιαγωγών(πυρίτιο). Πριν ολοκληρωθεί η κατασκευή τους ονομάζονται κύβοι. Τα ολοκληρωμένα χρησιμοποιούνται για κάθε ηλεκτρονική λειτουργία και έφεραν την επανάσταση στον τομέα της ηλεκτρονικών με πιο σημαντική κατασκευάστρια την Intel. Τα ολοκληρωμένα κυκλώματα έφεραν τεράστιες αλλαγές στην ιστορία των υπολογιστών. Οι πρώτοι Η/Υ είχαν λυχνίες κενού και ύστερα κρυσταλλοτριόδους για να εξελιχθούν με τα ολοκληρωμένα κυκλώματα που τώρα είναι μικροεπεξεργαστές ημιαγωγών 10 νανομέτρων. Αυτοί οι μικροεπεξεργαστές κατασκευάζονται με ρομπότ είναι η επανάσταση της ηλεκτρονικής και δίνουν την δυνατότητα να γίνονται μικροσυσκευές για οποιαδήποτε λειτουργία.



Η αρχή της οικονομίας ή αρχή της απλότητας ή το Ξυράφι του Όκαμ

Είναι επιστημονική αρχή, η οποία αποδίδεται στον Άγγλο φιλόσοφο και μοναχό του 14ου αιώνα, Γουλιέλμο του Όκαμ. Ο φιλόσοφος Πρόκλος το Πανεπιστήμιο του οποίου είναι θαμμένο κάτω από το πεζοδρόμιο, μπροστά στο νέο Μουσείο της Ακρόπολης στην Ηρώδου Αττικού, αναφέρει πως την αρχή αυτή την διατύπωσαν πρώτοι οι Πυθαγόρειοι:

«…… ζητεῖν ἐξ ἐλαχίστων και ἁπλουστάτων ὑποθέσεων δεικνύναι τὰ ζητούμενα».

«Η απλότητα είναι η υπέρτατη επιτήδευση» έλεγε ο Λεονάρντο ντα Βίντσι, «Δεν αποδεχόμαστε περισσότερες αιτίες για φυσικά φαινόμενα από όσες είναι ταυτόχρονα αληθείς και επαρκείς όσον αφορά την δικαιολόγηση της ύπαρξής τους» έλεγε ο Νεύτωνας. «Η απλούστερη εξήγηση είναι συνήθως η καλύτερη» θα λέγαμε με απλά λόγια και έχει εφαρμογή σε κάθε πράξη μας και σε όλες τις επιστήμες. Βέβαια υπάρχει και ο αντίλογος

«Ο Θεός δημιούργησε τον κόσμο με τον μέγιστο δυνατό αριθμό διαφορετικών πλασμάτων» έλεγε ο Λάιμπνιτς.

- Ο Ερατοσθένης μέτρησε με μεγάλη ακρίβεια την ακτίνα της Γης, ο Πτολεμαίος όμως είπε ότι έκανε λάθος και η ακτίνα είναι 30% μικρότερη. Τον πίστεψαν βέβαια για πολλούς αιώνες, έτσι ξεγελάστηκε και ο Κολόμβος πού νόμισε ότι η Ινδία είναι περίπου 5-6.000 χιλιόμετρα μακριά ενώ ήταν περίπου 50.000 και έτσι ανακάλυψε την Αμερική.
- Στους νόμους του Πλάτωνα αναφέρεται ότι ο αριθμός των πολιτών της ιδανικής πολιτείας πρέπει να είναι 5040 γιατί διαιρείται ακριβώς από 60 αριθμούς. Διαιρείται με όλους τους ακέραιους από 1 μέχρι το 10. Ακόμα 1x2x3x4x5x6x7=5040, 7x8x9x10=5040, και τα πρώτα λεπτά της εβδομάδας είναι 7x24x60=2x5040 .

- Το 1986 ο 11χρονος **Τάο** συμμετείχε στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα και κέρδισε χάλκινο μετάλλιο, την επόμενη χρονιά αργυρό και το 1988 χρυσό. Είναι ο μοναδικός νικητής καθενός από τα τρία μετάλλια στην ιστορία της Ολυμπιάδας, που πήρε αυτά τα μετάλλια σε ηλικία 13 ετών.

Αίνιγμα:

- Μεταξύ ενός τετραγώνου και ενός κύβου υπάρχει κάτι μοναδικό, τι είναι αυτό;
- Αν η κόρη της Ισαβέλλα είναι της κόρης μου μητέρα εγώ τι είμαι της Ισαβέλλας;

Οι πρώτοι αριθμοί εκτός το 2, 5 λήγουν σε 1, 3, 7, 9.

Γρίφοι και Μαθηματικά

Ο Ψαράς: Ένας ψαράς πήγε για σαρδέλες, η ψαριά ήταν πολύ καλή. Γυρνώντας από τη θάλασσα έβαλε την ψαριά του σε 13 τελάρα. Έβαλε σε μια σειρά στην παραλία τα 12 για να τα πουλήσει και κράτησε το ένα στο πλοίο. Το βάρος κάθε τελάρου είναι ακέραιος αριθμός, και το βάρος του με το διπλάσιο του βάρους του διπλανού τελάρου είναι 39 κιλά και του τελευταίου με το διπλάσιο αυτού που κράτησε στο πλοίο είναι 51 κιλά. Πόσο πουλάει το κάθε τελάρο;(Η τιμή της σαρδέλας είναι 6€ το κιλό).

Τα ξενοδοχεία: Σε ένα νησί το βράδυ της $15^{ης}$ Αυγούστου φιλοξενήθηκαν 15885 τουρίστες. Το νησί έχει λιγότερα από 50 ξενοδοχεία, αλλά σε κάθε ξενοδοχείο φιλοξενήθηκε ο ίδιος αριθμός τουριστών. Την επόμενη μέρα οι τουρίστες ενός ξενοδοχείου πήγαν με 7 λεωφορεία στο Μουσείο εκτός από τρείς. Πόσα ήταν τα ξενοδοχεία και πόσοι τουρίστες κοιμήθηκαν στο καθένα;

Τα Τρίγωνα: Δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τη μια κάθετη πλευρά τους 3εκ. και έχουν ακόμα μια πλευρά κοινή είναι ίσα;

Μαντέψτε 3 μονοψήφιους ή ένα 3ψήφιο: Ζητάτε από το φίλο σας να πάρει 3 μονοψήφιους, ζητάτε να πολλαπλασιάσει τον πρώτο επί 2 και στο γινόμενο να προσθέσει το 5, να πολλαπλασιάσει το σύνολο επί 5 και να προσθέσει το 10 και τον 2^o αριθμό. Να πολλαπλασιάσει το αποτέλεσμα επί 10 και να προσθέσει τον 3^o αριθμό. Να σας πει το τελικό αποτέλεσμα. Πώς θα βρείτε τους αριθμούς που σκέφτηκε;

Το ορθογώνιο τρίγωνο: Χωρίστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με οξείες γωνίες 30^o, 60^o σε πέντε ίσα ορθογώνια και όμοια με το αρχικό. Μπορείτε;

Οι τρείς αριθμοί: Ο δάσκαλος έγραψε στον πίνακα 3 αριθμούς για να τους προσθέσουν οι μαθητές. Η Ιωάννα είδε ότι το άθροισμά τους είναι τέλειο τετράγωνο και ο Πέτρος της είπε ότι και ανά δύο έχουν άθροισμα τέλειο τετράγωνο. Ποιους αριθμούς έγραψε ο δάσκαλος;

Η διαφορά είναι κύβος: Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η διαφορά της υποτείνουσας με καθεμιά από τις δύο καθέτους είναι κύβος. Τι πλευρές έχει το τρίγωνο;

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν του τεύχους 125

Η Βροχή: Η πλατεία έχει εμβαδόν 100x150=15000 m^2 με βροχή 100 mm/m^2έχουμε 100 λίτρα σε κάθε m. Άρα 15000x100=1.500.000 λίτρα νερού έπεσαν στην πλατεία.

Ο κυνηγός: Ο σκύλος με 3άλματα x 3μέτρα πρέπει να καλύψει τα 4άλματα x 2μέτρα του λαγού και 45 μέτρα ακόμα. Δηλαδή 9κ-8κ=45 ή κ=45 δηλαδή ανά 3 άλματα μειώνει την απόσταση ένα μέτρο, άρα σε 3 x 45=135 άλματα θα πιάσει το λαγό.

Ο Πέτρος: Η αμοιβή ήταν 300€ και ο κουμπαράς έχει 200€ (τα κέρδη).

Με ίδια ψηφία: Όλοι βρήκαν το ίδιο αποτέλεσμα, όποιους αριθμούς και να πήραν ο λόγος είναι πάντα 37 (πχ 222/6=37). Άρα 7x37=259.

Εννεαψήφιοι: Όποια ψηφία και αν είναι στον αριθμητή ο λόγος με το άθροισμά τους είναι για όλα ο ίδιος 12345679 (πχ 555.555.555/45=12345679). Άρα 6x12345679=74074074 (έγραψε στο χαρτί). Αν είχαν γράψει εννέα κλάσματα το άθροισμα θα ήταν 9x12345679=111.111.111.

1000 πρώτοι(μη πρώτοι): Πρώτος είναι ο φυσικός αριθμός που οι μοναδικοί του διαιρέτες είναι το **ένα** κι **ο εαυτός του**. Όπως π.χ. ο 2, που είναι ο μοναδικός άρτιος αριθμός που είναι πρώτος, οι μοναδικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το 2. Ο φυσικός αριθμός που δεν είναι πρώτος είναι σύνθετος. Από την αρχαιότητα **ο Ευκλείδης** απέδειξε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. Η απόδειξη αυτή έμεινε στην ιστορία των μαθηματικών για την συντομία και την κομψότητά της. Η απόδειξη αυτή του Ευκλείδη θεωρείται το μεγαλύτερο αριστούργημα της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης. Ο G. Hardy (1877-1947) έγραψε ότι «… είναι τόσο σύγχρονο και σημαντικό όπως και όταν ανακαλύφθηκε-εδώ και 2000 χρόνια παρέμεινε ανέπαφο». Ας δούμε αυτή την απόδειξη γιατί θα μας βοηθήσει στη λύση του προβλήματος.

Απόδειξη Ευκλείδη: Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών p1,p2,…,pν. Θα αποδείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Σχηματίζουμε τον αριθμό **Α=Ρ1Ρ2Ρ3…Ρν+1.** Ο αριθμός αυτός, επειδή είναι μεγαλύτερος του 1, θα έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη, έστω τον Pi με $1 \le i \le \nu$. Αλλά αν ο Pi διαιρεί τον Α, επειδή διαιρεί και τον p1p2…pν, θα πρέπει να διαιρεί και τον 1. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί Pi >1. Δημιουργούμε 5 διαδοχικούς φυσικούς που να είναι σύνθετοι.

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 2 = 2$ (1.3.4.5.6+1)
$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 3 = 3$ (1.2.4.5.6+1)
$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 4 = 4$ (1.2.3.5.6+1)
$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 5 =$ (1.2.3.4.6+1)
$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 6 =$ (1.2.3.4.5+1)

Με ανάλογο τρόπο δημιουργούμε όσους σύνθετους διαδοχικούς φυσικούς θέλουμε.

Σημείωση: Οι Πρώτοι αριθμοί μέχρι το 100 είναι 21, μέχρι το 1000 είναι 143, μέχρι το 10.000 είναι 1061. Οι δίδυμοι πρώτοι είναι 8 ζεύγη μέχρι το 100 και 35 ζεύγη μέχρι το 1000. Άρα οι πρώτοι έχουν μικρή πυκνότητα και υπάρχουν μεγάλες περιοχές μεταξύ τους για να χωρέσουμε όσους σύνθετους θέλουμε.

Τα 5 τετράγωνα: Παίρνουμε πέντε τετράγωνο πλευράς α , θα έχουμε $5\cdot\alpha^2$ με τα οποία δημιουργούμε το X^2, πλευράς $(\sqrt{5}\cdot\alpha)^2$. Το $\sqrt{5}$ κατασκευάζεται γιατί είναι η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 1 και 2.

Δεκατρείς αριθμοί: Το άθροισμά τους είναι 7x100+7x160–(160+100):2=700+1120–130=1690

Αθήνα-Ρόδος: Να διαγραφεί η φράση (Αλλά κανένα ταξίδι πήγαινε-έλα δεν έγινε με το ίδιο μέσο). Πήγε συνολικά 24 φορές στην Αθήνα, 12 φορές με το καράβι και 12 με αεροπλάνο. Επέστρεψε στη Ρόδο με καράβι 23 φορές και μια φορά με αεροπλάνο.

Οι μαθητές στο Μουσείο: Οι μαθητές σε ένα τμήμα του σχολείου είναι περίπου 20 – 23. Άρα από την μία τάξη ήταν 20 μαθητές που κάθισαν σε 5 τετραθέσια τραπέζια και από την άλλη 22 που κάθισαν σε 7 τριθέσια ενώ ένας μαθητής κάθισε με τους καθηγητές σε ένα ακόμα τριθέσιο τραπέζι.

Βραβεία Ακαδημίας Αθηνών 2022

1) **Βραβείο Ν. Αρτεμιάδη: 1.500€ στον** Δημήτριο Νταλαμπέκο για την εργασία «Η μη αφαιρεσιμότητα του τριγώνου του Sierpinski»
2) **Βραβείο Παναγιώτη Μέγα: 3.000€** (Ηπειρώτη μαθηματικού, παλιού μέλους του Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. της δεκαετίας του 1960), που αθλοθέτησαν τα παιδιά του, με αφορμή τα 100 χρόνια από τη γέννησή του **στον** Πρόδρομο Φωτιάδη από τη Δράμα για την καλύτερη επίδοση στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα Μαθηματικών του 2022.
3) **Βραβείο Ακαδημίας άνευ προκηρύξεως στους** Μ. Γ. Μαραγκάκη και Μ.Ν. Μεταξά για τα 2 τρίτομα έργα τους με τίτλο «Ουσιώδης Μαθηματικά» και «Ουσιώδη προβλήματα Στοιχειωδών Μαθηματικών» εκδ. Παπασωτηρίου 2022.

5η Ολυμπιάδα Οικονομικών 2022

INTERNATIONAL ECONOMICS OLYMPIAD CHINA 2022

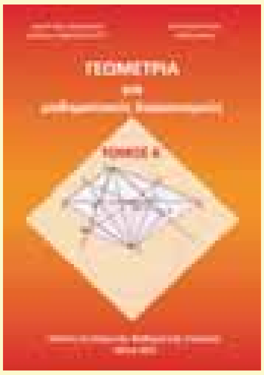
Έγινε και φέτος η 5η Διεθνής Ολυμπιάδα Οικονομικών 2022 (26 Ιουλίου – 11 Αυγούστου 2022) στην Σαγκάη της Κίνας (διαδικτυακά) και έλαβαν μέρος 46 χώρες. Η χώρα μας κατέκτησε 1 **ασημένιο μετάλλιο** (Κωνσταντίνος Ηλίας, Αρσάκειο Λύκειο Ιωαννίνων), και **2 χάλκινα μετάλλια** (Βασίλης Τσερκέζης, Πειραματικό Λύκειο Παν. Μακεδονίας, και Χρήστος Λουκάς, ΓΕΛ Μαγούλας Αττικής).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

για μαθηματικούς διαγωνισμούς

αφιερωμένο στη μνήμη του Βαγγέλη Ψύχα

Το βιβλίο αυτό είναι το πρώτο από μία σειρά δύο βιβλίων Γεωμετρίας τα οποία έχουν κύριο σκοπό να αποτελέσουν βοήθημα των μαθητών που επιδιώκουν τη διάκριση στους **Ελληνικούς και Διεθνείς Μαθηματικούς διαγωνισμούς.** Θεωρούμε ότι θα είναι χρήσιμο και στους συναδέλφους μαθηματικούς, αλλά και όσους αγαπούν τη Γεωμετρία. Το αντικείμενο του βιβλίου είναι αποκλειστικά η Επιπεδομετρία και καλύπτει όλο το φάσμα των τάξεων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Το βιβλίο **ακολουθεί** τους ορισμούς και τη **διάταξη** της ύλης του βιβλίου Γεωμετρίας για τις τάξεις Α΄ και Β΄του Γενικού Λυκείου. Όμως, τα επτά πρώτα κεφάλαια είναι γραμμένα κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα σε μαθητές του Γυμνασίου να ασχοληθούν με τη Γεωμετρία σε θεωρητική μορφή ξεφεύγοντας από την απλή περιγραφική μορφή των βιβλίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου. Γίνεται προσπάθεια εισαγωγής των βασικών εννοιών με απλότητα και δίνονται υποδειγματικές αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων. (...) Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται όλες οι βασικές έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από την ευθεία μέχρι τον κύκλο και τη συμμετρία, με τη μεγαλύτερη δυνατή απλότητα, (...). Στο κεφάλαιο 2 μελετάμε παραλληλόγραμμα και τραπέζια, ενώ στο κεφάλαιο 3 γίνεται συστηματική μελέτη των χαρακτηριστικών σημείων τριγώνου. Στο κεφάλαιο 4 μελετάμε τα εγγεγραμμένα σε κύκλο τετράπλευρα με όλες τις γνωστές εφαρμογές τους. Μελετώνται επίσης τα περιγεγραμμένα, αλλά και τα παρεγγεγραμμένα σε κύκλο τετράπλευρα.



Στα κεφάλαια 5, 6 και 7 έχουμε τη μελέτη των ομοίων τριγώνων, των μετρικών σχέσεων και των εμβαδών επίπεδων σχημάτων, αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 8 υπάρχουν σε μικρή έκταση, αλλά υποδειγματικά λυμένα παραδείγματα ασκήσεων γεωμετρικών τόπων και γεωμετρικών κατασκευών με σκοπό να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν τον τρόπο δουλειάς σε αυτά τα σημαντικά από διδακτικής πλευράς προβλήματα.

Οι λυμένες ασκήσεις προέρχονται κυρίως από θέματα διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ), αλλά και από διαγωνισμούς άλλων χωρών ή από **διεθνείς διαγωνισμούς** κυρίως της τελευταίας δεκαετίας. Ο κύριος στόχος των ασκήσεων αυτών είναι να δώσουν στο μαθητή τη δυνατότητα εξοικείωσης με τα θέματα που εξετάζονται στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.

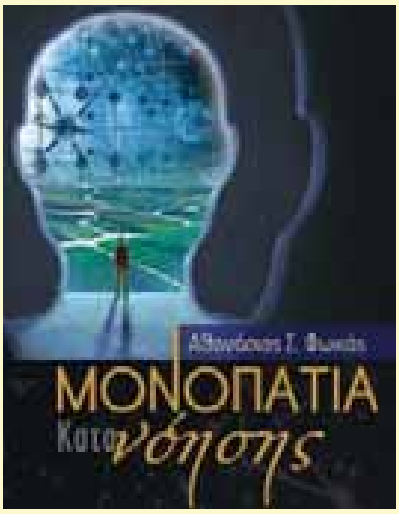
Οι άλυτες ασκήσεις σε κάθε κεφάλαιο έχουν σκοπό να δώσουν στο μαθητή τη δυνατότητα να δοκιμάσει τις δυνάμεις του και να διαπιστώσει το βαθμό εμπέδωσης της ύλης (...). Στο Παράρτημα **δίνονται λύσεις** και **υποδείξεις** για τις άλυτες ασκήσεις. Τονίζουμε ότι η επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος απαιτεί πέραν της καλής γνώσης της θεωρίας, την καλή κατασκευή του σχήματος, αλλά και μία συνεχή δημιουργία επινοήσεων οι οποίες θα δώσουν τη δυνατότητα να βρεθεί η κατάλληλη ακολουθία προτάσεων που θα οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Στο δεύτερο τόμο του βιβλίου θα ασχοληθούμε με θέματα που αφορούν τους μαθητές Λυκείου, όπως η δύναμη σημείου ως προς κύκλο, οι ριζικοί άξονες, τα συνευθειακά σημεία και οι συντρέχουσες ευθείες καθώς και άλλα πολύ γνωστά γεωμετρικά θεωρήματα που δεν διδάσκονται στο Λύκειο. Θα ασχοληθούμε ακόμη με μία ευρεία γκάμα διαφορετικών μεθόδων επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων με τη χρήση του Διανυσματικού Λογισμού, Αναλυτικής Γεωμετρίας και Μιγαδικών αριθμών. Θα μελετήσουμε επίσης τους σημειακούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, όπως είναι η συμμετρία, η παράλληλη μεταφορά, η στροφή, η ομοιοθεσία και η αντιστροφή.

Το βιβλίο αυτό, όπως και ο δεύτερος τόμος του, γράφτηκε μετά από εντατική δουλειά δύο ετών, σε συνεργασία με τον αείμνηστο Ευάγγελο Ψύχα και αφιερώνεται στη μνήμη του. Ο Ευάγγελος Ψύχας ήταν για δεκαπέντε τουλάχιστον χρόνια από τους στυλοβάτες της Επιτροπής Διαγωνισμών της ΕΜΕ με τεράστια προσφορά σε όλους τους τομείς των διαγωνισμών. Δεκάδες ασκήσεις που υπάρχουν στο βιβλίο αυτό είναι δικά του προβλήματα, κατασκευασμένα για να γίνουν θέματα των Ελληνικών διαγωνισμών, αλλά και των διεθνών διαγωνισμών.

Μονοπάτια κατανόησης: **Αθανάσιος Φωκάς**

Σε μια πολύ καλή εκδήλωση που έγινε στην **1 Δεκ. 2022** στην Ακαδημία Αθηνών παρουσιάστηκε το βιβλίο του **Ακαδημαϊκού και Καθηγητή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Cambridge, κ. Αθανάσιου Φωκά** με τίτλο: “**Μονοπάτια κατανόησης** ”Εκδόσεις Broken Hill 2022 με κύριους ομιλητές: Αναστάσιος Γερμενής, Ομότιμος Καθηγητής της Ιατρικής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, Αντεπιστέλλον Μέλος της Ακαδημίας Αθηνών, Μαρίνος Δαλάκας, Ομότιμος Καθηγητής Νευρολογίας ΕΚΠΑ, Αλέξανδρος Νεχαμάς, Ακαδημαϊκός, Καθηγητής Φιλοσοφίας, Πανεπιστήμιο Princeton, Γεώργιος Παξινός, Καθηγητής Νευροανατομίας του Πανεπιστημίου της Νέας Νοτίου Ουαλίας, Αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Αθηνών



Την εκδήλωση έκλεισε ο ίδιος ο Φωκάς με αναφορές στο ερευνητικό έργο και με υπόσχεση συνέχισης αυτής της προσπάθειας στα νέα επιστημονικά δεδομένα.

αφορμές ... και στιγμιότυπα

Το Φεστιβάλ Γρίφων Καστελλορίζου ταξιδεύει στην Αθήνα

Από το Καστελλόριζο και την Πάτρα μεταφερόμαστε στην Αθήνα, στη **Βιβλιοθήκη της Βουλής των Ελλήνων** (στο πρώην Δημόσιο Καπνεργοστάσιο). Το Μουσείο Γρίφων Μεγίστης (Καστελλορίζου) και το Σωματείο ΕΝ.Ι.Γ.ΜΑ (Ένωση Ιδεών, Γρίφων, Μαθηματικών) συνομιλούν με τη Βιβλιοθήκη της Βουλής, σε ένα τριήμερο Φεστιβάλ στις **16-18 Δεκεμβρίου 2022** γεμάτο **κατασκευές και παιχνίδια**.

Είχαμε παρουσιάσει σε προηγούμενα τεύχη του περιοδικού Ευκλείδης Β΄ αρκετά στοιχεία από την δράση του φεστιβάλ γρίφων, από το Καστελόριζο. Σ' αυτό το τεύχος δίνουμε το λόγο στους ίδιους του διοργανωτές για το ταξίδι τους στην Αθήνα όπως οι ίδιοι το περιγράφουν.

Η δράση και η πορεία του φεστιβάλ Γρίφων: Η ιστορία του Φεστιβάλ Γρίφων Καστελλορίζου ξεκίνησε το 2020. Τότε ο μαθηματικός Πανταζής Χούλης, πρώην καθηγητής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αυστραλίας, νυν συνεργάτης του Πανεπιστημίου Κρήτης και συνιδρυτής εταιρείας παραγωγής εκπαιδευτικών γρίφων, ίδρυσε το ομώνυμο Μουσείο. Το Μουσείο Γρίφων διαθέτει σήμερα μία από τις μεγαλύτερες συλλογές γρίφων, παγκοσμίως. Πρόσφατα ανακηρύχθηκε **Ευρωπαϊκό Κέντρο Επιστήμης, Τεχνολογίας και Τέχνης STARTS** (Science+Technology+ARTS). Κατόπιν πρότασης και σε συνεργασία με την Ελένη Γραμματικοπούλου, με πολυετή πείρα, σημαντικές επιτυχίες και μεγάλες διοργανώσεις στον χώρο της Επικοινωνίας της Επιστήμης, η ίδρυση του Μουσείου Γρίφων οδήγησε στην ιδέα της διοργάνωσης ενός Φεστιβάλ Γρίφωνστο Καστελλόριζο, με τη φιλοδοξία το ακριτικό νησί να **παραγάγει** και να εξαγάγει **πολιτισμό.**

Η ιστορία των γρίφων όμως έχει τις **ρίζες** της βαθιά **πίσω** στον χρόνο. Ο **Κλεόβουλος ο Λίνδιος**, ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας, συνέθεσε αναρίθμητα αινίγματα και γρίφους. Κατά την εποχή του, η Λίνδος κατέστη κέντρο γραμμάτων και τεχνών και ο ίδιος συνέβαλε στην αναστήλωση του ναού της Αθηνάς στον τόπο του. Από τον Δωδεκανήσιο Κλεόβουλο και τον 6οαι. π.Χ, μεταφερόμαστε στους **Δωδεκανήσιους γριφολόγους** και γριφοποιούς του 21ουαι. μ.Χ., οι οποίοι, αποτίοντας φόρο τιμής στην πόλη της Αθηνάς, ταξιδεύουν με το Φεστιβάλ Γρίφων Καστελλορίζου στην πρωτεύουσα της Ελλάδας, την Αθήνα.

Επόμενη στάση, λοιπόν, η Βιβλιοθήκη της Βουλής των Ελλήνων: ένας τόπος εξερεύνησης και «θεματοφύλακας» της γνώσης, της **συνεργατικής μάθησης** και της συνδημιουργίας, προσβάσιμος σε μικρούς και μεγάλους. Εκεί οι Γρίφοι Λογικής συναντούν τις Επιστήμες και τον Πολιτισμό μέσα από σειρά δράσεων, προσαρμοσμένων σε κάθε ηλικία. Σε έναν κόσμο που συνεχώς μεταβάλλεται, **η δημιουργική σκέψη** οδηγεί στην **καλύτερη κατανόηση της γνώσης**, πέρα από τα καθιερωμένα εκπαιδευτικά πρότυπα. Απευθυνόμαστε σε όλους εκείνους που ανυπομονούν να προσεγγίσουν την **επιστημονική γνώση** μέσα από διαφορετικά εργαλεία και τρόπους μάθησης. Στόχος μας είναι μικροί και μεγάλοι να προβληματιστούν, να πειραματιστούν και, μέσα από συζητήσεις, παρουσιάσεις, διαδραστικά παιγνίδια και βιωματικά εργαστήρια, να δώσουν τις δικές τους λύσεις στους γρίφους. Μεγάλοι διαγωνισμοί δισδιάστατων και τρισδιάστατων γρίφων, ένα κυνήγι θησαυρού μέσα στα βιβλιοστάσια και τα αναγνωστήρια της Βιβλιοθήκης. Και μη φοβηθεί κανείς τη Μέδουσα της Μεγίστης, απαιτητική μεν, αξιαγάπητη δε…

Θα κυριαρχεί παντού και ως λογότυπο και ως ο κυριότερος προς επίλυση γρίφος!

Ας δούμε όμως και τον χώρο των εκδηλώσεων του φεστιβάλ γρίφων.

Το **Δημόσιο Καπνεργοστάσιο της Λένορμαν… με λίγες λέξεις:** Το 1883, επί κυβερνήσεως Χαρίλαου Τρικούπη, επιβάλλεται φόρος στον καπνό, δημιουργούνται, με κρατική δαπάνη, τα πρώτα δημόσια καπνεργοστάσια και καθορίζεται η λειτουργία τους. Οι απασχολούμενοι εργάτες διορίζονται από τον Υπουργό Οικονομικών και επιβλέπονται από διευθυντές και ελεγκτές, που είναι δημόσιοι υπάλληλοι. Στην Αθήνα, το πρώτο δημόσιο καπνεργοστάσιο κατασκευάζεται το 1887 επί της οδού Αριστοτέλους και καταστρέφεται το 1928 από πυρκαγιά.

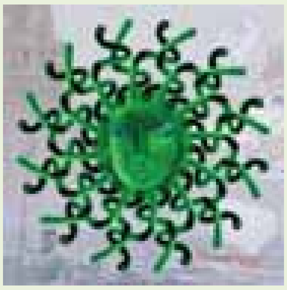
Το δεύτερο δημόσιο καπνεργοστάσιο της Αθήνας οικοδομείται τη διετία 1928-1930 στην τότε οδό

Κηφισσού, τη γνωστή σήμερα Λένορμαν, στην απομακρυσμένη από το κέντρο, αραιοκατοικημένη συνοικία της Κολοκυνθούς. Το κτήριο, με συνολικό εμβαδόν 19.000 τ.μ., είναι βιομηχανικής αρχιτεκτονικής, διώροφο με ημιυπόγειο και αναπτύσσεται σε τετράγωνη κάτοψη. Αποτελείται από τέσσερις πτέρυγες, παραταγμένες περιμετρικά του οικοδομικού τετραγώνου, οι οποίες εσωτερικά δημιουργούν μία μεγάλη τετράπλευρη υαλοσκεπή αυλή, 1000 τ.μ. Κτήριο καθ' όλα συγχρονισμένον και ευρυχωρότατον από την αρχή, το Δημόσιο Καπνεργοστάστιο Αθηνών συμμετέχει σε γεγονότα και προσαρμόζεται σε εξελίξεις που σφραγίζουν **την πολιτική, οικονομική, κοινωνική και πολιτιστική** ιστορία της Ελλάδας, καθώς και τη συνακόλουθη μεταμόρφωση του αστικού της τοπίου, από τον Μεσοπόλεμο έως τον 21 αιώνα (…)

Από το 1989, το Υπουργείο Πολιτισμού προχωρά στον χαρακτηρισμό του Καπνεργοστασίου της Λένορμαν ως ιστορικού διατηρητέου μνημείου, μαζί με τον μηχανολογικό του εξοπλισμό. Το κτήριο παραχωρείται, το 2000, από την **Κτηματική Υπηρεσία** του **Δημοσίου** εξολοκλήρου στη Βουλή των Ελλήνων. Σήμερα στεγάζει υπηρεσίες και Τμήματα της **Βιβλιοθήκης της Βουλής**, καθώς και τη Διεύθυνση Εκδόσεων και Εκτυπώσεων της Βουλής.

Γιατί το λογότυπο του Φεστιβάλ είναι η Μέδουσα;

Η Μέδουσα θα παρουσιαστεί στην Αθήνα έτσι ώστε να γίνει γνωστός στο ευρύ κοινό ένας από τους πιο (πολύπλευρα) ελκυστικούς γρίφους που έχουν κατασκευαστεί ποτέ. Σύμφωνα μάλιστα με τον Ησίοδο, η θεά



Αθηνά (η προστάτιδα της Αθήνας) ήταν εκείνη που βοήθησε τον Περσέα να νικήσει τη Μέδουσα.

Το Φεστιβάλ Γρίφων Καστελλορίζου, που μεταφέρεται στην Αθήνα, έχει λογότυπό του έναν γρίφο με τη μορφή της Μέδουσας. Σκοπός του είναι η τοποθέτηση των 24 φιδιών πάνω στο πλαίσιο με το πρόσωπο της Μέδουσας έτσι ώστε τα φίδια να **τέμνονται** σε ίδια **χρώματα**. Αποτελεί μια ιδέα του Πανταζή Χούλη υπολογισμένη να **έχει μοναδική λύση**. Ο τρόπος που πρέπει να ενωθούν τα φίδια παραπέμπει σε ένα νέο είδος ταιριαστικού γρίφου που απαιτεί μια εξειδικευμένη **γεωμετρική σκέψη**, λόγω του τρόπου με τον οποίο αλληλοεπιδρούν τα φίδια. Ο γρίφος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σαν επιτραπέζιο παιχνίδι για περισσότερους παίκτες.

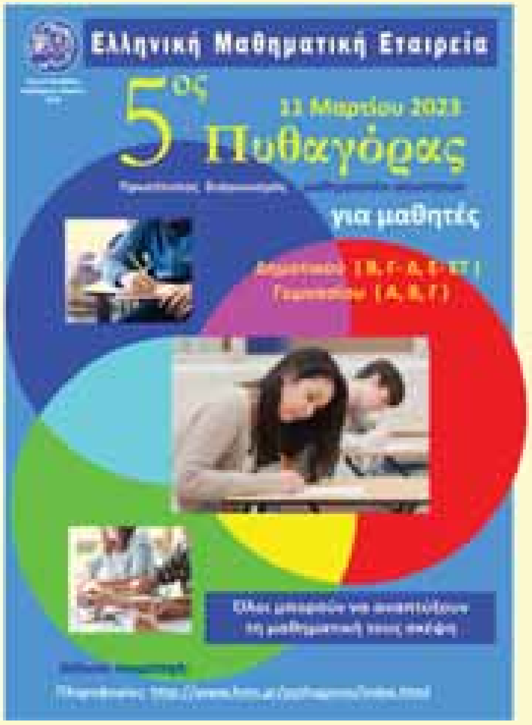
Η επιλογή της Μέδουσας δεν είναι τυχαία, καθώς σύμφωνα με τον Αισχύλο που αναφέρει «Γοργόνεια πεδία της Κισθήνης» (Προμηθέας Δεσμώτης, στ. 793) και τον Στράβωνα που επαληθεύει ότι η **Κισθήνη** είναι η **Μεγίστη**, αποδεικνύεται η **καστελλοριζιακή** καταγωγή της **Μέδουσας**. Παράλληλα, έχουν προστεθεί και πολλά άλλα σχετικά στοιχεία, όπως τα νομίσματα της Μεγίστης, η ύπαρξη σπηλιάς του Κύκλωπα (ως μέρος της αρχαίας Λυκίας που ήταν η πατρίδα των αρχαιολογικών Κυκλώπων) κ.α

Εκδηλώσεις από το φεστιβάλ Γρίφων

Από το πρόγραμμα του φεστιβάλ ξεχωρίζουν οι παρουσιάσεις και οι δραστηριότητες:
Γεωμετρικές Πράσινες βιώσιμες Πόλεις – Χρυσή τομή και Ακολουθία Fibonacci, Εργαστήριο "Μαθαίνω και Λύνω" «μια εξυπνη περιήγηση στο χώρο των γρίφων λογικής/Sudoku, Κρυπτογραφία και Κόμικς, Cinemathesis, Έξυπνα Μαθηματικά, Δούρειος Γρίφος, Διαμάντια από τα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, Μαθηματικός Διαγωνισμός Γρίφων «Με χαρτί και μολύβι», Η ταχύτερη επίλυση του κύβου Rubik από τον ταχυδακτυλουργό Antuan the Magician, Οστομάχιον, ο αρχαιότερος ελληνικός γρίφος, Διαγωνισμός ταχείας επίλυσης διαφορετικών τρισδιάστατων Γρίφων, η γλώσσα των Μαθηματικών ως συνιστώσα του μαθηματικού γραμματισμού, Το «Ζεστό Κοράλι» μια σφαιρική αναφορά στο Καστελλόριζο, Η κυρά της Ρω.

5ος διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ 2022

Πρωτότυπος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων



Στις **11 Μαρτίου 2023** θα γίνει ο ετήσιος διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ.

Ο διαγωνισμός μαθηματικών ικανοτήτων ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της ΕΜΕ είναι στην **ουσία μία εκπαιδευτική έρευνα** μεγάλης κλίμακας. Κεντρικός του στόχος, είναι η ανάπτυξη των βασικών μαθηματικών ικανοτήτων, που προσδιορίζουν τις **δυνατότητες να σκέπτεται** ο μαθητής με μαθηματικό τρόπο και να αξιοποιεί βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες.

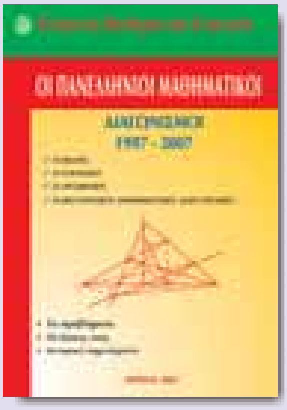
Ο διαγωνισμός αυτός, ο οποίος θα πραγματοποιηθεί ηλεκτρονικά εξ΄ αποστάσεως και αυτή τη χρονιά, **δεν** ελέγχει άμεσα ή έμμεσα τη σχολική επίδοση και τις γνώσεις, αλλά την ικανότητα του διαγωνιζόμενου να **σκέφτεται** με τα **εφόδια** που τα Μαθηματικά προσδίδουν στη **σκέψη**. Με βάση τις μαθηματικές δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων διακρίνουμε τις παρακάτω πτυχές της μαθηματικής ικανότητας: **αριθμητική** ικανότητα, **γεωμετρική** ικανότητα, ικανότητα **επαγωγικού** συλλογισμού, **συνδυαστική** ικανότητα, ικανότητα **μετάφρασης δεδομένων** από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο. (π.χ. η εξαγωγή συμπερασμάτων από ένα διάγραμμα, από ένα σχήμα ή από μία εικόνα), **αλγεβρική** ικανότητα, ικανότητα επίλυσης προβλήματος, **αλγοριθμική** ικανότητα.

Βασικό χαρακτηριστικό του διαγωνισμού είναι ότι αποτελεί **εργαλείο βελτίωσης** των μαθηματικών ικανοτήτων, αφενός σε επίπεδο σχολικής τάξης και αφετέρου σε επίπεδο μεμονωμένων μαθητών τονίζοντας τη σύνδεση των μαθηματικών ικανοτήτων με τις κατάλληλες **στρατηγικές** αντιμετώπισής τους. Επίσης χαρακτηριστικό του, είναι αφενός η **μη απογοήτευση** των μαθητών που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά, αλλά ταυτόχρονα και η ύπαρξη **πρόκλησης** για μαθητές με **υψηλούς** στόχους στα Μαθηματικά. Ακόμη επιτρέπει την εξάσκηση των μαθητών σε θέματα **τύπου PISA**, που είναι ένα πεδίο στο οποίο οι Έλληνες μαθητές υστερούν σε μεγάλο βαθμό. Ακόμη ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ αποτελεί τη βάση και τον **συνδετικό κρίκο** της υποχρεωτικής εκπαίδευσης με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ (Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, προκριματικός) που καταλήγουν στη συγκρότηση της ελληνικής ομάδας που μετέχει σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, με **αποκορύφωμα** την Παγκόσμια **Ολυμπιάδα των Μαθηματικών**. Τέλος, ο διαγωνισμός ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ μπορεί να **αποτελέσει** σημαντικό βοήθημα στο νέο θεσμικό πλαίσιο του ΥΠΑΙΘ (άρθρο 104, Νόμος 4823/2021), που αφορά στην αξιολόγηση του εκπαιδευτικού συστήματος μέσω εξετάσεων διαγνωστικού χαρακτήρα για τους μαθητές/τριες της **ΣΤ' τάξης των δημοτικών** σχολείων και τους μαθητές/τριες **της Γ' τάξης των γυμνασίων** στη Γλώσσα και στα Μαθηματικά, με σκοπό την εξαγωγή πορισμάτων σχετικά με την πορεία υλοποίησης των προγραμμάτων σπουδών και τον βαθμό επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων σε εθνικό και περιφερειακό επίπεδο και σε επίπεδο σχολικής μονάδας.

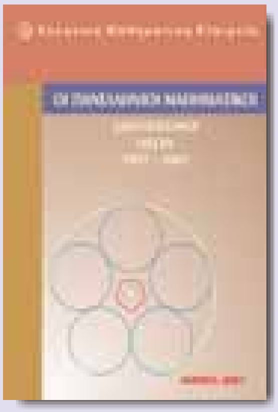
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



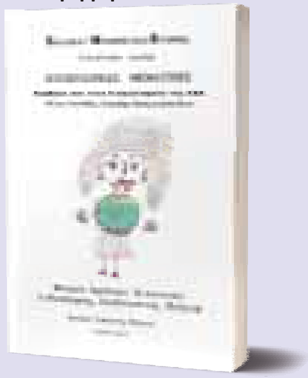
Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

Διαγωνισμοί

Τιμή βιβλίου: 12€

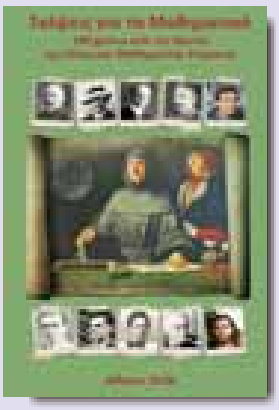
Τιμή βιβλίου: 12€



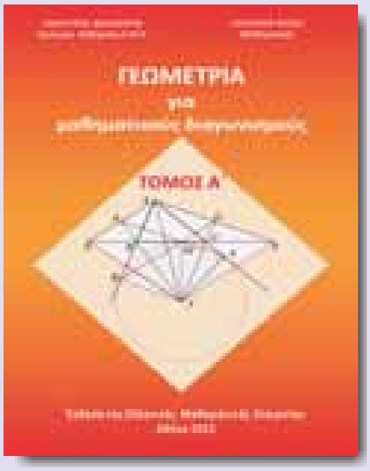
Τιμή βιβλίου: 12€

Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο



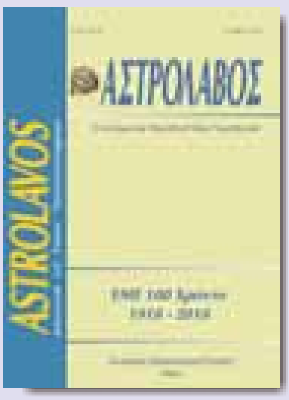
Τιμή βιβλίου: 15€



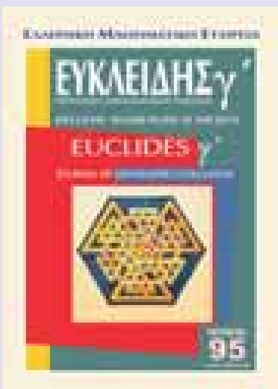
Τιμή βιβλίου: 25€

Τιμή βιβλίου: 20€

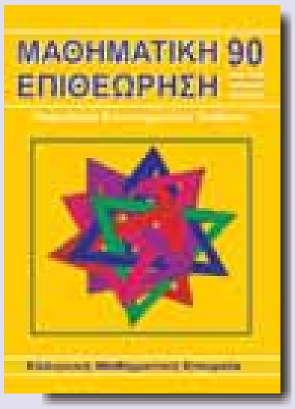
Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr