ΑΣΚΗΣΕΙΣ | ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ | ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ | ΓΕΓΟΝΟΤΑ

129

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023 ευρώ 3,5

Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικών στις Σέρρες

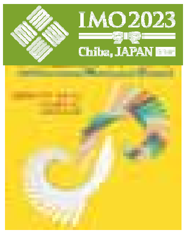
ΣΕΡΡΕΣ

Τα Μαθηματικά της Αμφίπολης

4 μετάλλια

27th JBMO
Έγινε στην **Αλβανία**
23 -28 Ιουνίου 2023

5 μετάλλια



64th IMO
Έγινε στην **Ιαπωνία**
2-13 Ιουλίου 2023

6 μετάλλια

40th BMO
Έγινε στην **Τουρκία**
8-13 Μαΐου 2023

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 129 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2023 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη

Γενικά Θέματα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

... να πούμε
καλή σχολική χρονιά
με αισιοδοξία
και με πείσμα
στους δύσκολους καιρούς ...

Και όπως λέει και η ακαδημαϊκός

... αν είχα να δώσω
μια συμβουλή στους νέους

... θα ήταν
να έχουν ένα όνειρο
και να το κυνηγήσουν ...

... με τα πόδια στη γη
και τα μάτια
στον ουρανό ...

Ελένη Γλύκατζη - Αρβελέρ
[Αθήνα 1926 -]
βυζαντινολόγος - ιστορικός
Ακαδημαϊκός
σε πρόσφατη αναφορά της
Από το Lavart 2023

Η επιτροπή σύνταξης του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

$$2023 = (2+0+2+3)\cdot(2^2+0^2+2^2+3^2)^2$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	4 Νοεμβρίου	2023
Ευκλείδης:	20 Ιανουαρίου	2024
Αρχιμήδης:	24 φεβρουαρίου	2024

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών,** αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Ο μαγικός κόσμος των Μαθηματικών στην Αμφίπολη των Σερρών

Δομουχτσή Ευαγγελία – μαθηματικός
Ντρέγκα Ευαγγελία – φιλόλογος

Εικόνα 1.
https://www.hellenicaworld.com/
Greece/Geo/gr/Amfipoli.html

Το πολιτιστικό και αρχαιολογικό απόθεμα είναι η 'φωτογραφία' του χρόνου στο χώρο. Τα μνημεία και οι αρχαιολογικοί χώροι αποτελούν μοναδικά και σημαντικότατης αξίας πολιτιστικά αποθέματα, αποδεδειγμένα και γενικώς αποδεκτά. Για ποιούς όμως λόγους είναι σημαντική η μελέτη και η αξιοποίησή τους; Υπάρχει κάποια **μέθοδος διαχείρισης της κληρονομιάς**, η οποία να αποκαλύπτει **την αξία των μνημείων**;[1] Με ποιούς τρόπους θα μπορούσαμε να αποσυμβολίσουμε τα κρυμμένα μυστικά της αρχαίας εποχής; Ίσως η καθολική και διαχρονική μαθηματική γλώσσα να έχει τη λύση.

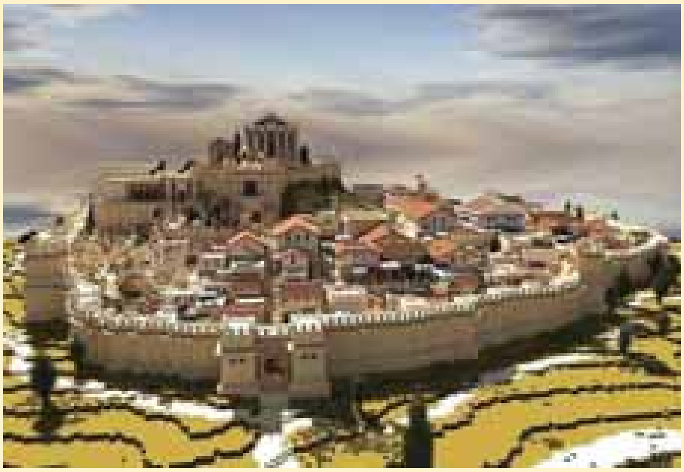
Στη Βόρεια Ελλάδα, η αρχαία Αμφίπολη υπήρξε για δώδεκα συνεχείς αιώνες (από το 437 πχ έως και τον 7ο αιώνα μ.χ.) ένα μεγάλο μητροπολιτικό κέντρο της ελληνικής αρχαιότητας. Η πρωτοκαθεδρία της πόλης ήταν αδιαμφισβήτητη στον αρχαίο ελληνικό κόσμο πολύ **πριν δημιουργηθούν άλλες πόλεις** στην Μακεδονία. Και όσο για τον περίφημο Τύμβο του λόφου Καστά και για τον Λέοντα της Αμφίπολης έχουν γραφεί αμέτρητες σελίδες από τις απαρχές της αρχαιολογικής ιστορίας. Στη συνέχεια, στο πρώτο μέρος του άρθρου, μετά από μια πολύ σύντομη αναδρομή στην πλούσια ιστορία της Αμφίπολης, θα γίνει αναφορά στον περίφημο Τύμβο Καστά και στον Λέοντα της Αμφίπολης, ενώ στο δεύτερο μέρος θα μελετηθούν τα κρυμμένα **μαθηματικά μυστικά του Τύμβου**: πώς εφαρμόζεται ο κύκλος, ο αριθμός π, η χρυσή τομή, ο υπολογισμός των 365 ημερών του έτους και η γεωμετρική ακρίβεια της "ηλιολατρείας".

Αμφίπολη: Ιστορική αναδρομή

Ήδη από τα προϊστορικά 3000 π.Χ. έτη η γεωγραφική θέση της Αμφίπολης στην ανατολική Μακεδονία αποδεικνύει τη στρατηγική σημαντικότητά της. Αργότερα οι Μακεδόνες Ηδονοί ιδρύουν την αρχαία πόλη της Αμφίπολης στις όχθες του Στρυμόνα ποταμού, στη θέση της πόλης που παλαιότερα ονομαζόταν Εννέα Οδοί (ή πολύ κοντά σε αυτήν), περίπου 4,5 χιλιόμετρα από τη θάλασσα, και η ιστορία της ξεκινά.

Το ενδιαφέρον των Αθηναίων για την Αμφίπολη εκδηλώθηκε πολύ νωρίς, από το 605 π.Χ. Το 466 π.Χ ένα σώμα 10.000 ανδρών επιχείρησαν την κατάληψή της όμως η εκστρατεία απέτυχε και οι πέντε στρατηγοί-ηγέτες της εκστρατείας δεν σώθηκαν από την σφαγή. Τελικώς το 437 π.Χ. την κατακτούν, με στρατηγό τον Άγνωνα που απώθησε τους Ηδονούς, και **αναπτύσσουν εκεί σπουδαίο πολιτισμό λόγω της θέσης της**, των φόρων που εισέπρατε και της παραγωγής ναυπηγησίμων ξύλων. Αυτά αποδεικνύεται από τα καταπληκτικά ευρήματα των τάφων της εποχής της ακμής της, τα διάφορα λεπτότατης τέχνης κοσμήματα γυναικών, τα μικρά αριστοτεχνικά αγαλματίδια και αγγεία σπάνιας και εξαιρετικής τέχνης. Ο Δημοσθένης στους λόγους του τόνιζε πάντα τη σημασία της πόλης γιατί η πόλη ήταν κατάλληλη για τα λιμάνια της για την ναυπηγήσιμη ξυλεία της, τα μεταλλεία χρυσού και αργυρού του Παγγαίου και την εύφορη πεδιάδα της[2]. Άλλωστε ο Στρυμόνας ήταν πλωτός ποταμός εκείνη την εποχή που διευκόλυνε τις μετακινήσεις και συνέδεε τη λίμνη Κερκινίτιδα στα βόρεια σύνορα των Σερρών, με τον Στρυμονικό κόλπο, στα νότια. Η Αμφίπολη οφείλει τη μεγάλη ακμή της στους δεσμούς της με την Αθήνα, αφού για πολλούς αιώνες υπήρξε κέντρο ακτινοβολίας του αθηναϊκού πνεύματος.

Το 424 π.Χ ο Λακεδαιμόνιος **στρατηγός Βρασίδας** επικεφαλής Σπαρτιατικού στρατεύματος και με τη βοήθεια των Αργιλίων **εγκαθιστά φρουρά κοντά στην Αμφίπολη**. Αθηναίοι (με στρατηγό τον γνωστό ιστορικό Θουκυδίδη) και Σπαρτιάτες συγκρούονται σφοδρά για την ηγεμονία τους στη περιοχή της Αμφίπολης. Ο Βρασίδας προλαβαίνοντας τον Θουκιδίδη, πετυχαίνει την παράδοση της πόλης. Ο Θουκυδίδης κατηγορήθηκε ως δοσίλογος έναντι των Αθηναίων και καταδικάσθηκε σε εικοσαετή εξορία, κατά τη διάρκεια της οποίας συνέγραψε το ιστορικό του έργο, χωρίς να επιστρέψει τελικώς ποτέ στη Αθήνα φοβούμενος την ποινή του θανάτου. Το 422 π.Χ **ο Κλέων** ο Δημαγωγός έπεισε τους Αθηναίους και με 300 ιππείς, 1200 πεζούς και 30 πλοία αποβιβάστηκε στη Χαλκιδική με κατεύθυνση την Ηιόνα που ήταν το επίνειό της. Ο Βρασίδας αφού άφησε το μεγαλύτερο μέρος του στρατού στην Αμφίπολη, με 2000 πεζούς και 300 ιππείς στρατοπέδευσε στους πρόποδες των Κερδυλλίων. Η μάχη ήταν σφοδρή και **η ήττα των Αθηναίων** ακόμη μεγαλύτερη που αναγκάστηκαν να τραπούν σε φυγή. Από τη σύγκρουση, το θάνατο βρήκε ο Κλέων όπως και ο στρατηγός των Λακεδαιμονίων Βρασίδας. Το 415 και το 359 π.Χ. ήταν οι τελευταίες αποτυχημένες απόπειρες ανακατάληψης της Αμφίπολης από τους Αθηναίους. Ο Φίλιππος το 358 π.Χ εκμεταλλευόμενος της αδυναμίας των Αθηναίων κατέλαβε την Αμφίπολη και το 357 π.Χ. μάλιστα εγκατέστησε σ’ αυτήν το βασιλικό νομισματοκοπείο του κράτους. Στην εποχή των Μακεδόνων η Αμφίπολις αναδείχτηκε σε ισχυρή πόλη του Μακεδονικού βασιλείου με εσωτερική αυτονομία και με σημαντική οικονομική και πολιτιστική άνθιση. Με την πτώση του Μακεδονικού Βασιλείου από τους Ρωμαίους η Αμφίπολη έγινε μέρος της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας (168 π.Χ.). Ημέρες δόξας και πάλι, η Αμφίπολις ορίζεται πρωτεύουσα της Πρώτης Μερίδος της Μακεδονίας[3]. Η Ρωμαϊκή Εποχή είναι για την Αμφίπολη περίοδος ακμής μέσα στο πλαίσιο της κοσμοκρατορίας των Ρωμαίων. Σταθμός της Εγνατίας Οδού και πρωτεύουσα μιας πλούσιας ενδοχώρας, **η πόλη αναπτύσσεται οικονομικά και πολιτιστικά.** Γνωρίζει βέβαια καταστροφές και λεηλασίες αλλά με την υποστήριξη και των Ρωμαίων αυτοκρατόρων, ιδιαίτερα του Αυγούστου και του Αδριανού, παραμένει ένα από τα σημαντικά αστικά κέντρα της Μακεδονίας ως την ύστερη αρχαιότητα. Η ακμή της πόλης αντικατοπτρίζεται στα μνημειακά κτήρια με τα ψηφιδωτά δάπεδα και τις τοιχογραφίες, αλλά και στα αρχαιολογικά ευρήματα που οι ανασκαφές έχουν φέρει στο φως.



Εικόνα 2. Αρχαία Αμφίπολη https://eranistis.net/
wordpress/2014/08/18

Η ήρεμη ζωή της πόλης σταματάει δυστυχώς, κατά τον 6ο αι. μ. Χ. Μετά την πτώση των Ρωμαίων, την Αμφίπολη κατέλαβαν οι Ερούλοι, οι Βησιγότθοι και οι Σλάβοι, σταδιακά ερήμωσε για να **εγκαταλειφθεί εντελώς τον 8ο αιώνα μ.Χ.** μετά από τόσους αιώνες ιστορίας, όταν οι περισσότεροι κάτοικοι κατέφυγαν στην κοντινή παραθαλάσσια αρχαία πόλη Ηιώνα, όπου μετονομάστηκε κατά τα Βυζαντινά έτη Χρυσόπολη. **Το 1342 κατελήφθη από τους Σέρβους** και το 1373 από τους Τούρκους, δέκα χρόνια πριν την οριστική κατάληψη των Σερρών από τον Μπέηλερμπεη Τιμουρτάς. Σήμερα, είναι χτισμένος ο ομώνυμος σύγχρονος οικισμός, περίπου 60 χλμ. Νοτιοανατολικά της πόλης των Σερρών.

Ο τάφος της Αμφίπολης

Τύμβος Καστά (ή λόφος Καστά ή τάφος της Αμφίπολης) **ονομάζεται ο κυκλικός λόφος** στην περιοχή της αρχαίας Αμφίπολης. Βρίσκεται στις όχθες του ποταμού Στρυμόνα, περίπου 900 μ. νοτιοανατολικά από το χωριό Νέα Μεσολακιά Σερρών. Στο εσωτερικό του λόφου έχει ανακαλυφθεί το περίφημο Μακεδονικό ταφικό μνημείο **της πρώιμης ελληνιστικής περιόδου.** Η νεότερη αρχαιολογική ανασκαφική έρευνα του 2012-2015 με υπεύθυνη ανασκαφέα την αρχαιολόγο Κατερίνα Περιστέρη, έφερε στο φως «ένα μνημειακό ταφικό συγκρότημα, μοναδικό στο είδος του που αποτελείται από ένα μαρμάρινο περίβολο ύψος 3 μ., διαμέτρου 158,40 μ. και περιμέτρου 497 μ., από ένα σύνθετο μακεδονικό τάφο και από το μνημείο του λέοντα που βρίσκονταν στην κορυφή του τύμβου»[4]. Τον Αύγουστο του 2014 η ανασκαφή αποκάλυψε την είσοδο του τύμβου, όπου βρέθηκε θύρα πάνω από την οποία υπάρχουν δύο ακέφαλες μαρμάρινες Σφίγγες. Κατά τη συνέχεια των ανασκαφών, στο εσωτερικό του τύμβου, πάνω σε πεσσούς, βρέθηκαν σκαλισμένες δύο εξαιρετικής τέχνης Καρυάτιδες και στη συνέχεια, πριν τον κυρίως ταφικό θάλαμο, ένα βοτσαλωτό-ψηφιακό δάπεδο που απεικονίζει την αρπαγή της Περσεφόνης από τον Πλούτωνα.

Εικόνα 3. https://www.xronometro.com/giati-einai-toso-simantiko-mnimeio/

Ο τύμβος της Αμφίπολης, σύμφωνα με την υπεύθυνη αρχαιολόγο Κ. Περιστέρη, κατασκευασμένος στα τέλη του 4ου αιώνα π.Χ. (325 – 300 π.Χ.) συμπίπτει ιστορικά με μια δραματική για τη Μακεδονία εποχή: **διαμάχες κληρονόμων Μεγάλου Αλεξάνδρου, δολοφονία Ρωξάνης και μικρού Αλέξανδρου Δ' και άλλα.** Αυτό το σπουδαίο μνημείο αποτελεί το μεγαλύτερο μυστήριο στην αρχαιολογία, αυτή τη στιγμή με πολλές διασημότητες της εποχής να τον "διεκδικούν" ως ταφικό τους μνημείο: Η Ρωξάνη ίσως; Ο γιός του ή η κόρη του, η Κλεοπάτρα; Κάποιος στρατηγός; Ο Ηφαιστίωνας ίσως; Ή μήπως ο ίδιος ο Μέγας Αλέξανδρος; [5]

Εικόνα 4. https://el.wikipedia.org/wiki

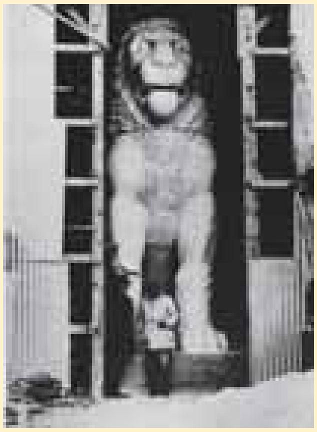
Ο Λέων της Αμφίπολης

Σημείο κατατεθέν, έμβλημα της περιοχής αλλά και της Μακεδονίας, είναι το λιοντάρι της Αμφίπολης. Πρόκειται για ένα από τα σημαντικότερα μνημεία του 4ου αι. π.Χ. που διασώθηκαν και μέχρι τώρα είναι το μοναδικό που αναστηλώθηκε. Βρίσκεται σήμερα δίπλα στην παλιά γέφυρα του Στρυμόνα στην επαρχιακή οδό Αμφίπολης - Σερραϊκής Ακτής. Ο "Λέων της Αμφίπολης" είναι ένα μεγάλων διαστάσεων γλυπτό που απεικονίζει ένα λιοντάρι που κάθεται στα πίσω του πόδια, και βρέθηκε σε κομμάτια από τον ελληνικό στρατό το 1912, κατά τη διάρκεια του Α' Βαλκανικού Πολέμου, κατά την αποξήρανση της κοίτης του Στρυμόνα για την κατασκευή της σύγχρονης γέφυρας. Έχει ύψος 5,37 μ. που μαζί με τη βάση έφτανε τα 15.84 μέτρα. Το

Εικόνα 5. https://www.xronometro.com

τεράστιο μέγεθός του δηλώνει πως το λιοντάρι ήταν έτσι κατασκευασμένο ώστε να διακρίνεται από μεγάλη απόσταση. Ο καλλιτέχνης που φιλοτέχνησε τον Λέοντα **ήταν ο ίδιος που σκάλισε και τις Σφίγγες, στην είσοδο του Τάφου της Αμφίπολης.** [6]

Το ταφικό μνημείο του Λέοντος συνδέεται άρρηκτα με το ταφικό σήμα του τύμβου, που στην πραγματικότητα είναι το θεμέλιο του, και τοποθετείται στο μέσον και στο υψηλότερο σημείο του, βάσει **και της γεωμετρίας που δίνει ο ταφικός περίβολος.** Από τις ανασκαφικές έρευνες αποδείχθηκε ότι η αρχική του θέση ήταν πάνω στο οικοδόμημα 9,95 x 9,95 x 5,3 μ. που βρέθηκε στην κορυφή του λόφου Καστά. Το υλικό της βάσης του λέοντα προέρχεται από μαρμάρινα αρχιτεκτονικά μέλη του περιβόλου και **χρησιμοποιήθηκε ως φράγμα του ποταμού σε δεύτερη χρήση ήδη από τη ρωμαϊκή εποχή**[7]. Μετά το 1917 τα μαρμάρινα αρχιτεκτονικά μέλη συγκεντρώθηκαν στη θέση της σύγχρονης γέφυρας μαζί με τα κομμάτια του σπασμένου λέοντα, που αναστηλώθηκε το 1937 από το γλύπτη Α. Παναγιωτάκη[8]. Οι αρχαιολόγοι τονίζουν πως συνήθως, οι Λέοντες στα μνημεία τοποθετούνται είτε λόγω κάποιας μάχης, είτε για κάποιον σπουδαίο Στρατηγό. Από τη στιγμή που την εποχή κατασκευής του μνημείου δεν βρισκόταν σε εξέλιξη κάποια μάχη, οι ερευνητές πιστεύουν πως το άτομο που βρίσκεται μέσα στον Τάφο είναι, **τουλάχιστον, κάποιον σπουδαίος Στρατηγός**![9]



Εικόνα 6. -Ημερομηνία: 1937 : «The Lion Monument at Amphipolis» by Oscar Broneer

Εικόνα 7. https://gr.theamphipolistomb.com/lion

Τα Μαθηματικά της Αμφίπολης

Ο Μέγας Αλέξανδρος κατά τη πραγμάτωση του επεκτατικού του ονείρου χρησιμοποίησε και ορισμένους "συμβούλους-επιτελείς", όπως ο "αρχιτέκτονας" Δεινοκράτης, σπουδαίος άντρας της εποχής. Αυτός ήταν (σύμφωνα με τους αρχαιολόγους ερευνητές του τύμβου) ο υπεύθυνος για το **γεωμετρικό αυτό θαύμα.**

Ο κύκλος

Ο Τύμβος της Αμφίπολης, μοναδικός σε διαστάσεις, συνολικά φτάνει τα 23 μ. ύψος με 158,40 διάμετρο και με περίβολο ύψους 3 μέτρων. Δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο τόσο στη Μακεδονία όσο και στα Βαλκάνια. Ολόκληρη η κατασκευή αποτελείται από λευκό καλοδουλεμένο μάρμαρο Θάσου και το συνολικό πάχος της κατασκευής ανέρχεται σε 130 εκατοστά. Ο περίβολος αυτός, για το οποίο απαιτήθηκαν περίπου 2.500 κυβικά μαρμάρου είναι ένας τέλειος κύκλος κατασκευασμένος με απίστευτη γεωμετρική ακρίβεια. Στην πραγματικότητα, κάθε μαρμάρινη πέτρα στην περιφέρεια του τοίχου αντιστοιχεί σε περίπου ένα βαθμό, σε μια κατά προσέγγιση μονάδα, σε ένα κύκλο 360 μοιρών. Ο επιβλέπων αρχιτέκτονας της ανασκαφής κ. Μιχάλης Λεφαντζής αναφέρει συγκεκριμένα: «Αυτό το έργο υλοποιήθηκε από αρχιτέκτονα που είχε **υψηλή γνώση της γεωμετρίας**. Αρκεί να αναφέρω ότι χρησιμοποιεί το **π: 3,14 αντί του 3,17** των Αιγυπτίων, που ήταν ως τότε σε χρήση»[10].

Η βασική αρχή που οφείλουμε να θυμόμαστε είναι πως ο Δεινοκράτης ακολουθούσε το σύστημα υπολογισμού των αποστάσεων σύμφωνα με το οδοιπορικό στάδιο (157,4 μ.) και όχι με το Αττικό στάδιο (185 μ.). Έτσι ο κυκλικό τύμβος είναι κατασκευασμένος με διάμετρο (157,4 μ.) και περίμετρο περίπου 497 μ. Στη διαίρεση 497/158 βρίσκουμε το π=3,14. Ακόμη, το ύψος του λίθινου περιμετρικού τοίχου που είναι 2 οργιές (1,574) =3,14 δίνει και πάλι το γνωστό μας π, σύμφωνα με μελετητές[11].

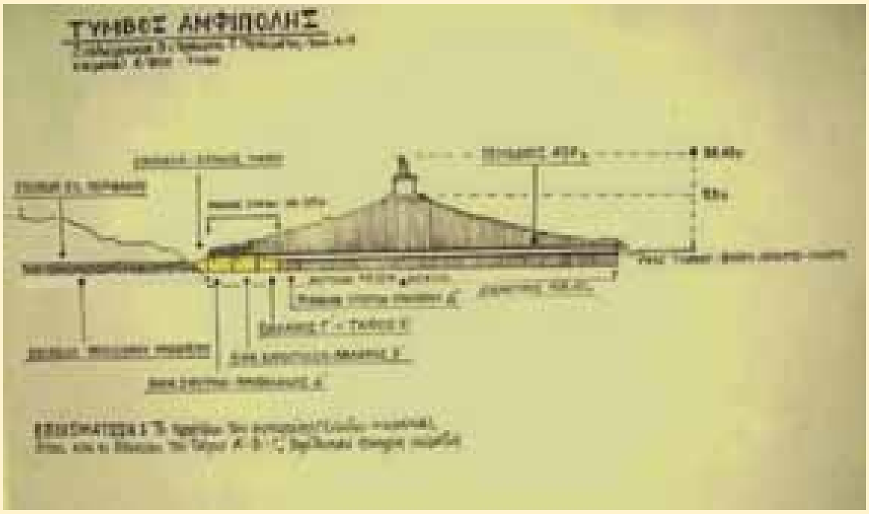
Εικόνα 8. https://arxaia-ellinika.blogspot.com/2022/04/sfragistike-tymvos-kasta.html

Η χρυσή τομή

Το ταφικό αυτό μνημείο του λόφου Καστά -όπως και η ευρύτερη τοπογραφία της περιοχής της Αρχαίας Αμφίπολης, φαίνεται πως έχει οικοδομηθεί με τη γεωμετρική τελειότητα της χρυσής τομής.

Εικόνα 9. https://www.neakriti.gr/article/editors-blogs/giorgos-sahinis-blog/1174732/o-naos-tis-amfipolews-tafos-toy-aleksandroy/

Μέσα λοιπόν στην τέλεια αυτή κυκλική κατασκευή, σύμφωνα με μελετητές[12], ο Δεινοκράτης εγκλώβισε την κατασκευή του στηριζόμενος **στη χρυσή τομή φ = 1,618** ως εξής: Οι δύο πανέμορφες Καρυάτιδες έχουν ύψος 2,27 μ. και βρίσκονται τοποθετημένες πάνω σε μια μαρμάρινη βάση ύψους 1,40 μ. Διαιρώντας 2,27/ 1,40 βρίσκουμε την τέλεια αναλογία 1,62 = φ. Επιπλέον, στην είσοδο του τύμφου, μεταξύ των βάσεων των δύο Καρυάτιδων, και πάλι εμφανίζεται ο ίδιος αριθμός 1,62 μ. = φ. Βάσει του οδοιπορικού σταδίου (157,4 μ.), το ύψος του λόφου Καστά ήταν 1 πλέθρο δηλαδή 26,23 μ. Πάνω σε αυτό ήταν τοποθετημένη η βάση του Λέοντα που προεξείχε 8,3m και πάνω σε αυτή ήταν ο Λέοντας με ύψος 5,13 μ. Δηλαδή **έχουμε την αναλογία 26,23/ 8,3 = 8,3/ 5,13 = 1,618 = φ.**



Εικόνα 10. https://www.iefimerida.gr/news/

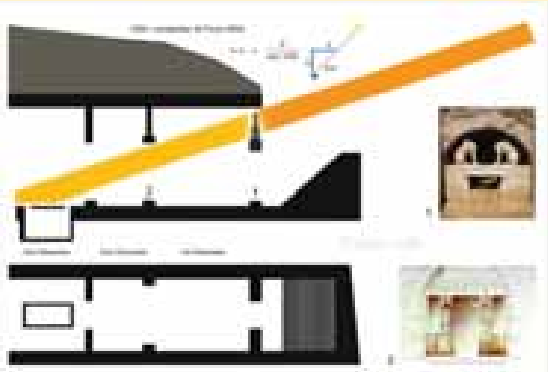
Οι 365 ημέρες του έτους

Ο Δεινοκράτης, πριν από 2400 χρόνια κατάφερε να αποτυπώσει πάνω στην περίβολο του τύμβου **υπολογίζοντας με τεράστια ακρίβεια,** τον αστρονομικό **αριθμό 365,22.** Δηλαδή τον ακριβή αριθμό ημερών ανά έτος μέσα από αστρονομικές μετρήσεις, σύμφωνα με τις μελέτες του Δ. Δενδρινού[13], Καθηγητή της Αρχιτεκτονικής του Πανεπιστημίου του Κάνσας στις Η.Π.Α. Για την ακρίβεια, το μνημείο είναι περικυκλωμένο σε όλο του μήκος με πλάκες μαρμάρου μήκους 1,36 μ. ενώ η περίβολος του τάφου έχει μήκος 497 μέτρα, επομένως ο Δεινοκράτης θα χρειαζόταν ακριβώς 365,44 μαρμάρινες πλάκες μήκους 1,36 μ. για να περικυκλώσει πλήρως τον τύμβο. Καθώς γνωρίζουμε ότι υπάρχουν περίπου 365,25 ημέρες σε ένα **ημερολογιακό έτος** μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί πως **η μέτρηση 365,44** είναι μια εκπληκτική προσέγγιση!

Εικόνα 11. https://www.thessnews.gr/reportaz/thesshistory/

“Ηλιολατρεία” με μαθηματική ακρίβεια

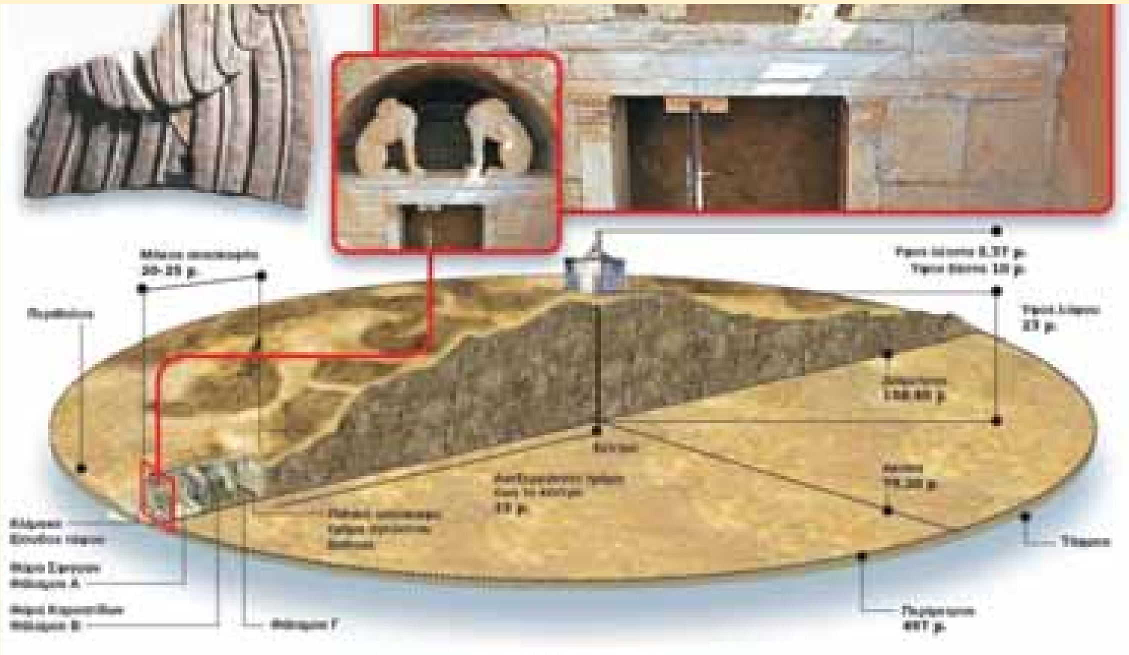
Το φαινόμενο αυτό, εξαιρετικά σπάνιο για τα ελληνικά δεδομένα, συμβαίνει σε σπουδαία μνημεία όπως στο Stonehedge της Αγγλίας, όπου κάθε χρόνο αυτές τις μέρες συρρέουν πλήθη κόσμου για να το παρατηρήσουν, **στις πυραμίδες της Αιγύπτου κ.α.** Πρόκειται για ένα στοιχείο που βοηθάει τους αρχαιολόγους να κατανοήσουν περισσότερο **τον ρόλο του Τύμβου Καστά,** ο οποίος όχι απλά υπερβαίνει αυτόν ενός μεγάλου ταφικού μνημείου αλλά αποτελεί και εμβληματικό χώρο λατρευτικών εκδηλώσεων. Σύμφωνα με μακρόχρονη έρευνα του Θανάση Φουρλή,[14] ερευνητή αρχαιοαστρονομίας, με ακριβείς μαθηματικούς υπολογισμούς και χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας, μπορεί να διαπιστωθεί πως **οι ηλιακές ακτίνες την ανατολή κατά το χειμερινό ηλιοστάσιο (δηλαδή από τις 18 έως τις 28 Δεκεμβρίου,** όταν και καταγράφεται η μικρότερη σε διάρκεια ημέρα του ημερολογιακού έτους) αρχικά «χαιρετούν» τον περίφημο λέοντα που βρισκόταν στην κορυφή, στη συνέχεια πλημμυρίζουν όλους τους εσωτερικούς χώρους του τύμβου, μέχρι και τις Καρυάτιδες. Η διαπίστωση που έπεται αυτής της συνειδητοποίησης είναι πως ο τύμβος κατασκευάστηκε και για κάποιες εκδηλώσεις τις ημέρες του χειμερινού ηλιοστασίου, διαπίστωση που επιβεβαιώθηκε και από τον κ. Λεφαντζή, υπεύθυνο αρχιτέκτονα της ερευνητικής ομάδας στο λόφο Καστά.



Εικόνα 12. https://www.xronometro.com/amfipolis-astronomia/

Συμπεράσματα

Δεν πέρασαν πολλά χρόνια από τότε που όλη η Ελλάδα παρακολουθούσε καθημερινά τις ανασκαφές στον Τύμβο Καστά της αρχαίας Αμφίπολης και με κομμένη την ανάσα ανέμενε την αποκάλυψη: Την αποκάλυψη του τιμώμενου νεκρού.



Είτε πρόκειται για τον Μ. Αλέξανδρο, είτε για τον Ηφαιστίωνα, είτε για οποιοδήποτε άλλο ιστορικό πρόσωπο, το μόνο σίγουρο είναι πως ο Τύμβος, ο Περίβολος, ο Λόφος, ο Λέων, **είναι δημιουργημένα με τέτοια μαθηματική και γεωμετρική ακρίβεια που μόνο με την αρωγή της καταπληκτικής μαθηματικής γλώσσας θα "ξεκλειδώσουν" οι χαλκέντεροι αρχαιολόγοι ερευνητές τα καλά κρυμμένα μυστικά της αρχαιότητας. Και η Αμφίπολη, το μητροπολιτικό αυτό κέντρο της ελληνικής αρχαιότητας, ξέρει καλά να κρατά μυστικά.**

Η ανασκαφική έρευνα στον Τύμβο Καστά συνεχίζεται και μέρα με τη μέρα ολοκληρώνεται το παζλ της ιστορίας, με το Λιοντάρι της Αμφίπολης να στέκει αγέρωχο και επιβλητικό, αποκαλύπτοντας τη σημαντικότητα των ανασκαφικών ευρημάτων που ξετυλίγουν το κουβάρι της ζωής του Μ. Αλεξάνδρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Για παραπομπή στο υποσέλιδο κατά τη κειμενική μορφοποίηση

1. Κουβέλη, Α., 2012. *Ο χώρος ως παρουσία απουσιών: Πρόταση διαχείρισης της πολιτιστικής κληρονομιάς. Μελέτη περίπτωσης: Ενοποίηση στην αρχαία Αμφίπολη.* Διπλωματική εργασία. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Πολυτεχνική σχολή. Τμήμα μηχανικών χωροταξίας, πολεοδομίας και περιφερειακής ανάπτυξης
2. Νομαρχιακή Αυτοδιοίκηση Σερρών – Τομέας Τουρισμού. *Αμφίπολη Αρχαιολογική Κληρονομιά του Ν. Σερρών.*, χ.χ. Ανακτήθηκε από https://www.serres.gr/toyrismos/axiotheata/amfipoli/
3. Υπουργείο Πολιτισμού και Αθλητισμού, 2012, *Αμφίπολις- Ιστορικό* Ανακτήθηκε από http://odysseus.culture.gr/h/3/gh351.jsp?obj_id=2403
4. Περιστέρη Κ., 2020, *Ανακάλυψε την ιστορία της Αμφίπολης- Ολοκλήρωση των ιστορικών και αρχαιολογικών πόρων διασυνοριακής σπουδαιότητας Βουλγαρίας και Ελλάδας σε έναν βιώσιμο θεματικό τουριστικό προορισμό.* Ανακτήθηκε από https://volvipress.gr/anakalypse-tin-istoria-tis-amfipolis-discover-the-history-of-amphipolis/
5. Δεμέτης, Χ., 2014, *Γνωρίστε την αρχαία Αμφίπολη*. Η τοποθεσία και η ιστορία της περιοχής που συνδέεται με τον Μ. Αλέξανδρο. Ανακτήθηκε από https://www.news247.gr/politismos/gnoriste-tin-archaia-amfipoli-i-topothesia-kai-i-istoria-tis-periochis-poy-syndeetai-me-ton-m-alexandro.6289171.html
6. The Amphipolis Tomb- *Ο Τάφος της Αμφίπολης*. Φωτογραφίες, νέα και χάρτης Ανακτήθηκε από http://gr.theamphipolistomb.com/
7. The Amphipolis Tomb- *Ο Τάφος της Αμφίπολης. Ο Λέων.* Ανακτήθηκε από https://gr.theamphipolistomb.com/lion
8. Περιστέρη Κ., 2020, *Ανακάλυψε την ιστορία της Αμφίπολης- Ολοκλήρωση των ιστορικών και αρχαιολογικών πόρων διασυνοριακής σπουδαιότητας Βουλγαρίας και Ελλάδας σε έναν βιώσιμο θεματικό τουριστικό προορισμό.* Ανακτήθηκε από https://volvipress.gr/anakalypse-tin-istoria-tis-amfipolis-discover-the-history-of-amphipolis/
9. The Amphipolis Tomb- *Ο Τάφος της Αμφίπολης. Ο Λέων.* Ανακτήθηκε από https://gr.theamphipolistomb.com/lion
10. Θερμού, Μ., 2013. *Ενα λιοντάρι δείχνει τον τύμβο της Αμφίπολης.* Ανακτήθηκε από: https://www.tovima.gr/2013/08/30/culture/ena-liontari-deixnei-ton-tymbo-tis-amfipolis/
11. Ανυφαντή, Α., 2014. *Μεγάλη αποκάλυψη για την Αμφίπολη.* Ανακτήθηκε από: https://www.hellenicparliament.gr/UserFiles/c0d5184d-7550-4265-8e0b-078e1bc7375a/9049907.pdf
12. Λιναρδάκη, Μ., 2014. *Ο Ναός της Αμφιπόλεως Τάφος του Αλεξάνδρου-Γιώργος Σαχίνης.* Ανακτήθηκε από: https://www.neakriti.gr/article/editors-blogs/giorgos-sahinis-blog/1174732/o-naos-tis-amfipolews-tafos-toy-aleksandroy/
13. Δενδρινός, Δ., 2016. *Τύμβος Της Αμφίπολης: Περίληψη Σε Μία Θεωρία* https://www.tapantareinews.gr/2019/10/blog-post_71.html
14. Εφημερίδα Μακεδονία. 2021. *Αμφίπολη: Το σπάνιο φαινόμενο που συμβαίνει στον Τύμβο Καστά μόνο κατά το χειμερινό ηλιοστάσιο. Τι "κρύβει" η κατασκευή και ο προσανατολισμός του μνημείου.* Ανακτήθηκε από: https://www.makthes.gr/amfipoli-to-spanio-fainomeno-poy-symvainei-ston-tymvo-kasta-mono-kata-to-cheimerino-iliostasio-vinteo-fot-490746
15. https://www.in.gr/2014/10/30/culture/amfipoli-krybei-ki-alloys-tafoys-o-tymbos-kasta/

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 2023

Η 64η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 2023 διοργανώθηκε από την Ιαπωνία στο Τόκιο από 2 μέχρι και 13 Ιουλίου 2023. Η διοργάνωση ήταν πολύ επιτυχής και έγινε δια ζώσης. Τη διοργάνωση είχε αναλάβει η Μαθηματική Εταιρεία της Ιαπωνίας.

Η χώρα μας με 145 βαθμούς κατετάγη στην 26η θέση μεταξύ 112 ομάδων που έλαβαν μέρος και ήταν έκτη μεταξύ των 27 χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Συγκριτικά ήταν η δεύτερη καλύτερη κατάταξη μας μετά την Ολυμπιάδα του 2017 στο Ρίο της Βραζιλίας, όπου με 127 βαθμούς είχαμε πάρει την 12η θέση.

Οι μαθητές που συμμετείχαν και τα μετάλλια που κατάκτησαν είναι οι εξής:

Τζαχρήστας Γεώργιος,	**Δωδωναία Εκπαιδευτήρια Ιωαννίνων,**	**Χρυσό Μετάλλιο**
Λιάμπας Παναγιώτης,	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη,**	**Αργυρό Μετάλλιο**
Λιγνός Ορέστης,	**Εκπαιδευτήρια Ελληνική Παιδεία,**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Φωτιάδης Πρόδρομος,	**Γυμνάσιο –Λ.Τ. Νικηφόρου Δράμας,**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Πετράκης Διονύσιος,	**ΓΕΛ Κανήθου Ευβοίας,**	**Χάλκινο Μετάλλιο**
Κωνσταντινίδης Κωνσταντίνος,	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη,**	**Εύφημη Μνεία**

Αρχηγός της αποστολής ήταν ο πρόεδρος της Ε.Μ.Ε. και Ομότιμος καθηγητής Ε.Μ.Π. **κ. Ανάργυρος Φελλούρης** και υπαρχηγός ο Επίκουρος καθηγητής Πανεπιστημίου Κρήτης **κ. Σιλουανός Μπραζιτίκος**, Στην τελετή λήξης παρευρέθηκε για να συγχαρεί την ομάδα μας ο Αναπληρωτής Πρέσβης της Ελλάδας στην Ιαπωνία κ. **Στυλιανός Χουρμουζιάδης**.

Γενικά η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα είναι διαγωνισμός μεγάλης δυσκολίας και η επιτυχία ακόμη και ενός χάλκινου μεταλλίου είναι πολύ δύσκολη υπόθεση που απαιτεί πέραν από ταλέντο και καλή προετοιμασία.

Η επιμέλεια των λύσεων των προβλημάτων του διαγωνισμού που ακολουθούν οφείλεται στον αρχηγό της αποστολής κ. **Ανάργυρο Φελλούρη** και στον υπαρχηγό κ. **Σιλουανό Μπραζιτίκο.**

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους σύνθετους ακέραιους $n > 1$, οι οποίοι ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: αν $d_1, d_2, \dots, d_k$ είναι όλοι οι θετικοί διαιρέτες του n με $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, τότε ο d_i διαιρεί τον αριθμό $d_{i+1} + d_{i+2}$ για κάθε $1 \le i \le k-2$.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι η απάντηση είναι μόνο οι δυνάμεις πρώτων αριθμών. Πράγματι, αν $n = p^k$, για κάποιον πρώτο p και κάποιον μη αρνητικό ακέραιο k, τότε οι διαιρέτες του n είναι της μορφής p^s, όπου $s = 0,1, \dots k$ και ισχύει ότι: $p^s \mid p^{s+1} + p^{s+2}$.

Αν ο n έχει τουλάχιστον δύο πρώτους διαιρέτες, παίρνουμε τους δύο μικρότερους, έστω $p < q$. Αν $q > p^2$, τότε υπάρχει $k \ge 1$ ώστε $p^k \mid p^{k+1} + q$, άτοπο. Συνεπώς, έχουμε $d_2 = p$ και $d_3 = q$. Τότε, $d_{k-2} = \frac{n}{q}$, $d_{k-1} = \frac{n}{p}$ και $d_k = n$, οπότε πρέπει:

$$d_{k-2} = \frac{n}{q},\ d_{k-1} = \frac{n}{p} \text{ και } d_k = n,$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{n}{q}\left|\frac{n}{p}+n \Rightarrow n\right|\frac{q(1+p)n}{p} \Rightarrow pn|q(1+p)n \Rightarrow p \mid q+pq \Rightarrow p \mid q, \text{άτοπο.}$$

$2^{ος}$ τρόπος . Θα αποδείξουμε πρώτα μία βοηθητική πρόταση.

Λήμμα: $d_i|d_{i+1}$, για κάθε $i = 1,2,\dots,k-1$.

Απόδειξη. Για $i = 1$, ισχύει, αφού $d_1 = 1$. Υποθέτουμε ότι για $i = 2,3,\dots,k-1$ η πρόταση ισχύει για $i-1$, δηλαδή $d_{i-1}|d_i$. Επειδή από την υπόθεση του προβλήματος ισχύει ότι $d_{i-1}|d_i + d_{i+1}$, έπεται ότι $d_{i-1}|d_{i+1}$. Θεωρούμε τώρα τους διαιρέτες

$$d_{k-i} = \frac{n}{d_{i+1}}, d_{k-i+1} = \frac{n}{d_i}, d_{k-i+2} = \frac{n}{d_{i-1}}.$$

Τότε, από την υπόθεση του προβλήματος προκύπτει ότι:

$$\frac{d_{k-i+1} + d_{k-i+2}}{d_{k-i}} = \frac{\frac{n}{d_i}+\frac{n}{d_{i-1}}}{\frac{n}{d_{i+1}}} = \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1}}$$

είναι ακέραιος, οπότε και ο αριθμός $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ είναι ακέραιος, δηλαδή $d_i|d_{i+1}$.

Σύμφωνα με το λήμμα δεν μπορούμε να έχουμε δύο πρώτους διαφορετικούς διαιρέτες για τον n, γιατί τότε ο μικρότερος θα διαιρεί το μεγαλύτερο. Επομένως ο n θα ισούται με δύναμη ενός πρώτου και εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι δυνάμεις πρώτων αριθμών ικανοποιούν τη συνθήκη του προβλήματος..

Πρόβλημα 2. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AB < AC$. Έστω Ω ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC. Έστω S το μέσο του τόξου CB του κύκλου Ω το οποίο περιέχει το σημείο A. Η κάθετη από το σημείο A προς την ευθεία BC τέμνει την ευθεία BS στο σημείο D και τον κύκλο Ω ξανά στο σημείο $E \neq A$. Η ευθεία που περνάει από το σημείο D και είναι παράλληλη προς την ευθεία BC τέμνει την ευθεία BE στο σημείο L. Συμβολίζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BDL με ω. Έστω ότι ο κύκλος ω τέμνει τον κύκλο Ω ξανά στο σημείο $P \neq B$.
Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου ω στο σημείο P τέμνει την ευθεία BS σε σημείο της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\angle BAC$.

Λύση (Πρόδρομος Φωτιάδης)

Ονομάζουμε X την τομή της εφαπτομένης στο P στον κύκλο ω και Y την τομή της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\angle BAC$ με την ευθεία DS.

Για να αποδείξουμε ότι $X \equiv Y$, είναι αρκετό να αποδείξουμε την ισότητα: $\frac{XD}{XB} = \frac{YD}{YB}$.

Από το λήμμα των λόγων (ratio lemma) έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{SD}{SB} = \frac{PD}{PB} \cdot \frac{\sin\angle DPS}{\sin\angle BPS} \qquad (1)$$

και

$$\frac{SD}{SB} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{\sin\angle DAS}{\sin\angle BAS} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{\sin\angle DAS}{\sin\angle BAS} = \frac{PD}{PB} \cdot \frac{\sin\angle DPS}{\sin\angle BPS} \Rightarrow \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{\sin\angle DAS}{\sin\angle DPS}$$

αφού $\angle BAS = \angle BPS$.

Αφού η PX εφάπτεται του κύκλου ω θα ισχύει

$$\frac{XD}{XB} = \left(\frac{PD}{PB}\right)^2 = \frac{AD^2}{AB^2} \cdot \frac{\sin^2\angle DAS}{\sin^2\angle DPS}$$

Πάλι από το λήμμα των λόγων έχουμε:

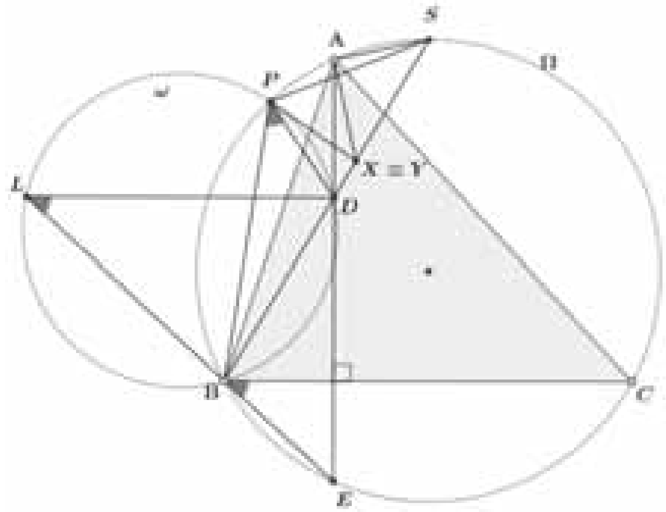
$$\frac{YD}{YB} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{\angle DAY}{\angle BAY}$$

Έτσι απομένει να αποδείξουμε ότι

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{\angle DAY}{\angle BAY} = \frac{AD^2}{AB^2} \cdot \frac{\sin^2\angle DAS}{\sin^2\angle DPS}, \text{δηλαδή } \frac{\angle DAY}{\angle BAY} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{\sin^2\angle DAS}{\sin^2\angle DPS}$$

Είναι $\angle CBS = \angle BCS = 90^o - \frac{\angle A}{2}$ και $DL \parallel BC \Rightarrow \angle BLD = \angle EBC$, οπότε

$$\angle DAS + \angle DPS = \angle EAS + \angle BPS - \angle BPD =$$
$$= \angle EAC + \angle CAS + \angle BAS - \angle BLD =$$
$$= \angle EAC + 90^o - \frac{\angle A}{2} + \angle A + 90^o - \frac{\angle A}{2} - \angle EAC = 180^o.$$



Σχήμα 1

Άρα $\sin^2 \angle DAS = \sin^2 \angle DPS$ και απομένει προς απόδειξη: $\frac{\angle DAY}{\angle BAY} = \frac{AD}{AB}$.

Από τον νόμο ημιτόνων: $\frac{AD}{AB} = \frac{\sin \angle DBA}{\sin \angle BDA}$. Όμως έχουμε

$$\angle DBA = \angle B - \left(90^o - \frac{\angle A}{2}\right) = 180^o - \angle C - \angle A - 90^o + \frac{\angle A}{2} =$$
$$= 90^o - \angle C - \frac{\angle A}{2} = \angle EAC - \angle YAC = \angle DAY \text{ και}$$
$$\angle BDA = 180^o - \angle DBA - \angle BAD = 180^o - \angle DAY - \angle BAD$$
$$= 180^o - \angle DAY \implies \sin \angle BDA = \sin \angle BAY$$

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin \angle DBA}{\sin \angle BDA} = \frac{\sin \angle DAY}{\sin \angle BAY}.$$

Πρόβλημα 3. Για κάθε $k \geq 2$, να προσδιορίσετε όλες τις ακολουθίες θετικών ακεραίων $a_1, a_2, \dots$ για τις οποίες υπάρχει πολυώνυμο P της μορφής $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, όπου οι $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι, ώστε

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

Λύση (Γεώργιος Τζαχρήστας)

Αρχικά έχουμε:

$$\frac{P(a_n)}{P(a_{n-1})} = \frac{a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+k-1}a_{n+k}}{a_n a_{n+1}\dots a_{n+k-2}a_{n+k-1}} = \frac{a_{n+k}}{a_n}$$

από όπου, λόγω του ότι η $P(x)$ είναι μια συνάρτηση γνησίως αύξουσα στους θετικούς πραγματικούς, παίρνουμε τα εξής:

$$a_{n-1} < a_n \Rightarrow \frac{P(a_n)}{P(a_{n-1})} > 1 \Rightarrow a_{n+k} > a_n \quad (1)$$
$$a_{n-1} = a_n \Rightarrow \frac{P(a_n)}{P(a_{n-1})} = 1 \Rightarrow a_{n+k} = a_n \quad (2)$$
$$a_{n-1} > a_n \Rightarrow \frac{P(a_n)}{P(a_{n-1})} < 1 \Rightarrow a_{n+k} < a_n \quad (3)$$

τα οποία ισχύουν για κάθε n θετικό ακέραιο.

Έστω, τώρα, n τυχών θετικός ακέραιος. Ορίζουμε
$m_n = min\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, που υπάρχει, αφού πρόκειται για σύνολο θετικών ακεραίων. Τότε:

1η περίπτωση: Αν υπάρχει $\boldsymbol{i \geq n+2}$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{a_i = m_n}$, τότε θα ισχύει $a_{i+k} \geq m_n = a_i$, οπότε, από τις σχέσεις (1),(2),(3) θα ισχύει $a_i \geq a_{i-1} \Rightarrow a_{i-1} = m_n = a_i \Rightarrow a_{i+k} = m_n$. Συμπεραίνοντας: $i \geq n+2, a_i = m_n \Rightarrow a_{i-1} = m_n$ $\textit{και}$ $a_{i+k} = m_n$ (4)

Επομένως, $a_i = m_n \Rightarrow a_{i+k} = m_n \Rightarrow a_{i+k+k} = m_n \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_{i+lk} = m_n$ για κάθε l θετικό ακέραιο.

Επομένως, αφού από την (4) έχουμε:

$$a_i = m_n, \quad i \geq n+2 \Rightarrow a_{i-1} = m_n$$

και $a_{i+lk} = m_n$ για κάθε l θετικό ακέραιο, με επαγωγή, παίρνουμε:

$$a_i = m_n \text{ για κάθε } i \geq n+2 \text{ και } a_{n+2-1} = a_{n+1} = m_n.$$

Άρα, $a_{n+k+1}=a_{n+1}$ και από τις (1),(2) και (3) θα έχουμε : $a_n=a_{n+1}=m_n$.

Επομένως: $a_i = m_n \textit{ για κάθε } i \geq n$ (5)

2η περίπτωση:

Αν δεν υπάρχει $i \geq n+2$ τέτοιο ώστε $a_i = m_n$, τότε, έστω ότι: $a_{n+1} = m_n$. Αυτό συνεπάγεται ότι $a_n \geq a_{n+1}$, άρα, από τις σχέσεις (1),(2) και (3), έπεται ότι $a_{n+k+1} \leq a_{n+1} = m_n$ δηλαδή, $a_{n+k+1} = m_n$, άτοπο. Επομένως, $a_n = m_n$ και είναι το μοναδικό. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{a_n < a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots} \quad \textbf{(6).}$$

Από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις καταλαβαίνουμε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο n,

$$\text{είτε } a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots, \text{είτε } \quad a_n < a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$$

Διακρίνουμε, λοιπόν, δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση:

Αν $m_n = a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots$ για ένα τουλάχιστον n και έστω $a_n = m$, τότε

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \ldots a_{n+k} = m_k \Rightarrow m_k + c_{\kappa-1}m_{k-1} + \cdots + c_0 = mk$$
$$\Rightarrow c_{m-1} = c_{m-2} = \cdots = c_0 = 0.$$

Επομένως, $P(x) = x^k$. Τώρα θα αποδείξουμε ότι:

$$a_i = m \text{ για κάθε } i \geq x+1 \Rightarrow a_x = m \text{ (όπου } x \text{ τυχών θετικός ακέραιος)} \quad (7)$$

Απόδειξη: $P(a_x) = a_{x+1}a_{x+2} \ldots a_{x+k} = m_k \Rightarrow a_{x\kappa} = m_k \Rightarrow a_x = m$.

Επομένως, αφού $a_i = m$ για κάθε $i \geq n$ και αποδείξαμε την (7), έπεται ότι η ακολουθία είναι σταθερή.

2η περίπτωση:

Αν ισχύει $a_n < a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ για όλους τους θετικούς ακεραίους n, τότε η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Ορίζουμε, λοιπόν, μία καινούρια ακολουθία $d_{(n)}$ με τύπο: $d_n = a_{n+1} - a_n$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Λόγω του ότι η $a_{(n)}$ είναι γνησίως αύξουσα, $d_n > 0$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

Τότε, για κάθε θετικό ακέραιο n θα ισχύει:

$$P(a_n) = a_{(n+1)}a_{n+2} \ldots a_{n+k} =$$
$$(a_n + d_n)(a_n + d_n + d_{n+1}) \ldots (a_n + d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n+k-1})$$

Θέτοντας, λοιπόν, $Q(x,n) = (x + d_n)(x + d_n + d_{n+1}) \ldots (x + d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n+k-1})$ η εξίσωση $P(x) = Q(x,n)$ έχει θετική ακέραια λύση την $x = a_n$.

Αφού, λοιπόν, και τα δύο πολυώνυμα έχουν θετικούς συντελεστές και η παραπάνω εξίσωση έχει θετική ακέραια λύση, υπάρχει ένας (τουλάχιστον) συντελεστής του $P(x)$ (εκτός του μεγιστοβάθμιου) που δεν είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο συντελεστή του $Q(x,n)$. Όμως, $d_i > 0$ για κάθε i, οπότε κάθε συντελεστής του $Q(x,n)$ (εκτός του μεγιστοβάθμιου) θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος του d_n. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι κάποιος από τους συντελεστές του $P(x)$ θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος του d_n. Ως εκ τούτου:

$$d_n \leq max\{c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}\} \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } n.$$

Άρα, η ακολουθία $d_{(n)}$ είναι φραγμένη από πάνω (και εννοείται από κάτω αφού αποδείξαμε ότι όλοι οι όροι της είναι θετικοί).

Ορίζουμε τώρα $\Theta(x,n) = P(x) - Q(x,n)$ και όπως αποδείξαμε $\Theta(a_n, n) = 0$.

Όμως, για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq T$ (αρκετά μεγάλο), οι συντελεστές του $Q(x,n)$ είναι φραγμένοι, ως πράξεις των $d_{(n)}$ σε δύναμη το πολύ k. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι σταθεροί, δίνει ότι το $\Theta(x,n)$ έχει φραγμένους συντελεστές για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq T$. Αν, λοιπόν, δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε το σύνολο των ριζών του είναι φραγμένο για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq T$, δηλαδή η $a_{(n)}$ είναι φραγμένη, άτοπο, αφού πρόκειται για γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων.

Άρα, $\Theta(x,n) \equiv 0$ για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq T$.

Συνεπώς, τα $Q(x,n)$ και $P(x)$ είναι ίσα ως πολυώνυμα και το $P(x)$ είναι ανεξάρτητο του n, οπότε, για οποιουσδήποτε y,z θετικούς ακεραίους μεγαλύτερους ή ίσους του T, διαφορετικούς μεταξύ τους, θα ισχύει

$$Q(x,y) = Q(x,z) \qquad (8).$$

Ορίζοντας $b_{n,1} = d_n < b_{n,2} = d_n + d_{n+1} < \cdots < b_{n,k} = d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n+k-1}$ για κάθε θετικό ακέραιο n,η σχέση (8) γράφεται:

$$(x + b_{y,1})(x + b_{y,2}) \dots (x + b_{y,k}) = (x + b_{z,1})(x + b_{z,2}) \dots (x + b_{z,k})$$

ως πολυώνυμα, και λόγω της μοναδικότητας της παραγοντοποίησης πολυωνύμου σε πρωτοβάθμιους παράγοντες θα ισχύει:

$$\{b_{y,1}, b_{y,2}, \dots, b_{y,k}\} = \{b_{z,1}, b_{z,2}, \dots, b_{z,k}\}$$

και αφού $b_{y,1} < b_{y,2} < \cdots < b_{y,k}$ θα ισχύει και:

$$b_{y,1} = b_{z,1}, b_{y,2} = b_{z,2}, \dots, b_{y,k} = b_{z,k}$$

$$b_{y,1} = b_{z,1} \;\Rightarrow\; d_y = d_z$$

και αυτό, για οποιουσδήποτε διαφορετικούς θετικούς ακεραίους μεγαλύτερους ή ίσους του T. Άρα, η $d_{(n)}$ είναι τελικά σταθερή:

$$d_i = d, \text{ για κάθε } i \geq T. \qquad (9)$$

Για κάθε, λοιπόν, $n \geq T$, $P(x) = Q(x,n) = (x + d_n)(x + d_n + d_{n+1}) \dots (x + d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n+k-1}) = (x + d)(x + 2d) \dots (x + kd)$.

Άρα, έχουμε: $\qquad P(x) = (x + d)(x + 2d) \dots (x + kd)$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι: $\;d_i = d$ για κάθε $i \geq x + 1 \;\Rightarrow d_i = d$ για κάθε $i \geq x$. $\qquad$ (10)

Απόδειξη: $P(a_x) = a_{x+1}a_{x+2} \dots a_{x+k}$, ή αλλιώς,

$$(a_x + d)(a_x + 2d) \dots (a_x + kd) = (a_x + dx)(a_x + d_x + d_{x+1}) \dots (a_x + d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{x+k-1})$$
$$= (a_x + d_x)(a_x + d_x + d) \dots (a_x + d_x + (k-1)d).$$

Όμως, αν $d_x > d$ τότε το δεξί μέλος είναι μεγαλύτερο από το αριστερό, άτοπο, ενώ αν $d_x < d$, τότε το δεξί μέλος είναι μικρότερο από το αριστερό, επίσης άτοπο.

Άρα, $d_x = d$ και η απόδειξη της (10) ολοκληρώθηκε.

Οι σχέσεις (9) και (10) δίνουν επαγωγικά: $d_i = d$ για κάθε θετικό ακέραιο i και άρα η $a_{(n)}$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $d > 0$.

Λαμβάνοντας και τις δύο περιπτώσεις υπόψιν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι λύσεις της άσκησης είναι οι αριθμητικές πρόοδοι με μη αρνητικές ακέραιες διαφορές d (με θετικό ακέραιο αρχικό όρο) και εύκολα ελέγχουμε ότι όλες αυτές επαληθεύουν τη δοσμένη ισότητα όταν

$$P(x) = (x + d)(x + 2d) \dots (x + kd).$$

Πρόβλημα 4. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ διαφορετικοί ανά δύο θετικοί πραγματικοί τέτοιοι ώστε ο αριθμός

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2023})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

να είναι ακέραιος για κάθε $n = 1,2,\dots 2023$. Να αποδείξετε ότι $a_{2023} \geq 3034$.

Λύση (Διονύσης Πετράκης)

- Αρχικά βλέπουμε ότι : $a_{n+1}{}^2 \geq a_n^2 + x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}x_i + 1$, από την οποία προκύπτει ότι

$$a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n + 1 \qquad (1),$$

όπου το τελευταίο ισχύει επειδή οι a_n είναι θετικοί ακέραιοι.

- Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι $a_n \geq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
- Η βάση της επαγωγής ισχύει, αφού $a_1 = 1 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$
- Έστω τώρα ότι ισχύει για κάθε $n \leq 2k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = 2k+1$

  Από το επαγωγικό βήμα ξέρουμε ότι $a_{2k} \geq 2k + \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 3k$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$a_{2k+1} \geq 2k+1 + \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = 3k+1$$

  που ισχύει αφού από την (1) έχουμε: $a_{2k+1} \geq a_{2k} + 1 \geq 3k+1$
- Έστω τώρα ότι ισχύει για κάθε $n \leq 2k+1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = 2k+2$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $a_{2k+2} \geq 2k+2 + \left\lfloor \frac{2k+2}{2} \right\rfloor = 3k+3$.

Έστω προς άτοπο ότι $a_{2k+2} < 3k+3 \Rightarrow a_{2k+2} \leq 3k+2$

Από το επαγωγικό βήμα ξέρουμε ότι $a_{2k+1} \geq 2k+1 + \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = 3k+1$, οπότε λόγο των δυο τελευταίων σχέσεων και της (1) για $n = 2k+1$ έχουμε ότι:

$$a_{2k+2} = 3k+2 \text{ και } a_{2k+1} = 3k+1$$

Επιπλέον από το επαγωγικό βήμα έχουμε και $a_{2k} \geq 2k + \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 3k$ το οποίο στην (1) για $n = 2k$ θα δώσει ότι $a_{2k} = 3k$

- Θα αποδείξουμε τώρα ότι δεν μπορούμε να έχουμε $a_{2k+2} = 3k+2$, $a_{2k+1} = 3k+1$, $a_{2k} = 3k$. Αυτές ισοδύναμα γράφονται ως:

$$\sum_{i=1}^{2k+2} x_i \cdot \sum_{i=1}^{2k+2} \frac{1}{x_i} = (3k+2)^2 \quad (i), \qquad \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \cdot \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{1}{x_i} = (3k+1)^2 \quad (ii), \qquad \sum_{i=1}^{2k} x_i \cdot \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{x_i} = 9k^2 \quad (iii)$$

Με αφαίρεση $(i)-(ii)$ και $(ii)-(iii)$ και κρατώντας την (iii) και έστω για ευκολία $x_{2k+2} = a$, $x_{2k+1} = b$, $\sum_{i=1}^{2k} x_i = A$, $\sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{x_i} = B$, τότε το σύστημα γίνεται ως εξής:

$$aA + \frac{1}{a}B + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 6k+2 \qquad (2)$$

$$bA + \frac{1}{b}B = 6k \qquad (3)$$

$$AB = 9k^2 \qquad (4)$$

Από την (3) λόγω της (4) έχουμε ότι :

$$bA + \frac{1}{b}B = 6k \Leftrightarrow b^2 - b\frac{6k}{A} + \frac{B}{A} = 0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} b^2 - b\frac{6k}{A} + \frac{9k^2}{A^2} = 0 \Leftrightarrow (b - \frac{3k}{A})^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3k}{A}.$$

Με αντικατάσταση του b στην (2) θα έχουμε:

$$aA + \frac{1}{a}B + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 6k+2 \Leftrightarrow aA + \frac{1}{a}B + \frac{Aa}{3k} + \frac{3k}{aA} = 6k+2$$

$$\overset{\cdot 3k\alpha A}{\Leftrightarrow} 3k(aA)^2 + 3kAB + (aA)^2 + 9k^2 = (6k+2)3kaA.$$

Έστω για ευκολία $x = aA$. Τότε η προηγούμενη γίνεται:

$$\Leftrightarrow \ 3kx^2 + 3kAB + x^2 + 9k^2 = (6k+2)3kx$$

$$\Leftrightarrow x^2(3k+1) - x[(6k+2)*3k] + 9k^2 + 3kAB = 0$$

$$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} x\ \ (3k+1) - 3k(3k+1)x - (9k^2+3k)x + 9k^2 + 27k^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3k)[(3k+1)x - (9k^2+3k)] = 0 \Leftrightarrow (3k+1)(x-3k)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3k \Leftrightarrow a = \frac{3k}{A} = b,$$

άτοπο, αφού η εκφώνηση λέει ότι οι x_i είναι διαφορετικοί ανά δυο.

- Άρα $a_n \geq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ισχύει για κάθε n. Για $n = 2023$ έχουμε:

$$\alpha_{2023} \geq 2023 + \left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor = 2023 + 1011 = 3034.$$

Λύση (Κωνσταντίνου Κωνσταντινίδη)

Θα αποδείξουμε ότι $\alpha_n \geq a_{n-2} + 3$. Γράφουμε

$$x = x_{n-2},\ y = x_{n-1},$$

$$s_{n-2} = \sum_{1\leq i\leq n-2} x_i\ ,\ h_{n-2} = \sum_{1\leq i\leq n-2} \frac{1}{x_i}.$$

Τότε: $$a_n^2 = s_{n-2}h_{n-2} + s_{n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) + h_{n-2}(x+y) + (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \text{ ή}$$

$$a_n^2 = a_{n-2}^2 + s_{n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) + h_{n-2}(x+y) + (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \qquad (1).$$

Από AM-GM:

$$s_{n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) + h_{n-2}(x+y) \geq 2\sqrt{s_{n-2}h_{n-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)} \geq 2\sqrt{4a_{n-2}^2} = 4a_{n-2}(2),$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η AM-HM για τα x,y:

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4. \qquad (3)$$

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι: $a_n^2 \geq a_{n-2}^2 + 4a_{n-2} + 4$ ή $\alpha_n \geq a_{n-2} + 2$.

Επειδή όμως $x \neq y$ η (3) είναι γνήσια, άρα και η $\alpha_n \geq a_{n-2} + 2$ είναι γνήσια, συνεπώς, αφού η (α_n) είναι ακολουθία θετικών ακεραίων, θα ισχύει: $\alpha_n \geq a_{n-2} + 3$, όπως θέλαμε να αποδείξουμε.

Θα αποδείξουμε τώρα επαγωγικά ότι $\alpha_{2k} \geq 3k$ (4), για κάθε k θετικό ακέραιο. Πράγματι, για $k = 1$:

$$a_2 = \sqrt{(a+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)} \geq 2 \text{ (από AM - HM)}$$

και επειδή $\alpha \neq \beta$, η ανισότητα είναι γνήσια, άρα $\alpha_2 \geq 3$.

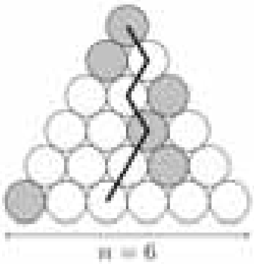
Αν ισχύει η (4) μέχρι k = t, είναι τότε $a_{2(t+1)} \geq a_{2t} + 3 \geq 3t + 3 = 3(t+1)$, και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώθηκε. Έτσι, $\alpha_{2022} \geq 3033$. Όμως:

$$a_{2023} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2023} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2023} \frac{1}{x_i}\right)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2022} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2022} \frac{1}{x_i}\right) + \frac{1}{x_{2023}}\left(\sum_{i=1}^{2022} x_i\right) + x_{2023}\left(\sum_{i=1}^{2022} \frac{1}{x_i}\right) + 1}$$

$$> \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2022} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2022} \frac{1}{x_i}\right)} = a_{2022}.$$

Άρα $a_{2023} \geq a_{2022} + 1 \geq 3033 + 1 = 3034.$

Πρόβλημα 5. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Ένα *Ιαπωνικό τρίγωνο* αποτελείται από $1 + 2 + \cdots + n$ κύκλους τοποθετημένους σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου έτσι ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, η i-οστή γραμμή περιέχει ακριβώς i κύκλους, από τους οποίους μόνο ένας είναι χρωματισμένος κόκκινος. Ένα *μονοπάτι νίντζα* σε ένα Ιαπωνικό τρίγωνο είναι μία ακολουθία από n κύκλους η οποία προκύπτει ξεκινώντας από τον κύκλο της πρώτης πάνω γραμμής, συνεχίζει πηγαίνοντας επανειλημμένα από έναν κύκλο σε έναν από τους δύο κύκλους που βρίσκονται αμέσως κάτω από αυτόν και τερματίζει σε έναν κύκλο της τελευταίας γραμμής. Εδώ είναι ένα παράδειγμα Ιαπωνικού τριγώνου με $n = 6$, μαζί με ένα μονοπάτι νίντζα σε αυτό το τρίγωνο το οποίο περιέχει δύο κόκκινους κύκλους.



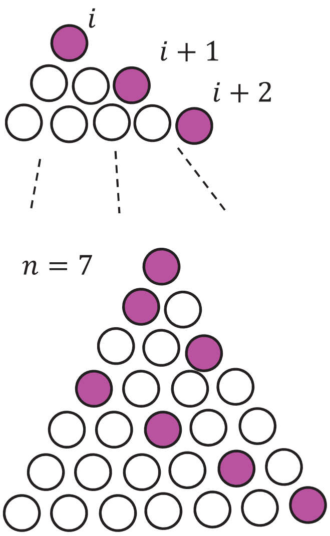
Να προσδιορίσετε, συναρτήσει του n, τον μέγιστο θετικό ακέραιο k που είναι τέτοιος, ώστε σε κάθε Ιαπωνικό τρίγωνο να υπάρχει μονοπάτι νίντζα το οποίο να περιέχει τουλάχιστον k κόκκινους κύκλους.

Λύση (Παναγιώτης Λιάμπας)

Θα αποδείξουμε ότι το ζητούμενο k είναι $[log_2(n+1)]$

- Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κατασκευή για κάθε n ώστε το ζητούμενο μονοπάτι να έχει το πολύ $[log_2(n+1)]$ κόκκινα.

Ξεκινάμε από την πρώτη σειρά και όσο γίνεται βάζουμε καινούριο κόκκινο κύκλο στην επόμενη σειρά και δύο θέσεις δεξιά από το προηγούμενο, δηλαδή:



Όταν δεν μπορούμε πλέον (έχουμε φτάσει στην δεξιά πλευρά του τριγώνου), ξεκινάμε ξανά από τον πιο αριστερά κύκλο της επόμενης σειράς.

Δηλαδή:

Κάθε φορά που προχωράμε αυτόν τον σχηματισμό, η οριζόντια απόσταση από την δεξιά πλευρά του τριγώνου μειώνεται κατά 1, δηλαδή αν ξεκινάμε σε μία σειρά που έχει m στοιχεία, θα καλύψουμε m σειρές (ονομάζουμε αυτές τις m σειρές ένα «block»). Αν συμβολίσουμε με a_i την πρώτη σειρά του i-οστού block, τότε έχουμε ότι:

$$a_1 = 1, \qquad a_{i+1} = a_i + a_i = 2a_i$$

η πρώτη σειρά του προηγούμενου block

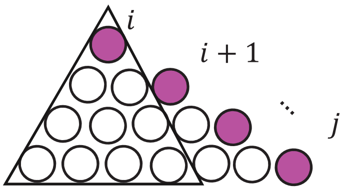
όσες σειρές προχωρήσαμε

Άρα $a_i = 2^{i-1}$ (αφού $a_1 = 1 = 2^0$) . Σταματάμε όταν $a_{k+1} > n$, οπότε:

$$2^k \geq n+1 \Leftrightarrow k = [log_2(n+1)].$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι μέσα σε ένα block δεν ενώνεται κανένα κόκκινο με κανένα άλλο στο ίδιο block.

Αν ενωνόταν το i με το j, θα είχαμε ότι το ισόπλευρο τρίγωνο που έχει κορυφή το i και βάση την τελευταία γραμμή του αρχικού τριγώνου περιλαμβάνει το j, δηλαδή:



που δεν είναι δυνατό.

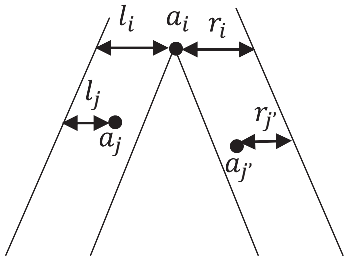
Αφού όλα τα κόκκινα σε ένα block δεν ενώνονται μεταξύ τους, μπορούμε να πάρουμε το πολύ 1 red από κάθε block, άρα έχουμε το πολύ $\lceil log_2(n+1) \rceil$ κόκκινα.

- Θα αποδείξουμε ότι πάντα μπορούμε να βρούμε μονοπάτι με $\lceil log_2(n+1) \rceil$ κόκκινα.

Ξεκινάμε με ένα λήμμα:

Λήμμα: Αν έχουμε ένα σύνολο γραμμών τα κόκκινα των οποίων δεν ενώνονται μεταξύ τους (independent set), τότε οι γραμμές είναι το πολύ τόσες όσες ο αριθμός της πρώτης γραμμής.

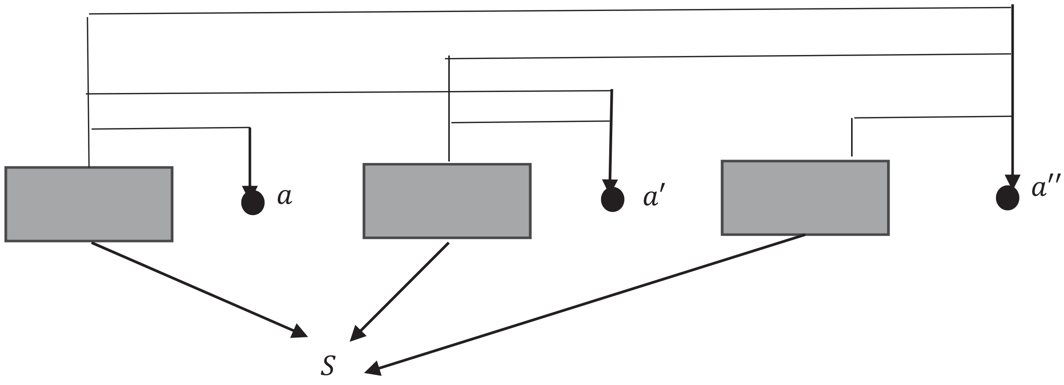
Απόδειξη: Αν τα στοιχεία έχουν θέσεις $a_1, a_2, \ldots\ a_m$ στις γραμμές $b_1, b_2, \ldots\ b_m$ αντίστοιχα:
Για κάθε i, j με $j > i$, το a_j δεν περιλαμβάνεται στο τρίγωνο του a_i. Άρα, είτε η απόσταση του a_j από την αριστερή πλευρά είναι μικρότερη από αυτή του a_i, ή ισχύει το ίδιο από την δεξιά πλευρά:
Άρα, είτε $r_j < r_i$ ή $l_j < l_i$. Άρα για $i \geq 2$, $l_i < l_1$ ή $r_i < r_1$.
Έστω S_l το σύνολο των κόκκινων που έχουν $l_i < l_1$ και S_r το σύνολο με $r_i > r_1$.
Για δύο κόκκινα στο S_l δεν γίνεται να είναι $l_i = l_j$, γιατί τότε $r_j = m - 1 - l_i > i - 1 - l_i = r_i$, άτοπο.
Άρα υπάρχουν το πολύ l_1 στοιχεία στο S_l.Ομοίως, υπάρχουν το πολύ r_1 στοιχεία στο S_r.



Άρα το πολύ $l_1 + r_1 + 1 = b_1$ στοιχεία, και το λήμμα αποδείχθηκε.

Θεωρούμε το γράφημα με κόμβους τις γραμμές του τριγώνου.

Λέμε ένας κόμβος a «συνδέεται» με ένα σύνολο κόμβων S, αν μπορεί να συνεχιστεί ένα μονοπάτι από κάποιον κόμβο του S (δηλαδή από το κόκκινο της αντίστοιχης γραμμής) προς το a.



Ξεκινάμε με ένα σύνολο $S_1 = \{1\}$. Παίρνουμε ένα-ένα τα στοιχεία και ξέρουμε ότι όλα ενώνονται με το 1. Άρα βάζουμε $S_2 = \{2\}$. Από τα στοιχεία που απέμειναν (και δεν είναι σε κάποιο σύνολο) τα παίρνουμε ένα-ένα και:

- Αν δεν ενώνονται με κάποιο στοιχείο του S_2, τα προσθέτουμε στο S_2.
- Αν ενώνονται, δεν τα προσθέτουμε.

Αφού κάθε φορά τα στοιχεία που δεν προσθέτουμε είναι μπροστά από τα στοιχεία του S_2 εκείνη την στιγμή και ενώνονται με κάποιο από αυτά, «συνδέονται» με το S_2. Επίσης, αφού τα στοιχεία που προσθέτουμε δεν ενώνονται με κανένα στοιχείο του S_2 εκείνη την στιγμή (ούτε τα επόμενα ενώνονται με αυτά), το S_2 είναι ανεξάρτητο σύνολο (independent set), άρα έχει το πολύ $\min(S_2)$ στοιχεία (από το Λήμμα). Κάνουμε το ίδιο με τα σύνολα $S_3, S_4, \dots\ S_k$ μέχρι να καλύψουμε όλους τους κόμβους.

Τότε παίρνουμε ένα τυχαίο στοιχείο του S_k. Το ενώνουμε με το στοιχείο με το οποίο «συνδέεται» από το S_{k-1}.

Κάνουμε το ίδιο για το S_{k-1}, αυτή την φορά όμως ξεκινώντας από αυτό με το οποίο ενώθηκε το στοιχείο του S_k.

Κάνοντας το ίδιο για τα $S_{k-2}, \dots\ S_2$, φτάνουμε στο $S_1 = \{1\}$, οπότε φτιάξαμε ένα μονοπάτι με k στοιχεία.

Τότε $\min(S_i) \leq\ |S_1| +\ |S_2| + \cdots + |S_{i-1}| + 1 \leq \min(S_1) + \min(S_2) + \cdots + \min(S_{i-1}) + 1$

Αν είναι $\min(S_i) >\ |S_1| +\ |S_2| + \cdots + |S_{i-1}| + 1$, τότε θα υπάρχει κάποιο στοιχείο των $S_{i+1}, S_{i+2}, \dots\ S_k$ πριν το $\min(S_i)$, άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι όταν κατασκευάζουμε το S_i παίρνουμε ως πρώτο στοιχείο του το πρώτο που δεν ανήκει σε κάποιο άλλο σύνολο, άρα αυτό θα ήταν πριν όλα τα στοιχεία των επόμενων συνόλων.

Αν $a_i = \min(S_i)$, τότε: $a_i \leq a_1 + \cdots + a_{i-1} + 1$. Με ισχυρή επαγωγή θα αποδείξουμε ότι: $a_i \leq 2^{i-1}$.

Για $i = 1$ ισχύει, αφού $a_1 \leq 1 = 2^0$. Αν ισχύει η υπόθεση για $1, \dots, k$, τότε για $i = k+1$ έχουμε:

$$\alpha_{k+1} \leq a_1 + \cdots + a_k + 1 \leq 2^0 + \cdots + 2^{k-1} + 1 = 2^k.$$

Όμως: $n = |S_1| + \cdots + |S_k| \leq 1 + \cdots + 2^{k-1} \Leftrightarrow 2^k \geq n+1 \Leftrightarrow k \geq\ \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Άρα σε κάθε τρίγωνο μπορούμε να βρούμε μονοπάτι με $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ στοιχεία.

Από τις δύο παραπάνω υποθέσεις, παίρνουμε ότι το ζητούμενο k είναι: $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 6. Έστω ABC ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Έστω A_1, B_1, C_1 εσωτερικά σημεία του τριγώνου ABC τέτοια, ώστε $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ και

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Έστω ότι οι ευθείες BC_1 και CB_1 τέμνονται στο σημείο A_2, οι ευθείες CA_1 και AC_1 τέμνονται στο σημείο B_2 και οι ευθείες AB_1 και BA_1 τέμνονται στο σημείο C_2.

Αν το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ είναι σκαληνό, να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AA_1A_2, BB_1B_2 και CC_1C_2 διέρχονται και οι τρεις από δύο κοινά σημεία.

Λύση

Ονομάζουμε $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων $AA_1A_2, BB_1B_3, CC_1C_2$, αντίστοιχα. Η γενική στρατηγική της λύσης μας είναι να βρούμε δύο διαφορετικά σημεία τα οποία να έχουν την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους $\delta_A, \delta_B, \delta_C$.

Ισχυρισμός 1. A_1 είναι το περίκεντρο του τριγώνου A_2BC ανάλογα ισχύον για τα B_1, C_1.

Απόδειξη. Επειδή το σημείο A_1 βρίσκεται στη μεσοκάθετη της πλευράς BC και μέσα στο τρίγωνο A_2BC, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\angle BA_1C = 2 \cdot \angle BA_2C$, το οποίο έπεται από τις ισότητες:

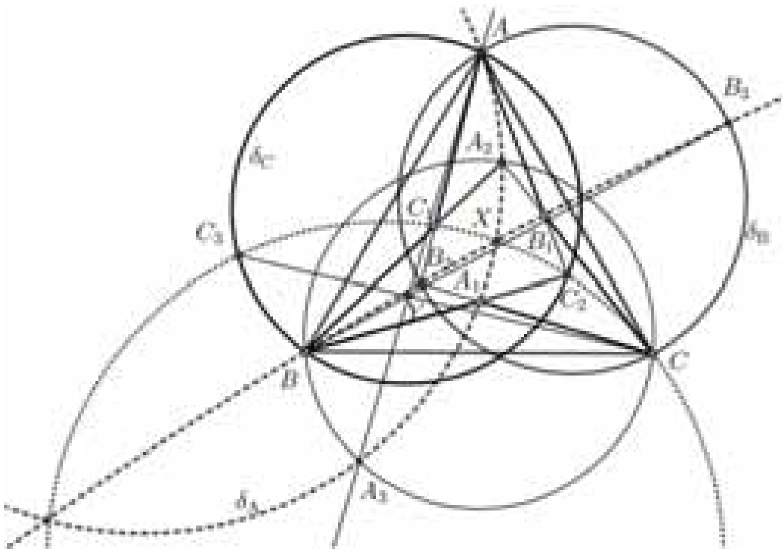
$$\angle A_2BC = \angle BAC + \angle BA_2C + ACA_2 =$$
$$\frac{1}{2}\left((180^0 - AC_1B)\right) + (180^0 - CB_1A) + 60^0 = 240^0 - \frac{1}{2}(480^0 - BA_1C) = \frac{1}{2}BA_1C.$$

Από τα περίκεντρα A_1, B_1, C_1 προκύπτουν οι ισότητες;

$$\angle B_1B_2C_1 =\ \angle B_1B_2A = \angle B_2AB_1 = \angle C_1AC_2 = \angle AC_2C_1 = \angle B_1C_2C_1,$$

οπότε το τετράπλευρο $B_1C_1B_2C_2$ είναι εγγράψιμο. Ομοίως προκύπτει και ότι τα τετράπλευρα $C_1A_1C_2A_2$ και $A_1B_1A_2B_2$ είναι εγγράψιμα. Επειδή το εξάγωνο $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ δεν είναι εγγράψιμο, αφού $\angle C_2A_1B_2 +\ \angle B_2C_1A_2 +\ \angle A_2B_1C_2 = 480^0 \neq 360^0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ριζικών αξόνων στους τρεις κύκλους και να αποδείξουμε έτσι ότι οι ευθείες A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 συντρέχουν σε ένα σημείο, έστω X, το οποίο έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους κύκλους $\delta_A, \delta_B, \delta_C$.

Έστω ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου A_2BC τέμνει τον δ_A στο σημείο $A_3 \neq A_2$.



Σχήμα 2

Ισχυρισμός 2. Το τετράπλευρο BCB_3C_3 είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας προσανατολισμένες γωνίες έχουμε:

$$\measuredangle BC_3C = \measuredangle BC_3C_2 + \measuredangle C_2C_3C = \measuredangle BAC_2 + \measuredangle C_2C_1C = 90^0 + \measuredangle(C_1C, AC_2) + \measuredangle C_2C_1C = 90^0 + \measuredangle C_1C_2B_1.$$

Ομοίως, έχουμε: $\measuredangle CB_3B = 90^0 + \measuredangle B_1B_2C_1$,

οπότε, χρησιμοποιώντας ότι το τετράπλευρο $B_1C_1B_2C_2$ είναι εγγράψιμο, λαμβάνουμε:

$$\measuredangle BB_3C = 90^0 + \measuredangle C_1B_2B_1 = 90^0 + \measuredangle C_1C_2B_1 = \measuredangle BC_3C.$$

Ομοίως προκύπτει και ότι τα τετράπλευρα CAC_3A_3 και ABA_3B_3 είναι εγγράψιμα.

Το εξάγωνο $AC_3BA_3CB_3$ δεν είναι εγγράψιμο, αφού, αν ήταν εγγράψιμο, τότε το τετράπλευρο AB_2CB_3 θα ήταν εγγράψιμο, οπότε το σημείο B_2 θα ανήκε στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC, που είναι αδύνατο, αφού το B_2 βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ABC. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ριζικών αξόνων στους τρεις κύκλους των παραπάνω τετραπλεύρων και να αποδείξουμε έτσι ότι οι ευθείες AA_3, BB_3, CC_3 συντρέχουν σε ένα σημείο, έστω Y, το οποίο έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους κύκλους $\delta_A, \delta_B, \delta_C$.

Απομένει να αποδείξουμε ότι τα σημεία X, Y είναι διαφορετικά. Όμως πρώτα θα κάνουμε κάποιες τεχνικές παρατηρήσεις:

- Έστω O το περίκεντρο του τριγώνου ABC. Τότε, έχουμε:
  $$\angle BA_1C = 480^0 - \angle CB_1A - AC_1B > 480^0 - 180^0 - 180^0 = 120^0,$$
  οπότε το σημείο A_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου BOC. Ομοίως προκύπτει ότι τα σημεία B_1, C_1 βρίσκονται στο εσωτερικό των τριγώνων AOC, AOB, οπότε τα τρίγωνα BA_1C, CB_1A και AC_1B έχουν διαφορετικά εσωτερικά. Άρα το εξάγωνο $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ είναι κυρτό, οπότε το σημείο X βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2 και επομένως στο εσωτερικό του κύκλου δ_A.
- Επειδή το σημείο A_1 είναι το περίκεντρο του τριγώνου A_2BC έχουμε ότι $A_1A_2 = A_1A_3$, οπότε από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AA_2A_1A_3$ προκύπτει ότι οι ευθείες AA_2 και AA_3, που ταυτίζεται με την ευθεία AY, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία AA_1. Επειδή το σημείο X βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2, η μοναδική δυνατότητα για να συμπίπτουν τα σημεία X, Y είναι όταν τα σημεία A_1, A_2 βρίσκονται και τα δύο στη μεσοκάθετη της πλευράς BC. Τότε όμως θα πρέπει και τα σημεία B_1 και C_1 να είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία AA_1, οπότε $A_1B_1 = A_1C_1$ το οποίο είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι το τρίγωνο $A_1B_1C_1$ είναι σκαληνό.

Συνοψίζοντας, έχουμε διαφορετικά σημεία X, Y με ίσες δυνάμεις ως προς τους κύκλους $\delta_A, \delta_B, \delta_C$, οπότε αυτοί οι κύκλοι έχουν κοινό ριζικό άξονα. Επειδή το σημείο X βρίσκεται στο εσωτερικό των κύκλων $\delta_A, \delta_B, \delta_C$, αυτός ο ριζικός άξονας τέμνει τους κύκλους σε δύο σημεία, δηλαδή οι κύκλοι $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ έχουν δύο κοινά σημεία.

Προκριματικός διαγωνισμός 2023
18 Μαρτίου 2023
Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1

Σε κυρτό τετράπλευρο ABCD οι διαγώνιοί του τέμνονται στο E και H, G είναι τα μέσα των πλευρών του AD, BC, αντίστοιχα. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι c_1 και c_2, των τριγώνων AEB και DEC, αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο $F \neq E$. Αν η παράλληλη από το E προς την ευθεία HG τέμνει τον κύκλο c_2 στο σημείο S, να αποδείξετε ότι: $FS \parallel CD$.

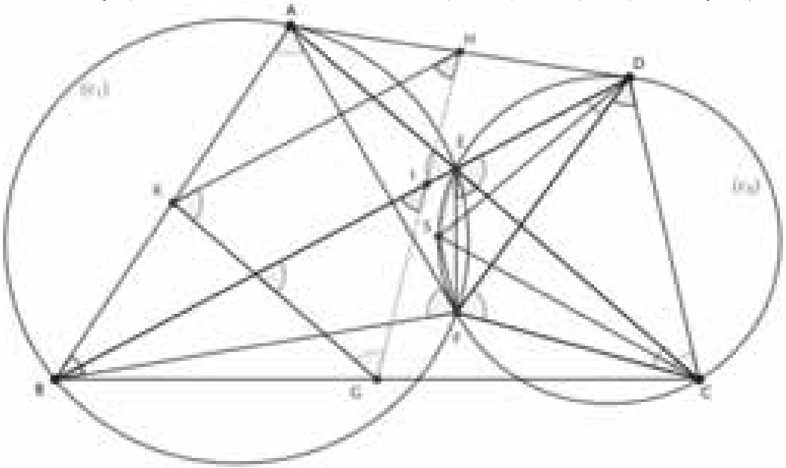
Λύση. Για να αποδείξουμε ότι $FS \parallel CD$, αρκεί να δείξουμε ότι $FC = SD$, ή ισοδύναμα, $\angle SCD = \angle FEC$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο SEDC, και την παραλληλία $FS \parallel CD$ είναι $\angle SCD = \angle BES = \angle BIG$, όπου I είναι το σημείο τομής των HG και BD. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι $\angle BIG = \angle FEC$.

Με κυνήγι γωνιών παίρνουμε: $\angle AFB = \angle AEB = \angle DEC = \angle DFC$

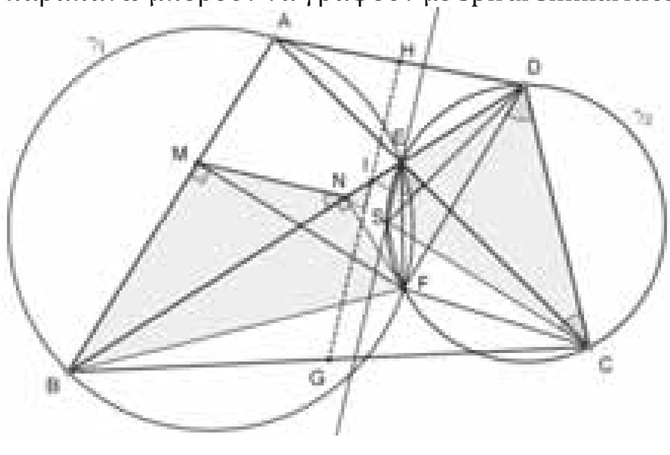
Και $\angle BAF = \angle BEF = \angle FCD$.

Συνεπώς τα τρίγωνα AFB και CFD είναι όμοια με $\angle ABF = \angle FDC$. Επίσης, είναι $\angle DBF = \angle CAF$ και $\angle BFD = \angle AFD$, οπότε τα τρίγωνα AFC και BFD είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $AC/BD = AF/BF$.



Αν K είναι το μέσο της AB, τότε το τρίγωνο HKG έχει $KH \parallel BD$, $KG \parallel AC$ με $KG/KH = AC/BD = AF/BF$ και $\angle HKG = \angle AEB = \angle AFB$. Συνεπώς, το τρίγωνο GKH είναι όμοιο με το τρίγωνο AFB (από Π-Γ-Π) , οπότε $\angle KHG = \angle ABF = \angle FDC = \angle FEC$. Λόγω της παραλληλίας $KH \parallel BI$, όμως, παίρνουμε $\angle BIG = \angle KHG = \angle FEC$, όπως θέλαμε.

Σχόλιο: Κάποια από τα παραπάνω μπορούν να γραφούν με spiral similarities.



2ος τρόπος: Όπως και στον πρώτο τρόπο, αρκεί να αποδείξουμε $\angle BIG = \angle FEC$. Έστω M, N οι προβολές του F στις AB, BD, αντίστοιχα. Τότε η ευθεία MN είναι η ευθεία Simpson του πλήρους τετραπλεύρου, ενώ η HG είναι η ευθεία Gauss. Είναι γνωστό ότι αυτές είναι κάθετες. Επομένως

$$\angle BIG = \angle HIN = 90° - \angle MNB = 90° - \angle MFB = \angle MBF = \angle FEC,$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι το MNFB είναι εγγράψιμο και στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι το AEFB είναι εγγεγραμμένο.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ θετικών πραγματικών αριθμών, που ικανοποιεί την σχέση

$$(a_{n+1})^2 + a_n a_{n+2} \leq a_n + a_{n+2},$$

για κάθε θετικό ακέραιο n. Να αποδείξετε ότι $a_{2023} \leq 1$.

Λύση: Η δοθείσα σχέση γράφεται ισοδύναμα ως

$$a_n \geq a_{n+2}(a_n - 1) + a_{n+1}^2 \qquad (1)$$

και ως

$$a_{n+2} \geq a_n(a_{n+2} - 1) + a_{n+1}^2 \qquad (2)$$

Έστω ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $a_{k+1} > 1$ και $a_{k+2} > 1$. Από τη σχέση (2) με $n = k$ παίρνουμε:

$$a_{k+2} \geq a_k(a_{k+2} - 1) + a_{k+1}^2 > a_{k+1}^2 > a_{k+1},$$

ενώ η (1) με $n = k + 1$ δίνει

$$a_{k+1} \geq a_{k+3}(a_{k+1} - 1) + a_{k+2}^2 > a_{k+2}^2 > a_{k+2},$$

άτοπο. Ας υποθέσουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι $a_{2023} > 1$. Τότε από τα παραπάνω είναι $a_{2022} \leq 1$ και $a_{2024} \leq 1$. Με $n = 2022$ στη δοθείσα ανισότητα παίρνουμε

$$1 + a_{2022}a_{2024} < a_{2023}^2 + a_{2022}a_{2024} \leq a_{2022} + a_{2024},$$

η οποία δίνει

$$(1 - a_{2022})(1 - a_{2024}) < 0,$$

άτοπο, αφού $1 - a_{2022} \geq 0$ και $1 - a_{2024} \geq 0$. Συνεπώς, $a_{2023} \leq 1$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ένα τετράγωνο 100×100 που αποτελείται από 10^4 μοναδιαία τετράγωνα. Ονομάζουμε πλακίδια τύπου Α τα ορθογώνια πλακίδια 8×1 ή 1×8 που αποτελούνται από 8 μοναδιαία τετράγωνα. Ονομάζουμε πλακίδια τύπου Β τα ορθογώνια πλακίδια 4×2 ή 2×4 που αποτελούνται από 8 μοναδιαία τετράγωνα. Είναι δυνατόν το αρχικό τετράγωνο να καλυφθεί πλήρως χρησιμοποιώντας N πλακίδια τύπου Α και N πλακίδια τύπου Β, για κάποιον θετικό ακέραιο N; (Υποθέτουμε ότι τα πλακίδια δεν αλληλεπικαλύπτονται και περιέχονται εντός του αρχικού 100×100 τετραγώνου).

Λύση

1ος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι μια τέτοια κάλυψη είναι δυνατή με N πλακίδια τύπου Α και με N πλακίδια τύπου Β. Υπολογίζοντας το εμβαδό των πλακιδίων, το ποιο είναι $8 = 2^3$ και του τετραγώνου το οποίο είναι ίσο με $100^2 = 2^4 \cdot 5^4$, βλέπουμε ότι χρειαζόμαστε $5^4 = 625$ πλακίδια τύπου Α και 625 πλακίδια τύπου Β, δηλ. $N = 625$.

Χρωματίζουμε τα τετράγωνα της πρώτης γραμμής εναλλάξ με τα χρώματα 1 και 2. Δηλαδή, έχουμε τον χρωματισμό 1-2-1-2…

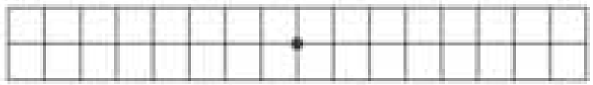
Χρωματίζουμε τα τετράγωνα της δεύτερης γραμμής εναλλάξ με τα χρώματα 3 και 4. Δηλαδή, έχουμε τον χρωματισμό 3-4-3-4…

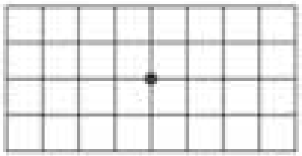
Χρωματίζουμε τα τετράγωνα της τρίτης γραμμής εναλλάξ με τα χρώματα 1 και 2. Δηλαδή, έχουμε τον χρωματισμό 1-2-1-2… και ούτω καθεξής.

Στον χρωματισμό αυτό τα 4×2 ή 2×4 περιέχουν από δύο τετράγωνα κάθε χρώματος. Τα 8×1 ή 1×8 περιέχουν δύο χρώματα σε 4 τετράγωνα το καθένα. Στην κάλυψη πρέπει τα καλυφθεί ίσο πλήθος από τα χρώματα 1,2,3,4 και τύπου Β καλύπτουν ίσο πλήθος από τα χρώματα, επομένως το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και για τα τύπου Α. Επομένως τα τύπου Α πρέπει να είναι άρτια το πλήθος, άτοπο αφού είναι 625.

2ος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι μια τέτοια κάλυψη είναι δυνατή με N πλακίδια τύπου Α και με N πλακίδια τύπου Β. Υπολογίζοντας το εμβαδό των πλακιδίων, το ποιο είναι $8 = 2^3$ και του τετραγώνου το οποίο είναι ίσο με $100^2 = 2^4 \cdot 5^4$, βλέπουμε ότι χρειαζόμαστε $5^4 = 625$ πλακίδια τύπου Α και 625 πλακίδια τύπου Β, δηλ. $N = 625$.

Χωρίζουμε τα πλακίδια 8×1 ή 1×8 τύπου Α σε πλακίδια 16×2 ή 2×16, αντίστοιχα, καθώς τα πλακίδια 4×2 ή 2×4 τύπου Β σε πλακίδια 8×4 ή 4×8, αντίστοιχα, ώστε το κέντρο βάρους τους να συμπέσει με μια κορυφή ενός 1×1 τετραγώνου (βλ. Σχήμα)

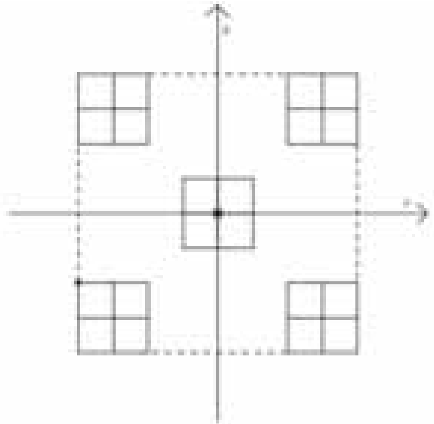




Κάνουμε το ίδιο με το τετράγωνο 100×100, το οποίο μετατρέπεται σε τετράγωνο 200×200.

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο βάρους του 200×200 τετραγώνου και μονάδα μήκους του συστήματος να είναι το μήκος των μικρών τετραγώνων στα οποία είναι χωρισμένα τα πλακίδια τύπου Α και τύπου Β.

Παρατηρούμε ότι σε μια οποιαδήποτε κάλυψη του 200×200 τετραγώνου, οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους κάθε πλακιδίου τύπου Β είναι άρτιοι αριθμοί. Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους ενός πλακιδίου τύπου Α είτε είναι τοποθετημένο παράλληλα στον x-άξονα είτε παράλληλα στον y-άξονα έχουν αντίθετο parity, δηλ. η μία είναι περιττός αριθμός και η άλλη άρτιος. Στην πρώτη περίπτωση, περιττός αριθμός είναι η τεταγμένη και στη δεύτερη η τετμημένη.



Αφού το αλγεβρικό άθροισμα των συντεταγμένων όλων των κέντρων βάρους των πλακιδίων της κάλυψης πρέπει να είναι 0, για να είναι εφικτή η κάλυψη, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άρτιο πλήθος πλακιδίων τύπου Α κάθε είδους. Αφού το $N = 625$ είναι περιττός αριθμός, μια τέτοια κάλυψη είναι αδύνατη.

Σχόλιο: Για την παραπάνω μέθοδο, δείτε το άρθρο, *Centroids and Tiling Problems*, H. Siljak, Mathematical Reflections, 5 (2009).

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n, που είναι τέτοιοι, ώστε ο $n!$ να διαιρεί το γινόμενο

$$\prod_{\substack{p<q\leq n \\ p,q\ \text{πρώτοι}}} (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}).$$

Λύση

Έστω $n! = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{k-1}^{a_{k-1}} p_k^{a_k}$ η ανάλυση του $n!$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με $a_i > 0$ για $i = 1,2,\ldots,k$ και $p_1 < p_2 < \cdots < p_{k-1} < p_k$..

Θα αποδείξουμε ότι $p_k = p_{k-1} + 2$ και $p_{k-1} = p_{k-2} + 2$. Αφού ο πρώτος p_k διαιρεί το γινόμενο

$$\prod_{\substack{p<q\leq n \\ p,q \text{πρώτοι}}} (p+q) = (2+3)\cdots(2+p_{k-2})(2+p_{k-1})\cdots(p_{k-1}+p_k)$$

θα πρέπει να διαιρεί κάποιον όρο της μορφής $p_i + p_j$ με $i < j \leq k-1$. Το άθροισμα $p_i + p_j$ είναι μικρότερο του $2p_k$, οπότε $p_k = p_i + p_j$. Αν $i > 1$, τότε $p_i + p_j$ είναι άρτιος αριθμός, άτοπο, αφού ο $p_k > 2$ είναι περιττός. Συνεπώς, $i = 1$ και $j = k-1$, με $p_1 = 2$ και $p_k = p_1 + p_{k-1} = 2 + p_{k-1}$.

Ομοίως, ο p_{k-1} διαιρεί κάποιον όρο της μορφής $p_i + p_j$ με $1 \leq i < j \leq k$. Αν $j \neq k$, τότε $j \leq k-2$, και όπως παραπάνω, θα έχουμε $p_{k-1} = p_{k-2} + 2$. Αν $j = k$, δηλ. αν ο p_{k-1} διαιρεί κάποιον όρο της μορφής $p_i + p_k$ με $1 \leq i$, τότε ο p_{k-1} διαιρεί τον $p_i + p_{k-1} + 2$, και άρα τον $p_i + 2$. Αναγκαστικά τότε είναι $p_{k-1} = p_i + 2$, με $i = k-2$. Συνεπώς, $p_{k-1} = p_{k-2} + 2$ σε κάθε περίπτωση. Αφού p_k, $p_k - 2$ και $p_k - 4$ πρώτοι, εργαζόμενοι modulo 3, παίρνουμε $p_k = 7$. Συνεπώς, οι μοναδικοί πρώτοι που διαιρούν τον $n!$ είναι οι 2, 3, 5, 7. Έχουμε:

$$\prod_{\substack{p<q\leq 7 \\ p,q \text{πρώτοι}}} (p+q) = (2+3)(2+5)(2+7)(3+5)(3+7)(5+7) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7, \text{ και}$$

$7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, ενώ $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, και $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Άρα, $n = 7$.

Σχόλιο. Αλλιώς, $v_2(8!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{8}{2^i} \rfloor = 4 + 2 + 1 = 7$, $v_2(9!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{9}{2^i} \rfloor = 4 + 2 + 1 = 7$ και $v_2(10!) = 8$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 128

Α76. **Έστω n φυσικός αριθμός, $n \geq 2$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης**

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots +, x_n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n^2} = 1. \qquad (1)$$

Για ποιες τιμές των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή;

ΜΟ Ρουμανίας 2022

Λύση

Για $n = 2$ η συνάρτηση γίνεται $f(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} = x_1 x_2$, υπό τη συνθήκη

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} = 1, x_1, x_2 > 0 \Leftrightarrow 2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2, x_1, x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1,$$

οπότε η ελάχιστη τιμή είναι ίση με 1 και λαμβάνεται για κάθε $x_1, x_2 > 0$.

Έστω $n \geq 3$. Τότε, για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (1), θα αποδείξουμε ότι:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq (n-1)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \qquad (2)$$

ή ισοδύναμα ότι:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \cdots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right). \qquad (3)$$

Υποθέτουμε ότι $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ και για $1 \leq i < j \leq n$ θεωρούμε την ανισότητα

$$\frac{1}{1+x_i^2} + \frac{1}{1+x_j^2} < \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

από την οποία προκύπτει ότι $x_i^2 x_j^2 > 1 \Rightarrow x_1 x_2 > 1$. Τότε άμεσα προκύπτει ότι ισχύει

$$x_i + \frac{1}{x_i} \leq x_j + \frac{1}{x_j}, \text{για } 1 \leq i < j \leq n,$$

και ότι η ισότητα αληθεύει όταν $x_i = x_j$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) γράφουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{x_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{x_i}\right) \geq n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i^2}\cdot\left(x_i + \frac{1}{x_i}\right) = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i},$$

όπου για την ανισότητα που προέκυψε χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα του Chebyshev.
Από την ανισότητα του Chebyshev συμπεραίνουμε επίσης ότι η ισότητα ισχύει όταν

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{n-1}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{n-1}$.

Α77. **Να αποδείξετε ότι για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει:**

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma} + 6 \geq \frac{9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}.$$

ΜΟ Ουκρανίας 2019

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα των κύβων:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$$

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha\beta\gamma} - 3 \geq \frac{9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} - 9 \Leftrightarrow \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} - 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{9(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\big((\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma\big) \geq 0,$$

η οποία αληθεύει, γιατί

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha \geq 0 \text{ και } (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-9\alpha\beta\gamma \geq 0.$$

Πράγματι, έχοντας υπόψη ότι $\alpha,\beta,\gamma > 0$, έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = \frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right) \geq 0, \text{ και}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha > 0 \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^6 \geq 3^3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \geq 27\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\beta\gamma\gamma\alpha}\right)^3 = (27\alpha\beta\gamma)^2 \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^3 \geq 27\alpha\beta\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 \geq (9\alpha\beta\gamma)^3 \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \geq 9\alpha\beta\gamma.$$

Γ63. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ. Έστω Δ σημείο του τόξου ΑΓ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχει την κορυφή Β. Θεωρούμε δύο σημεία Χ και Χ΄ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $A\hat{B}X = \Gamma\hat{B}X'$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Χ, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΧΧ΄ περνάει από σταθερό σημείο διαφορετικό του Δ.

ΜΟ Ουκρανίας 2019

Λύση

Έστω γ, γ_1 και γ_2 οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΓ, ΒΧΧ΄και ΔΧΧ΄, αντίστοιχα. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου γ στο σημείο Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Θεωρώντας τη δύναμη του σημείου Ε ως προς τον κύκλο γ έχουμε:

$$EB^2 = EA\cdot E\Gamma.$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$E\hat{B}X = E\hat{B}A + A\hat{B}X = A\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{B}X' = B\widehat{X'}X.$$

Επομένως, η ευθεία ΕΒ είναι εφαπτομένη και του κύκλου γ_1 στο σημείο Β.

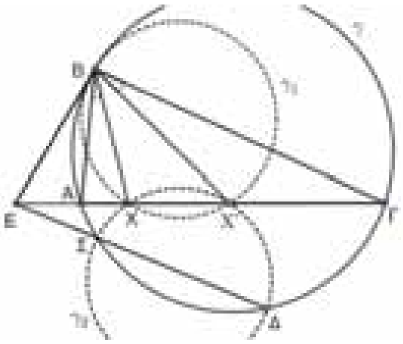
Άρα έχουμε: $EB^2 = EX\cdot EX'$.

Έστω ότι η ευθεία ΕΔ τέμνει τον κύκλο γ_2 στο σημείο $\Sigma \neq \Delta$. Τότε έχουμε ότι:

$$E\Sigma\cdot E\Delta, = EX\cdot EX' = EB^2,$$

από την οποία έπεται ότι το σημείο Σ ανήκει στον κύκλο γ.

Επειδή τα σημεία Β, Ε και Δ είναι σταθερά, έπεται ότι και το σημείο Σ είναι σταθερό.



Σχήμα 1

Ασκήσεις για λύση

Γ64. Δίνεται οξυγώνιο μη ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι του ΑΚ και ΓΝ που τέμνονται στο Ι. Έστω ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΒΝ τέμνονται για δεύτερη φορά στο σημείο Χ. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι η ευθεία Euler του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΙ, αν, και μόνον αν, τα σημεία Χ, Ι και Μ είναι συνευθειακά.

Ν55. Να βρείτε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο n ο οποίος έχει ακριβώς τέσσερις θετικούς ακέραιους διαιρέτες (μαζί με τους 1 και n), των οποίων το άθροισμα S είναι τέτοιο ώστε $40 \leq S \leq 42$.

Α78. Έστω ν ένας θετικός ακέραιος. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να εκφράσουμε κάθε θετικό ρητό αριθμό στη μορφή

$$\frac{\alpha^\nu+\beta^{\nu+2}}{\gamma^{\nu+1}+\delta^{\nu+3}},$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι θετικοί ακέραιοι.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. Για τα Μαθηματικά

I_α μαθηματικοποίηση των επιστημών

Γρήγορα αλλάζει η δομή των Μαθηματικών και το ίδιο γρήγορα αλλάζει και ο χαρακτήρας της μαθηματικής εργασίας. Ποιό είναι όμως το κύριο, το βασικό σ' αυτήν την θυελλωδώς διεξαγόμενη διαδικασία; Θα κάνουμε πάνω σ' αυτό δύο παρατηρήσεις, χωρίς να επιδιώκουμε την εξαντλητική διαφώτιση του ζητήματος:

α. σήμερα, όπως και σε όλες τις ιστορικές περιόδους, τα **μαθηματικά μέσα** που υπάρχουν αποδείχνονται ανεπαρκή. Η ανάπτυξη της επιστήμης απαιτεί την κατασκευή νέων συστημάτων. Αυτό ανοίγει ανεξάντλητες δυνατότητες για την παραπέρα εξέλιξη των Μαθηματικών.

β. η ανάπτυξη της ταχύρρυθμης **υπολογιστικής τεχνικής** καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη των διαφόρων λογικό - μαθηματικών συστημάτων, από την οποία εξαρτάται και η ίδια. Εκτός αυτού, η αξιοποίηση των διατιθέμενων υπολογιστικών μηχανών απαιτεί τη χρησιμοποίηση εξαιρετικά μεγάλου αριθμού μαθηματικών μέσων (αλγοριθμικών γλωσσών, μεταφραστών, προγραμμάτων, αλγορίθμων κλπ.), τα οποία πήραν γενικευμένη ονομασία «μαθηματικός εξοπλισμός» (software) των υπολογιστικών μηχανών. Απ' αυτή την άποψη για τα σύγχρονα Μαθηματικά είναι χαρακτηριστική η δημιουργία νέων τυπικών γλωσσών.

I_β μαθηματικοποίηση της γνώσης

Η πιο γενική θεωρία είναι η τυπική Λογική. Τα αξιώματα της και τα πορίσματα της έχουν επαληθευτεί από την ανθρώπινη σκέψη σε κάθε πλευρά της ανθρώπινης κοινωνίας από τη γέννηση της μέχρι σήμερα. Στην σημερινή της μορφή κι από την άποψη της μαθηματικής Λογικής αποτελεί προϊόν της εξέλιξης και της προόδου. **Παρακινεί** όλα τα ορθολογιστικά ανθρώπινα ζητήματα. Οι ανθρώπινες δραστηριότητες λογικοποιούνται. Σε κάθε φυσιολογική ανθρώπινη κοινωνία υπάρχει η «λογικοποίηση». Μαθηματικές θεωρίες έρχονται αμέσως μετά την τυπική Λογική και έχουν βαθμούς γενικότητας και συνέχειας, όπως και βαθμούς επαλήθευσης με την αντικειμενική πραγματικότητα. Τα Μαθηματικά ειδικότερα, μπορούν να εισχωρήσουν σ' όλες τις επιστήμες σε κάποιο ορισμένο στάδιο της ανάπτυξής τους. Τότε λέμε ότι οι επιστημονικές δραστηριότητες έχουν «μαθηματικοποιηθεί». *«Το φαινόμενο της μαθηματικοποίησης υπάρχει στην Επιστήμη και στις εφαρμογές της. Με το πέρασμα των αιώνων έχει περιλάβει διάφορες ανθρώπινες δραστηριότητες. Είναι αναγκαίο να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή σ' αυτό το πρόβλημα»*

I_γ επιστημονικοτεχνική επανάσταση

Η εποχή μας άρχισε ως επιστημονική επανάσταση με τη διαμόρφωση των βασικών καθολικών μαθηματικών δομών. Μετατράπηκε σε επιστημονικοτεχνική με τη δημιουργία της υπολογιστικής τεχνολογίας και την κατάληξη της στο στάδιο των Η.Υ. της μαθηματικής πληροφορικής. Τα μέσα αυτά εισχώρησαν γρήγορα στους προετοιμασμένους γι' αυτό τομείς της Μηχανικής, της Φυσικής, της Τεχνικής, της μετεωρολογίας, της γεωφυσικής. Καθοριστικό αποτέλεσμα ωστόσο προέκυψε από τη διείσδυσή τους στις σαφώς ώριμες ανάγκες των άλλων φυσικών, κοινωνικών και ανθρωπιστικών επιστημών, όπως η βιολογία, οι οικονομικές επιστήμες, η γλωσσολογία. Η δυνατότητα να φτάσει σ' αυτήν την κατάσταση κάθε επιστήμη ή μια σύνθεση επιστημών ως σύνολο καθορίζει τις προοπτικές της επιστημονικοτεχνικής επανάστασης στη σύγχρονη εποχή. Οι μέθοδοι και τα μέσα της επιστημονικοτεχνικής επανάστασης εξασφαλίζουν **την αυτοματοποίηση των διαδικασιών** που κατακτήθηκαν και μάλιστα με ιλιγγιώδη ταχύτητα. Έτσι έχουμε εξαιρετική αποδοτικότητα της επιστήμης και της πρακτικής. Βασική μέθοδος της επιστημονικοτεχνικής επανάστασης είναι η ολική μέθοδος της γενικευμένης πληροφορικής των Η.Υ. *Βασικό μέσο της σύγχρονης επιστημονικοτεχνικής επανάστασης είναι η υπολογιστική τεχνολογία.*

ΙΙ$_α$ η έννοια ´´μαθηματικό μοντέλο´´

Η συμμετοχή των Μαθηματικών στη μελέτη της υλικής πραγματικότητας έχει τις δικές της ιδιαιτερότητες. Είναι γνωστό, ότι κανένα υλικό αντικείμενο ή σύστημα αντικειμένων, ακόμα κι υπαρκτές στην πραγματικότητα συνδέσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους δεν ήταν, ούτε είναι άμεσα αντικείμενα της μαθηματικής μελέτης. Για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα μαθηματικά μέσα για την μελέτη των υπαρκτών στην πραγματικότητα διαδικασιών, φαινομένων ή μεμονωμένων αντικειμένων, είναι απαραίτητο να κατασκευαστούν τα μαθηματικά τους μοντέλα.

*«Μαθηματικά μοντέλα συνηθίζεται να ονομάζονται τα **συστήματα των μαθηματικών σχέσεων**, που περιγράφουν συμβολικά τις υπό μελέτη διαδικασίες ή φαινόμενα. Για τη συγκρότηση των μαθηματικών μοντέλων χρησιμοποιούνται ποικίλα μαθηματικά μέσα εξισώσεις (αλγεβρικές, διαφορικές, ολοκληρωτικές), γραφήματα, πίνακες και σχήματα, σχέσεις της μαθηματικής Λογικής, γεωμετρικές κατασκευές κλπ. Η κατασκευή, η μελέτη και η εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων — αυτό είναι το βασικό είδος της δραστηριότητας των μαθηματικών. Σ' αυτό συνίσταται το βασικό τους πρόβλημα»* [02]

Οι δυνατότητες για την ανακάλυψη νέου αντικειμένου μοντελογράφησης αναμένονταν στα αυτόματα της ζωντανής ύλης. Όμως τώρα τα μοντελοποιημένα αυτόματα σ' αυτόν τον τομέα καλύπτονται από τη γλώσσα και τα μέσα των διακριτών Μαθηματικών. Τα τεχνητά αυτόματα της σύγχρονης υπολογιστικής τεχνολογίας επίσης περιέχονται στη γλώσσα και τα μέσα των βασικών δομών.

Σε κάθε χωριστή περίπτωση της μαθηματικής έρευνας των διαδικασιών στα Μαθηματικά, ή και εκτός των Μαθηματικών, υπάρχουν δυο στάδια:

1) Η **εξεύρεση του μαθηματικού μοντέλου** των φαινομένων που μελετάμε, η μετατροπή του υπό μελέτη προβλήματος σε μαθηματικό και

2) η λύση του μαθηματικού μοντέλου, δηλ. η επεξεργασία της πληροφορίας που περιέχει. Σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση της μαθηματικής μελέτης εφαρμόζονται και οι δυο μέθοδοι, δηλ. η μαθηματική μοντελογράφηση και η μαθηματική πληροφορική κι' έχουμε ενιαία διαδικασία.

Θα γενικεύσουμε τις έννοιες μας, αν αυτή την ενιαία διαδικασία την ονομάσουμε ανάλογα με την περίπτωση γενικευμένη μαθηματική μοντελογράφηση ή γενικευμένη μαθηματική πληροφορική.

ΙΙ$_β$ για την ουσία της κατασκευής μοντέλων

Η κατασκευή μοντέλων δεν αποτελεί την ιδιότυπη μέθοδο επιστημονικής έρευνας που χαρακτηρίζει μόνο τη μαθηματική έρευνα.

Η εξέταση των υπό μελέτη αντικειμένων βάσει των μοντέλων τους είναι διαδομένη παντού και εκδηλώνεται με τις πιο διαφορετικές μορφές.

Ο ίδιος ο όρος **«μοντέλο»** δεν απόκτησε ομοιότυπες ή έστω και ταυτιζόμενες ως προς το νόημα ερμηνείες. Ανάλογα με τις περιστάσεις λένε και γράφουν για μακέτες, για υλικά, φυσικά, τεχνικά συμβολικά και άλλα μοντέλα, για κώδικες, σχήματα κλπ. Ο όρος. αφού εισαχθεί και χρησιμοποιηθεί σε ειδικές, συγκεκριμένες καταστάσεις, εισάγεται κατόπιν στην επιστημονική, τεχνική, γλωσσική πρακτική των ανθρώπων και καθιερώνεται από τις παραδόσεις. Έξω από τα πλαίσια του περιεχομένου δε γίνεται κατορθωτό να ορίσουμε τον όρο «μοντέλο».

Γεννιούνται ερωτήματα για τα αίτια της απροσδιοριστίας του όρου «μοντέλο», για τις **γνωσιολογικές βάσεις** της διαδικασίας κατασκευής μοντέλου, για τις ιδιαιτερότητες και δυνατότητες της.

Από γενική φιλοσοφική σκοπιά είναι προφανές, ότι η ανάλυση της διαδικασίας κατασκευής μοντέλου, παρ' όλη την πολυμορφία της, πρέπει να ξεκινάει από την αναγνώριση της πραγματικής ύπαρξης των υπό κατασκευή αντικειμένων, από την αναγνώριση της ύπαρξης της αντικειμενικής πραγματικότητας γενικά. Αυτή η ανάλυση πρέπει να γίνεται με βάση τη θεμελιακή αρχή της γνωσιοθεωρίας, δηλ. της **θεωρίας της αντανάκλασης.**

Η απεικόνιση της αντικειμενικά υπαρκτής πραγματικότητας είναι μια σύνθετη διαδικασία της επιστημονικής γνώσης. Αυτή αναπτύσσεται σύμφωνα με τους νόμους της θεωρίας της αντανάκλασης και είναι πολύπλευρη. Η διάκριση μέσα σ' αυτήν την διαδικασία της ειδικής πλευράς της κατασκευής μοντέλου αποδεικνύεται ότι δεν είναι καθόλου απλό πρόβλημα. Επιπλέον, αυτό το πρόβλημα απέχει ακόμα πολύ από τη λύση του. Στην κατανόηση του υπάρχουν διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις. Ο αριθμός τους είναι πολύ μεγάλος. Όσον αφορά τη γνωσιολογική φύση της κατασκευής μοντέλου, αυτή είναι όχι μόνον ειδική τεχνική γνωστικού χαρακτήρα, η οποία χρησιμοποιείται από την επιστήμη, αλλά και σημαντικό μέρος της επιστημονικής γνώσης γενικά, η πιο συχνά εφαρμοζόμενη μέθοδος της.

Οι διαφορετικές κατανοήσεις που υπάρχουν σήμερα για το πρόβλημα της κατασκευής μοντέλων έχουν τις ρίζες τους στη διαφορετική κατανόηση των λογικών βάσεων και της πρακτικής της μοντελοκατασκευής. Και το θέμα δε βρίσκεται μόνο στη διαφορά των πεποιθήσεων.

Μη επιδιώκοντας την πλήρη έκθεση όλου του πλέγματος των δύσκολων φιλοσοφικών προβλημάτων, συνδεμένων με τη θεωρία και την **πρακτική της κατασκευής μοντέλων**, ας δοκιμάσουμε να διατυπώσουμε εκείνα τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας αυτής, που θα μας χρειαστούν κατά κύριο λόγο για την περιγραφή της κατασκευής των μαθηματικών μοντέλων:

«α) σε κάθε μεμονωμένη περίπτωση θα πρέπει να εκπονηθεί και να γίνει αποδεκτή μια όσο το δυνατόν ακριβέστερη έννοια του μοντέλου, που να μην επιτρέπει διαφορετικές ερμηνείες,

β) το μοντέλο πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε να μπορεί να αντικαθιστά στις μελέτες τα αντικείμενα, να έχει μ' αυτά όμοια χαρακτηριστικά (ευδιάκριτες ποσοτικές σχέσεις, γεωμετρικά σχήματα, ισόμορφες δομές, αναλογίες κλπ.)»

(η συνέχεια, στο επόμενο)

II. Αυτό το ξέρατε;

*τι γνωρίζετε για το **«Ξενοδοχείο του David Hilbert ?»***

[η απάντηση στο τέλος της στήλης]

III. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»
1ο θέμα. Πόπης Μπαλαμώτη – Σπιτά, "ΥΠΑΤΙΑ"

προλεγόμενα ο έμμετρος συνεργάτης της στήλης μας, ο Πέτρος Σοφιανός, μας διαβίβασε μια ποιητική απόδοση του μαρτυρίου της νεοπλατωνικής φιλοσόφου και μαθηματικού, της γνωστής Υπατίας. Το έργο είναι δημιουργία της συναδέλφισσας Πόπης Μπαλαμώτη-Σπιτά. απολαύστε το..

ΥΠΑΤΙΑ*

Μάγισσα!
Έπεσε βαριά του Πέτρου η αφροσύνη
απ' τα σκαλιά της εκκλησιάς στ' ανταριασμένο πλήθος.
Κι αυτό, τυφλό κι αστόχαστο στο κήρυγμα του μίσους,
μ' άγρια μανία ιερή, σάμπως αγέλη λύκων,
τράβηξε για την έπαυλη του Θέωνα, που η κόρη,
όμορφη σαν την Αθηνά και με σοφή τη γνώμη,
ζωντάνευε σε μαθητές που θήρευαν τη γνώση
του Πλάτωνα τους στοχασμούς και των Πυθαγορείων.
Την ώρα που ο Συνέσιος, ο πιο καλός απ' όλους,
τον αστρολάβο στάθμιζε, να 'βρει με τον κανόνα
στα πέλαγα των αστεριών των πλανητών τις θέσεις,
αχός βαρύς, σατανικός τάραξε τη γαλήνη
κι όλοι μαζί πετάχτηκαν έντρομοι στον εξώστη.
–«Θάνατος για τους εθνικούς!» το σύνθημα βομβούσε
με παγερή υπόκρουση τον κρότο των πελμάτων.
Σείστηκε η Αλεξάνδρεια, έτρεμε από τον φόβο
για τη ζωή της εκλεκτής μες στην παραφροσύνη.
Άγριος τρόμος έλυσε τα γόνατα των φίλων!
Τους πρόσταξε να σκορπιστούν, να σώσουν τη ζωή τους.
–«Κρύψου κι εσύ!» ορμήνεψαν, θερμά παρακαλώντας,
μα εκείνη, αγέρωχη θεά, στάθηκε στο κατώφλι,
θαρρώντας πως η λογική θα σίγαζε την έχθρα.
Του κάκου! Βέλη των παθών τριβέλιζαν τον νου τους
και βίαιο παραλήρημα διαφέντευε τον όχλο:
Την άρπαξαν απ' τα μαλλιά, την έσυραν στον δρόμο
κι ύστερα την κομμάτιασαν, φριχτής θυσίας σφάγιο
στον αποτρόπαιο βωμό της μισαλλοδοξίας.
Η Παναγιά αλαφιάστηκε στων χριστιανών το κρίμα'
έκλαψε με παράπονο για τον χαμό της κόρης
και το ακοίμητο το φως «απέστρεψε το βλέμμα.

Πόπη Μπαλαμώτη - Σπιτά

**Υπατία: Νεοπλατωνική φιλόσοφος και μαθηματικός*
από την Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου (370 – 415 μ.Χ.)»
Κόρη του Θέωνα, μεγάλου μαθηματικού της εποχής

2ο θέμα. για τη Μαρία Κιουρί

προλεγόμενα ***Η Μαρί Κιουρί διεξήγαγε πρωτοποριακές μελέτες και συνέβαλε σημαντικά στην κατανόηση της ραδιενέργειας. Ήταν η πρώτη γυναίκα που δίδαξε στη Σορβόννη. Το 1910 δημοσίευσε την πραγματεία της πάνω στη ραδιενέργεια, έργο το οποίο θεωρείται θεμελιώδες για την κατανόηση του αντικειμένου αυτού. Το 1911 της απονεμήθηκε το βραβείο Nobel Χημείας για την απομόνωση του καθαρού ραδίου***

Οι πρώτες μαζικές ακτινογραφίες

Στη διάρκεια του Α' Παγκοσμίου Πολέμου και καθώς δεν μπορούσε να συνεχίσει την έρευνά της καθώς το εργαστήριό της ήταν κλειστό, η Κιουρί με τη βοήθεια της κόρης της Ιρέν αφιερώθηκε στην ανάπτυξη της χρήσης της ακτινογραφίας. Τότε ήταν που έδωσε το μεγαλύτερο μέρος της περιουσίας της, που προερχόταν κυρίως από το βραβείο Nobel, σε δωρεές για τους σκοπούς του πολέμου. Οργάνωσε ακτινολογική υπηρεσία για το μέτωπο και τοποθέτησε ακτινολογικά μηχανήματα, φιλμ και αντιδραστήρια σε 20 οχήματα, τα οποία ήταν **εξοπλισμένα με «δυναμό»** ώστε να παράγουν ηλεκτρικό ρεύμα. Στον στρατό τα οχήματα αυτά τα αποκαλούσαν «Μικρές Κιουρί». Εκεί έβαλε μέσα σε οχήματα **συσκευές ακτίνων Χ**, εκεί έγιναν και οι πρώτες μαζικές ακτινογραφίες που εντόπιζαν τις σφαίρες ή τα σπασμένα κόκαλα, εκεί μέσα στις μικρές Κιουρί που έσωσαν κόσμο. «*Τίποτα στη ζωή - έλεγε - δεν είναι **για να φοβόμαστε,** είναι μόνο **για να κατανοούμε**. Τώρα είναι η ώρα για να καταλάβουμε περισσότερα, έτσι ώστε να φοβόμαστε λιγότερο*». Η Κιουρί είχε καταλήξει πως η φυσική τάξη των πραγμάτων έχει μια απίστευτη συνοχή. «*Διδάχτηκα, έλεγε, ότι ο δρόμος της προόδου δεν είναι ούτε γρήγορος ούτε εύκολος. Δεν αντιλαμβανόμαστε τι έχει γίνει. Μπορούμε να δούμε μονάχα τι απομένει για να γίνει, δεδομένης και της τεράστιας γνώσης που πρέπει να ανακαλυφθεί*» και συμπλήρωνε: «*Η ζωή δεν είναι εύκολη για κανέναν από μας. Αλλά τι μ' αυτό; Πρέπει να έχουμε εμπιστοσύνη στον εαυτό μας. Αυτό κάναμε κι εμείς με τον Πιέρ*». Να επισημάνω πως αυτό το θρυλικό επιστημονικό ζευγάρι, αν είχε κατοχυρώσει την ανακάλυψή τους, θα ήταν δισεκατομμυριούχοι, μόνο που κάτι τέτοιο δεν ταίριαζε με την κοσμοθεωρία τους. Μέχρι σήμερα όποιος θέλει να δει τις σημειώσεις τους στην Εθνική Βιβλιοθήκη του Παρισιού, πρέπει να υπογράψει υπεύθυνη δήλωση, επειδή τα κείμενά τους (όπως και τα ρούχα τους και τα οστά τους) εκπέμπουν ακόμη ραδιενέργεια (και θα εκπέμπουν για 1.500 χρόνια), γι' αυτό και φυλάσσονται σε προθήκες από μόλυβδο! Η Εύα Κιουρί, βιογράφος της μητέρας της, είχε πει: «*Η*

μητέρα μου ήταν 37 ετών όταν γεννήθηκα. Οταν μεγάλωσα αρκετά ώστε να μπορώ να λέω ότι τη γνωρίζω, ήταν μια ηλικιωμένη γυναίκα, η οποία βρισκόταν στο απόγειο της διασημότητάς της. Και όμως αυτή η "διάσημη επιστήμονας" μου ήταν εντελώς ξένη, ίσως επειδή η ιδέα ότι ήταν "διάσημη επιστήμονας" δεν απασχολούσε καθόλου τη Μαρία Κιουρί. Αντιθέτως έχω την αίσθηση ότι πάντα ζούσα δίπλα στη φτωχή φοιτήτρια, την οποία βασάνιζαν εφιάλτες και ήταν η Μαρία Σκλοντόφσκα, πολύ πριν έρθω εγώ στον κόσμο».

Μια ζωή πλούσια σε καλές πράξεις

Η μαμά, της Ιρέν, αλλά και της ραδιενέργειας, **πέθανε στις 4 Ιουλίου 1934**, από απλαστική αναιμία στο σανατόριο του Σανσελμόζ, στην ανατολική Γαλλία. Η ασθένειά της σίγουρα οφειλόταν στην έκθεση του οργανισμού της στη ραδιενέργεια. Την εποχή εκείνη, οι επιβλαβείς συνέπειες της έκθεσης στην ακτινοβολία ήταν άγνωστες, με αποτέλεσμα η εργασία στο εργαστήριο να εκτελείται **χωρίς προστατευτικά μέτρα**. Η Κιουρί μετέφερε δοκιμαστικούς σωλήνες οι οποίοι περιείχαν ραδιενεργά ισότοπα στην τσέπη της και τους αποθήκευε σε ένα συρτάρι του γραφείου της, σχολιάζοντας μάλιστα **το ωραίο μπλε - πράσινο φως** το οποίο ανέδιδαν οι ουσίες αυτές στο σκοτάδι. «*Η σκόνη, - έλεγε - ο αέρας του εργαστηρίου, τα ρούχα μας, όλα γίνονται ραδιενεργά*». Να προσθέσω πως και κάποια μέλη της οικογένειάς της, αλλά και συνεργάτες της ασθένησαν βαριά ή έχασαν τη ζωή τους από την ραδιενεργό ακτινοβολία. Ο σύζυγός της είχε σοβαρά σωματικά εγκαύματα και περπατούσε με δυσκολία. Και η ίδια, όμως, έχανε σιγά σιγά την όραση και την ακοή της, ώσπου δεν άντεξε. Εξήντα χρόνια μετά από την ταφή της, το 1995, προς τιμήν των επιτευγμάτων της, τα οστά του ζεύγους Κιουρί μεταφέρθηκαν στο Πάνθεον του Παρισιού. Ηταν **η πρώτη γυναίκα** που της **αποδόθηκε** αυτή **η τιμή.** Της άρεσε να υπενθυμίζει πως είναι από εκείνους που σκέφτονται σαν τον Νόμπελ, ότι δηλαδή «*στην ανθρωπότητα θα κάνουν περισσότερο καλό, παρά κακό οι νέες ανακαλύψεις κι ότι η επιστήμη τελικά έχει μεγάλη ομορφιά*». Και σ' αυτήν την ομορφιά εκείνη τα αφιέρωσε όλα, ακόμη και τον εαυτό της. Μοιάζει τραγικά ειρωνικό ότι αυτό το στοιχείο που έδωσε ελπίδα στους ασθενείς με καρκίνο, υπήρξε η αιτία θανάτου αυτής που το ανακάλυψε. Κρατάω μια φράση της για το τέλος: ***«Η καλύτερη ζωή δεν είναι η μεγαλύτερη, αλλά η πλουσιότερη σε καλές πράξεις».***

3ο θέμα. «ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» του Stewart Shapiro.(για τον Kurt Gödel)

Προλεγόμενα: ο **Kurt Gödel** ήταν ένας από τους πιο σημαντικούς λογικολόγους που υπήρξαν ποτέ. Αν και είχε ένα ισόβιο ενδιαφέρον για τη φιλοσοφία, η **τελειομανία** του τού επέτρεψε μόνο λίγα δημοσιευμένα άρθρα στο πεδίο μας. [Το απόκομμα είναι πό το βιβλίο του Stewart Shapiro: «Σκέψεις για τα Μαθηματικά: Η φιλοσοφία των Μαθηματικών», Μετάφραση Κώστας Αθ. Δρόσος – Δηπροστρης Σπανός, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2006]. Το βιβλίο του Gödel (1944) αρχίζει με μια ευνοϊκή αναφορά προς πρώιμης άποψης του Bertrand Russel (1944) ότι η λογική «ασχολείται με τον πραγματικό κόσμο ακριβώς τόσο αληθινά όσο η ζωολογία, αλλά με τα πιο αφηρημένα και γενικά χαρακτηριστικά» (Russel, 1919,σελ.169). Δοθέντος του λογικισμού του Russel, φαίνεται ότι γι' αυτόν τα Μαθηματικά προς ασχολούνται με γενικά χαρακτηριστικά του "πραγματικού κόσμου". Αυτό υποδηλώνει τουλάχιστο ρεαλισμό ως προς την τιμή αλήθειας. Οι μαθηματικοί ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς, αντικειμενικά. Στο ζήτημα προς οντολογίας, ωστόσο, ο Russel τελικά **ενστερνίστηκε την άποψη των μη κλάσεων"** η οποία θεωρεί προς αριθμούς και τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα λογικές μυθοπλασίες". Ο Gödel υποστηρίζει ότι προς ο **οντολογικός αντιρεαλισμός** δεν είναι υπερασπίσιμος. Προς είδαμε, μεγάλο μέρος προς φιλοσοφίας του Russel για τα μαθηματικά εστιάζεται στην αρχή του φαύλου κύκλου, την οποία ο Gödel συνόψισε ως εξής: «καμιά ολότητα δεν μπορεί να περιέχει μέλη οριζόμενα **μόνο** στα πλαίσια προς προς ολότητας, είτε μέλη που να συνεπάγονται ή **να προϋποθέτουν αυτή την ολότητα**». Προς σημειωθεί ότι υπάρχουν τρεις διαφορετικές αρχές εδώ.

(1) Καμιά ολότητα δεν μπορεί να περιέχει μέλη *οριζόμενα μόνο με όρους προς προς ολότητας.*

(2) Καμιά ολότητα δεν μπορεί να περιέχει μέλη που *εμπλέκουν την ολότητα αυτή.*

(3) Καμιά ολότητα δεν μπορεί να περιέχει μέλη που να *προϋποθέτουν αυτή την ολότητα.*

Σημείωση Το βιβλίο "Gödel 1995" περιέχει αρκετή από την αδημοσίευτη φιλοσοφική δουλειά του, και το Wang 1974 (σελ. 8-13, 534-6) περιλαμβάνει κάποια σχετική (και πολυσυζητημένη) αλληλογραφία. Ο Gödel προς έγραψε για τη θεωρία προς σχετικότητας και αντιτάχθηκε στην μηχανοκρατία, τη θέση ότι το μυαλό είναι ή μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μια μηχανή. (Βλ. Wang 1987, Κεφ.7 για μια διαυγή και ενορατική συζήτηση για τη φιλοσοφία του Gödel).

IV. Απάντηση στο «αυτό το ξέρατε»;

Ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια, απ' τα οποία όλα είναι κατειλημμένα, μπορεί να φιλοξενήσει ακόμη έναν πελάτη αν όλοι μετακινηθούν προς τα εμπρός κατά ένα δωμάτιο. Έτσι, παρά το γεγονός ότι το ξενοδοχείο θα είναι πλήρως κατειλημμένο, ταυτόχρονα θα μπορεί πάντα να παραχωρεί ένα δωμάτιο σε ακόμη έναν πελάτη

[Σχετική βιβλιογραφία: A.W.Moore: «The Infinite», London and NewYork, Routledge 1990, σελ. 9.

(το απόκομμα δανειστήκαμε από το βιβλίο του Michael Clark «Τα Παράδοξα από το Α έως το Ω». Μετάφραση από τα Αγγλικά Νίκος Παπαδάκης & Μαρτίνα Κόφφα, Εκδόσεις "ΕΝΑΛΙΟΣ", Αθήνα 2006)].

Πρόταση για ένα ρολόι τοίχου στη διακόσμηση γραφείου ενός μαθηματικού

Κάκανος Γιάννης **παράρτημα ΕΜΕ Σερρών**

Θέμα 1

α. Να αποδείξετε τη συνεπαγωγή:

«Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$»

για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να λύσετε την εξίσωση: $(x+1)^3+(1-2x)^3+(x-2)^3=0$

Απάντηση

α. Η απόδειξη περιέχεται στη σελίδα 48 του σχολικού μας βιβλίου,

β. Επειδή

$(x+1)+(1-2x)+(x-2)=x+1+1-2x+x-2=0$

ισχύει:

$$(x+1)^3+(1-2x)^3+(x-2)^3=$$
$$3(x+1)(1-2x)(x-2)$$

Άρα:

$$(x+1)^3+(1-2x)^3+(x-2)^3=0\Leftrightarrow$$
$$3(x+1)(1-2x)(x-2)=0\Leftrightarrow$$
$$x+1=0 \quad ή \quad 1-2x=0 \quad ή \quad x-2=0\Leftrightarrow$$
$$x=-1 \quad ή \quad x=\frac{1}{2} \quad ή \quad x=2$$

Θέμα 2

i) α) Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β, αποδείξτε ότι ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$$

β) Να βρεθεί το εξαγόμενο:

$$\left(\frac{1,005}{2}\right)^2-\left(\frac{0,995}{2}\right)^2$$

ii) Να βρείτε τους ακεραίους κ,λ αν ισχύει:

$$\kappa^2-\lambda^2=21\cdot 17.$$

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου οι δύο πλευρές διαφέρουν κατά 4 μονάδες, ενώ το άθροισμα τους είναι 20 μονάδες.

Απάντηση

i) α) Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=$$
$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$
$$\left(\frac{\cancel{\alpha}+\beta-\cancel{\alpha}+\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\cancel{\beta}+\alpha-\cancel{\beta}}{2}\right)=$$
$$\frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\alpha}{\cancel{2}}=\alpha\beta$$

β)

$$\left(\frac{1,005}{2}\right)^2-\left(\frac{0,995}{2}\right)^2=$$
$$\left(\frac{1+0,005}{2}\right)^2-\left(\frac{1-0,005}{2}\right)^2\overset{(\alpha)}{=}$$
$$1\cdot 0,005=0,005$$

ii) $\kappa^2-\lambda^2=21\cdot 17\Rightarrow(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)=21\cdot 17\Rightarrow$

$$\begin{cases}\kappa-\lambda=21\\ \kappa+\lambda=17\end{cases} ή \begin{cases}\kappa-\lambda=17\\ \kappa+\lambda=21\end{cases} ή$$
$$\begin{cases}\kappa-\lambda=-21\\ \kappa+\lambda=-17\end{cases} ή \begin{cases}\kappa-\lambda=-17\\ \kappa+\lambda=-21\end{cases}\Rightarrow$$
$$(\kappa=19 \text{ και } \lambda=2) \text{ ή } (\kappa=19 \text{ και } \lambda=-2) \text{ ή}$$
$$(\kappa=-19 \text{ και } \lambda=-2) \text{ ή } (\kappa=-19 \text{ και } \lambda=2)$$

iii) Έστω μ το μήκος και π το πλάτος του ορθογωνίου. Τότε το εμβαδόν του είναι: $E=\mu\cdot\pi$

Άρα:

$$\begin{cases}|\mu-\pi|=4\\ \mu+\pi=20\end{cases}$$

Έχουμε:

$$\begin{cases}|\mu-\pi|=4\\ \mu+\pi=20\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mu-\pi=4\\ \mu+\pi=20\end{cases} ή \begin{cases}-\mu+\pi=4\\ \mu+\pi=20\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow(\mu=12 \text{ και } \pi=8) \text{ ή } (\mu=8 \text{ και } \pi=12)$$

Οπότε

$$E=12\cdot 8=96 \text{ τ. μονάδες.}$$

Θέμα 3

Αν $x>2$ τότε να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{2x^2(x-1)>x^3-x+2>0}$$

Απάντηση

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$2x^2(x-1)-x^3+x-2>0$$

Είναι

$$2x^2(x-1)-x^3+x-2=2x^2-2x^2-x^3+x-2=$$
$$x^3-2x^2+x-2=\ x^2(x-2)+(x-2)=$$
$$(x-2)(x^2+1)>0$$

γιατί $x-2>0$ ($x>2$ υπόθεση) και $x^2+1>0$ ως άθροισμα θετικών ποσοτήτων.

Θέμα 4

Αν $|s|\le 2008$, $|e|\le 10$, $|r|\le 5$ τότε $|s-e+r|\le 2023$

Απάντηση

1ος τρόπος:

Έχουμε:

- $|s|\le 2008 \Rightarrow -2008\le s\le 2008 \quad (1)$
- $|e|\le 10 \Rightarrow -10\le e\le 10 \Rightarrow$
  $-10(-1)\ge e\cdot(-1)\ge e\cdot(-1)\ge 10(-1) \Rightarrow$
  $10\ge -e\ge -10 \Rightarrow\ -10\le -e\le 10 \quad (2)$
- $|r|\le 5 \Rightarrow -5\le r\le 5 \quad (3)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων: (1), (2) και (3) έχουμε προκύπτει ότι:

$$(-2008)+(-10)+(-5)\le s+(-e)+r\le$$
$$\le 2008+10+s \Rightarrow$$
$$-2023\le s-e+r\le 2023 \Rightarrow$$
$$|s-e+r|\le 2023$$

2ος τρόπος:

$$|s-e+r|=|s+(-e)+r|\le |s|+|-e|+|r|\le$$
$$\le 2008+10+5\ =2023$$

Θέμα 5

Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\mathbf{A=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2}}$$

Απάντηση

Είναι

$$A=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2}=|x-2|+|x+2|$$

Για τα πρόσημα των παραστάσεων:

$$x-2\ \text{ και }\ x+2$$

έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων τους:

x	$-\infty$ $\quad -2$	$-2 \quad 2$	$2 \quad +\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1^{η}) Αν $x<-2$ τότε:

$$x-2<0 \text{ και } x+2<0$$

Άρα:

$$A=(-x+2)+(-x-2)=$$
$$-x+2-x-2=-2x$$

2^{η}) Αν $-2\le x<2$ τότε: $x-2<0$ και $x+2\ge 0$

Άρα: $\quad A=(-x+2)+(x+2)=4$

3^{η}) Αν $x\ge 2$ τότε:

$$x-2\ge 0 \text{ και } x+2>0$$

Άρα: $\quad A=(-x+2)+(x+2)=4$

Άρα: $\quad A=\begin{cases}-2x, & \text{αν, } \ x<-2\\ 4, & \text{αν, } \ -2\le x<2\\ 2x, & \text{αν, } \ x\ge 2\end{cases}$

Θέμα 6

Να υπολογίσετε την παράσταση

$$\mathbf{A=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Απάντηση

- $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}=$

  $=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1,$

  διότι $\sqrt{3}>1$
- $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4+3-2\cdot 2\sqrt{3}}=$

  $\sqrt{\sqrt{3}^2+2^2-2\cdot 2\sqrt{3}}=$

  $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\left|\sqrt{3}-2\right|=2-\sqrt{3},$

  διότι $2>\sqrt{3}$
- $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{12-6\sqrt{3}}=$

  $=\sqrt{9+3-2\cdot 3\sqrt{3}}=\sqrt{3+\sqrt{3}^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}=$

  $=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}=\left|3-\sqrt{3}\right|=3-\sqrt{3},$

διότι $3>\sqrt{3}$. Άρα:

$$A=\sqrt{3}-1-\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(3-\sqrt{3}\right)=$$
$$=\sqrt{3}-1-2+\sqrt{3}-3+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-6$$

Θέμα 7

Να απλοποιηθεί το άθροισμα

$$\mathbf{A=\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$$

Απάντηση

$$A^2=\sqrt{5+2\sqrt{6}}^{\,2}-2\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}+$$

$$+\sqrt{5-2\sqrt{6}}^{\,2}=5+2\cancel{\sqrt{6}}-2\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}+$$

$$+5-2\cancel{\sqrt{6}}=10-2\cdot\sqrt{25-24}=$$

$$=10-2\sqrt{1}=10-2=8$$

Άρα: $A=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, διότι $A>0$

Θέμα 8

Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[15]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[5]{\alpha^3}=\alpha,$$

για κάθε $\alpha\geq 0$

Απάντηση

Για $\alpha\geq 0$, έχουμε:

$$\sqrt[15]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[5]{\alpha^3}=\alpha^{\frac{1}{15}}\cdot\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\alpha^{\frac{3}{5}}$$

$$=\alpha^{\frac{1}{15}+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}}=\alpha^{\frac{1}{15}+\frac{5}{15}+\frac{9}{15}}=\alpha^{\frac{15}{15}}=\alpha^1=\alpha$$

Θέμα 9

Να μετατρέψετε τη παράσταση σε ισοδύναμή της με ρητό παρονομαστή:

$$\mathbf{A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}}$$

Απάντηση

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\cdot 1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{7}^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}^2-\sqrt{7}^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{10}}$$

$$=\frac{\left(2+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{10}}{20}$$

Θέμα 10

Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A=\left(2-\sqrt{5}\right)^{-3}+\left(2+\sqrt{5}\right)^{-3}}$$

Απάντηση

$$A=\left(2-\sqrt{5}\right)^{-3}+\left(2+\sqrt{5}\right)^{-3}=$$

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^3}+\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^3}=$$

$$\frac{1}{2^3-3\cdot 2^2\sqrt{5}+3\cdot 2\sqrt{5}^2-\sqrt{5}^3}+$$

$$+\frac{1}{2^3-3\cdot 2^2\sqrt{5}+3\cdot 2\sqrt{5}^2+\sqrt{5}^5}=$$

$$\frac{1}{8-12\sqrt{5}+6\cdot 5-5\sqrt{5}}+$$

$$+\frac{1}{8+12\sqrt{5}+6\cdot 5+5\sqrt{5}}=$$

$$\frac{1}{38-17\sqrt{5}}+\frac{1}{38+17\sqrt{5}}=$$

$$\frac{38+17\sqrt{5}+38-17\sqrt{5}}{(38)^2-\left(17\cdot\sqrt{5}\right)^2}=\frac{76}{1444-1445}=-76$$

2ος τρόπος:

$$A=\left(2-\sqrt{5}\right)^{-3}+\left(2+\sqrt{5}\right)^{-3}=$$

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^3}+\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^3}=$$

$$\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^3+\left(2-\sqrt{5}\right)^3}{\left(2-\sqrt{5}\right)^3\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)^3}=$$

$$\frac{\left[\left(2+\cancel{\sqrt{5}}\right)+\left(2-\cancel{\sqrt{5}}\right)\right]^3-3\overbrace{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}^{-1}\left[\left(2+\cancel{\sqrt{5}}\right)+\left(2-\cancel{\sqrt{5}}\right)\right]}{\left[\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)\right]^3}=$$

$$\frac{4^3-3(-1)\cdot 4}{(-1)^3}=-76$$

Θέμα 11

Α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-2|\leq 1$

Β) Αν το x είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (Α) να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathbf{A=\frac{\sqrt{1-4x+4x^2}}{2x-1}+\frac{\sqrt{9x^2-60x+100}}{3x-10}}$$

Απάντηση

Είναι:

$$|x-2|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x-2\leq 1\Leftrightarrow$$

$$-1+2\leq x-2+2\leq 1+2\Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$$

Όμως:

$$A=\frac{\sqrt{1-4x+4x^2}}{2x-1}+\frac{\sqrt{9x^2-60x+100}}{3x-10}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-2x)^2}}{25x-1}+\frac{\sqrt{(3x-10)^2}}{3x-10}$$

$$=\frac{|1-2x|}{2x+1}+\frac{|3x-10|}{3x-10}$$

Όμως:

$$1\le x\le 3\Leftrightarrow -2\cdot 1\ge -2\cdot x\ge -2\cdot 3\Leftrightarrow$$
$$-2\ge -2x\ge -6\Leftrightarrow$$
$$1-6\le 1-2x\le 1-2\Leftrightarrow$$
$$-5\le 1-2x\le -1$$

Οπότε:

$$1-2x<0 \text{ και } |1-2x|=2x-1$$

και:

$$1\le x\le 3\Leftrightarrow 3\cdot 1\le 3\cdot x\le 3\cdot 3\Leftrightarrow$$
$$3\le 3x\le 9\Leftrightarrow 3-10\le 3x-10\le 9-10\Leftrightarrow$$
$$-7\le 3x-10\le -1$$

Οπότε:

$$3x-10<0 \text{ και } |3x-10|=-3x+10$$

Συνεπώς:

$$A=\frac{2x-1}{2x-1}+\frac{-3x+10}{3x-10}=1+(-1)=0$$

Θέμα 12

i) Να δείξετε ότι:

Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ii) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $x,y>0$ να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}\ge\frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

iii) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $x,y,z>0$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}+\frac{\gamma^2}{z}\ge\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{x+y+z}$$

Απάντηση

i) Έχουμε ότι

$$(\alpha^2+\beta^2)-(2\alpha\beta)=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=$$

$$(\alpha-\beta)^2\ge 0$$

Άρα $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}\ge\frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y}$$

αρκεί: $\alpha^2y(x+y)+\beta^2x(x+y)\ge xy(\alpha+\beta)^2$

αρκεί: $\alpha^2y^2+\beta^2x^2-2\alpha\beta xy\ge 0$

αρκεί: $(\alpha y-\beta x)^2\ge 0$, που ισχύει!

Η ισότητα προφανώς ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$

iii) Θα χρησιμοποιήσουμε το ii) οπότε έχουμε

$$\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}+\frac{\gamma^2}{z}=\left(\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}\right)+\frac{\gamma^2}{z}\ge$$

$$\ge\frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y}+\frac{\gamma^2}{z}\ge\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{x+y+z}$$

Θέμα 13

Αν $|\alpha+\beta|+|\beta+\gamma|+|\gamma+\alpha|\ge 2\alpha\beta\gamma(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)$

να δείξετε ότι: $\alpha\beta\gamma\le 1$

Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι:

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|,\quad |\beta+\gamma|\le|\beta|+|\gamma|,\quad |\alpha+\gamma|\le|\alpha|+|\gamma|$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες, έχουμε:

$$|\alpha+\beta|+|\beta+\gamma|+|\gamma+\alpha|\le 2(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)$$

Λόγω της μεταβατικής ιδιότητας έχουμε

$$2\alpha\beta\gamma(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)\le 2(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)\Rightarrow$$

$$(\alpha\beta\gamma-1)(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)\le 0\Rightarrow\ \alpha\beta\gamma\le 1$$

Θέμα 14

Δίνονται οι ρητοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ για τους οποίους γνωρίζουμε ότι:

$\beta,\delta>0$ και οι $\sqrt{\beta},\sqrt{\delta}$ είναι άρρητοι.

Εάν ισχύει: $\alpha+\sqrt{\beta}=\gamma+\sqrt{\delta}$ (1)

να αποδείξετε ότι:

$$\alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.$$

Απάντηση

$$(1)\Rightarrow\sqrt{\beta}=(\gamma-\alpha)+\sqrt{\delta}\Rightarrow$$

$$\beta=(\gamma-\alpha)^2+\delta+2(\gamma-\alpha)\cdot\sqrt{\delta}\Rightarrow$$

$$2(\gamma-\alpha)\sqrt{\delta}=(\beta-\delta)-(\gamma-\alpha)^2$$

Αν $\alpha\ne\gamma$ τότε $\sqrt{\delta}=\dfrac{(\beta-\delta)-(\gamma-\alpha)^2}{2(\gamma-\alpha)}$

δηλαδή ο $\sqrt{\delta}$ ως πηλίκο ρητών αριθμών, είναι ρητός, άτοπο! Άρα $\alpha=\gamma$. Έτσι έχουμε

$$\left.\begin{matrix}\alpha+\sqrt{\beta}=\gamma+\sqrt{\delta}\\ \alpha=\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\sqrt{\beta}=\sqrt{\delta}\\ \alpha=\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\beta=\delta\\ \alpha=\gamma\end{matrix}\right\}$$

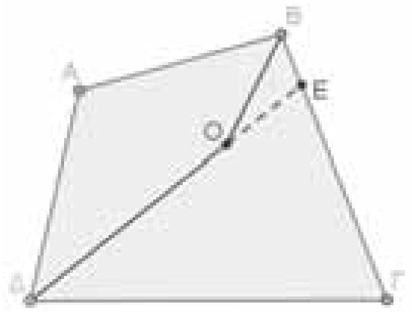
Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Μπιτζηλαίος Γιώργος, Τιμοθεϊδης Αναστάσιος **Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Σερρών**

Άσκηση 1

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διχοτόμων των απέναντι γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$. Αν Ε είναι το σημείο τομής της ΔΟ και της πλευράς ΒΓ να αποδείξετε ότι $B\hat{O}E=\frac{\hat{A}-\hat{\Gamma}}{2}$.

Απάντηση



Στο τρίγωνο $O\overset{\triangle}{B}E$ ισχύει:

$$B\hat{O}E+\frac{\hat{B}}{2}+O\hat{E}B=180^o \Leftrightarrow$$

$$B\hat{O}E=180^o-\frac{\hat{B}}{2}-O\hat{E}B \quad (1)$$

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^o$, οπότε:

$$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}=180^o$$

Η εξωτερική γωνία $O\hat{E}B=\Delta\hat{E}B$ του τριγώνου $\Gamma\overset{\triangle}{\Delta}E$ είναι: $O\hat{E}B=\hat{\Gamma}+E\hat{\Delta}\Gamma \Leftrightarrow O\hat{E}B=\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}$ (2).

Έτσι η (1) γίνεται:

$$B\hat{O}E=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{\Delta}}{2}-\frac{\hat{B}}{2}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\Delta}}{2}=$$

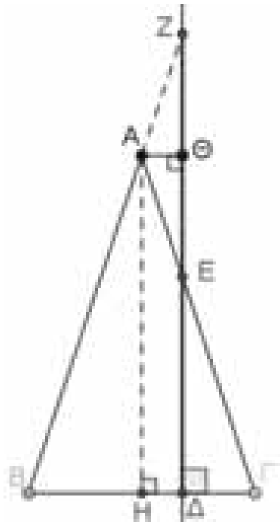
$$=\frac{\hat{A}}{2}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{A}-\hat{\Gamma}}{2}.$$

Άσκηση 2

Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε και την προέκταση της ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\Delta E+\Delta Z$ είναι σταθερό.

Απάντηση

Έστω ΑΗ το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$. Από το Α φέρουμε ευθεία κάθετη στη ΔΖ που την τέμνει στο Θ. Είναι προφανώς $B\Gamma // A\Theta$ (κάθετες στη ΔΘ).



Τότε θα είναι $\hat{B}=Z\hat{A}\Theta$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) και $\hat{\Gamma}=\Theta\hat{A}E$ (εντός εναλλάξ). Επειδή είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ έπεται ότι είναι $Z\hat{A}\Theta=\Theta\hat{A}E$.

Στο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{E}Z$ η ΑΘ είναι ύψος και διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{A}E$.

Άρα το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{E}Z$ είναι ισοσκελές, οπότε είναι $E\Theta=\Theta Z$ (1).

Έτσι είναι: $\Delta E=\Delta\Theta-E\Theta \Leftrightarrow \Delta E=AH-E\Theta$ (2) (από το ορθογώνιο ΑΗΔΕ).

Επίσης είναι: $\Delta Z=\Delta\Theta+\Theta Z \Leftrightarrow \Delta Z=AH+\Theta Z$ (3)

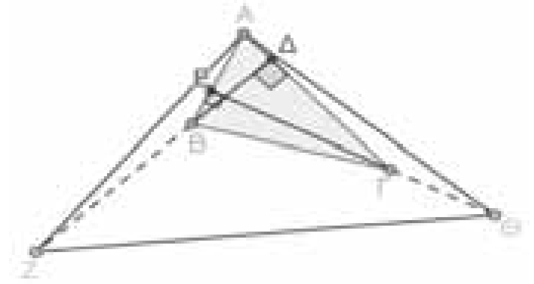
Επειδή είναι $E\Theta=\Theta Z$, από τις σχέσεις (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε: $\Delta E+\Delta Z=2AH=$ μέγεθος σταθερό (το ύψος του δοσμένου τριγώνου είναι σταθερό μέγεθος).

Άσκηση 3

Σε οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Προεκτείνουμε το ΒΔ προς το Β και παίρνουμε $BZ=A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ΓΕ προς το Γ και παίρνουμε $\Gamma\Theta=AB$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{Z}\Theta$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

Απάντηση:

Είναι: $A\hat{B}\Delta=90^o-B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}E=90^o-B\hat{A}\Gamma$, άρα $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow A\hat{B}Z=A\hat{\Gamma}\Theta$ (1) (παραπληρωματικές των ίσων γωνιών).



Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB Z}$ και $\overset{\triangle}{A\Gamma\Theta}$ έχουν: $AB=\Gamma\Theta$ και $BZ=\Gamma A$ (δεδομένο) και τις γωνίες $A\hat{B}Z=A\hat{\Gamma}\Theta$. Άρα είναι ίσα και έτσι έχουν $AZ=A\Theta \quad (2)$

οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AZ\Theta}$ είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $Z\hat{A}B=\Gamma\hat{\Theta}A$ και $\Gamma\hat{A}\Theta=B\hat{Z}A \quad (3)$

(από την ισότητα τριγώνων $\overset{\triangle}{ABZ}$ και $\overset{\triangle}{A\Gamma\Theta}$).

Έχουμε :

$$Z\hat{A}\Theta=Z\hat{A}B+\hat{A}+\Gamma\hat{A}\Theta \underset{(3)}{\overset{Z\hat{A}B=\Gamma\hat{\Theta}A}{=\!=\!=}} \Gamma\hat{\Theta}A+\hat{A}+\Gamma\hat{A}\Theta \quad (4)$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AE\Theta}$ είναι: $\Gamma\hat{\Theta}A+\hat{A}_2+\hat{A}=180^\circ-A\hat{E}\Theta=180^\circ-90^\circ=90^\circ$,

οπότε $Z\hat{A}\Theta=90^\circ$ άρα το ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AZ\Theta}$ είναι ορθογώνιο στο Α.

Άσκηση 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}\,(AB=A\Gamma)$.

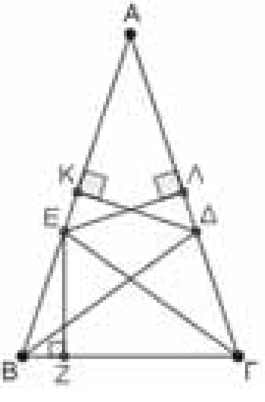
Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο Ο.

α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$.

β. Από τα σημεία Ε και Δ φέρουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Delta K=E\Lambda$.

γ. Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να είναι ίση με την απόσταση των σημείων Δ και Κ, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Απάντηση



α. Είναι: $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}=\overset{\triangle}{E\Gamma B}$ διότι ΒΓ κοινή πλευρά, $B\hat{\Gamma}\Delta=\Gamma\hat{B}E$ $(AB=A\Gamma)$ και $\Delta\hat{B}\Gamma=E\hat{\Gamma}B$ ως μισά ίσων γωνιών. Άρα είναι $B\Delta=\Gamma E$ και $\Gamma\Delta=BE$

β. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{B\Delta K}$ και $\overset{\triangle}{\Gamma E\Lambda}$ είναι ορθογώνια $\hat{K}=\hat{\Lambda}=90^\circ$, έχουν $B\Delta=\Gamma E$ και $\Delta\hat{B}\Gamma=E\hat{\Gamma}B=E\hat{\Gamma}A$. Άρα είναι ίσα $(\Gamma-\Pi-\Gamma)$ οπότε $\Delta K=E\Lambda$.

γ. Θέλουμε να βρούμε ένα σημείο Ζ στην πλευρά ΒΓ, ώστε να ισχύει: $EZ=\Delta K$. Από το ερώτημα α. έχουμε ότι $\Gamma\Delta=BE$. Φέρουμε από το Ε κάθετη προς τη ΒΓ που την τέμνει στο Ζ και είναι $E\hat{Z}B=90^\circ$. Επειδή Ε σημείο της διχοτόμου της γωνίας Γ απέχει εξίσου από τις πλευρές της οπότε $EZ=E\Lambda$. Όμως $\Delta K=E\Lambda$ (ερώτημα β). Οπότε $EZ=\Delta K$. Το ίχνος Ζ της κάθετης από το Ε στη ΒΓ είναι μοναδικό, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο Ζ.

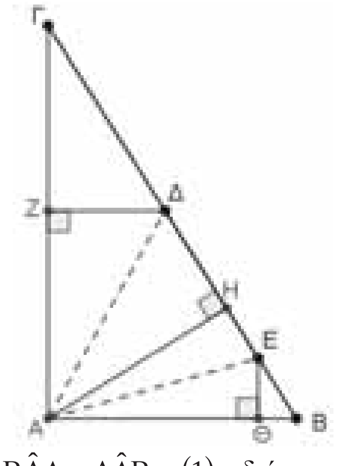
Άσκηση 5

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}\,\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με $AB<A\Gamma$ και ΑΗ το ύψος του προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε $\Delta B=AB$ και $\Gamma E=\Gamma A$. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. $\Gamma\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}H$ και $E\hat{A}B=H\hat{A}E$,

β. $\Delta E=\Delta Z+E\Theta$

Απάντηση



α. Είναι $B\hat{A}\Delta=A\hat{\Delta}B \quad (1)$ διότι μας δόθηκε: $\Delta B=AB$. Αλλά $B\hat{A}\Delta=B\hat{A}+\Delta\hat{A}H$ και $A\hat{\Delta}B \underset{\text{εξωτερική του } \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \hat{\Gamma}+\Gamma\hat{A}\Delta$.

Έτσι η (1) γίνεται: $B\hat{A}H+\Delta\hat{A}H=\hat{\Gamma}+\Gamma\hat{A}\Delta \quad (2)$

Όμως είναι $B\hat{A}H=\hat{\Gamma}$ (κάθετες πλευρές, οξείες γωνίες). Άρα από τη (2) παίρνουμε $\Delta\hat{A}H=\Gamma\hat{A}\Delta$

Επίσης είναι $A\hat{H}\Delta=A\hat{Z}\Delta$ διότι είναι ορθογώνια $\left(\hat{H}=\hat{Z}=90^\circ\right)$ και αποδείξαμε ότι $\Delta\hat{A}H=\Delta\hat{A}Z$.

Έχουν και την υποτείνουσα ΑΔ κοινή $(\Gamma-\Pi-\Gamma)$ άρα είναι ίσα. Έτσι είναι $H\Delta=\Delta Z \quad (3)$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{AE\Theta}$ και $\overset{\triangle}{AEH}$ έχουν $\Theta\hat{E}A \overset{E\Theta//A\Gamma}{\underset{\text{εντός εναλλάξ}}{====}} E\hat{A}\Gamma \overset{\Gamma A=\Gamma E}{====} A\hat{E}\Gamma$

β. Θα δείξουμε ότι $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$. Είναι $\Delta E = EH + H\Delta$ (4)

Δείξαμε ήδη (3) ότι $H\Delta = \Delta Z$. Από τα ίσα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta E\Theta}$ και $\overset{\triangle}{AEH}$ έχουμε: $HE = E\Theta$ άρα η ισότητα (4) γίνεται $\Delta E = E\Theta + \Delta Z$

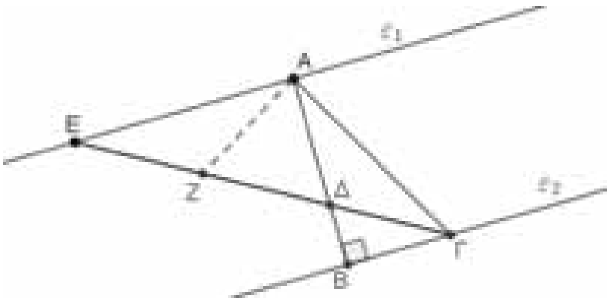
Άσκηση 6

Δίνονται δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παράλληλες. Από τυχαίο σημείο Α της ε_1 φέρουμε την ΑΒ κάθετη στην ε_2 και την ΑΓ πλάγια προς την ε_2. Από το Γ φέρουμε ευθεία που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ευθεία ε_1 στο Ε και είναι τέτοια ώστε $\Delta E = 2A\Gamma$.

α. Αν Ζ είναι μέσο της ΔΕ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AZ\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

β. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}B = 3E\hat{\Gamma}B$

Απάντηση



α. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ είναι ορθογώνιο και το Ζ μέσο της υποτείνουσας ΔΕ. Άρα είναι $AZ = \dfrac{\Delta E}{2}$ και επειδή $\Delta E = 2A\Gamma$, η προηγούμενη σχέση δίνει: $AZ = \dfrac{2A\Gamma}{2} = A\Gamma$. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AZ\Gamma}$ είναι ισοσκελές και $A\hat{\Gamma}Z = A\hat{Z}\Gamma$.

β. Είναι $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}Z + Z\hat{\Gamma}B$ (1)

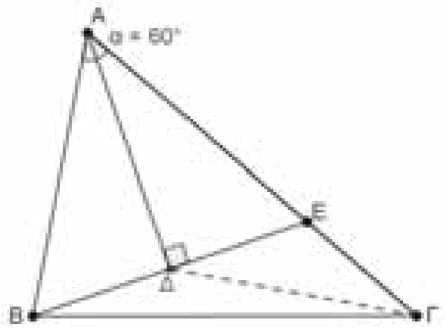
Αλλά $A\hat{\Gamma}Z = A\hat{Z}\Gamma$ (2) και επειδή η $A\hat{Z}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $\overset{\triangle}{ZAE}$, θα είναι $A\hat{Z}\Gamma = \hat{E} + Z\hat{A}E \overset{\hat{E}=Z\hat{A}E}{\underset{\text{αφού } ZA=ZE}{<=>}} 2\hat{E}$. Έτσι η (2) γίνεται: $A\hat{\Gamma}Z = \hat{E} = 2E\hat{\Gamma}B$ (3) διότι $\hat{E} = E\hat{\Gamma}B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων x, y τετμνομένων από τη ΓΕ. Στα μέλη της ισότητας (3) προσθέτουμε τη γωνία $E\hat{\Gamma}B$ και παίρνουμε:

$$A\hat{\Gamma}Z + E\hat{\Gamma}B = 3E\hat{\Gamma}B \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}B = 3E\hat{\Gamma}B.$$

Άσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ και $A\Gamma = \dfrac{3}{2}AB$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο, ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$.

Απάντηση:



Επειδή είναι $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ και $AE = AB$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABE}$ είναι ισόπλευρο, διότι είναι ισοσκελές με γωνία $\hat{A} = 60^o$ Άρα $AE = AB = BE$. Η διχοτόμος της $B\hat{A}E$ είναι ύψος αλλά και διάμεσος του τριγώνου $\overset{\triangle}{ABE}$ άρα Δ είναι μέσο της ΒΕ δηλαδή $B\Delta = BE = \dfrac{AB}{2}$ (1).

Υπολογισμός του ΕΓ: Είναι $A\Gamma = \dfrac{3}{2}AB$. Άρα

$$E\Gamma = A\Gamma - AE = \frac{3}{2}AB - AB = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

Από την (1) και την (2) βλέπουμε ότι το $\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

Τότε είναι $\Delta\hat{E}\Gamma = 180^o - A\hat{E}B = 180^o - 60^o = 120^o$ και $E\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = \dfrac{180^o - 120^o}{2}$ δηλαδή $E\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$.

Άσκηση 8

Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των

ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΔΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.

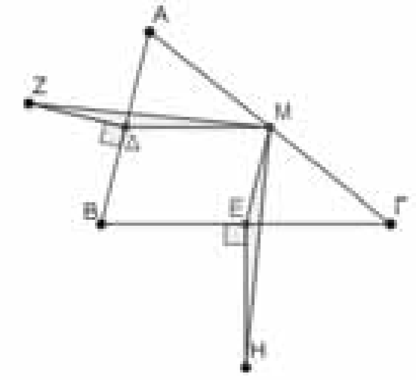
α. Να αποδείξετε :

1. ότι το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο και

2. τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΖΔΜ}$ και $\overset{\triangle}{ΕΜΑ}$ είναι ίσα.

β. Αν τα σημεία Ζ,Δ,Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $\hat{Α} = 90^\circ$.

Απάντηση:

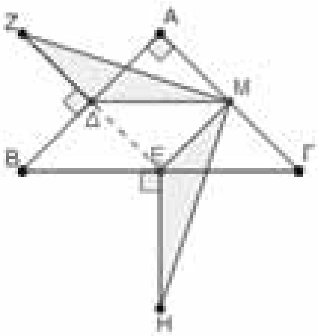


α. 1. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ η ΔΜ συνδέει τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ. Άρα είναι $ΔΜ = // \frac{ΒΓ}{2}$, δηλαδή $ΔΜ // = ΒΕ$. Άρα το τετράπλευρο ΔΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο.

2. Στο παραλληλόγραμμο ΔΒΕΜ ισχύει: $ΒΔ = // ΜΕ$. Αλλά $ΒΔ = ΔΖ$ ως μισά της πλευράς ΑΒ. Άρα $ΜΕ = ΔΖ \ (1)$. Επίσης είναι: $ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} = ΔΜ \ (2)$.

Η γωνία $Μ\hat{Ε}Η = 90^\circ + Μ\hat{Ε}Γ$ και επειδή $Μ\hat{Ε}Γ = Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Δ}Μ$, η προηγούμενη ισότητα γίνεται $Μ\hat{Ε}Η = 90^\circ + ΑΔΜ = Ζ\hat{Δ}Μ \ (3)$.

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΜΕΗ}$ και $\overset{\triangle}{ΖΔΜ}$ είναι ίσα (Π – Γ – Π).



β. Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι πάνω σε μια ευθεία, αυτή θα είναι κάθετη στις ΑΒ και ΜΕ (αφού ΑΒ//ΜΕ).

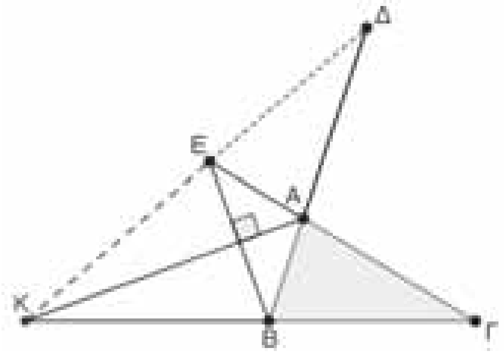
Τότε θα είναι $Α\hat{Δ}Ε = Μ\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Μ}Α = 90^\circ$, άρα το ΑΔΕΜ θα είναι ορθογώνιο. Έτσι θα είναι και $Β\hat{Α}Γ = 90^\circ$.

Άσκηση 9

Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ με $ΑΒ < ΑΓ$. Στις προεκτάσεις των τριγώνων ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) παίρνουμε τμήματα $ΑΔ = ΑΓ$ και $ΑΕ = ΑΒ$ αντίστοιχα.
Η κάθετη από το Α προς τη ΒΕ τέμνει την προέκταση της ΓΒ (προς το Β) στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι

α. το $\overset{\triangle}{ΒΚΕ}$ είναι ισοσκελές τρίγωνο και
β. τα σημεία Κ,Ε και Δ είναι συνευθειακά.

Απάντηση:



α. Ισχύει ότι $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΑΖ \perp ΒΕ$. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ είναι ισοσκελές και η ΑΚ μεσοκάθετη της βάσης ΒΕ.
Τότε ισχύει $ΚΒ = ΚΕ$ (αφού το Κ είναι σημείο της μεσοκάθετης ΑΚ). Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΚΒΕ}$ είναι ισοσκελές.

β. Από το ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΚΒΕ}$ έχουμε $Κ\hat{Β}Ε = Κ\hat{Ε}Β \ (1)$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ έχουμε $Α\hat{Β}Ε = Α\hat{Ε}Β \ (2)$

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΕΔ}$ είναι ίσα διότι έχουν $Ε\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ$, $ΑΒ = ΑΕ$ και $ΓΑ = ΑΔ$ (Π – Γ – Π). Άρα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{ΑΕΔ} \ (3)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$Κ\hat{Β}Ε + Α\hat{Β}Ε + Α\hat{Β}Γ = Κ\hat{Ε}Β + Α\hat{Ε}Β + Α\hat{Ε}Δ$ και επειδή το α΄ μέλος είναι 180° θα είναι και $Κ\hat{Ε}Β + Α\hat{Ε}Β + Α\hat{Ε}Β = 180^\circ$ δηλαδή Κ, Ε, Δ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Τάξη: Β΄

Ασκήσεις Άλγεβρας

Κάκανος Γιάννης **παράρτημα ΕΜΕ Σερρών**

Θέμα 1

Να αποδείξετε ότι:

Α. $\dfrac{1-\sigma\varphi^2\omega}{1+\sigma\varphi^2\omega}=1-2\sigma\upsilon\nu^2\omega$ **για κάθε** $\omega\neq k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

Β. $\mu\cdot\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+2\varepsilon\varphi\omega+\mu\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot\eta\mu^2\omega$

$=(\mu+2)\varepsilon\varphi\omega$ **για** $\omega\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$

Γ. **Αν** $\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu^2\beta}{1+2\eta\mu^2\beta}$ **να δείξετε ότι** $\eta\mu^2\beta=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1+2\eta\mu^2\alpha}$

Απάντηση

Α. Για $\omega\neq k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$, είναι:

$$\frac{1-\sigma\varphi^2\omega}{1+\sigma\varphi^2\omega}=\frac{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}}{1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}}=\frac{\dfrac{\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}}{\dfrac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}}$$

$$=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-2\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

Β. Για $\omega\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$, είναι:

$$\mu\cdot\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+2\varepsilon\varphi\omega+\mu\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot\eta\mu^2\omega=$$

$$=\mu\cdot\eta\mu\omega\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\omega+\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\eta\mu\omega\right)+2\varepsilon\varphi\omega$$

$$=\mu\cdot\eta\mu\omega\cdot\frac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}+2\varepsilon\varphi\omega$$

$$=\mu\cdot\varepsilon\varphi\omega+2\varepsilon\varphi\omega=(\mu+2)\varepsilon\varphi\omega$$

Γ. Είναι: $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1+2\eta\mu^2\alpha}=\dfrac{1+\left(1-\eta\mu^2\alpha\right)}{1+2\eta\mu^2\alpha}$

$$=\frac{1+1-\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu^2\beta}{1+2\eta\mu^2\beta}}{1+2\cdot\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu^2\beta}{1+2\eta\mu^2\beta}}=\frac{\dfrac{2\left(1+2\eta\mu^2\beta\right)-\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\beta\right)}{1+2\eta\mu^2\beta}}{\dfrac{\left(1+2\eta\mu^2\beta\right)+2\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\beta\right)}{1+2\eta\mu^2\beta}}$$

$$=\frac{2+4\eta\mu^2\beta-1-\sigma\upsilon\nu^2\beta}{1+2\eta\mu^2\beta+2+2\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\frac{5\eta\mu^2\beta}{5}=\eta\mu^2\beta$$

Θέμα 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\alpha^2\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)+2\beta\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2}-x\right),$$

$$B=\beta^2\sigma\upsilon\nu\left(13\pi+x\right)-2\alpha\sigma\upsilon\nu\left(20\pi-x\right),$$

$$\Gamma=2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)+2\sigma\upsilon\nu^2x$$

Αφού απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α, Β, Γ, να βρεθούν οι πραγματικοί α, β ώστε η παράσταση $\Delta=A-B+\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **να είναι ανεξάρτητη του x.**

Απάντηση

Είναι:

- $\eta\mu\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)=\eta\mu\left(\dfrac{9}{4}\cdot2\pi-x\right)=$

  $=\eta\mu\left(\left(2+\dfrac{1}{4}\right)2\pi-x\right)$

  $=\eta\mu\left(2\cdot2\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$

- $\eta\mu\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)=\eta\mu\left(\dfrac{7}{4}\cdot2\pi-x\right)=\eta\mu\left(\left(1+\dfrac{3}{4}\right)2\pi-x\right)$

$=\eta\mu\left(2\pi+\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\sigma\upsilon\nu x$

οπότε

$$A=\alpha^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\beta\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\alpha^2\sigma\upsilon\nu x-2\beta\sigma\upsilon\nu x$$

Είναι:

- $\sigma\upsilon\nu\left(13\pi+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(6\cdot2\pi+\pi+x\right)=$

  $\sigma\upsilon\nu\left(\pi+x\right)=-\sigma\upsilon\nu x$

- $\sigma\upsilon\nu\left(20\pi-x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(10\cdot2\pi-x\right)=$

  $\sigma\upsilon\nu\left(-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$,

οπότε

$$B=\beta^2\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)-2\alpha\sigma\upsilon\nu x=-\beta^2\sigma\upsilon\nu x-2\alpha\sigma\upsilon\nu x$$

Είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13}{4}\cdot2\pi+x\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\left(3+\frac{1}{4}\right)2\pi+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(3\cdot2\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\eta\mu x$, οπότε:

$$\Gamma = 2(-\eta\mu x)^2 + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2$$

Επομένως, είναι: $\Delta = A - B + \Gamma\sigma\upsilon\nu x$

$= \left(\alpha^2\sigma\upsilon\nu x - 2\beta\sigma\upsilon\nu x\right) - \left(-\beta^2\sigma\upsilon\nu x - 2\alpha\sigma\upsilon\nu x\right) + 2\sigma\upsilon\nu x$

$= \alpha^2\sigma\upsilon\nu x - 2\beta\sigma\upsilon\nu x + \beta^2\sigma\upsilon\nu x + 2\alpha\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu x$

$= \left[\left(\alpha^2 + 2\alpha + 1\right) + \left(\beta^2 - 2\beta + 1\right)\right]\sigma\upsilon\nu x$

Για να είναι η παράσταση Δ, ανεξάρτητη του x θα πρέπει: $\left(\alpha^2 + 2\alpha + 1\right) + \left(\beta^2 - 2\beta + 1\right) = 0$.

Όμως, $\left(\alpha^2 + 2\alpha + 1\right) + \left(\beta^2 - 2\beta + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha+1)^2 + (\beta-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \beta - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \quad \text{και} \quad \beta = 1$$

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + |\sigma\upsilon\nu x| - \sigma\upsilon\nu x$.

Α. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

Β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Απάντηση

Α. Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$ που είναι συμμετρικό σύνολο ως προς το μηδέν, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Είναι:

$f(-x) = 2 + |\sigma\upsilon\nu(-x)| - \sigma\upsilon\nu(-x) =$

$= 2 + |\sigma\upsilon\nu x| - \sigma\upsilon\nu x = f(x)$

άρα η συνάρτηση f είναι άρτια

Β. Είναι: $\sigma\upsilon\nu x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

οπότε $|\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x$ άρα

$f(x) = 2 + |\sigma\upsilon\nu x| - \sigma\upsilon\nu x = 2 + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = 2$

Είναι:

$\sigma\upsilon\nu x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ οπότε $|\sigma\upsilon\nu x| = -\sigma\upsilon\nu x$

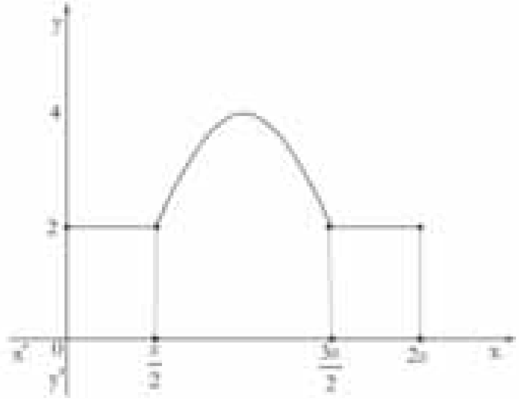
άρα

$f(x) = 2 + |\sigma\upsilon\nu x| - \sigma\upsilon\nu x = 2 + (-\sigma\upsilon\nu x) - \sigma\upsilon\nu x =$
$-2\sigma\upsilon\nu x + 2$

Επομένως,

$$f(x) = \begin{cases} -2\sigma\upsilon\nu x + 2, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ 2, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$$

Άρα, γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω



Θέμα 4

Έστω $f: R \to R$ συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύει: $4f(x) - 3f(-x) = \eta\mu x$, για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Απάντηση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $4f(x) - f(-x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in R$.

Θέτουμε $x = -u$, $u \in \mathbb{R}$ οπότε

$4f(-u) - f(u) = \eta\mu(-u) \Leftrightarrow 4f(-u) - f(u) = -\eta\mu u$ για κάθε $u \in R$.

Οπότε, είναι:

$$\begin{cases} 4f(x) - f(-x) = \eta\mu x \\ 4f(-x) - f(x) = -\eta\mu x \end{cases}$$

Και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $3f(x) + 3f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in R$ Άρα η f είναι περιττή.

Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = \eta\mu^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu(3\pi + x)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$
$$\mathbf{-2\eta\mu(\pi - x) + 1}$$

Α. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

Β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Απάντηση

Α. Είναι:

- $\eta\mu\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{5\pi}{4}\cdot 2\pi\right) =$
  $-\eta\mu\left(\left(1+\frac{1}{4}\right)2\pi\right) = -\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} = -1$

Άρα: $\eta\mu^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=(-1)^2=1$

- $\sigma\upsilon\nu(3\pi+x)=\sigma\upsilon\nu(2\pi+\pi+x)=$
  $\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$

Οπότε

$f(x)=1+(-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x+1$

$=1-\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x+1$

$=\eta\mu^2 x-2\eta\mu x+1=(\eta\mu x-1)^2$

Β. Πρέπει: $f(x)\geq 0\Leftrightarrow(1-\eta\mu x)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, $A_g=\mathbb{R}$

Για $x\in\mathbb{R}$, είναι:

$g(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{(\eta\mu x-1)^2}=|\eta\mu x-1|=-\eta\mu x+1$

διότι $-1\leq\eta\mu x\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$,

μέγιστη τιμή $f_{max}=2$ και ελάχιστη τιμή $f_{min}=0$.

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 5x-4$.

Α. Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της.

Β. Να βρεθεί η περίοδός της.

Γ. Αν το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6},k-2\right)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να βρεθεί ο k.

Απάντηση

Α. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $f_{min}=-2+(-4)=-2-4=-6$

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $f_{max}=2+(-4)=2-4=-2$.

Β. Η περίοδος της συνάρτησης f είναι:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{5}$$

Γ. Το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6},k-2\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f οπότε:

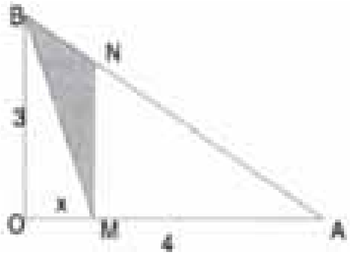
$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=k-2\Leftrightarrow 2\eta\mu\left(5\cdot\frac{\pi}{6}\right)-4=k-2\Leftrightarrow$

$2\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-4=k-2\Leftrightarrow 2\left(-\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)-4=k-2$

$-1-4=k-2\Leftrightarrow k=-3$

Θέμα 7

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο ($\hat{O}=90^o$), το Μ είναι τυχαίο σημείο της ΟΑ και ΜΝ//ΟΒ.



Αν $(OA)=4$, $(OB)=3$, $(OM)=x$ και $E(x)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΝ, να αποδείξετε ότι:

i. $(MN)=\frac{3(4-x)}{4}$ και $E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$.

ii. Να βρείτε τη θέση του Μ για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ μεγιστοποιείται, καθώς και ποια είναι η μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Απάντηση

i) Αφού ΜΝ//ΟΒ, από Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{AM}{OA}=\frac{MN}{OB}\Rightarrow\frac{4-x}{4}=\frac{(MN)}{3}\Rightarrow$$

$$(MN)=\frac{3(4-x)}{4}$$

Αν ΒΚ είναι το ύψος από την κορυφή Β προς την βάση ΜΝ, έχουμε:

$(BMN)=\frac{1}{2}\cdot(MN)\cdot(BK)\overset{(BK)=(OM)=x}{=}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3(4-x)}{4}\cdot x=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$.

Άρα η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν είναι:

$E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$ με $x\in[0,4]$.

(Μπορείτε να βρείτε άλλους τρόπους υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου (BMN);)

ii) $E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x=-\frac{3}{8}(x^2-4x)=$

$$-\frac{3}{8}\left(x^2-4x+4-4\right)=-\frac{3}{8}(x-2)^2+\frac{3}{2}$$

Άρα $E(x)\le E(2)=\frac{3}{2}$

Δηλαδή το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x=2$ με μέγιστη τιμή το $\frac{3}{2}$.

$2^{ος}$ τρόπος: Η συνάρτηση $E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}$ με $\alpha=-\frac{3}{8}$, $\beta=\frac{3}{2}$ δηλαδή στο $x_0=-\frac{\frac{3}{2}}{-2\frac{3}{8}}=2$, το $E(2)=\frac{3}{2}$

Θέμα 8

Δίνεται η εξίσωση

$$\mathbf{(1+\eta\mu\theta)\cdot x^2-(1+\eta\mu^2\theta)\cdot x+\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta=0}$$

με $\eta\mu\theta\neq-1$.

α) δείξτε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να δείξετε ότι:

$$\mathbf{x_1+x_2+x_1\cdot x_2=1.}$$

γ) Αν επιπλέον ισχύει:

$$\mathbf{x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2=-2}$$

να βρεθούν οι ρίζες x_1,x_2.

Απάντηση

α) Αφού $\eta\mu\theta\neq-1$, η εξίσωση είναι β βαθμού και έχουμε:

- Αν $\eta\mu\theta=0$, τότε η εξίσωση γίνεται: $x^2-x=0$ Όμως: $x^2-x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ (δύο ρίζες άνισες).
- Αν $\eta\mu\theta\neq0$ τότε για $\eta\mu\theta\neq-1,0$ έχουμε:

$$\Delta=\left(1+\eta\mu^2\theta\right)^2-4(1+\eta\mu\theta)\left(\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta\right)=$$

$$\left(1+\eta\mu^2\theta\right)^2-4\eta\mu\theta\left(1-\eta\mu^2\theta\right)=$$

$$\eta\mu^4\theta+4\eta\mu^3\theta+4\eta\mu^2\theta-4\eta\mu\theta+1\overset{\eta\mu\theta\neq0}{=}$$

$$\eta\mu^2\theta\left(\eta\mu^2\theta+4\eta\mu\theta+4-\frac{4}{\eta\mu\theta}+\frac{1}{\eta\mu^2\theta}\right)=$$

$$\eta\mu^2\theta\left[\eta\mu^2\theta+\frac{1}{\eta\mu^2\theta}+4\left(\eta\mu\theta-\frac{1}{\eta\mu\theta}\right)+4\right]=$$

$$\eta\mu^2\theta\left[\left(\eta\mu\theta-\frac{1}{\eta\mu\theta}\right)^2+4\left(\eta\mu\theta-\frac{1}{\eta\mu\theta}\right)+6\right]>0$$

Άρα η εξίσωση, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Viette έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1+\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}$$

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}$$

Άρα έχουμε:

$$x_1+x_2+x_1\cdot x_2=\frac{1+\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}+\frac{\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}=$$

$$\frac{1+\cancel{\eta\mu^2\theta}+\eta\mu\theta-\cancel{\eta\mu^2\theta}}{1+\eta\mu\theta}=\frac{1+\eta\mu\theta}{1+\eta\mu\theta}=1.$$

γ) Αφού επιπλέον ισχύει $x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2=-2\Leftrightarrow x_1\cdot x_2(x_1+x_2)=-2$, έχουμε ότι:

$$\left.\begin{matrix}S+P=1\\ S\cdot P=-2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}S=1-P\\ P^2-P-2=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$(S,P)=\{(2,-1),(-1,2)\}$$

- Αν $S=2$ και $P=-1$ έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1+\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}=2\\ \frac{\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}=-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta-2\eta\mu\theta-1=0\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\theta=1-\sqrt{2}$$

και τότε προκύπτει: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$

- Αν $S=-1$ και $P=2$ έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1+\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}=-1\\ \frac{\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta}=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta-2=0\Leftrightarrow$$

$\eta\mu\theta=-1$ ή $\eta\mu\theta=2$, απορρίπτονται.

Άρα η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

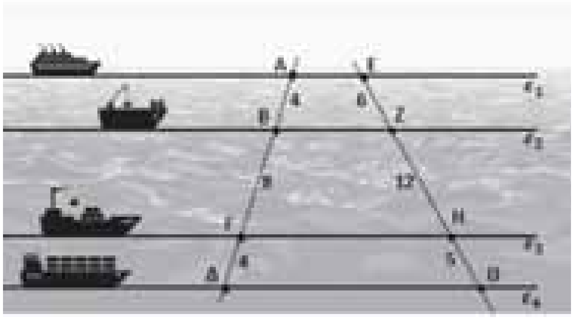
Τελικά προκύπτει: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.

Ασκήσεις Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Μπαλτσαβιάς Βενέδικτος – Τσακιρτζής Στέλιος – Τσιφάκης Χρήστος

Το "Θεώρημα του Θαλή" αποτελεί μια γεωμετρική αρχή που διατύπωσε ο αρχαίος Έλληνας Μαθηματικός Θαλής ο Μιλήσιος. Πέρα από την κλασσική του διατύπωση, το θεώρημα αυτό σχετίζεται με τις γωνίες που δημιουργούνται από ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία. Το βασικό του περιεχόμενο συνδέεται με την ***ομοιότητα γεωμετρικών αντικειμένων****, διατηρώντας την ίδια σχηματική δομή, αλλά με διαφορετικό μέγεθος. Αυτή η αρχή εφαρμόζεται σε πολλούς τομείς, συμπεριλαμβανομένων της Μηχανικής, της Δυναμικής, της Αρχιτεκτονικής, της Τέχνης, της Σχεδίασης, αλλά και στους Χάρτες και το GPS, για αναπαράσταση Γεωγραφικών πληροφοριών σε μικρότερη κλίμακα. Ο Θαλής, ¨ως αρχαίος φυσικός¨, πρώτος διατύπωσε το θεώρημα* ***περί ομοιομορφικών σχημάτων****, μια έννοια με εφαρμογές στη σύγχρονη Φυσική, όπως η Οπτική και η Μηχανική. Γενικά, το "Θεώρημα του Θαλή" αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για την αντίληψη και ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων στην καθημερινότητά μας.*

Άσκηση 1



Τα τέσσερα πλοία του παραπάνω σχήματος κινούνται στις ευθείες (ε_1), (ε_2), (ε_3) και (ε_4). Αν $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$, εξετάστε αν οι τροχιές των πλοίων τέμνονται.

Σκέψη: Με χρήση του αντιστρόφου του θεωρήματος Θαλή, θα εξετάσουμε αν οι τροχιές των πλοίων είναι παράλληλες.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{AB}{EZ}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \text{ και } \frac{B\Gamma}{ZH}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

άρα

$$\frac{AB}{EZ}=\frac{B\Gamma}{ZH},$$

δηλαδή οι ευθείες $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)//(\varepsilon_3)$.

Είναι $\frac{B\Gamma}{ZH}=\frac{2}{3}$ και $\frac{\Delta\Gamma}{H\Theta}=\frac{4}{5}$,

άρα $\frac{B\Gamma}{ZH}\neq\frac{\Delta\Gamma}{H\Theta}$, οπότε οι ευθείες $(\varepsilon_3)\not\parallel(\varepsilon_4)$.

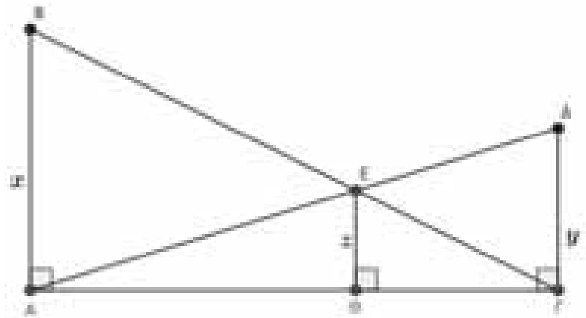
Απάντηση:

Η τροχιά του 4^{ου} πλοίου, της (ε_4) τέμνει τις τροχιές των υπολοίπων πλοίων.

Άσκηση 2

Στο παρακάτω σχήμα αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$



Σκέψη:

Παρατηρούμε ότι τα x, y είναι πλευρές των τριγώνων $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ και το z των τριγώνων $A\Theta E$ και $E\Theta\Gamma$. Άρα αρκεί να βρούμε κατάλληλα ζεύγη όμοιων τριγώνων.

Λύση:

Τα τρίγωνα $A\Theta E$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια καθώς είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή. Επομένως

$$\frac{A\Theta}{A\Gamma}=\frac{E\Theta}{\Delta\Gamma}\Rightarrow\frac{A\Theta}{A\Gamma}=\frac{z}{y} \quad (1).$$

Τα τρίγωνα $E\Theta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια καθώς είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή. Επομένως

$$\frac{\Gamma\Theta}{A\Gamma}=\frac{\Theta E}{AB}\Rightarrow\frac{\Gamma\Theta}{A\Gamma}=\frac{z}{x} \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και προκύπτει:

$$\frac{A\Theta}{A\Gamma}+\frac{\Gamma\Theta}{A\Gamma}=\frac{z}{y}+\frac{z}{x}\Rightarrow$$

$$\frac{A\Theta+\Gamma\Theta}{A\Gamma}=z\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow 1=z\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.\ \text{ο.ε.δ.}$$

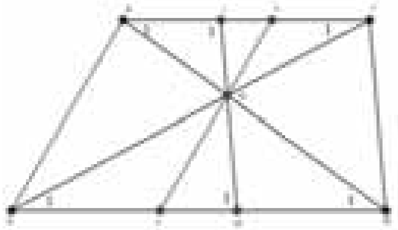
Άσκηση 3

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB//\Delta\Gamma)$ οι διαγώνιες τέμνονται στο σημείο Θ. Από το Θ φέρνουμε ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες προς τις $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Η (ε_1) τέμνει τις βάσεις AB και $\Delta\Gamma$ στα σημεία Λ και K αντίστοιχα και η (ε_2) τέμνει τις βάσεις AB και $\Delta\Gamma$ στα σημεία M και I αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Theta\Delta\cdot\Theta A=\Theta\Gamma\cdot\Theta B$

β) $A\Lambda=BM$

γ) **Αν $AB=24$ και $\frac{I\Theta}{\Theta M}=\frac{3}{4}$, να υπολογίσετε το μήκος του $\Delta\Gamma$.**



α) Σκέψη:

Αρκεί να γράψουμε τη δοσμένη σχέση ισοδύναμα ως αναλογία. Έτσι θα αναζητήσουμε δύο τρίγωνα τα οποία να περιέχουν τις πλευρές της αναλογίας και θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι είναι όμοια.

Λύση:

Η σχέση γίνεται:

$$\Theta\Delta\cdot\Theta A=\Theta\Gamma\cdot\Theta B\Leftrightarrow\frac{\Theta\Delta}{\Theta B}=\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A}\qquad(1)$$

Τα τρίγωνα $\Theta\Delta\Gamma$ και ΘAB είναι όμοια γιατί έχουν $\hat{\Delta}_1=\hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ. Συνεπώς $\frac{\Theta\Delta}{\Theta B}=\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A}=\frac{\Delta\Gamma}{AB}$.

Άρα η (1) αποδείχθηκε.

β) Σκέψη:

Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $A\Gamma B$, η ΘM είναι παράλληλη προς μια πλευρά του ($B\Gamma$), άρα τις άλλες δυο πλευρές του τις χωρίζει σε μέρη ανάλογα και ένα από αυτά είναι η BM.

Όμοια για το τρίγωνο $A\Delta B$.

Λύση:

Στο τρίγωνο $A\Gamma B$ είναι $\Theta M//B\Gamma$ επομένως

$$\frac{\Theta A}{AM}=\frac{\Theta\Gamma}{BM}\ \text{ή}\ \frac{BM}{AM}=\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A}\qquad(2).$$

Στο τρίγωνο $A\Delta B$ είναι $\Theta\Lambda//A\Delta$ επομένως

$$\frac{\Theta B}{\Lambda B}=\frac{\Theta\Delta}{A\Lambda}\ \text{ή}\ \frac{A\Lambda}{\Lambda B}=\frac{\Theta\Delta}{\Theta B}\qquad(3).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{BM}{AM}=\frac{A\Lambda}{\Lambda B}\Rightarrow\frac{BM}{AM+BM}=\frac{A\Lambda}{\Lambda B+A\Lambda}\Rightarrow$$

$$\frac{BM}{AB}=\frac{A\Lambda}{AB}\Rightarrow BM=A\Lambda.$$ Άρα αποδείχθηκε.

γ) Σκέψη:

Ο λόγος $\frac{I\Theta}{\Theta M}=\frac{3}{4}$ εμφανίζεται ως λόγος ομοιότητας σε διάφορα ζεύγη ομοίων τριγώνων. Αρχικά επιλέγουμε δυο από αυτά με σκοπό να βρούμε το λόγο ομοιότητας των τριγώνων $\Theta\Delta\Gamma$ και ΘAB που περιέχουν τις AB και $\Delta\Gamma$.

Λύση:

Τα τρίγωνα $\Delta I\Theta$ και ΘMB είναι όμοια καθώς $\hat{\Delta}_1=\hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{I}_1=\hat{M}_1$ ως εντός εναλλάξ. Συνεπώς

$$\frac{I\Theta}{\Theta M}=\frac{\Theta\Delta}{\Theta B},\ \text{άρα}\ \frac{\Theta\Delta}{\Theta B}=\frac{3}{4}.$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι τα τρίγωνα $\Theta\Delta\Gamma$ και ΘAB είναι όμοια και ισχύει

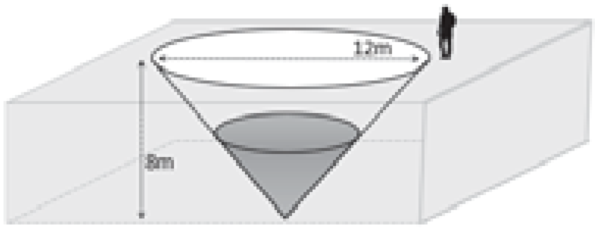
$$\frac{\Theta\Delta}{\Theta B}=\frac{\Theta\Gamma}{\Theta A}=\frac{\Delta\Gamma}{AB},\ \text{άρα}$$

$$\frac{\Delta\Gamma}{AB}=\frac{3}{4}\Rightarrow\Delta\Gamma=\frac{3}{4}AB\Rightarrow\Delta\Gamma=18.$$

Άσκηση 4

Ο ιδιοκτήτης μιας υπόγειας κωνικής δεξαμενής, ανοιχτής από πάνω, θέλει να μετρήσει τον όγκο του νερού που έχει απομείνει.
Από τον κατασκευαστή είναι γνωστό ότι, στην επιφάνεια του εδάφους η δεξαμενή έχει

διάμετρο 12m και είναι τοποθετημένη σε βάθος 8m.



Αν ο ιδιοκτήτης έχει στην κατοχή του μόνο ένα μέτρο, βρείτε ένα τρόπο για να υπολογιστεί με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια (δηλ. με τις λιγότερες δυνατές μετρήσεις) ο όγκος του εναπομείναντος νερού και κατόπιν υπολογίστε τον συναρτήσει των μετρήσεων.
(Ο όγκος του κώνου δίνεται από τον τύπο $V=\frac{1}{3}\pi\rho^2 h$ όπου ρ η ακτίνα και h το ύψος)

Σκέψη:

Ο ιδιοκτήτης παρατηρεί ότι σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Σκέφτεται λοιπόν να μετρήσει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ της ακμής ΟΒ του κώνου (Γ σημείο της στάθμης του νερού, βλ. σχήμα).

Λύση:

Είναι $OA=8\,m$, η ακτίνα $R=AB=\frac{12}{2}=6\,m$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε $OB^2=OA^2+AB^2 \Rightarrow$
$OB^2=100 \Rightarrow OB=10\,m$

Έστω μ το αποτέλεσμα της μέτρησης του ΒΓ.

Τότε $O\Gamma=OB-B\Gamma=10-\mu$.

Τα τρίγωνα ΟΔΓ και ΟΑΒ είναι όμοια καθώς είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία $\Delta\hat{O}\Gamma$ κοινή.

Επομένως ισχύει

$$\frac{O\Delta}{OA}=\frac{O\Gamma}{OB}=\frac{\Delta\Gamma}{AB}\Rightarrow\frac{x}{8}=\frac{10-\mu}{10}=\frac{y}{6}$$

Από την πρώτη και δεύτερη ισότητα υπολογίζουμε συναρτήσει της μέτρησης μ τα μήκη των $O\Delta=x$ και $\Delta\Gamma=y$ αντίστοιχα:

$$\frac{x}{8}=\frac{10-\mu}{10}\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}(10-\mu)$$

$$\frac{10-\mu}{10}=\frac{y}{6}\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}(10-\mu)$$

Ο ζητούμενος όγκος V θα είναι ίσος με

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2 x=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{3}{5}(10-\mu)\right]^2\cdot\frac{4}{5}(10-\mu)=$$

$$0{,}096\cdot\pi\cdot(10-\mu)^3.$$

Απάντηση: Άρα $V=0{,}096\cdot\pi\cdot(10-\mu)^3\ m^3$

Άσκηση 5

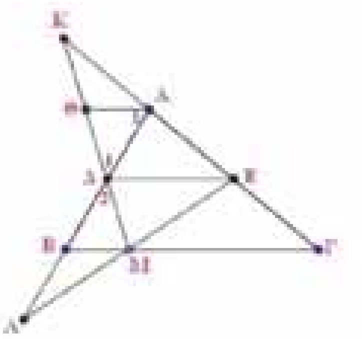
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία ΕΜ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Λ και η ευθεία ΜΔ την ΑΓ στο σημείο Κ. Αν είναι $A\Theta//\Delta E$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{KA}{KE}=\frac{BM}{\Delta E}$

β) $AM//K\Delta$

Σκέψη:

Φτιάχνουμε το σχήμα και αφού έχουμε ότι $A\Theta//\Delta E$, εύκολα καταλαβαίνουμε ότι τα τρίγωνα ΚΔΕ και ΚΘΑ είναι όμοια. Έτσι προκύπτει ότι: $\frac{KA}{KE}=\frac{\Theta A}{\Delta E}$.



Συγκρίνοντας αυτή την σχέση με την ζητούμενη καταλαβαίνουμε ότι για τη λύση της άσκησης μας είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\Theta A=BM$.

Μεθοδολογία: *Η καλύτερη μέθοδος για να αποδείξουμε την ισότητα μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων ή δύο γωνιών είναι η ισότητα τριγώνων.*

Λύση

α) Τα Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ συνεπώς $\Delta E//B\Gamma$. Αφού $A\Theta//\Delta E$ τότε και $A\Theta//B\Gamma$. Τότε $\hat{A}_1=\hat{B}$ ως εντός εναλλάξ μεταξύ των παραλλήλων $A\Theta, B\Gamma$ που τέμνονται από την ΑΒ. Ακόμη $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$ και $A\Delta=B\Delta$ (Δ: μέσο της ΑΒ από δεδομένα). (Γ-Π-Γ). Άρα τα τρίγωνα ΑΘΔ και ΒΔΜ είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΚΑΘ και ΚΔΕ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{KA}{KE}=\frac{\Theta A}{\Delta E}\quad(1)$$

και από την παραπάνω ισότητα τριγώνων $A\Theta=BM$ (2). Από (1), (2) προκύπτει το ζητούμενο $\frac{KA}{KE}=\frac{BM}{\Delta E}$ (3).

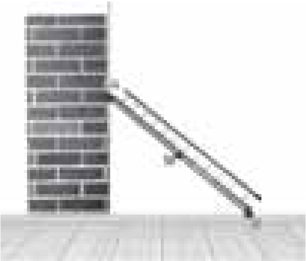
β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΛΒΜ και ΛΔΕ έχουμε: $\frac{ΛΜ}{ΛΕ}=\frac{ΒΜ}{ΔΕ}$ (4).

Τότε από (3), (4) προκύπτει ότι: $\frac{ΚΑ}{ΚΕ}=\frac{ΛΜ}{ΛΕ}$.

Από το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή πλέον έχουμε ότι $ΑΜ//ΚΛ$. Άρα αποδείχθηκε.

Άσκηση 6

Μια σκάλα μήκους $\ell = 3\text{m}$ εφάπτεται αρχικά σε κατακόρυφο τοίχο. Τα άκρα της αρχίζουν να ολισθαίνουν μέχρι αυτή να πέσει στο πάτωμα. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ της σκάλας διαγράφει τεταρτοκύκλιο με κέντρο Ο και ακτίνα $1{,}5\text{m}$.

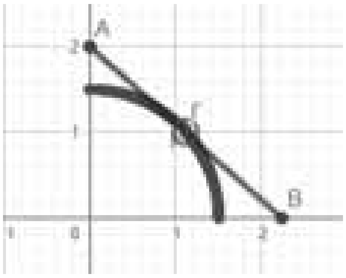


Σκέψη:

Στην πραγματικότητα μας ζητάει να δείξουμε ότι η απόσταση ΟΜ είναι σταθερή και ίση με το μισό της ΑΒ. (Πρόκειται για βασική πρόταση των Γεωμετρίας)

Λύση:

Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ, φέρνουμε παράλληλη προς το δάπεδο που τέμνει τον τοίχο στο σημείο Ε.



Τότε το Ε είναι το μέσο του τοίχου ΟΑ διότι από το μέσο της σκάλας ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς το δάπεδο δηλαδή $ΜΕ//ΟΒ$.

Όμως $ΟΒ \perp ΟΑ$, συνεπώς $ΜΕ \perp ΟΑ$. Άρα η ΜΕ είναι μεσοκάθετος της ΟΑ και από χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου προκύπτει ότι $ΟΜ = ΑΜ = \frac{ΑΒ}{2} = 1{,}5$.

Δηλαδή η απόσταση ΟΜ είναι σταθερή.

Απάντηση:

Συνεπώς το σημείο Μ διαγράφει τεταρτοκύκλιο με κέντρο Ο και ακτίνα 1,5m.

Μπορείτε να κατεβάσετε το αρχείο GeoGebra με την διαδραστική απεικόνιση της τροχιάς του μέσου από τον παρακάτω σύνδεσμο Google Drive:
https://drive.google.com/file/d/1M_z8_iklrKWhJ9grTH9MGjQ4KBOAX2qE/view?usp=drive_link

Άσκηση 7

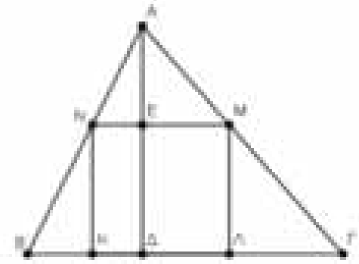
Τετράγωνο ΚΛΜΝ με πλευρά x έχει τις κορυφές Κ, Λ πάνω στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και τις κορυφές Μ, Ν πάνω στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι $(α+υ_α)\cdot x = α\cdot υ_α$

ii) Εάν $\frac{x}{υ_α}=\frac{2}{3}$ να βρείτε τον λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΜΝ προς ΑΒΓ.

Σκέψη:

Θα γράψουμε την σχέση σαν αναλογία, οπότε αναζητούμε δύο όμοια τρίγωνα.



Λύση:

α) Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΒΓ είναι όμοια (γιατί;) οπότε

$$\frac{ΑΝ}{ΑΒ}=\frac{ΑΜ}{ΑΓ}=\frac{ΜΝ}{ΒΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΔ} \Leftrightarrow \frac{x}{α}=\frac{υ_α - x}{υ_α} \Leftrightarrow$$

$$υ_α \cdot x = α\cdot υ_α - α\cdot x \Leftrightarrow (α+υ_α)\cdot x = α\cdot υ_α$$

β) Σκέψη:

Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των περιμέτρων δυο ομοίων τριγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητας τους.

Λύση:

Από το (α) είναι:

$$λ=\frac{ΜΝ}{ΒΓ}=\frac{υ_α - x}{υ_α}=1-\frac{x}{υ_α}=\frac{1}{3}$$

Απάντηση:

Ο λόγος των περιμέτρων των τριγώνων ΑΜΝ προς ΑΒΓ είναι ίσος με $\frac{1}{3}$.

Ασκήσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας

Τουτουντζής Μάρκος **παράρτημα ΕΜΕ Σερρών**

Θέμα 1

Δίνονται σημεία Α, Β, Γ μη συνευθειακά ανά δύο και Ο η αρχή των αξόνων. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}$ και $\vec{\gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$ έχουν ίσα μέτρα και ισχύει: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β. Αν επιπλέον ισχύει ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία, ισχύει: $-1\le\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\le 1$

Απάντηση

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$

Είναι: $$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|=\left|\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right|\overset{\vec{\alpha}=-\vec{\beta}-\vec{\gamma}}{=}$$
$$\left|\vec{\beta}-\left(-\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\right|=\left|2\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|$$
$$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}\right|=\left|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right|\overset{\vec{\alpha}=-\vec{\beta}-\vec{\gamma}}{=}$$
$$\left|\vec{\gamma}-\left(-\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\right|=\left|2\vec{\gamma}+\vec{\beta}\right|$$

Όμως:
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\Leftrightarrow\left|2\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|=\left|2\vec{\gamma}+\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|2\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|^2=$$
$$=\left|2\vec{\gamma}+\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow\left(2\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)^2=\left(2\vec{\gamma}+\vec{\beta}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(2\vec{\beta}\right)^2+2\cdot2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=\left(2\vec{\gamma}\right)^2+2\cdot2\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2$$
$$\Leftrightarrow 4\vec{\beta}^2+4\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=4\vec{\gamma}^2+4\vec{\gamma}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\Leftrightarrow$$
$$3\vec{\beta}^2=3\vec{\gamma}^2\Leftrightarrow\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\gamma}\right|^2\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\gamma}\right|,$$

που ισχύει.

Είναι:
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|=\left|\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right|\overset{\vec{\beta}=-\vec{\alpha}-\vec{\gamma}}{=}\left|\left(-\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right)-\vec{\alpha}\right|=$$
$$\left|-2\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right|=\left|2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right|$$
$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\vec{\gamma}-\vec{\beta}\right|\overset{\vec{\beta}=-\vec{\alpha}-\vec{\gamma}}{=}$$
$$\left|\vec{\gamma}-\left(-\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right)\right|=\left|2\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right|$$

Όμως:
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\Leftrightarrow\left|2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right|=\left|2\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right|\Leftrightarrow\left|2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right|^2=$$
$$=\left|2\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right|^2\Leftrightarrow\left(2\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)^2=\left(2\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(2\vec{\alpha}\right)^2+2\cdot2\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=\left(2\vec{\gamma}\right)^2+2\cdot2\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}+\vec{\alpha}^2$$
$$\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=4\vec{\gamma}^2+4\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2=3\vec{\gamma}^2$$
$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2=\vec{\gamma}^2\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|^2=\left|\vec{\gamma}\right|^2\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\gamma}\right|,$$

που ισχύει.

Συνεπώς, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β. Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία, άρα $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\gamma}\right|=1$

Είναι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$, οπότε
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$$

Αλλά, ισχύει: $-1\le\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\le1$,

οπότε και $-1\le\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\le1$.

Θέμα 2

Δίνονται τα κάθετα και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right|=2\left|\vec{\beta}\right|$

Να γράψετε, ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ έτσι ώστε $\vec{v}//\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$, $2\vec{v}-\vec{w}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{w}\perp\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

Απάντηση

Είναι:

- $\vec{v}//\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{v}=\lambda\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{v}=-\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$
- $2\vec{v}-\vec{w}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\Leftrightarrow2\left(-\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}\right)-\vec{w}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow-2\lambda\vec{\alpha}-2\lambda\vec{\beta}-\vec{w}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$$
$$\Leftrightarrow\vec{w}=\left(-2\lambda-3\right)\vec{\alpha}-2\left(\lambda-1\right)\vec{\beta}$$
- $\vec{w}\perp\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\vec{w}\cdot\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\left[\left(-2\lambda-3\right)\vec{\alpha}-2\left(\lambda-1\right)\vec{\beta}\right]\cdot\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow2\left(-2\lambda-3\right)\vec{\alpha}^2+\left(-2\lambda-3\right)\vec{\alpha}\vec{\beta}-$$
$$-4\left(\lambda-1\right)\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\left(\lambda-1\right)\vec{\beta}^2=0$$

$$\overset{\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0}{\underset{|\vec{\alpha}|=2|\vec{\beta}|}{\Leftrightarrow}} 2(-2\lambda-3)\left(2\left|\vec{\beta}\right|\right)^2-2(\lambda-1)\left|\vec{\beta}\right|^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-9\lambda-11)\left|\vec{\beta}\right|^2=0$$

Αλλά, το $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, οπότε

$$-9\lambda-11=0\Leftrightarrow\lambda=-\frac{11}{9}$$

Άρα,

$$\vec{v}=-\left(-\frac{11}{9}\right)\vec{\alpha}-\left(-\frac{11}{9}\right)\vec{\beta}=\frac{11}{9}\vec{\alpha}+\frac{11}{9}\vec{\beta}$$

και

$$\vec{w}=\left(-2\left(-\frac{11}{9}\right)-3\right)\vec{\alpha}-2\left(-\frac{11}{9}-1\right)\vec{\beta}=$$

$$=\left(\frac{22}{9}-3\right)\vec{\alpha}-2\left(-\frac{20}{9}\right)\vec{\beta}=-\frac{5}{9}\vec{\alpha}+\frac{40}{9}\vec{\beta}$$

Θέμα 3

Δίνονται οι εξισώσεις

$$\kappa x+(\kappa-1)y-4=0 \text{ και}$$

$$(3\kappa+1)x-2\kappa y+6=0 \text{ με } \kappa\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού κ.

β. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού κ ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες μεταξύ τους και να μην είναι παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Αν για την τιμή του κ που βρήκαμε στο ερώτημα β) οι ευθείες αντιστοιχούν στις δύο πλευρές τετραγώνου πλευράς μήκους 1, να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών.

Απάντηση

α. Για την εξίσωση

$$\kappa x+(\kappa-1)y-4=0\text{, είναι:}$$

- $\kappa=0$
- $\kappa+1=0\Leftrightarrow\kappa=-1$

Επειδή δεν υπάρχει τιμή του πραγματικού κ ώστε να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές του x και του y, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$

Για την εξίσωση

$$(3\kappa+1)x-2\kappa y+6=0\text{, είναι:}$$

- $3\kappa+1=0\Leftrightarrow\kappa=-\frac{1}{3}$
- $-2\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=0$

Επειδή δεν υπάρχει τιμή του πραγματικού κ ώστε να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές του x και του y, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$

β. Είναι: $(\varepsilon_1):\kappa x+(\kappa-1)y-4=0$ και

$$(\varepsilon_2):(3\kappa+1)x-2\kappa y+6=0$$

Αν $\vec{\delta}_1//\varepsilon_1$ τότε $\vec{\delta}_1=(\kappa-1,-\kappa)$

Αν $\vec{\delta}_2//\varepsilon_2$ τότε $\vec{\delta}_2=(-2\kappa,-3\kappa-1)$

Είναι: $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2\Leftrightarrow\vec{\delta}_1\perp\vec{\delta}_2\Leftrightarrow\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow-2\kappa\cdot(\kappa-1)+(-3\kappa-1)\cdot(-\kappa)=0$$

$$\Leftrightarrow-2\kappa^2+2\kappa+3\kappa^2+\kappa=0\Leftrightarrow\kappa^2+3\kappa=0\Leftrightarrow$$

$$\kappa(\kappa+3)=0\Leftrightarrow\kappa=-3\quad\text{ή}\quad\kappa=0$$

Για $\kappa=0$ είναι:

$$(\varepsilon_1):y=-4 \text{ και } (\varepsilon_2):x=-6,$$

οι οποίες είναι παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, άρα απορρίπτεται η τιμή $\kappa=0$

Για $\kappa=-3$ είναι:

$$(\varepsilon_1):3x+4y+4=0 \text{ και } (\varepsilon_2):4x-3y-3=0$$

Άρα, η ζητούμενη τιμή είναι $\kappa=-3$

γ. Βρίσκουμε το σημείο τιμής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους:

$$\begin{cases}3x+4y+4=0\\4x-3y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9x-12y=12\\-16x+12y=-12\end{cases}$$

και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$-25x=0\Leftrightarrow x=0$$

Για $x=0$ είναι:

$$6y+6=0\Leftrightarrow y=-1$$

Άρα, το σημείο το σημείο τομής των ευθειών είναι το $A(0,-1)$.

Αναζητούμε ευθεία $(\varepsilon_3)//(\varepsilon_1)$ συνεπώς η

$$(\varepsilon_3):-3x-4y+\beta=0$$

Αλλά,

$$d(A,\varepsilon_3)=1\Leftrightarrow\frac{\left|-3\cdot0-4\cdot(-1)+\beta\right|}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{|\beta+4|}{5}=1\Leftrightarrow|\beta+4|=5\Leftrightarrow$$

$$\beta+4=-5 \text{ ή } \beta+4=5\Leftrightarrow\beta=-9 \text{ ή } \beta=1$$

Άρα,

$$(\varepsilon_3):3x+4y+9=0 \quad \text{ή} \quad (\varepsilon_3):3x+4y-1=0$$

Αναζητούμε ευθεία $(\varepsilon_4)//(\varepsilon_2)$, συνεπώς η $(\varepsilon_4):-8x+6y+\gamma=0$

Αλλά,

$$d(A,\varepsilon_4)=1\Leftrightarrow\frac{|-8\cdot0+6\cdot(-1)+\gamma|}{\sqrt{(-8)^2+6^2}}=1\Leftrightarrow$$

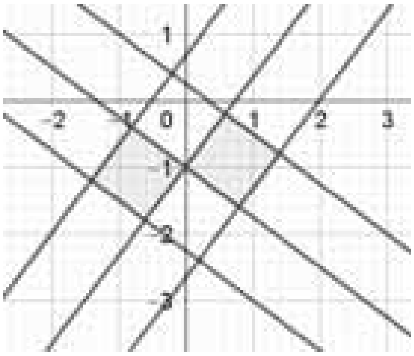
$$\frac{|\gamma-6|}{10}=1\Leftrightarrow|\gamma-6|=10$$

$$\Leftrightarrow\gamma-6=-10 \text{ ή } \gamma-6=10\Leftrightarrow\gamma=-4 \text{ ή } \gamma=16$$

Άρα,

$$(\varepsilon_4):-8x+6y-4=0 \text{ ή } (\varepsilon_4):-8x+6y+16=0$$

$$\Leftrightarrow(\varepsilon_4):4x-3y+2=0 \text{ ή } (\varepsilon_4):4x-3y-8=0$$



Θέμα 4

Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}\vec{\gamma}+|\vec{\gamma}|\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta}=2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\gamma}|$.

Να αποδείξετε ότι :

α. τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα.

β. ισχύει $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}=\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\dfrac{\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|}$

Απάντηση

α. Είναι $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ μη μηδενικά διανύσματα οπότε:

$$|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}\vec{\gamma}+|\vec{\gamma}|\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta}=2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\Leftrightarrow$$

$$\frac{|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\gamma}|}+\frac{|\vec{\gamma}|\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\vec{\gamma}|}=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\vec{\beta}\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|}+\frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=2\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=2$$

Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει: $-1\le\sigma\upsilon\nu\omega\le1$

Συνεπώς, $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=2$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1,$$

Άρα: $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0$

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα.

β. Είναι: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, οπότε ισχύει ότι $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ με $\lambda>0$.

Οπότε: $|\vec{\alpha}|=\lambda|\vec{\beta}|\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$.

Άρα: $\vec{\alpha}=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}\Leftrightarrow\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}=\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$.

Είναι: $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$, οπότε ισχύει ότι $\vec{\beta}=\kappa\cdot\vec{\gamma}$ με $\kappa>0$.

Οπότε $|\vec{\beta}|=\kappa|\vec{\gamma}|\Leftrightarrow\kappa=\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|}$.

Άρα $\vec{\beta}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|}\vec{\gamma}\Leftrightarrow\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\dfrac{\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|}$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι: $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}=\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\dfrac{\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|}$.

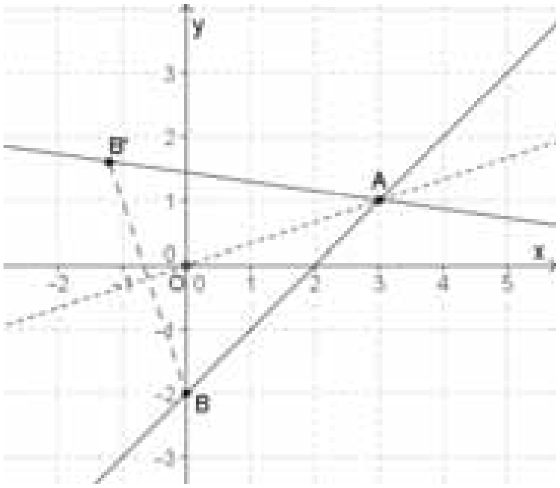
Θέμα 5

Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$, $B(0,-2)$ και $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων ενός ορθοκανονικού συστήματος Oxy. Να βρεθεί η εξίσωση της συμμετρικής ευθείας της ΑΒ ως προς την ΟΑ.

Απάντηση

Αρκεί να βρούμε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΟΑ.

Έστω $B'(\mu,\nu)$. Επειδή $BB'\perp OA$ και $OA\not\parallel x'x$ $\mu\neq0$. Το σημείο B' είναι συμμετρικό του Β ως προς την ΟΑ αν και μόνο αν η ευθεία ΟΑ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΒ΄.



- $OA \perp BB' \Leftrightarrow \lambda_{OA} \cdot \lambda_{BB'} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{-2-\nu}{0-\mu} = -1$

  $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3\mu + \nu = -2 \quad (1)$

- Η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι: $y = \frac{1}{3}x$. Το μέσον Μ του ΒΒ΄ πρέπει και αρκεί να ανήκει στην ευθεία ΟΑ. Επειδή $M\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu-2}{2}\right)$

  $\frac{\nu-2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \mu - 3\nu = -6 \quad (2)$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι: $\mu = -\frac{6}{5}$ και $\nu = \frac{2}{5}$. Άρα: $B'\left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από τα σημεία Β΄ και Α. Άρα έχει εξίσωση:

$$y - 1 = \frac{1-\frac{8}{5}}{3-1}(x-3) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$$

Θέμα 6

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A(2,2)$ και $B(4,-3)$, το οποίο έχει εμβαδόν 20τ.μ. Αν το σημείο τομής των διαγωνίων του βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

Απάντηση

Είναι:

- $\overrightarrow{AB} = (4-2, -3-2) = (2, -5)$
- $\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - 2, y_\Gamma - 2)$
- $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ x_\Gamma - 2 & y_\Gamma - 2 \end{vmatrix} =$

  $= 2y_\Gamma - 4 + 5x_\Gamma - 10 = 5x_\Gamma + 2y_\Gamma - 14$

Ισχύει ότι $E_{AB\Gamma\Delta} = 2E_{AB\Gamma} \Leftrightarrow E_{AB\Gamma} = 10$ τ.μ

Επίσης: $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| \Leftrightarrow$

$$10 = \frac{1}{2}\left|5x_\Gamma - 2y_\Gamma - 14\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|5x_\Gamma + 2x_\Gamma - 14\right| = 20 \ (1)$$

Έστω Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.

Αφού το Κ βρίσκεται στον $y'y$ θα είναι της μορφής $K(0, y_K)$. Άρα:

$$x_K = \frac{x_\Gamma + x_A}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = -2 \text{ και}$$

$$x_K = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta = -4$$

Αφού $x_\Gamma = -2$ από σχέση (1) έχουμε

$$\left|2y_\Gamma - 24\right| = 20 \Leftrightarrow$$

$2y_\Gamma - 24 = 20$ ή $2y_\Gamma - 24 = -20 \Leftrightarrow y_\Gamma = 22$ ή $y_\Gamma = 2$

Αφού $x_\Delta = -4$ και ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο οπότε

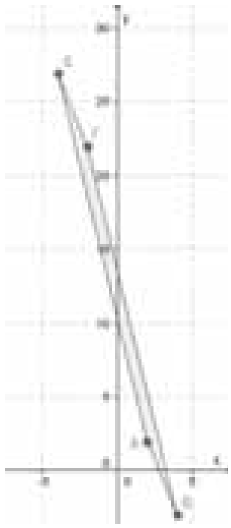
$(AB) = (\Gamma\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{(4-2)^2 + (-3-2)^2} =$

$= \sqrt{(-4+2)^2 + (y_\Delta - y_\Gamma)^2} \Leftrightarrow$

$29 = 4 + (y_\Delta - y_\Gamma)^2 \Leftrightarrow$

$(y_\Delta - y_\Gamma)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$y_\Delta - y_\Gamma = 5$ ή $y_\Delta - y_\Gamma = -5$



Αν $y_\Delta - y_\Gamma = -5$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του ΓΔ είναι

$$\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{y_\Delta - y_\Gamma}{x_\Delta - x_\Gamma} = \frac{-5}{-4+2} = \frac{5}{2}$$

το οποίο είναι αδύνατο αφού $\Gamma\Delta // AB$ και $\lambda_{AB} = -\frac{5}{2}$.

Άρα: $y_\Delta - y_\Gamma = 5$. Για $y_\Gamma = 2$ έχουμε ότι $y_\Delta = 7$ άρα $\Gamma(-2, 2)$ και $\Delta(-4, 7)$.

Για $y_\Gamma = 22$ έχουμε ότι $y_\Delta = 27$ άρα $\Gamma(-2, 22)$ και $\Delta(-4, 27)$.

Ασκήσεις στις συναρτήσεις

Κάκανος Γιάννης - **παράρτημα Ε.Μ.Ε. Σερρών**

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\frac{x+\alpha}{x-\alpha},\ x\in(\alpha,+\infty),\ \alpha\in R$$

και σύνολο τιμών $f(A)=A$.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$, τότε,

α. Να αποδείξετε ότι: α = 1. Για α = 1:

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} και να εξετάσετε αν οι f και f^{-1} είναι ίσες

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)$

Απάντηση

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$ άρα:

$$f(2)=3\Leftrightarrow\frac{2+\alpha}{2-\alpha}=3\Leftrightarrow 2+\alpha=3(2-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2+\alpha=6-3\alpha\Leftrightarrow 4\alpha=4\Leftrightarrow\boxed{\alpha=1}$$

β. Για α = 1 είναι

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\text{ με } A=(1,+\infty)$$

Τότε:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$$

Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow\frac{1}{x_1-1}>\frac{1}{x_2-1}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{x_1-1}>\frac{2}{x_2-1}\Rightarrow 1+\frac{2}{x_1-1}>1+\frac{2}{x_2-1}\Rightarrow$$

$$f(x_1)>f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

γ. Το πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}}$ της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, άρα $A_{f^{-1}}=(1,+\infty)$

Για $x\in(1,+\infty)$, $y\in(1,+\infty)$, είναι:

$$f(x)=y\Leftrightarrow 1+\frac{2}{x-1}=y\Leftrightarrow\frac{2}{x-1}=y-1\Leftrightarrow$$

$$x-1=\frac{2}{y-1}\Leftrightarrow x=1+\frac{2}{y-1}$$

Άρα, $f^{-1}(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$ με $A_{f^{-1}}=(1,+\infty)$

Άρα οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

δ. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\overset{f=f^{-1}}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=1$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

Θέμα 2

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

$$3x+3\le(x+1)f(x)-x^2+1\le$$
$$\le\eta\mu(x+1)-(x-1)(x+1)\text{ για } x\le-1$$

και $\lim\limits_{x\to2023}\dfrac{f(x)-x}{x-2023}=2024$

α. Να βρείτε το $f(-1)$

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to2023}f(x)$

γ. Αν $f(-1)=1$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα των τετμημένων τουλάχιστον μία φορά.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(x^2+x-1\right)-\ell n\left(1+f(-1)x^2\right)\right]$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{2f(x)+1}+4^{f(x)+1}}{3^{2f(x)-1}+5^{f(x)+2}}$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{f^2(x)+5f(x)+1}+f(x)\right]$

δ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Απάντηση

α. Για $x<-1$ δηλαδή $x+1<0$ είναι:

$$3x+3\le(x+1)f(x)-x^2+1\le\eta\mu(x+1)-(x-1)(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+2\le(x+1)f(x)\le\eta\mu(x+1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x+2}{x+1}\ge f(x)\ge\frac{\eta\mu(x+1)}{x+1}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+3x+2}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=$$
$$=\lim_{x\to-1^-}(x+2)=-1+2=1$$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\eta\mu(x+1)}{x+1}$

θέτουμε u = x + 1, τότε

$$u_0=\lim_{x\to-1^-}(x+1)=-1+1=0$$

Οπότε

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{\eta\mu(x+1)}{x+1}=\lim_{u\to0^-}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

Άρα, από κριτήριο παρεμβολής, είναι $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=1$

Η f είναι συνεχής στο R άρα και στο x = –1, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow\boxed{f(-1)=1}$$

β. Θεωρούμε συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{f(x)-x}{x-2023}$$

για x κοντά στο 2023, με $\lim\limits_{x\to2023}g(x)=2024$

Τότε: $f(x)=(x-2023)\cdot g(x)+x$

Άρα, $\lim\limits_{x\to2023}f(x)=\lim\limits_{x\to2023}\left[(x-2023)\cdot g(x)+x\right]=$

$=0\cdot2024+2023=2023$

γ. 1. Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, άρα υπάρχει $\kappa<0$ κοντά στο $-\infty$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)<0$.

Η f ορισμένη και συνεχής στο $[\kappa,-1]$ και $f(\kappa)\cdot f(-1)<0$.

Άρα, από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,-1)\subseteq(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα των τετμημένων τουλάχιστον μία φορά.

2. i. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(x^2+x-1\right)-\ell n\left(1+f(-1)x^2\right)\right]\overset{f(-1)=1}{===}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(x^2+x-1\right)-\ell n\left(1+x^2\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(\frac{x^2+x-1}{1+x^2}\right)\right]$$

Θέτουμε $u=\dfrac{x^2+x-1}{1+x^2}$

Είναι: $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-1}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(\dfrac{x^2+x-1}{1+x^2}\right)\right]=\lim\limits_{u\to1}(\ell nu)=0$

ii. Είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Αλλά, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|f(x)|}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|f(x)|}\right)=0$,

άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0}$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{2f(x)+1}+4^{f(x)+1}}{3^{2f(x)-1}+5^{f(x)+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot3^{2f(x)}+4\cdot4^{f(x)}}{3^{-1}\cdot3^{2f(x)}+5^2\cdot5^{f(x)}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot\left(3^2\right)^{f(x)}+4\cdot4^{f(x)}}{\frac{1}{3}\cdot\left(3^2\right)^{f(x)}+25\cdot5^{f(x)}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot9^{f(x)}+4\cdot4^{f(x)}}{\frac{1}{3}\cdot9^{f(x)}+25\cdot5^{f(x)}}$$

Θέτουμε $u=f(x)$. Είναι: $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 9^{f(x)}+4\cdot 4^{f(x)}}{\frac{1}{3}\cdot 9^{f(x)}+25\cdot 5^{f(x)}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{3\cdot 9^{u}+4\cdot 4^{u}}{\frac{1}{3}\cdot 9^{u}+25\cdot 5^{u}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{9^u\cdot\left(3+4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^u\right)}{9^u\cdot\left(\frac{1}{3}+25\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^u\right)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\cancel{9^u}\cdot\left(3+4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^u\right)}{\cancel{9^u}\cdot\left(\frac{1}{3}+25\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^u\right)}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{3+4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^u}{\frac{1}{3}+25\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^u}=\frac{3+4\cdot 0}{\frac{1}{3}+25\cdot 0}=\frac{3}{\frac{1}{3}}=9$$

γιατί $\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^u=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^u=0$

4. Θέτουμε $u=f(x)$. Είναι: $u_0=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Άρα, $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{f^2(x)+5f(x)+1}+f(x)\right]=$

$$=\lim_{u\to-\infty}\left(\sqrt{u^2+5u+1}+u\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{u\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{u^2+5u+1}+u\right)\cdot\left(\sqrt{u^2+5u+1}-u\right)}{\sqrt{u^2+5u+1}-u}$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{\sqrt{u^2+5u+1}^{\,2}-u^2}{|u|\sqrt{1+\frac{5}{u}+\frac{1}{u^2}}-u}$$

$$\underset{|u|=-u}{\overset{u\to-\infty}{==}}\lim_{u\to-\infty}\frac{u^2+5u+1-u^2}{-u\sqrt{1+\frac{5}{u}+\frac{1}{u^2}}-u}$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{5u+1}{-u\cdot\left(\sqrt{1+\frac{5}{u}+\frac{1}{u^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{u\cdot\left(5+\frac{1}{u}\right)}{-u\cdot\left(\sqrt{1+\frac{5}{u}+\frac{1}{u^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{\cancel{u}\cdot\left(5+\frac{1}{u}\right)}{-\cancel{u}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{5}{u}+\frac{1}{u^2}}+1\right)}$$

$$=-\lim_{u\to-\infty}\frac{5+\frac{1}{u}}{\sqrt{1+\frac{5}{u}+\frac{1}{u^2}}+1}=-\frac{5}{\sqrt{1}+1}=-\frac{5}{2}$$

δ. Από το **γ. 1.** ερώτημα αποδείξαμε ότι η f τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα των τετμημένων τουλάχιστον μία φορά. Η f είναι γνησίως μονότονη σ' όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, άρα δεν τέμνει σε άλλο σημείο τον $x'x$, οπότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και συνεχής.

Άρα, η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Θέμα 3

Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση ώστε να ισχύει: $f^3(x)+2f(x)=x+1$ για κάθε $x\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1.

β. Αν $f(R)=R$, να βρείτε την αντίστροφή της.

γ. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ε. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=-1$.

στ. Να βρείτε το πρόσημο της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-5,-3)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\xi+5}+\frac{f(\alpha)+1}{\xi+3}=2023 \text{ με } \alpha>0$$

Απάντηση

α. Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Ισχύει:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}2f(x_1)=2f(x_2)\\ f^3(x_1)=f^3(x_2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)\Rightarrow$$

$$x_1+1=x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

άρα η f είναι $1-1$.

β. Η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Είναι: $A_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Για $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

Άρα με αντικατάσταση, προκύπτει:

$$y^3+2y=f^{-1}(y)+1\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+2y-1$$

Επομένως,

$$f^{-1}(x)=x^3+2x-1,\quad x\in\mathbb{R}$$

γ. Για $x=-1$ είναι:

$$f^3(-1)+2f(-1)=-1+1\Leftrightarrow$$
$$f(-1)\cdot\left(f^2(-1)+2\right)=0\Leftrightarrow f(-1)=0$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο $A(-1,0)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι «1-1» το σημείο αυτό είναι μοναδικό.

δ. Θεωρούμε συνάρτηση h με τύπο

$$h(x)=x^3+2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}2x_1<2x_2\\ x_1^3<x_2^3\end{cases}\Rightarrow$$
$$x_1^3+2x_1<x_2^3+2x_2\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_3, x_4\in\mathbb{R}$ με $x_3<x_4$. Ισχύει:

$$x_3<x_4\Rightarrow x_3+1<x_4+1\Rightarrow$$
$$h(f(x_3))<h(f(x_4))\overset{h\ 1}{\Rightarrow} f(x_3)<f(x_4)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ε. Είναι: $f^3(x)+2f(x)=x+1\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+2\right)=$

$$=x+1\overset{f^2(x)+2>0}{\Longleftrightarrow} f(x)=\frac{x+1}{f^2(x)+2}$$

Είναι:

$$|f(x)|=\left|\frac{x+1}{f^2(x)+2}\right|<|x+1|\Leftrightarrow$$
$$-|x+1|<f(x)<|x+1|$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to-1}(-|x+1|)=\lim\limits_{x\to-1}(|x+1|)=0$

άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0=f(-1)$,

άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=-1$.

στ. Είναι:

- $x<-1\overset{f\ 1}{\Rightarrow} f(x)<f(-1)\Rightarrow f(x)<0$
- $x>-1\overset{f\ 1}{\Rightarrow} f(x)>f(-1)\Rightarrow f(x)>0$

Για $x\neq-5,-3$

$$\frac{f(\alpha)}{x+5}+\frac{f(\alpha)+1}{x+3}=2023\Leftrightarrow$$

$$(x+3)f(\alpha)+(x+5)(f(\alpha)+1)-2023(x+3)(x+5)=0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με τύπο

$$h(x)=(x+3)f(\alpha)+(x+5)(f(\alpha)+1)-2023(x+3)(x+5)$$

Η h ορισμένη και συνεχής στο $[-5,-3]$

Είναι: $h(-3)=2\cdot(f(\alpha)+1)$.

Όμως,

$\alpha>0\Rightarrow f(\alpha)>0\Rightarrow f(\alpha)+1>1>0\Rightarrow h(-3)>0$,

Είναι: $h(-5)=-2\cdot f(\alpha)<0$

Οπότε: $h(-3)\cdot h(-5)<0$

Άρα, από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-5,-3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$(\xi+3)f(\alpha)+(\xi+5)(f(\alpha)+1)-2023(\xi+3)(\xi+5)=0$$

δηλαδή

$$\frac{(\xi+3)f(\alpha)+(\xi+5)(f(\alpha)+1)-2023(\xi+3)(\xi+5)}{(\xi+3)(\xi+5)}=0$$

δηλαδή $\dfrac{f(\alpha)}{\xi+5}+\dfrac{f(\alpha)+1}{\xi+3}=2023$

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{x-1}+2$ και έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $(f\circ g)(x)=x-1,\quad x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τη συνάρτηση f

β. Έστω οι συναρτήσεις $t, w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

1) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις t, w είναι «1–1», τότε και η $t\circ w$ είναι «1 – 1».

2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=2g(x)+e^{g(x)-1}+2023$ είναι συνάρτηση «1 – 1».

γ. Αν $f(x)=\ln(x-2),\quad x\in(2,+\infty)$, να υπολογίσετε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x^2+x)-f(x^2)\right]$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}f(x)-1}{f(x)}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x+1)-3^{x+1}}{g(x+2)+3^{x-1}}$

Απάντηση

α. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g = \mathbb{R}$. Οπότε $D_{f\circ g} = D_g = \mathbb{R}$. Επομένως αν $g(A)$ το σύνολο τιμών της g τότε: $g(A) \subseteq D_f \Rightarrow (2,+\infty) \subseteq D_f$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι ένα υπερσύνολο του $(2,+\infty)$.

Για $\omega > 2$ τότε $\omega = e^{x-1} + 2 \Leftrightarrow e^{x-1} = \omega - 2 \Leftrightarrow$ $x - 1 = \ell n(\omega - 2) \Leftrightarrow x = 1 + \ell n(\omega - 2)$ για κάποιο $\omega \in D_g = \mathbb{R}$.

Άρα:

$f(\omega) = f(g(x)) = 1 + \ell n(\omega - 2) - 1 = \ell n(\omega - 2)$

Άρα στο $(2,+\infty)$ η f ορίζεται από τον τύπο:

$f(x) = \ell n(x-2)$

Στο $\mathbb{R} - g(A) = \mathbb{R} - (2,+\infty)$ η f μπορεί να οριστεί με οποιονδήποτε τρόπο.

Επομένως υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τα δεδομένα της άσκησης.

Αυτές περιγράφονται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \ell n(x-2) & , x \in (2,+\infty) \\ h(x) & , A - (2,+\infty) \end{cases},$$

όπου $A = D_f$ ένα οποιοδήποτε υπερσύνολο του $(2,+\infty)$ και h οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να οριστεί στο $A - (2,+\infty)$.

β. 1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$(t \circ w)(x_1) = (t \circ w)(x_2).$$

Ισχύει: $(t \circ w)(x_1) = (t \circ w)(x_2) \Rightarrow$

$$t(w(x_1)) = t(w(x_2)) \overset{t:1-1}{\Rightarrow}$$

$$w(x_1) = w(x_2) \overset{w:1-1}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

άρα η $t \circ w$ είναι «1 – 1».

2. Θεωρούμε συνάρτηση

$$k(x) = 2x + e^{x-1} + 2023,\ x \in \mathbb{R}.$$

Τότε είναι $h(x) = k(g(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το ερώτημα β₁ για να είναι η h συνάρτηση «1-1» αρκεί οι συναρτήσεις k και g να είναι «1-1». Πράγματι,

- Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ 2x_1 < 2x_2 \end{cases}$

$$\overset{e^x\ 1}{\Rightarrow} \begin{cases} e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \\ 2x_1 + 2023 < 2x_2 + 2023 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x_1 + e^{x_1-1} + 2023 < 2x_2 + e^{x_2-1} + 2023$$

$$\Rightarrow k(x_1) < k(x_2)$$

άρα η k είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα γνησίως μονότονη, άρα «$1-1$».

- Έστω $x_1, x_1 \in \mathbb{R}$ με $k(x_1) = k(x_2)$. Ισχύει:

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow e^{x_1-1} + 2 = e^{x_2-1} + 2$$

$$\Rightarrow e^{x_1-1} = e^{x_2-1} \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα και η g είναι «1-1».

Άρα η h είναι $1-1$.

γ. 1. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x^2+x) - f(x^2)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\ell n(x^2+x-2) - \ell n(x^2-2)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(\frac{x^2+x-2}{x^2-2}\right)\right]$$

Θέτουμε $u = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2}$

Είναι: $u_0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

Τότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x^2+x) - f(x^2)\right] = \lim_{u\to1}(\ell nu) = \ell n1 = 0$$

2. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ell n(x-2)$

Θέτουμε $u = x - 2$.

Είναι: $u_0 = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$

Τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty}(\ell nu) = +\infty$

Είναι:

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu f(x) \le 1 \Leftrightarrow -1-1 \le \sigma\upsilon\nu f(x) - 1 \le 1-1$$

$$\Leftrightarrow -2 \le \sigma\upsilon\nu f(x) - 1 \le 0$$

Για $x > 3 \Leftrightarrow x-2 > 3-2 \Leftrightarrow x-2 > 1 \Leftrightarrow$

$$\ell n(x-2) > \ell n1 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Οπότε: $-\dfrac{2}{f(x)} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu f(x) - 1}{f(x)} \le 0$

Αλλά, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{f(x)}\right)=0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{συνf(x)-1}{f(x)}=0}$$

3. Είναι: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x+1)-3^{x+1}}{g(x+2)+3^{x-1}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1-1}+2-3^{x+1}}{e^{x+2-1}+2+3^{x-1}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+2-3\cdot 3^{x}}{e\cdot e^{x}+2+3^{-1}\cdot 3^{x}}=$$

$$\frac{0+2-3\cdot 0}{e\cdot 0+2+3^{-1}\cdot 0}=\frac{2}{2}=1$$

διότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x}=0$

Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+\ell nx-5, & x\geq 1\\ -2x^3+\dfrac{4}{x-3}+2, & x<1\end{cases}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^{-2023x}}$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1)$ **τέτοιο ώστε να ισχύει** $f(x_0)=0$

Απάντηση

α. Για x < 1, πρέπει και αρκεί: $x-3\neq 0$ δηλαδή $x\neq 3$ που ισχύει, και για x ≥1, πρέπει και αρκεί: $x>0$ που ισχύει.

Άρα, $A_f=\mathbb{R}$

Για x < 1, η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για x > 1, η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για x = 1, είναι:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(3x^2+\ell nx-5\right)=-2$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(-2x^3+\frac{4}{x-3}+2\right)=-2$$

$$f(1)=-2$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1),$$

άρα η f να είναι συνεχής, x = 1. Άρα η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^{-2023x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot e^{2023x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(3x^2+\ell nx-5\right)\cdot e^{2023x}\right]=+\infty$,

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+\ell nx-5\right)=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2023x}=+\infty$

γ. Η f ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$

Είναι: $f(0)=-2\cdot 0^3+\dfrac{4}{0-3}+2=\dfrac{2}{3}>0$,

$f(1)=-2<0$. Οπότε: $f(0)\cdot f(1)<0$

Άρα, από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0)=0.$$

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$, ισχύει:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1-3<x_2-3\\ x_1^3<x_2^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x_1-3}>\dfrac{1}{x_2-3}\\ -2x_1^3>-2x_2^3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{x_1-3}>\dfrac{4}{x_2-3}\\ -2x_1^3+2>-2x_2^3+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow -2x_1^3+\frac{4}{x_1-3}+2>-2x_2^3+\frac{4}{x_2-3}+2$$

$$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, άρα η ρίζα $x_0\in(0,1)$ είναι μοναδική.

Οπότε, τελικά, υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0)=0$

Θέμα 6

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4x^3}{x-1}=2$
- $f(4)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2023}-x\right)$

Θεωρούμε επιπλέον συνάρτηση με

$$g(x)=\ln(x+1)+e^{2x+1}-1,\ x>-1.$$

α. **Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την παραβολή υπερβολή $y=\dfrac{2}{x}$ σ΄ ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1,4)$.**

β. **Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.**

γ. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $g(x)=2023$ έχει μοναδική λύση στο $(-1,+\infty)$**

δ. **Αν $f(1)=4, f(4)=0$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0,+\infty)$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.**

Απάντηση

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση στο διάστημα (1, 4)

Όμως: $f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x}\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{2}{x}=0$

Θεωρούμε συνάρτηση: $h(x)=f(x)-\dfrac{2}{x},\ x\in[1,4]$

Η h είναι ορισμένη και συνεχής στο $[1,4]$

Είναι: $h(1)=f(1)-2$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-4x^3}{x-1}$

για x κοντά στο 1, με $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=2$

Τότε: $f(x)=(x-1)\varphi(x)+4x^3$, οπότε:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[(x-1)\varphi(x)+4x^3\right]=0\cdot2+4=4$$

Η f είναι συνεχής στο x = 1, άρα:

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)\Leftrightarrow f(1)=4$$

Οπότε $h(1)=4-2\Leftrightarrow h(1)=2>0$

Είναι: $h(4)=f(4)-\dfrac{1}{2}$

Αλλά: $f(4)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2023}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2023}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2023}+x\right)}{\sqrt{x^2+2023}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2023}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+2023}+x}\underset{|x|=x}{\overset{x\to+\infty}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2023-x^2}{\sqrt{x^2+2023}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2023\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2023}+x}\right)=0$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2023}+x}=0$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2023}+x\right)=+\infty$$

Οπότε: $h(4)=0-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0$

Άρα $h(1)\cdot h(4)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,4)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $h(x_0)=0$, οπότε εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση στο διάστημα (1, 4).

β. Έστω $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 < x_2 + 1 \\ 2x_1 < 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell n(x_1+1) < \ell n(x_2+1) \\ 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell n(x_1+1) - 1 < \ell n(x_2+1) - 1 \\ e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\ell n(x_1+1) + e^{2x_1+1} - 1 < \ell n(x_2+1) + e^{2x_2+1} - 1 \Rightarrow$$
$$g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_g = (-1, +\infty)$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_g = (-1, +\infty)$ οπότε:

$$g(A_g) = \left(\lim_{x \to -1^+} g(x), \lim_{x \to +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

γιατί,

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\ell n(x+1) + e^{2x+1} - 1 \right) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ell n(x+1) + e^{2x+1} - 1 \right) = +\infty$$

Το $0 \in g(A_g) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$ και επειδή η g γνησίως αύξουσα άρα είναι μοναδικό. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης $g(x) < 0$.

Όμως, $g(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\xi) \overset{g\,1}{\Leftrightarrow} x < \xi$.

Άρα το διάστημα είναι το $(-1, \xi)$

γ. Το $2023 \in g(A_g) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(\rho) = 2023$ και επειδή η g γνησίως αύξουσα άρα είναι μοναδικό.

δ. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Είναι: $1 < 4 \overset{f©}{\Leftrightarrow} f(1) < f(4) \Leftrightarrow 4 < 0$, άτοπο. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

† Έφυγε από κοντά μας ο Πολυχρόνης Σίδερης

Με μεγάλη θλίψη πληροφορηθήκαμε πρόσφατα την απώλεια του εκλεκτού συναδέλφου μαθηματικού και σχολικού συμβούλου Πολυχρόνη Σίδερη.

Ο Χρόνης Σίδερης γεννήθηκε στη Λευκάδα, σπούδασε στο Μαθηματικό Τμήμα της Αθήνας και στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο του Πειραιά. Είχε ένα ευρύτερο πλαίσιο **κοινωνικού προβληματισμού** και αρθρογραφεί σε διάφορα έντυπα και εφημερίδες σε θέματα Εκπαίδευσης και Μαθηματικών.

Το 2017 εκδίδει το βιβλίο «**Μαθηματικά στιγμιότυπα**» όπου Μαθηματικά και Φιλοσοφία συναρθρώνονται αρμονικά μεταξύ τους και παράγουν ένα γοητευτικό σύνθεμα που περιλαμβάνει τη ζωή και τη **σκέψη μεγάλων δημιουργών** της μαθηματικής επιστήμης (Πυθαγόρας, Ευκλείδης, Αρχιμήδης, Διόφαντος). Τον πρωταγωνιστικό ρόλο των αριθμών {π,e,φ,1}. Την έννοια της αταξίας και της τάξης, που οφείλεται στο μηδέν και στο άπειρο. Τη γοητεία που ενυπάρχει στα άλυτα προβλήματα. Παράλληλα ασχολείται με τα λαογραφικά θέματα της Λευκάδας και εκδίδει το «**Εξ Αθανίου**», ένα βιβλίο, όπου παρουσιάζονται με αφηγηματικό και ζωντανό τρόπο **βιωματικές εμπειρίες** του γενέθλιου τόπου του.

Διατέλεσε μέλος της Εξελεγκτικής Επιτροπής της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας κατά τη διετία 1987-89 και μέλος του Διοικητικού Συμβουλίου της ΕΜΕ τη διετία 1989-1991.

Ήταν μέλος της συγγραφικής ομάδας που συγκρότησε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία για τη συγγραφή του Βιβλίου "**Ευκλείδεια Γεωμετρία**" Λυκείου.

Η συγκεκριμένη πρόταση, κέρδισε τον ανοιχτό διαγωνισμό που είχε προκήρυξη το Υπουργείο Παιδείας και το βιβλίο **διδάσκεται** μέχρι και σήμερα στα σχολεία.

Ο Χρόνης Σίδερης συμμετείχε σε πολλές ημερίδες που διοργάνωσε η ΕΜΕ στην Αττική αλλά και σε άλλες πόλεις της χώρας σε συνεργασία με τα παραρτήματά της, στις οποίες παρουσίασε το βιβλίο αυτό στους συναδέλφους μαθηματικούς.

Σε ξεχωριστή θέση ήταν και η παρουσία του στο χώρο της εκπαίδευσης, σαν δάσκαλος των Μαθηματικών. Πολλοί μαθητές του, μιλάνε χαρακτηριστικά, που πολλοί είναι και συνάδελφοι μαθηματικοί σήμερα, για **το ύφος και το ήθος** του.

Το Δ. Σ. της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια στην οικογένειά του

Η συνάρτηση ως κεντρική έννοια

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Θέμα 1ο:

Δίνεται η συνάρτηση

$$t(x)=\begin{cases} e^x & ,x\le 0 \\ \ln\left(x+e^2\right) & ,x>0 \end{cases}$$

i. Δείξτε ότι η t είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτηση t^{-1}.

ii. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις t, t^{-1}.

iii. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η εξίσωση $t(x)+1=\ln(\alpha-2)$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

iv. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ (1), να βρεθεί $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{t(x)-2}{x}$.

Λύση

i. $D_t=R$.

Για το σύνολο τιμών της t αναζητούμε $y\in R$ για τα οποία η εξίσωση $t(x)=y$ με άγνωστο το x έχει μία τουλάχιστον λύση στο D_t.

• Αν $x\in(-\infty,0]$, $t(x)=y \Leftrightarrow e^x=y \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ \text{και} \\ x=\ln y \end{cases}$. Για $y>0$ απαιτούμε $\ln y\le 0 \Leftrightarrow 0<y\le 1$.

Άρα $t((-\infty,0])=(0,1]$.

• Αν $x\in(0,+\infty)$, $t(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(x+e^2\right)=y \Leftrightarrow$ $x+e^2=e^y \Leftrightarrow x=e^y-e^2$.

Απαιτούμε

$$e^y-e^2>0 \Leftrightarrow e^y>e^2 \Leftrightarrow y>2.$$

Άρα

$$t((0,+\infty))=(2,+\infty).$$

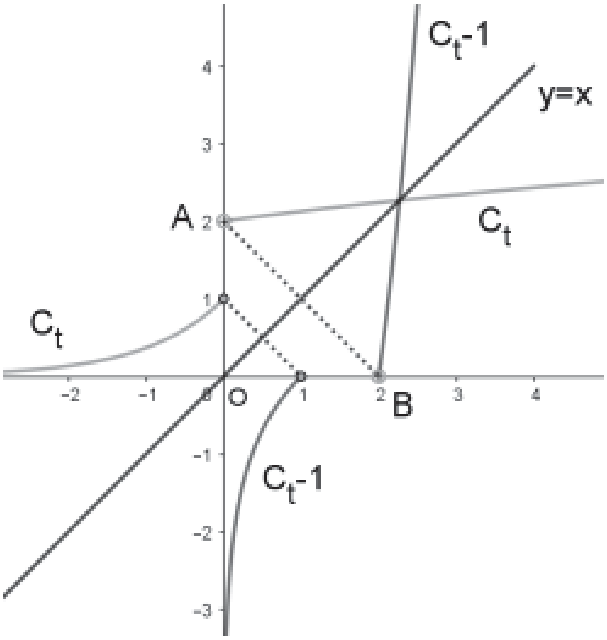
Συνεπώς

$t(R)=t((-\infty,0])\cup t((0,+\infty))=(0,1]\cup(2,+\infty)$.

Επειδή για κάθε $y\in t(R)$ η εξίσωση $t(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση στο $D_t=R$, η συνάρτηση t είναι “1-1”, οπότε αντιστρέφεται με

$$t^{-1}(x)=\begin{cases} \ln x & ,0<x\le 1 \\ e^x-e^2 & ,x>2 \end{cases}.$$

ii. Στηριζόμενοι στις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης με βάση το e και από το γεγονός ότι οι C_t, $C_{t^{-1}}$ έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $y=x$ έχουμε το παρακάτω σχήμα: τα σημεία Α,Β δεν ανήκουν στις C_t, $C_{t^{-1}}$ αντίστοιχα.



iii. $t(x)+1=\ln(\alpha-2) \Leftrightarrow t(x)=\ln(\alpha-2)-1$ (2)

Η εξίσωση (2) έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in D_t$ αν και μόνο αν

$$t(x_0)=\ln(\alpha-2)-1 \text{ δηλαδή}$$

$$(\ln(\alpha-2)-1)\in t(R).$$

Αυτό συμβαίνει όταν

$$\begin{cases} \alpha-2>0 \\ 0<\ln(\alpha-2)-1\le 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha-2>0 \\ \ln(\alpha-2)-1>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$e+2<\alpha\le e^2+2 \text{ ή } \alpha>e^3+2.$$

Επομένως

Οι ζητούμενες τιμές του α ανήκουν στο σύνολο

$$\left(e+2,e^2+2\right] \cup \left(e^3+2,+\infty\right)$$

iv. $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{t(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(x+e^2\right)-2}{x}=$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(x+e^2\right)-\ln e^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{x+e^2}{e^2}}{x}.$$

Κοντά στο 0 από θετικές τιμές, θέτουμε

$$u=\frac{x+e^2}{e^2}=1+\frac{x}{e^2}>1 \Rightarrow x=e^2(u-1).$$

$$u_0=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+e^2}{e^2}=1 \text{ με } u=\frac{x+e^2}{e^2}>0$$

Άρα

$$L=\lim_{u\to 1^+}\frac{\ln u}{e^2(u-1)}=\lim_{u\to 1^+}\left(\frac{1}{e^2}\frac{\ln u}{u-1}\right)\overset{(1)}{=}\frac{1}{e^2}.$$

Θέμα 2ο

Θεωρούμε τη μη σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία έχουμε ότι: $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Δείξτε ότι:

α.

i. Η f είναι άρτια.

ii. $f(2x)=2f^2(x)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. $f^2(x)+f^2(y)\geq f(x+y)+f(x-y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

β. Αν $f(x_0)=0$, τότε να δείξετε ότι:

i. $f(x+2x_0)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)\in[-1,1]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii. Το σημείο $M(x_0,0)$ κέντρο συμμετρίας της C_f.

Λύση

α)

i. Για $y=0$ $(1)\Rightarrow 2f(x)=2f(x)f(0)\Leftrightarrow$

$f(x)=f(x)f(0)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$

$$(2)\Rightarrow f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)(f(0)-1)=0$$

$$\Leftrightarrow f(0)=0 \text{ ή } f(0)=1$$

Αν $f(0)=0$, τότε

$$(2)\Rightarrow f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή η f είναι σταθερή. Άτοπο.

Άρα $f(0)=1$.

Για $x=0$

$$(1)\Rightarrow f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)\overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow}$$

$$f(-y)=f(y) \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι άρτια.

ii. Αντικαθιστούμε στην (1) το y με x και παίρνουμε $f(2x)+f(0)=2f^2(x)\overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow}$

$f(2x)=2f^2(x)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ έχουμε $(f(x)-f(y))^2\geq 0\Leftrightarrow$

$f^2(x)+f^2(y)\geq 2f(x)f(y)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$f^2(x)+f^2(y)\geq f(x+y)+f(x-y)$.

β.

i. Αντικαθιστούμε στην (1) το x με $x+x_0$ και το y με x_0 και παίρνουμε:

$f(x+2x_0)+f(x)=2f(x+x_0)f(x_0)\overset{f(x_0)=0}{\Leftrightarrow}$

$f(x+2x_0)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Από το ερώτημα α ii) έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f(2x)+1=f^2(x)\geq 0\Rightarrow f(2x)\geq -1\Rightarrow f(x)\geq -1$

Έτσι θα είναι και

$$f(x+2x_0)\geq -1\overset{\beta i}{\Rightarrow} -f(x)\geq -1\Leftrightarrow f(x)\leq 1.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$-1\leq f(x)\leq 1\Leftrightarrow f(x)\in[-1,1].$$

iii. Έστω $A(\kappa,f(\kappa))$ τυχαίο σημείο της C_f και $B(\alpha,\beta)$ το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο $M(x_0,0)$, τότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Άρα πρέπει: $\begin{cases}\dfrac{\kappa+\alpha}{2}=x_0\Leftrightarrow \alpha=2x_0-\kappa\\ \dfrac{f(\kappa)+\beta}{2}=0\Leftrightarrow \beta=-f(\kappa)\end{cases}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το $B\in C_f$ δηλαδή $f(\alpha)=\beta$

Όμως, $f(\alpha)=\beta\Leftrightarrow f(2x_0-\kappa)=-f(\kappa)\Leftrightarrow$

$f(2x_0-\kappa)+f(\kappa)=0$.

Αντικαθιστούμε στην (1) το x με το x_0 και το y με το $x_0-\kappa$ και παίρνουμε $f(2x_0-\kappa)+f(\kappa)=0$, δηλαδή το $M(x_0,0)$ κέντρο συμμετρίας της C_f.

Παρατήρηση:

Μία από τις συναρτήσεις του παραπάνω θέματος είναι η $f(x)=\text{συν}x$, $x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 3ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x+\sqrt{x}$ και $g(x)=x-\dfrac{1}{4}$. Να βρείτε:

α. i. Την αντίστροφη συνάρτηση της f και να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

ii. Στο $[-2,+\infty)$ τις λύσεις της ανίσωσης $\sqrt{9+4x}-\sqrt{5+4x^2}<-2x^2+2x+2$ (1).

β. Τη συνάρτηση $f^{-1}og$ καθώς και τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}og}$, C_g.

γ. Το όριο $A=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)f(\eta\mu x)}{\text{συν}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$.

Λύση

α) i) $D_f=[0,+\infty)$

Αναζητούμε $y\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=y$ για κάποιο $x\in D_f$.

$$f(x)=y\Leftrightarrow x+\sqrt{x}=y\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}-y=0\ (2)$$

Η (2) είναι εξίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο την $\sqrt{x}$. Αρχικά για να λύνεται η (2) στο $[0,+\infty)$ πρέπει $\Delta=1+4y\geq 0\Leftrightarrow y\geq -\dfrac{1}{4}$ και κάτω από αυτή την προϋπόθεση μία τουλάχιστον ρίζα της να είναι μη αρνητική. Έχουμε $\sqrt{x}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$.

Η παράσταση $\dfrac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}$ απορρίπτεται γιατί είναι αρνητική.

Θέλουμε $-1+\sqrt{1+4y}\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{1+4y}\ge 1\Leftrightarrow$

$1+4y\ge 1\Leftrightarrow y\ge 0$. Για $y\ge 0$, $\sqrt{x}=\dfrac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\ge 0\Leftrightarrow$

$$x=\frac{\left(-1+\sqrt{1+4y}\right)^2}{4}\in D_f\Leftrightarrow x=\frac{2y-\sqrt{1+4y}+1}{2}$$

Συνεπώς $f\left([0,+\infty)\right)=[0,+\infty)$. Επειδή για κάθε $y\in f\left([0,+\infty)\right)$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση στο D_f, η f είναι "1-1", οπότε είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-\sqrt{1+4x}+1}{2}$, $x\ge 0$.

Για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1<x_2\Rightarrow$

$$\begin{cases}x_1<x_2\\ \text{και}\\ \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}x_1+\sqrt{x_1}<x_2+\sqrt{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $y_1,y_2\in f\left([0,+\infty)\right)$ με $y_1<y_2$. Ισχύει:

$$y_1<y_2\Rightarrow f\left(f^{-1}(y_1)\right)<f\left(f^{-1}(y_2)\right).$$

$$\overset{f\ \text{γν.αυξ.}}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Για $x\ge -2$,

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{1+4(2+x)}-\sqrt{1+4(1+x^2)}<2(2+x)-2(1+x^2)\Leftrightarrow 2(1+x^2)-\sqrt{1+4(1+x^2)}+1<2(2+x)-\sqrt{1+4(2+x)}+1\Leftrightarrow\dfrac{2(1+x^2)-\sqrt{1+4(1+x^2)}+1}{2}<$

$$\frac{2(2+x)-\sqrt{1+4(2+x)}+1}{2}\underset{x+2\ge 0}{\overset{1+x^2>0}{\Leftrightarrow}}f^{-1}(1+x^2)<f^{-1}(2+x)\overset{f^{-1}\text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$1+x^2<2+x\Leftrightarrow x^2-x-1<0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-x-1 είναι $\rho_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\rho_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Άρα $x\in(\rho_1,\rho_2)\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

β. $D_g=\mathbb{R}$.

Θεωρούμε το $\Sigma=\left\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_{f^{-1}}\right\}$.

$$\begin{cases}x\in D_g\\ \text{και}\\ g(x)\in D_{f^{-1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ \text{και}\\ x-\frac{1}{4}\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{4}.$$ Άρα

$\Sigma=\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. Ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}og$ με πεδίο ορισμού το $\Sigma=\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ και τύπο

$$(f^{-1}og)(x)=f^{-1}(g(x))=\frac{2g(x)-\sqrt{1+4g(x)}+1}{2}$$

$(f^{-1}og)(x)=\dfrac{4x-4\sqrt{x}+1}{4}$.

$\Sigma\cap D_g=\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$. Για $x\in\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ έχουμε:

$$(f^{-1}og)(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{4x-4\sqrt{x}+1}{4}=x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$2\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Άρα οι $C_{f^{-1}og},C_g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $K\left(\dfrac{1}{4},0\right)$.

γ. Στο $(0,1)$ είναι $\eta\mu x>0$.

$$A=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\left(\eta\mu x+\sqrt{\eta\mu x}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{\eta\mu x+\sqrt{\eta\mu x}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}}$$

Θέτουμε $1-x=u>0$, $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0\Rightarrow u\to0^+$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}=\lim_{u\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right)}{u}=$$

$$\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{u}\overset{\frac{\pi}{2}u=\omega}{\underset{\omega\to0^+}{=}}$$

$$\lim_{\omega\to0^+}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

Άρα $A=\dfrac{2}{\pi}\left(\eta\mu1+\sqrt{\eta\mu1}\right)$.

Σημείωση:

Αν Δ διάστημα και η συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε και η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι γνησίως μονότονη και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

† Η Ε. Μ. Ε. αποχαιρετά τον Άρη Σισούρα

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία με **βαθιά οδύνη** αποχαιρετά τον Άρη Σισσούρα, ομότιμο Καθηγητή Πανεπιστημίου Πατρών, που έφυγε πρόσφατα στις 5 Σεπτεμβρίου 2023.

Γεννήθηκε το 1938 στο Μαυρολιθάρι Φωκίδας. Αποφοίτησε με Άριστα από το Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ και έκανε μεταπτυχιακές σπουδές και διδακτορικό στο Ηνωμένο Βασίλειο στην Επιχειρησιακή Έρευνα. Το 1975 εκλέχθηκε καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας στην Πολυτεχνική Σχολή του Πανεπιστημίου Πατρών.

Την περίοδο 1981-84 διετέλεσε Διοικητής του ΙΚΑ.

Εκλεκτό μέλος της ΕΜΕ, διετέλεσε Πρόεδρος του ΔΣ κατά τη διετία 1985-1987.

Εκλεγμένο μέλος του ΔΣ της ΕΜΕ τις διετίες 1987-89, 1989-1991 και 2013-2015.

Ιδρυτικό μέλος και πρώτος πρόεδρος της Διοικούσας Επιτροπής του Παραρτήματος Αχαΐας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Ο Άρης Σισσούρας, προοδευτικός και καινοτόμος, από εκείνα τα χρόνια, της δεκαετίας του 1980, δρομολόγησε το νέο άνοιγμα της Μαθηματικής Εταιρείας στην κοινωνία. Εισήγαγε στο περιοδικό "**Ενημέρωση από το Δ.Σ.** " μια νέα στήλη με τον τίτλο «ΑΠΟΨΕΙΣ», πάνω στα θέματα και τους προβληματισμούς που έχουν τα μέλη, για τη Μαθηματική Εταιρεία, και για την παιδεία στα Μαθηματικά που θα περιλάμβανε, σύμφωνα με τα γραφόμενα του ίδιου «την **προβολή μιας άποψης** πάνω σε ένα θέμα, με όλη την **κριτική στάση και τεκμηρίωση**. Για θέματα όπως η παιδεία και η εκπαίδευση με της ευρύτατα και κριτικά επιστημονικά θεμελιωμένες θέσεις και αντιθέσεις, για τον ρόλο και την κοινωνική ένταξη του μαθηματικού, για τις νέες τάσεις και τις αιχμές της ανάπτυξης, όπως για το μύθο και την πραγματικότητα της Πληροφορικής και των Η/Υ».

Με απόφαση του ΔΣ της ΕΜΕ κατά τη διετία της προεδρίας του το έτος **1986** ανακηρύχθηκε **έτος Μαθηματικής Παιδείας** και στο πλαίσιο αυτό, διοργανώθηκε από την ΕΜΕ στο Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών το "**Πολυδύναμο εξαήμερο** για τη μαθηματική παιδεία και εκπαίδευση στη χώρα μας με τίτλο "**Μαθηματικά και Κοινωνία**", ένα εξαήμερο ανάλυσης, ανοικτής συζήτησης, διαλόγου και έκθεσης έργου, σε ειδικές επιφάνειες σε πολύ υψηλό επίπεδο παρουσίασης με πολλούς θεματικούς άξονες στα μαθηματικά δρώμενα της εκπαίδευσης, ενώ προσδιόριζε, σε επίπεδο έρευνας, τις **νέες τάσεις** των Μαθηματικών στον **παγκόσμιο χώρο**.

Χαρακτήρας ευχάριστος, καλής διάθεσης, δημιουργικός, άνετος, προσηνής, πάντα με αίσθηση του χιούμορ και της καλής έκφρασης της ζωής.

Ο ίδιος παρουσιάζει το στίγμα της προεδρίας του ως εξής: «Είναι **το άνοιγμα** της Μαθηματικής Εταιρείας στην **Κοινωνία**».

Είχε μεγάλη **αγωνία** για τους **νέους της χώρας** μας και μάλιστα σε πολλές αναφορές του, έκανε μνεία, για την αξιοποίηση και το μέλλον, όλων αυτών των νέων, που είχαν διακριθεί στους μαθηματικούς διαγωνισμούς με Ολυμπιακά Μετάλλια, τι έχουν γίνει και πως μπορούσε να τους αξιοποιήσει η χώρα μας.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στο πλαίσιο του εορτασμού για τα 100 χρόνια από την ίδρυσή της **τον βράβευσε** σε ειδική εκδήλωση στην **Ακαδημία Αθηνών**.

Το Δ.Σ. της ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά του συλλυπητήρια, στην οικογένειά του.

† Ο Αντώνης Βαρελόπουλος δεν είναι πια μαζί μας

Έφυγε πρόσφατα, 9 Σεπτεμβρίου 2023, από τη ζωή, ο εξαίρετος συνάδελφος μαθηματικός και γιατρός Αντώνης Βαρελόπουλος

Γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη, σπούδασε στο Πανεπιστήμιο Αθήνας **Μαθηματικά** και στη συνέχεια ακολούθησαν σπουδές στην **Ιατρική Σχολή**. Δίδαξε ως μαθηματικός σε σχολεία της Καλλιθέας και του Νέου Κόσμου με έντονη εκπαιδευτική, θεατρική, συνδικαλιστική και **πολιτιστική** δράση. Είχε επίσης έντονη συμμετοχή και παρουσία στον χώρο του **αθλητισμού** από μικρή ηλικία, στους συλλόγους της Νέας Σμύρνης και της Καλλιθέας. Μετά την εκπαιδευτική του αφυπηρέτηση υπηρέτησε στο ΕΣΥ ως **γιατρός**.

Ενεργό μέλος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Εκλεγμένο μέλος τόσο στο Δ.Σ όσο και στην Εξελεγκτική Επιτροπή της ΕΜΕ.

Ήταν πάντα **παρών** στους εκπαιδευτικούς και τους δημοκρατικούς αγώνες του λαού μας.

Η ΕΜΕ εκφράζει τα θερμά συλλυπητήρια προς την οικογένεια του.

Καλό Παράδεισο συνάδελφε **Αντώνη**!

Το Βήμα του Ευκλείδη

Η χρησιμοποίηση της εξίσωσης τμήματος στην επίλυση προβλημάτων.

Διονύσιος Γιάνναρος

Έστω δυο αριθμοί α, β που παριστάνονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών με τα σημεία Α και Β.

Ορισμός 1

Το **μήκος του** τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β. Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με:

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=\begin{cases}\alpha-\beta, & \text{αν } \alpha>\beta\\ 0, & \text{αν } \alpha=\beta\\ \beta-\alpha, & \text{αν } \alpha<\beta\end{cases}$$

Είναι προφανές ότι: $d(\alpha,\beta)\geq 0$.

2. Έστω τώρα ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Ονομάζουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.

Αν το σημείο $M(x_o)$ διαιρεί το τμήμα ΑΒ σε λόγο $m:n$ τότε θα έχουμε:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{m}{n} \quad \text{ή} \quad \frac{d(x_o,\alpha)}{d(x_o,\beta)}=\frac{x_o-\alpha}{x_o-\beta}=\frac{m}{n}, \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι:

$$x_o(\alpha+\beta)=n\alpha+m\beta \Leftrightarrow x_o=\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}, \quad (2)$$

Ειδικά:

Όταν $m=n$, τότε $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ αντιστοιχεί στο μέσο Μ του τμήματος ΑΒ και λέγεται **κέντρο** του διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα

Να βρείτε το σημείο $M(x_o)$ του διαστήματος $[-4,16]$ του άξονα $x'x$, που διαιρεί το διάστημα σε λόγο 3:2.

Λύση

Έχουμε: $m=3,\ n=2,\ \alpha=4,\ \beta=16$.

Τότε από την σχέση (2) προκύπτει

$$x_o=\frac{2\cdot(-4)+3\cdot 16}{2+3}=8$$

Εξίσωση τμήματος σε άξονα.

Έστω ότι το σημείο $M(x_o)$ διαιρεί **το διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του **άξονα** $x'x$ **σε λόγο** $m:n$. Τότε από την (2) θα έχουμε: $x_o=\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}=\frac{n}{m+n}\alpha+\frac{m}{m+n}\beta$

Θέτουμε $t=\frac{m}{m+n}$, οπότε $1-t=\frac{n}{m+n}$ και έχουμε:

$$x_o=\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}=(1-t)\alpha+t\beta,\quad 0\leq t\leq 1$$

Αν θεωρήσουμε το t ως παράμετρο, θα λάβουμε τη σχέση μεταξύ των τιμών του και του σημείου του τμήματος $[\alpha,\beta]$.

Έτσι, σε κάθε $t\in[0,1]$ αντιστοιχεί ένα ακριβώς σημείο $M(t)\in[\alpha,\beta]$ με $M(0)=\alpha,\ M(1)=\beta$.

Στη συνέχεια για λόγους απλούστευσης θα παριστάνουμε το $M(t)$ με $x(t)$ και τους α, β ως x_1, x_2 αντίστοιχα, συνεπώς θα γράφουμε

$$x(t)=(1-t)x_1+t(x_2),\ 0\leq t\leq 1$$

Ορισμός 2

Η εξίσωση $x(t)=(1-t)x_1+t(x_2),\ 0\leq t\leq 1$ ονομάζεται παραμετρική εξίσωση του τμήματος $[x_1,x_2]$ του άξονα $x'x$.

Παράδειγμα.

Το τμήμα $[-2,7]$ του άξονα $x'x$ δίνεται από την εξίσωση $x(t)=-2(1-t)+7t$ με $0\leq t\leq 1$.

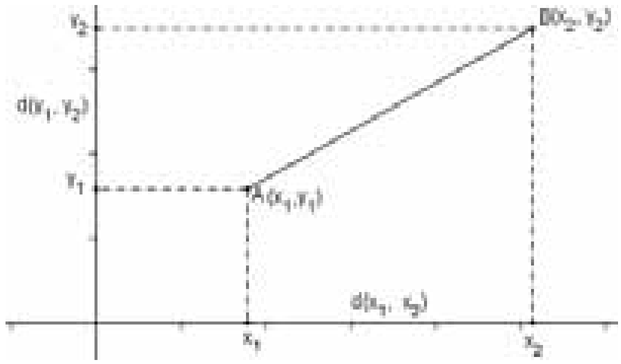
Επομένως μετά τις πράξεις μπορούμε να γράψουμε: $x(t)=9t-2,\ 0\leq t\leq 1$

Απόσταση μεταξύ σημείων στο επίπεδο.

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δυο σημεία του.

Η απόσταση τους δίνεται από τον **τύπο**

$$d(A,B)=\sqrt{d^2(x_1,x_2)+d^2(y_1,y_2)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad (4)$$



Παράδειγμα: Έστω $A(3,1)$ και $B(3,5)$. Τότε από τον τύπο (4) λαμβάνουμε

$$d(A,B)=\sqrt{(3-3)^2+(5-1)^2}=4$$

5. Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Θα βρούμε το σημείο $\Gamma(x_o, y_o)$ του **τμήματος ΑΒ, που διαιρεί το τμήμα αυτό σε λόγο** $m:n$.

Τότε θα έχουμε:

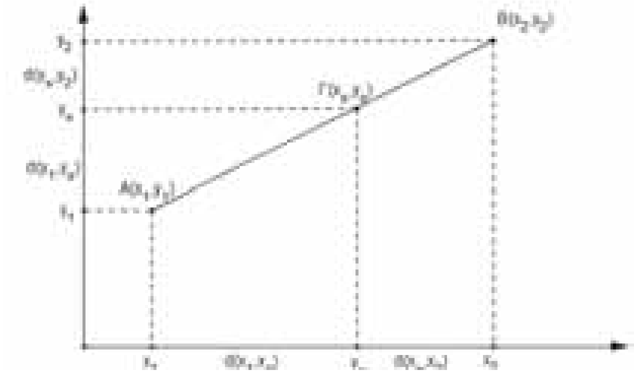
$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{d(x_1,x_o)}{d(x_o,x_2)}=\frac{|x_o-x_1|}{|x_2-x_o|}=\frac{x_o-x_1}{x_2-x_o}=\frac{m}{n}$$

και $$\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{d(y_1,y_o)}{d(y_o,y_2)}=\frac{|y_o-y_1|}{|y_2-y_o|}=\frac{y_o-y_1}{y_2-y_o}=\frac{m}{n}$$

Από τις σχέσεις αυτές λαμβάνουμε:

$$x_o=\frac{nx_1+mx_2}{n+m},\quad y_o=\frac{ny_1+my_2}{n+m}\qquad (5)$$

Τα παραπάνω αποδίδονται από το επόμενο σχήμα.



Παράδειγμα

Έστω $A(-2,3),\ B(4,-8)$. Τότε το σημείο $\Gamma(x_o,y_o)$ του τμήματος ΑΒ, αν διαιρεί το τμήμα σε λόγο $\frac{m}{n}=\frac{2}{1}$ έχει συντεταγμένες:

$$x_o=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 4}{1+2}=2$$

και

$$y_o=\frac{ny_1+my_2}{n+m}=\frac{1\cdot 3+2\cdot(-8)}{1+2}=-\frac{13}{5}$$

δηλαδή είναι $\Gamma\left(2,-\frac{13}{5}\right)$.

Παραμετρικές εξισώσεις τμήματος στο επίπεδο.

Έστω ότι το σημείο $\Gamma(x_o,y_o)$ διαιρεί το τμήμα ΑΒ σε λόγο $m:n$. Τότε με βάση τα προηγούμενα, θα είναι:

$$x_o=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}=\frac{n}{n+m}\cdot x_1+\frac{n}{n+m}\cdot x_2$$
$$=(1-t)x_1+tx_2$$

και $$y_o=\frac{ny_1+my_2}{n+m}=\frac{n}{n+m}\cdot y_1+\frac{n}{n+m}\cdot y_2$$
$$=(1-t)y_1+ty_2$$

όπου $\quad t=\frac{m}{n+m}$ και $1-t=\frac{n}{n+m}$

Θεωρώντας το t ως παράμετρο, λαμβάνουμε ότι σε κάθε τιμή του $t\in[0,1]$ μέσω των τύπων

$$x(t)=(1-t)x_1+x_2,\ y(x)=(1-t)y_1+ty_2$$

αντιστοιχεί ένα σημείο $(x(t), y(t))$ του τμήματος ΑΒ. Για $t=0$, λαμβάνουμε τις συντεταγμένες του

$$A(x_1,y_1)\quad x(0)=x_1,\ y(0)=y_1$$

Για $t=1$ λαμβάνουμε τις συντεταγμένες του

$$B(x_2,y_2)\quad x(1)=x_2,\ y(1)=y_2$$

Θα μπορούσαμε επομένως να πούμε, ότι το τμήμα (διάστημα) είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $(x(t), y(t))$, όπου $t\in[0,1]$.

Ορισμός 3.

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος ΑΒ στο επίπεδο Oxy ονομάζονται οι εξισώσεις της μορφής

$$x(t)=(1-t)x_1+tx_2,\ y(t)=(1-t)y_1+ty_2$$

όπου $t\in[0,1]$.

Παράδειγμα

Έστω τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(4,-8)$. Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος ΑΒ έχουν τη μορφή

$$\begin{cases} x(t)=-2(2-t)+4t \\ y(t)=3(1-t)-8t \\ \quad 0\le t\le 1\end{cases}$$

ή μετά τις πράξεις

$$\begin{cases} x(t)=6t-2 \\ y(t)=-11t+3 \\ \quad 0\le t\le 1\end{cases}$$

Τριγωνική ανισότητα για τρία σημεία του επιπέδου

Έστω τρία σημεία του επιπέδου Oxy, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$. Τότε είναι:

- $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- $d(B,\Gamma)=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$
- $d(\Gamma,A)=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$

• Αν τα σημεία Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνα, τότε θα ισχύει η τριγωνική ανισότητα μεταξύ των πλευρών του ΑΒΓ δηλαδή θα είναι:

$$d(A, B) + d(B, \Gamma) > d(A, \Gamma) \qquad (7.1)$$

- Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά με το Β μεταξύ των Α, Γ, τότε θα ισχύει

$$d(A, B) + d(B, \Gamma) = d(A, \Gamma) \qquad (7.2)$$

Από τις (7.1) και (7.2) τελικά έχουμε:

$$d(A, B) + d(B, \Gamma) \geq d(A, \Gamma)$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν, το σημείο Β είναι σημείο του τμήματος ΑΓ.

Εξίσωση τμήματος με ριζικά

Θα δώσουμε γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \qquad (8)$$

όπου x_1, x_2, y_1, y_2 δοσμένοι αριθμοί με τις ισότητες $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$ να μην ισχύουν ταυτόχρονα. Γι' αυτό θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy και τα σημεία του

$$M(x, y), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

Τότε οι εκφράσεις

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, \ \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

και $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ μπορούν να ερμηνευτούν ως αποστάσεις των σημείων Μ και Α, Μ και Β και Α και Β αντίστοιχα. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$AM + MB \geq AB$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν, το σημείο Μ ανήκει στο τμήμα ΑΒ. Συνεπώς, την εξίσωση (8) ικανοποιούν οι συντεταγμένες όλων των σημείων του τμήματος ΑΒ. Επομένως η εξίσωση (8) θα μπορούσε να ονομαστεί «εξίσωση τμήματος με ριζικά».

Παράδειγμα.

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της:

$$\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}$$

Λύση:

Παριστάνουμε την δοσμένη παράσταση ως εξής:

$$f(x, y)=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

Θεωρούμε στο σύστημα Oxy τα σημεία $M(x, y)$, $A(1, -2), B(2, 3)$.

Τότε η $\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$ είναι η $d(M, A)$ και η $\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$ είναι η $d(M, B)$.

Τότε: $f(x, y) = AM + MB \geq AB$.

Όμως,

$$(AB) = \sqrt{(2-1)^2+(3-(-2))^2} = \sqrt{26}$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι $\sqrt{26}$ και συμβαίνει, για όλα τα σημεία Μ του τμήματος ΑΒ.

Η χρησιμοποίηση της εξίσωσης τμήματος στη λύση προβλημάτων

1. Να βρεθούν όλες οι τιμές της παραμέτρου α, για καθεμιά από τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-2\alpha)^2}=|\alpha|\sqrt{5} \\ y=\alpha x+\alpha^2-4 \end{cases}$$

έχει τουλάχιστον δυο λύσεις.

Λύση

Στο επίπεδο Oxy, το αριστερό μέλος της πρώτης εξίσωσης του συστήματος παριστάνει το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου Μ από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(\alpha, 2\alpha)$. Το δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων Ο και Α, δηλαδή είναι

$$(OM)=\sqrt{x^2+y^2}, \ MA=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-2\alpha)^2},$$

$OA=|\alpha|\sqrt{5}$. Επειδή $OM+MA=OA$, αυτή η ισότητα είναι δυνατή, αν και μόνο αν, το σημείο Μ είναι σημείο του τμήματος ΟΑ.

- Για $\alpha=0$, το σημείο Α συμπίπτει με την αρχή Ο οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ y=-4 \end{cases}$$

το οποίο είναι προφανές ότι δεν έχει λύσεις.

- Έστω $\alpha \neq 0$. Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος ΟΑ στο επίπεδο Oxy είναι

$$\begin{cases} x(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot\alpha \\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot(2\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=\alpha t \\ y(t)=2\alpha t \\ 0\leq t\leq 1 \end{cases}$$

Το αρχικό σύστημα θα έχει τουλάχιστον δυο λύσεις, όταν με αντικατάσταση των x(t), y(t) στη δεύτερη εξίσωση του αρχικού συστήματος, η εξίσωση ως προς t που προκύπτει έχει τουλάχιστον δυο ρίζες $t\in[0, 1]$ Έχουμε:

$$2\alpha t=\alpha(\alpha t)+\alpha^2-4 \Leftrightarrow (\alpha^2-2\alpha)t=4-\alpha^2.$$

Η τελευταία γραμμική εξίσωση θα έχει περισσότερες από μια ρίζες, όταν είναι της μορφής $0\cdot t=0$. Αυτό είναι δυνατό μόνο, όταν ταυτόχρονα ικανοποιούνται οι: $\begin{cases} \alpha^2-2\alpha=0 \\ 4-\alpha^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=2$.

Άρα, για $\alpha=2$, το αρχικό σύστημα έχει τουλάχιστον δυο λύσεις.

Σχόλιο:

Πράγματι, για $\alpha=2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{5}\\ y=2x\end{cases}$$

και έχει ως λύσεις τις συντεταγμένες όλων των σημείων του επιπέδου Oxy, που ανήκουν στο τμήμα OA, το οποίο είναι τμήμα της ευθείας $y=2x$.

2. Να βρεθούν όλες οι τιμές του α, για κάθε μία από τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases}y^2-(2\alpha+1)y+\alpha^2+\alpha-2=0\\ \sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2}=3\end{cases}$$

έχει μοναδική λύση.

Λύση

Θεωρούμε τα σημεία $M(x,\ y)$, $A(\alpha,\ 0)$ και $B(\alpha,\ 3)$ στο επίπεδο Oxy. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος δίνει το τμήμα AB.

Είναι: $MA=\sqrt{(\alpha-\alpha)^2+(3-\alpha)^2}=3$,

επομένως η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$MA+MB=AB$$

που σημαίνει ότι το σημείο M ανήκει στο τμήμα AB.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος AB στο επίπεδο Oxy είναι:

$$\begin{cases}x(t)=(1-t)\alpha+t\cdot\alpha\\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 3\\ 0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(t)=\alpha\\ y(t)=3t\\ 0\le t\le 1\end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τις $x(t),\ y(t)$ στην πρώτη εξίσωση του δοσμένου συστήματος, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση $9t^2-3(2\alpha+1)t+\alpha^2+\alpha-2=0$. που έχει ρίζες τους αριθμούς

$$t_1=\frac{\alpha-1}{3},\ \ t_2=\frac{\alpha+2}{3}.$$

Η συνθήκη

$0\le t_1=\dfrac{\alpha-1}{3}\le 1$ ικανοποιείται για $1\le\alpha\le 4$ και η

$0\le t_2=\dfrac{\alpha+2}{3}\le 1$ ικανοποιείται για $-2\le\alpha\le 1$.

Επειδή οι αριθμοί $\dfrac{\alpha-1}{3}$ και $\dfrac{\alpha+2}{3}$

είναι άνισοι για όλες τις τιμές του α, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $\alpha\in[-2,\ 1)\cup(1,\ 4]$.

Σχόλιο.

Δίνουμε μια άλλη προσέγγιση του τελευταίου μέρους της άσκησης. Θεωρούμε την εξίσωση

$$f(t)=9t^2-3(2\alpha+1)t+\alpha^2+\alpha-2=0,\ \ (1)$$

Για να έχει η εξίσωση αυτή μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0,\ 1]$ πρέπει και αρκεί: $f(0)f(1)\le 0$.

Είναι: $f(0)=\alpha^2+\alpha-2,\ \ f(1)=\alpha^2-5\alpha+4$

Επομένως:

$$f(0)f(1)\le 0\Leftrightarrow(\alpha^2+\alpha-2)(\alpha^2-5\alpha+4)\le 0$$
$$\Leftrightarrow(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha-4)\le 0\Leftrightarrow\alpha\in[-2,\ 4]$$

Επειδή απαιτούμε μοναδική ρίζα στο $[0,\ 1]$, απ' αυτές τις τιμές του α εξαιρούμε την τιμή 1, γιατί γι' αυτή την τιμή του α οι ρίζες της (1) είναι οι αριθμοί 0 και 1 (δυο). Άρα, οι αποδεκτές τιμές του α ώστε να έχει το σύστημα μοναδική λύση είναι $[-2,\ 1)\cup(1,\ 4]$.

Ακριβέστερα:

- Αν η μικρότερη ρίζα βρίσκεται μεταξύ των 0, 1 τότε ισοδύναμα θα έχουμε $f(0)\le 0$ και $f(1)\ge 0$ με λύση αυτού του συστήματος το $[1,\ 4]$.
- Αν η μεγαλύτερη ρίζα βρίσκεται μεταξύ των 0,1 τότε πρέπει και αρκεί: $f(0)\ge 0$ και $f(1)\le 0$. Λύση αυτού του συστήματος είναι το διάστημα $[-2,\ 1]$. Άρα, οι τιμές του α ανήκουν στο σύνολο $[-2,\ 1)\cup(1,\ 4]$. Η εξαίρεση της τιμής 1 όπως προηγουμένως.

3. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-8y+16}=5\\ 4x^2-y^2=5\end{cases}$$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=5$$

Στο επίπεδο Oxy, θεωρούμε τα σημεία $M(x,\ y)$, $A(-3,\ 0)$ και $B(0,\ 4)$. Έτσι η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται: $MA+MB=AB$.

Τούτο σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του M θα ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση του συστήματος, αν και μόνο αν, το σημείο M ανήκει στο τμήμα AB. Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος AB (στο επίπεδο Oxy) είναι:

$$\begin{cases}x(t)=(1-t)\cdot(-3)+t\cdot 0\\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 4\\ 0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(t)=3t-3\\ y(t)=4t\\ 0\le t\le 1\end{cases}$$

Το αρχικό σύστημα θα έχει λύση όταν, με την αντικατάσταση των $x(t),\ y(t)$ στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, η εξίσωση που δημιουργείται ως προς t θα έχει ρίζες $t\in[0,\ 1]$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} 4(3t-3)^2-(4t)^2=5 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20t^2-72t+31=0 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{1}{2},\ t_2=3{,}1, \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Επομένως $t=\dfrac{1}{2}$, οπότε $(x,\ y)=\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$.

4. Να βρείτε όλες τις τιμές του α για κάθε μια από τις οποίες το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+25+10x}+\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=13 \\ x^2+y^2=\alpha^2 \end{cases}$$

έχει δυο λύσεις.

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-12)^2}=13$$

Έστω $M(x,\ y)$ σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Τότε το αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης είναι το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου M από τα σημεία $A(-5,\ 0)$ και $B(0,12)$. Επειδή είναι $AB=13$ τελικά έχουμε $MA+MB=AB$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το σημείο M θα ανήκει στο τμήμα AB.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος AB στο επίπεδο Oxy είναι:

$$\begin{cases} x(t)=(1-t)\cdot(-5)+t\cdot 0 \\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 12 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=5t-5 \\ y(t)=12t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Το αρχικό σύστημα μπορεί να έχει δυο λύσεις, όταν αντικαθιστώντας τις $x(t),\ y(t)$ στη δεύτερη εξίσωση του αρχικού συστήματος υπάρχουν δυο τιμές του $t\in[0,\ 1]$ που ικανοποιούν την εξίσωση που προκύπτει.

Έχουμε:

$$\begin{cases} (5t-5)^2+(12t)^2=\alpha^2 \\ \alpha\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 169t^2-50t-(\alpha^2-25)=0 \\ \alpha\le t\le 1 \end{cases}$$

Θεωρούμε το δευτεροβάθμιο τριώνυμο

$$f(t)=169t^2-50t-(\alpha^2-25)$$

στο οποίο οι τετμημένη της κορυφής του είναι

$$t_\kappa=\frac{25}{169} \text{ με } 0<t_\kappa<1.$$

Για να υπάρχουν δυο ρίζες στο $[0,\ 1]$ αρκεί να ικανοποιούνται οι επόμενες σχέσεις:

$$\begin{cases} f(t_\kappa)<0 \\ f(0)\ge 0 \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2>\dfrac{25\cdot 144}{169} \\ \alpha^2-25\le 0 \\ \alpha^2-144\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha|>\dfrac{60}{13} \\ |\alpha|\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{60}{13}<|\alpha|\le 5$$

Επομένως, τις απαιτήσεις του προβλήματος ικανοποιούν όλες οι τιμές του α τέτοιες ώστε

$$\frac{60}{13}<|\alpha|\le 5$$

Άρα, $\quad -5\le\alpha<-\dfrac{60}{13}$, ή $\dfrac{60}{13}<\alpha\le 5$.

5. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α, οι συντεταγμένες τουλάχιστον ενός σημείου του τμήματος AB είναι λύση του συστήματος των ανισώσεων $\begin{Bmatrix} 3x-y+\alpha\le 0, \\ 6x+3y+6\alpha\ge 0 \end{Bmatrix}$ όταν $A(0,\ 8)$ και $B(2{,}5)$.

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος AB στο επίπεδο Oxy είναι:

$$\begin{cases} x(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 2 \\ y(t)=(1-t)\cdot 8+t\cdot 5 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=2t \\ y(t)=-3t+8 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές $x(t),\ y(t)$ στο σύστημα των ανισώσεων, οπότε λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} 3\cdot 2t-(-3t+8)+\alpha\le 0 \\ 6\cdot 2t+3(-3t-8)+6\alpha\ge 0 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\le -9t+8 \\ \alpha\ge -\dfrac{1}{2}t-4 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}t-4\le\alpha\le -9t+8 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Otα, σχεδιάζουμε τα τμήματα των ευθειών:

$$\alpha=-9t+8 \text{ και}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}t-4,\ 0\le t\le 1$$

καθώς και την ταινία που ορίζεται από τις ευθείες $t=0$ και $t=1$ Το σύνολο των σημείων του επιπέδου

Ότα, οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν τις ανισώσεις του συστήματος είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του διπλανού σχήματος απ' όπου προκύπτει ότι $-\frac{9}{4}\le \alpha \le 8$

6. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α, για κάθε μια από τις οποίες το σύνολο λύσεων (x, y) του συστήματος των ανισώσεων

$$\begin{cases} x^2+x+(y-\alpha)^2\le 11 \\ x+\alpha+y^2\le 0 \end{cases}$$

περιέχει τις συντεταγμένες όλων των σημείων του τμήματος με άκρα τα σημεία $(1, 0)$ και $(1, 1)$.

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος με άκρα τα σημεία $(1, 0)$ και $(1, 1)$ είναι:

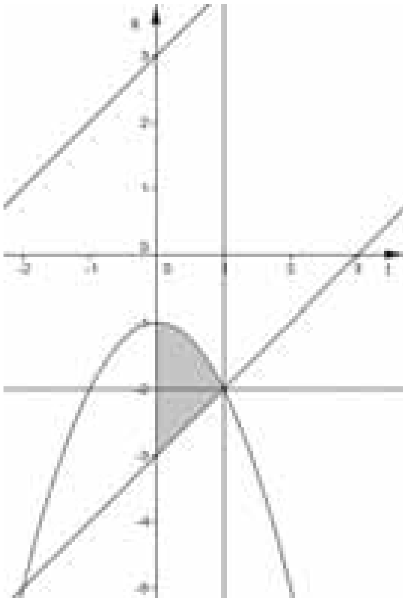
$$\begin{cases} x(t)=1 \\ y(t)=t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $x(t)$, $y(t)$ στις ανισώσεις του συστήματος λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} (t-\alpha)^2\le 9 \\ 1+\alpha+t^2\le 0 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-3\le \alpha\le t+3 \\ \alpha\le -1-t^2 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \quad (1)$$

Στο επόμενο σχήμα στο επίπεδο εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών $\alpha=t+3$, $\alpha=t-3$, της παραβολής $\alpha=-1-t^2$ καθώς και το σύνολο των σημείων (γραμμοσκιασμένο) οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν το σύστημα των ανισώσεων (1) με $t\in[0, 1]$. Επομένως έχουμε:

- Αν $\alpha=-3$, τότε $t=0$.
- Αν $-3<\alpha<-2$, τότε $t\in[0, \alpha+3] \overset{(*)}{\subset} [0, 1]$
- Αν $\alpha=-2$, τότε $t\in[0, 1]$
- Αν $-2<\alpha<-1$, τότε $t\in[0, \alpha+3]$. Εδώ είναι $1<\alpha+3<2$ και δεν ικανοποιείται η συνθήκη $0\le t\le 1$
- Αν $\alpha=-1$, τότε $t=0$.



Σχόλιο:

Στο συμπέρασμα (*) το σύνολο τιμών του t προκύπτει από τα σημεία τομής των αντίστοιχων ευθειών α=σταθερά, στο $(-3, -2)$ με τις ευθείες $t=0$ και $\alpha=t-3$.

Επειδή μας ενδιαφέρουν οι τιμές του α, ώστε η λύση του συστήματος των ανισώσεων να είναι όλοι οι αριθμοί $t\in[0, 1]$, καταλήγουμε από το παραπάνω συμπέρασμα ότι $\alpha=-2$.

Άρα, για $\alpha=-2$, το σύστημα των ανισώσεων το ικανοποιούν οι συντεταγμένες όλων των σημείων του τμήματος ΑΒ με $A(1, 0)$ και $B(1, 1)$

7. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$13-\sqrt{x^2+y^2+2x+6y+10}-$$
$$-\sqrt{x^2+y^2-10x-10y+50}$$

Λύση

Έστω

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+2x+6y+10}-\sqrt{x^2+y^2-10x-10y+50}$$
$$=\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}$$

Θεωρούμε στο επίπεδο Oxy τα σημεία $A(-1,-3)$, $B(5,5)$ και $M(x, y)$, και έχουμε:

$$f(x, y)=(AM)+(BM)$$

οπότε από την τριγωνική ανισότητα είναι:

$$f(x, y)=(AM)+(BM)\ge(AB)=10 \Leftrightarrow -f(x, y)\le -10$$

Η ισότητα ισχύει όταν το Μ είναι σημείο του τμήματος ΑΒ.

Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι ίση με $13-10=3$.

8. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α το σύστημα

$$\begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ \sqrt{x^2+y^2+64+16x}+\sqrt{x^2+y^2+36-12y}=10 \end{cases}$$

έχει δυο λύσεις.

Λύση

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=10, \qquad (1)$$

Αν θεωρήσουμε στο επίπεδο Oxy τα σημεία

$$A(-8,\,0),\ B(0,\,6)\ \text{και}\ M(x,\,y),$$

τότε η (1) γίνεται

$$(AM)+(BM)=10=(AB)$$

οπότε το σημείο M θα είναι σημείο του τμήματος AB.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος AB στο επίπεδο Oxy είναι:

$$\begin{cases} x(t)=(1-t)\cdot(-8)+t\cdot 0 \\ y(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 6 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=8t-8 \\ y(t)=6t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $x(t),\,y(t)$ στην εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$

λαμβάνουμε την $(8t-8)^2+(6t)^2=\alpha^2$

$$\Leftrightarrow 100t^2-128t+64-\alpha^2=0,\ (2)$$

Το αρχικό σύστημα θα έχει δυο λύσεις, όταν η εξίσωση (2) έχει δυο ρίζες που ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$. Έστω $f(t)=100t^2-128t+64-\alpha^2$.

Η τετμημένη της κορυφής K της παραβολής $y=f(t)$ είναι $t_K=\frac{128}{200}=\frac{16}{25},\ 0<t_K<1$.

Για να έχει η (2) ρίζες στο διάστημα $[0,\,1]$ πρέπει και αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} f(t_\kappa)<0 \\ f(0)\ge 0 \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2>\frac{120}{25} \\ \alpha^2\le 64 \\ \alpha^2\le 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha|>4{,}8 \\ |\alpha|\le 6 \end{cases}$$

Άρα, οι τιμές του α που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος είναι

$$-6\le\alpha\le -4{,}8 \ \text{ή}\ 4{,}8<\alpha\le 6$$

9. Δίνονται τα σημεία $A(2,\,2)$ και $B(4,\,8)$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α οι συντεταγμένες τουλάχιστον ενός σημείου του τμήματος AB είναι λύσεις του συστήματος των ανισώσεων

$$\begin{cases} 2x+y-2\alpha\ge 0 \\ 2y-5x-\alpha\le 0 \end{cases}$$

Λύση

Στο καρτεσιανό σύστημα Oxy οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος AB είναι:

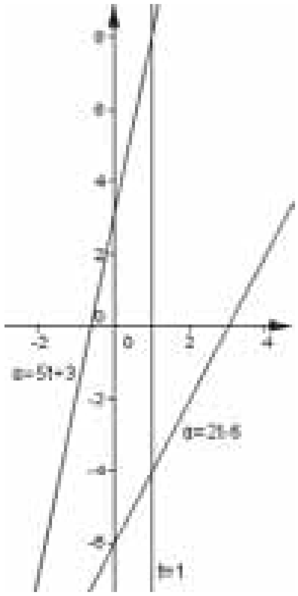
$$\begin{cases} x(t)=(1-t)\cdot 2+4t \\ y(t)=(1-t)\cdot 2+8t \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=2t+2 \\ y(t)=6t+2 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα των ανισώσεων γίνεται

$$\begin{cases} 5t+3-\alpha\ge 0 \\ 2t-6-\alpha\le 0 \\ 0\le t\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-6\le\alpha\le 5t+3 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}.$$

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oαt, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των τμημάτων των ευθειών $\alpha=5t+3$ και $\alpha=2t-6$ με $t\in[0,1]$ καθώς επίσης και την ταινία που ορίζεται από τις ευθείες $t=0,\ t=1$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι οι τιμές του α που ικανοποιούν το πρόβλημα είναι όλες του διαστήματος $[-6,\,8]$.



10. Να βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου α, για τις οποίες το σύνολο των λύσεων (x,y) των ανισώσεων $\begin{cases} (x-\alpha)^2+x+y^2\le 3 \\ x-\alpha+y^2\le 0 \end{cases}$

περιέχει τις συντεταγμένες όλων των σημείων του τμήματος με άκρα τα σημεία $(1,0)$ και $(1,1)$.

Λύση

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος με άκρα τα σημεία $(1,0)$ και $(1,1)$ στο επίπεδο Oxy είναι:

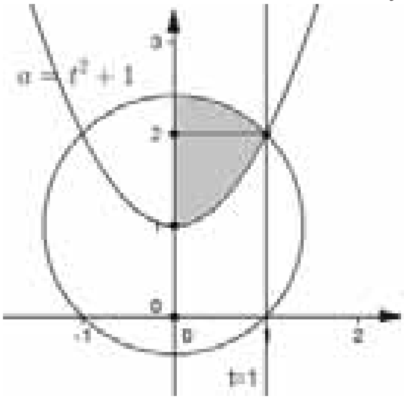
$$\begin{cases} x(t)=1 \\ y(t)=1 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $x(t),\,y(t)$ στις ανισώσεις του συστήματος, οπότε παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases}(1-\alpha)^2 \le 2-t^2\\ 0\le t\le 1\\ 1-\alpha+t^2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-\alpha)^2+t^2\le 2\\ 0\le t\le 1\\ \alpha\ge t^2+1\end{cases}$$

Η πρώτη ανίσωση, σε ορθοκανονικό σύστημα $Ot\alpha$ παριστάνει το εσωτερικό και τα σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $(0,1)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$.

Σχεδιάζουμε στο επίπεδο $Ot\alpha$ όλα τα σημεία (t,α) οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν και τις τρεις ανισώσεις του συστήματος. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι μόνο η τιμή $\alpha=2$ μας εξασφαλίζει λύση του συστήματος για κάθε $t\in[0,1]$ που σημαίνει ότι κάθε σημείο του τμήματος μα άκρα τα σημεία $(1,0)$ και $(1,1)$ είναι λύσεις του δοσμένου συστήματος.



11. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(y-15)^2}+\sqrt{(x-8)^2+y^2}=17\\ \sqrt{x^2+(y-12)^2}+\sqrt{(x-16)^2+y^2}=20\end{cases}$$

Λύση

Στο επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία

$M(x,y)$, $A(0,15)$, $B(8,0)$ και $\Gamma(0,12)$, $\Delta(16,0)$

οπότε οι εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

$$\begin{cases}MA+MB=AB\\ M\Gamma+M\Delta=\Gamma\Delta\end{cases}$$

Από τις τελευταίες ισότητες προκύπτει, ότι το σύστημα έχει λύση, αν και μόνο αν, το σημείο M ανήκει τόσο στο τμήμα AB, όσο και στο τμήμα ΓΔ. Οι παραμετρικές εξισώσεις των τμημάτων AB και ΓΔ είναι αντίστοιχα

$$AB:\begin{cases}x(t)=8t\\ y(t)=(1-t)\cdot 15,\\ 0\le t\le 1\end{cases}\quad \Gamma\Delta:\begin{cases}x(t)=16t\\ y(t)=(1-t_1)\cdot 12\\ 0\le t_1\le 1\end{cases}$$

Το σημείο M είναι κοινό σημείο των τμημάτων AB και ΓΔ, αν και μόνο αν,

$$\begin{cases}x(t)=x(t_1)\\ y(t)=y(t_1)\\ 0\le t\le 1\\ 0\le t_1\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8t=16t\\ 15(1-t)=12(1-t_1)\\ 0\le t\le 1\\ 0\le t_1\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\ t_1=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος

$$(x,\,y)=\left(\frac{8}{3},10\right).$$

12. Να βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου α, για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases}x^2+(y-6)^2=36\\ \sqrt{x^2+(y-18)^2}+\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}=\sqrt{\alpha^2+324}\end{cases}$$

έχει μοναδική λύση.

Λύση

Στο επίπεδο xOy θεωρούμε τα σημεία

$M(x,y)$ $A(0,18)$ και $B(\alpha,0)$.

Τότε η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$MA+MB=AB$$

επομένως, τα σημεία M είναι σημεία του τμήματος AB.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του τμήματος AB είναι:

$$\begin{cases}x(t)=\alpha t\\ y(t)=(1-t)18\\ 0\le t\le 1\end{cases}$$

Το αρχικό σύστημα θα έχει μοναδική λύση, αν μετά την αντικατάσταση των $x(t)$, $y(t)$ στην πρώτη εξίσωσή του, η εξίσωση ως προς t που προκύπτει έχει μοναδική λύση $t\in[0,1]$.

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$$\alpha^2t^2+(12-18t)^2=36$$

$$\Leftrightarrow(324+\alpha^2)t^2-432t+108=0$$

Η τελευταία είναι δευτεροβάθμια ως προς t και θα έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν για τη διακρίνουσα της Δ ισχύει $\Delta=0$.

Είναι:

$$\Delta=186624-432(324+\alpha^2)=0$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2=108\Leftrightarrow\alpha=\pm6\sqrt{3}$$

- Αν $\alpha=6\sqrt{3}$, τότε $t=1$, οπότε
$$(x,y)=\left(6\sqrt{3},0\right)$$
- Αν $\alpha=-6\sqrt{3}$, τότε $t=1$, οπότε
$$(x,y)=\left(-6\sqrt{3},0\right)$$

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 405 (ΤΕΥΧΟΣ 126)

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί μονοψήφιοι αριθμοί. Αν $P(13)=41160$, να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο κ ώστε όλες οι ρίζες του $P(x)$ να περιέχονται στο διάστημα $[-\kappa,\ 0]$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον.

ΛΥΣΗ (Νερούτσος Κώστας - Γλυφάδα)

Ισχύουν:

$$13^4=28561,\ \ 13^5=371293>41160$$

και $9\cdot 13^3+9\cdot 13^2+9\cdot 13+9=21420<41160$

οπότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι της μορφής

$$P(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon,\ \ \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{Z}$$

και $0\le\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\le 9$.

Επειδή

$$2\cdot 13^4=57122>41160,$$

αναγκαστικά $\alpha=1$, οπότε

$$P(x)=x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon,\ \ (3)$$

Έτσι, έχουμε:

$$P(13)=41160 \Leftrightarrow 13^4+13^3\cdot\beta+13^2\cdot\gamma+13\delta+\varepsilon=41160$$
$$\Leftrightarrow 28561+13^3\cdot\beta+13^2\cdot\gamma+13\delta+\varepsilon=41160$$
$$\Leftrightarrow 13^3\cdot\beta+13^2\cdot\gamma+13\delta+\varepsilon=12599=969\cdot 13+2$$
$$\Leftrightarrow 13(969-13^2\cdot\beta-13\cdot\gamma-\delta)=\varepsilon-2$$

οπότε $13/\varepsilon-2$, άρα $\varepsilon-2=0$, δηλαδή $\varepsilon=2$.

Επιπλέον,

$$969-13^2\cdot\beta-13\cdot\gamma-\delta=0$$
$$\Rightarrow 74\cdot 13+7-13^2\beta-13\cdot\gamma-\delta=0$$
$$\Rightarrow 13(74-13\beta-\gamma)=\delta-7$$

οπότε $13/\delta-7$, άρα $\delta-7=0$, δηλαδή $\delta=7$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\gamma=9 \ \text{ και } \ \beta=5$$

Επομένως $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+7x+2$, (4)

Παρατηρούμε ότι $P(-1)=0$, οπότε

$$x+1/P(x)$$

Η διαίρεση $P(x):(x+1)$ δίνει πηλίκο

$$x^3+4x^2+5x+2$$

οπότε $P(x)=(x+1)(x^3+4x^2+5x+2)$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$x^3+4x^2+5x+2=(x+1)(x^2+3x+2)$$

και επειδή

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

έχουμε τελικά:

$$P(x)=(x+1)^3(x+2),\ \ (5)$$

Από την (5) προκύπτει ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς -1(τριπλή) και -2, οπότε όλες οι ρίζες του περιέχονται στο διάστημα $[-2,\ 0]$.

Άρα, ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος είναι ο $\kappa=2$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Καραβότας Δημήτριος – Κάτω Αχαΐα, Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο και Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος Ηλείας

ΑΣΚΗΣΗ 406 (ΤΕΥΧΟΣ 127)

Δίνεται σφαίρα με κέντρο Κ και ακτίνα R. Στην σφαίρα αυτή εγγράφεται ορθός κώνος με κορυφή Α και κέντρο βάσης Λ. Αν ο παραπάνω εγγεγραμμένος κώνος στη δεδομένη σφαίρα (K,R) έχει το μέγιστο δυνατό συνολικό εμβαδό (άθροισμα εμβαδών κωνικής επιφάνειας και βάσης) , να υπολογιστούν σε συνάρτηση με την R:

α. Το ύψος ΑΛ=h του κώνου.

β. Το συνολικό εμβαδό Ε του κώνου.

Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο

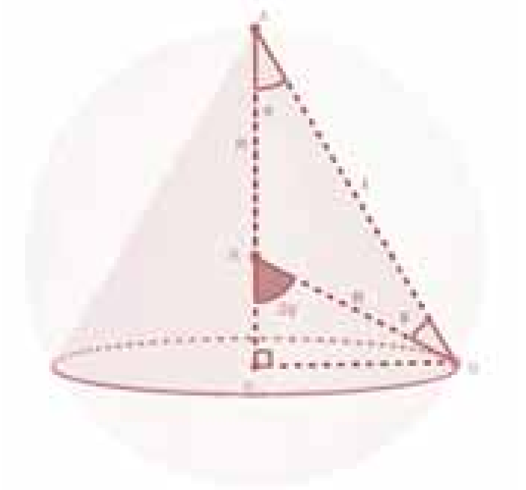
ΛΥΣΗ (Σαμουηλίδης Χρήστος – Θεσσαλονίκη)

Το συνολικό εμβαδό Ε του κώνου δίνεται από τη σχέση

$$E=\pi\rho\lambda+\pi\rho^2$$

όπου $\lambda=AB$ η γενέτειρα του κώνου και $\rho=B\Lambda$ η ακτίνα βάσης του κώνου (βλέπε εικόνα 1).

Η ακτίνα R της σφαίρας είναι $R=KA=KB$. Αν ο κώνος (c΄) έχει ύψος $h'<R$, τότε ο κώνος (c) με $h=2R-h'>R$, λόγω συμμετρίας ως προς τον «ισημερινό» της σφαίρας, έχει ίδια βάση ($\rho=\rho'$) και μεγαλύτερη γενέτειρα αφού $\lambda>\lambda'$ (βλέπε εικόνα 2). Έπεται ότι για το μέγιστο δυνατό συνολικό εμβαδό, πρέπει $h>R$.



Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΒ προκύπτει ότι

$$\Lambda\hat{K}B=2\varphi=2K\hat{A}B$$

Έχουμε:

$$\eta\mu2\varphi=2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow\frac{B\Lambda}{KB}=2\frac{B\Lambda}{AB}\cdot\frac{A\Lambda}{B\Lambda}$$

$$\Rightarrow\frac{\rho}{R}=2\frac{\rho}{\lambda}\cdot\frac{\kappa}{\lambda}\Rightarrow\lambda^2=2Rh,\ h\in(R,\,2R)$$

θεωρούμε τη συνάρτηση

$$E(h)=\pi\sqrt{\lambda^2-h^2}+\pi(\lambda^2-h^2)$$

$$=\pi\sqrt{2Rh-h^2}\sqrt{2Rh}+\pi(2Rh-h^2)$$

$$=\pi\left(\sqrt{4R^2h^2-2Rh^3}+2Rh-h^2\right)$$

για την οποία ισχύει

$$E'(h)=\pi\left(\frac{8R^2h-6Rh^2}{2\sqrt{4R^2h^2-2Rh^3}}+2R-2h\right)$$

και

$$E'(h)=0\Leftrightarrow8R^2h-6Rh^2+4(R-h)\sqrt{4R^2h^2-2Rh^3}=0$$

$$\Leftrightarrow8R^2-6Rh^2+4(R-h)\sqrt{4R^2-2Rh}=0$$

Αν θέσουμε $\frac{R}{h}=x$, η εξίσωση γράφεται

$$8x^2-6x+4(x-1)\sqrt{4x^2-2x}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4x^2-2x}=\frac{3x-4x^2}{2(x-1)}$$

Με τους περιορισμούς

$$4x^2-2x\geq0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x\geq\frac{1}{2},\ x\neq1\text{και}$$

$$\frac{3x-4x^2}{2(x-1)}\geq0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{3-4x}{x-1}\geq0\Leftrightarrow(3-4x)(x-1)\geq0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}\leq x<1$$

και τετραγωνισμό των μελών της εξίσωσης έχουμε:

$$4x^2-2x=\frac{(4x^2-3x)^2}{4(x-1)^2}\Leftrightarrow4(4x^2-2x)(x-1)^2=(4x^2-3x)^2$$

$$\Leftrightarrow-16x^3+23x^2-8x=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}16x^2-23x+8=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{23\pm\sqrt{17}}{32}$$

από τις οποίες η $x_1=\frac{23-\sqrt{17}}{32}$ απορρίπτεται αφού $x_1<\frac{3}{4}$. Έτσι, έχουμε:

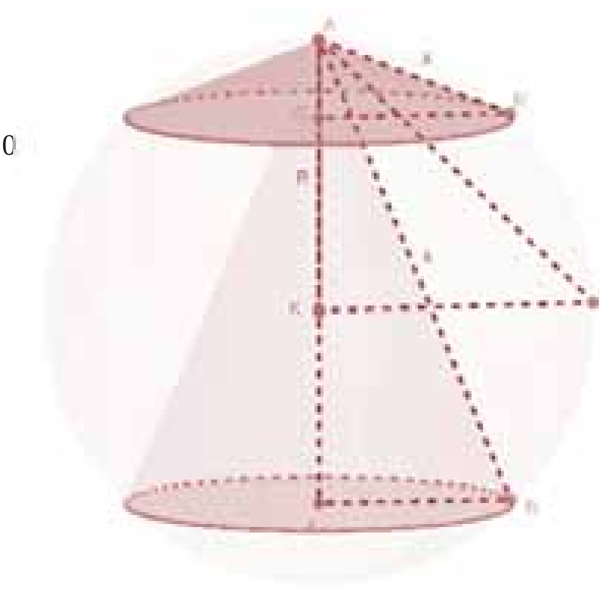
$$\frac{R}{h}=\frac{23+\sqrt{17}}{32}\Rightarrow h=\frac{32}{23+\sqrt{17}}R=\frac{23-\sqrt{17}}{16}R$$

Έτσι, η εξίσωση $E'(h)=0$ έχει ρίζα μόνο τον αριθμό

$$h_o=\frac{23-\sqrt{17}}{16}R>R$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι για $h=R$ παίρνουμε $E'(R)>0$, οπότε η συνάρτηση του εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα για $h<h_o$ και γνησίως φθίνουσα για $h>h_o$.

Επομένως, για $h=h_o$ η συνάρτηση του εμβαδού παίρνει την μέγιστη τιμή της που είναι ίση με



$$E_{max} = \frac{107+51\sqrt{17}}{128}\pi R^2$$

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Νερούτσος Κώστας – Γλυφάδα, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα και Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος Ηλείας.

ΑΣΚΗΣΗ 407 (ΤΕΥΧΟΣ 127)

Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\alpha+\beta+\gamma=3$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+\frac{1}{32}\left[(3-\alpha)^6+(3-\beta)^6+(3-\gamma)^6\right]\geq 9$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Ντόρβας Νίκος – Αθήνα)

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=x^6+\frac{1}{32}(3-x)^6,\ x\in(0,\,3)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 9$$

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=30\left(x^4+\frac{1}{32}(3-x)^4\right),\ x\in(0,\,3)$$

και $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή. Έτσι, από την ανισότητα Jensen παίρνουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

$$\overset{\alpha+\beta+\gamma=3}{\Rightarrow} f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f(1)$$

$$\Rightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 9$$

που είναι το ζητούμενο.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν, $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη, Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια και Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός

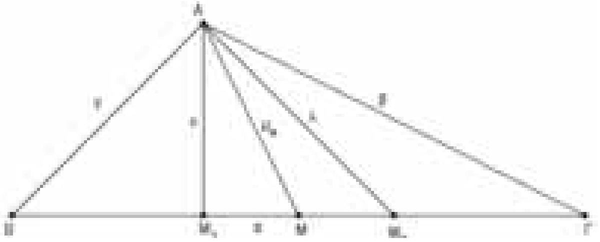
ΑΣΚΗΣΗ 408 (ΤΕΥΧΟΣ 127)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A\geq 90^o$ και τα σημεία M_1, M_2 στην ΒΓ ώστε $BM_1=M_1M_2=M_2\Gamma$. Αν R, R′ είναι οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ΑΒΓ και AM_1M_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\frac{B\Gamma^2}{AB\cdot A\Gamma}\geq\frac{18R'}{5R}.$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ (Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη)



Αν Ε, Ε΄ είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ και AM_1M_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει $E=3E'$, (1).

Είναι:

$$R'=\frac{\kappa\lambda\frac{\alpha}{3}}{4E'}=\frac{\alpha\kappa\lambda}{12E'}\ \text{ και }\ R=\frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$$

οπότε

$$\frac{R'}{R}=\frac{\alpha\kappa\lambda E}{3\alpha\beta\gamma E'}\overset{(1)}{=}\frac{\kappa\lambda}{\beta\gamma},\quad (2)$$

Στο (αμβλυγώνιο) τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha^2\geq\beta^2+\gamma^2\ \text{ και }\ \beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}(\text{θ. διαμέσων})$$

οπότε

$$\alpha^2\geq 2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow\frac{\alpha^2}{2}\geq 2\mu_\alpha^2\Rightarrow\alpha^2\geq 4\mu_\alpha^2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2\geq 36\mu_\alpha^2,\ (3)$$

Το τρίγωνο AM_1M_2 έχει και αυτό διάμεσο την μ_α οπότε

$$\kappa^2+\lambda^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{18}.$$

Από την τελευταία σε συνδυασμό με την προφανή

$$\kappa^2+\lambda^2\geq\kappa\lambda$$

παίρνουμε

$$2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{18}\geq 2\kappa\lambda\Rightarrow 36\mu_\alpha^2\geq 36\kappa\lambda-\alpha^2$$

Έτσι, η (3) γράφεται:

$$9\alpha^2\geq 36\kappa\lambda-\alpha^2\Rightarrow 10\alpha^2\geq 36\kappa\lambda\Rightarrow\alpha^2\geq\frac{18}{5}\kappa\lambda$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\geq\frac{18\kappa\lambda}{5\beta\gamma},\ (4)$$

Η (4) λόγω της (2) γράφεται

$$\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}\geq\frac{18R'}{5R}\Rightarrow\frac{B\Gamma^2}{AB\cdot A\Gamma}\geq\frac{18R'}{5R}$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Λαγογιάννης Βασίλης – Νέο Ηράκλειο, Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός και Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα και Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος Ηλείας.

ΑΣΚΗΣΗ 409 (ΤΕΥΧΟΣ 127)

Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha\beta\gamma = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^2\gamma + \gamma^2\beta + \beta^2\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma$

β. $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\dfrac{1}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} - \dfrac{1}{6}\right) \leq \dfrac{1}{2}$

Νικητάκης Γεώργιος – Σητεία.

ΛΥΣΗ Μηνάς Στασινός – Αθήνα

α. Για κάθε $x > 0$ προφανώς ισχύει:

$$(x-1)^2 \cdot (x+2) \geq 0$$

οπότε $x^3 - 3x + 2 \geq 0$.

Έτσι, έχουμε:

$$\alpha^3 \geq 3\alpha - 2 \Rightarrow \alpha^2 \geq 3 - \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2\gamma \geq 3\gamma - \frac{2\gamma}{\alpha}$$

$$\underset{\frac{2\gamma}{\alpha}=2\gamma^2\beta}{\overset{\alpha\beta\gamma=1}{\Longrightarrow}} \alpha^2\gamma \geq 3\gamma - 2\gamma^2\beta, \ (1)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$\beta^2\alpha + 2\alpha^2\gamma \geq 3\alpha, \ (2) \text{ και } \gamma^2\beta + 2\beta^2\alpha \geq 3\beta, \ (3)$$

Προσθέτουμε, κατά μέλη τις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$\alpha^2\gamma + \gamma^2\beta + \beta^2\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma$$

που είναι το ζητούμενο.

β. Η αποδεικτέα γράφεται:

$$\frac{1}{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2\cdot(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Όμως $(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^2 =$

$= \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma^2 + 2\alpha^2\beta\gamma$

από την οποία λόγω της γνωστής ανισότητας

$$x^2 + y^2 + \omega^2 \geq xy + y\omega + x\omega$$

και της δοσμένης ισότητας $\alpha\beta\gamma = 1$ παίρνουμε:

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^2 \geq 3(\alpha+\beta+\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2\cdot(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Αν θέσουμε $\sqrt{\alpha+\beta+\gamma} = x$

τότε η αποδεικτέα γράφεται:

$$\frac{1}{\sqrt{3}x} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(x - \sqrt{3}\right)^2 \geq 0$$

και ισχύει.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός, Δεληστάθης Γιώργος - Κάτω Πατήσια, Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο και Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος Ηλείας.

Προτεινόμενα Θέματα

416. Θεωρούμε όλα τα ισοσκελή τρίγωνα με σταθερή περίμετρο 2τ. Να βρείτε ποια από αυτά έχουν την μικρότερη ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου και ποιο είναι το μήκος της ακτίνας αυτής.

Τσιώλης Γεώργιος – Τρίπολη

417. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει $xy + yz + zx = 1$ να αποδείξετε ότι

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz(x+y+z) \geq 2$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

418. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ (με τον συνηθισμένο συμβολισμό) ισχύει

$$(\alpha + 2\mu_\alpha + 2\gamma)^2 \geq 24\sqrt{3}E$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

419. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3\beta^3 + (\alpha^3 + \beta^3)(\gamma+\delta)^3 \leq 0$$

Τσιλιακός Λευτέρης – Γαλάτσι

420. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\delta} + \frac{\gamma}{\delta+\alpha} + \frac{\delta}{\alpha+\beta} \geq 2$$

Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον

Το θέμα το συναντάμε για πρώτη φορά προτεινόμενο στην ελληνική βιβλιογραφία το **1975** στο κλασσικό βιβλίο Άλγεβρας «ΥΠΟΨΗΦΙΑΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΟΤΕΡΑ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ » του Αντώνη Κυριακόπουλου, απ’ όπου και έχει ληφθεί.

αφορμές ... και στιγμιότυπα

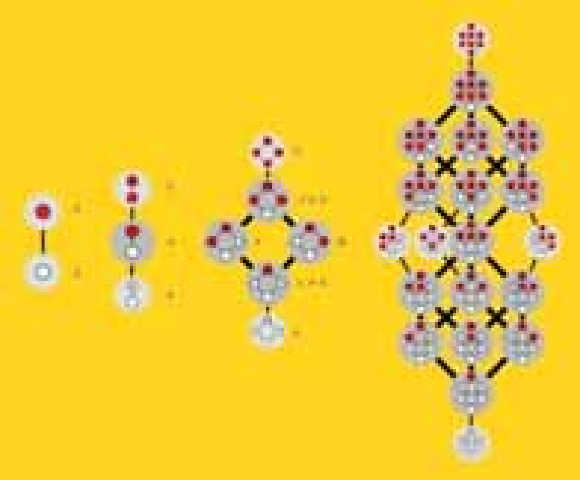
Βρέθηκε ο 9ος αριθμός Dedekind

Ερευνητές, υπολόγισαν πρόσφατα, τον «ένατο αριθμό Dedekind», **τον έψαχναν επί 32 χρόνια,** ο οποίος ανήκει, σε μια εκθετικά σύνθετη σειρά αριθμών, που ορίζουν εξόδους λογικών συναρτήσεων με βάση διαφορετικές χωρικές διαστάσεις. Οι μαθηματικοί **Harry Baker** και **Lennart Van Hirtum**, (από το Πανεπιστήμιο Paderborn της Γερμανίας) οπλισμένοι με υπερυπολογιστές, εντόπισαν επιτέλους, **την αξία** ενός μεγάλου αριθμού που προηγουμένως θεωρούνταν αδύνατο να υπολογιστεί. Ο αριθμός, γνωστός ως "**ένατος αριθμός Dedekind**" ή **D(9)**, είναι στην πραγματικότητα ο 10ος σε μια ακολουθία. Κάθε αριθμός Dedekind αντιπροσωπεύει τον αριθμό των **πιθανών** διαμορφώσεων ενός συγκεκριμένου είδους λογικής πράξης **true-false** σε διαφορετικές χωρικές διαστάσεις. Ο πρώτος αριθμός στην ακολουθία είναι **D(0),** που αντιπροσωπεύει μηδενικές διαστάσεις. Γι' αυτό το **D(9),** που αντιπροσωπεύει εννέα διαστάσεις, είναι ο 10ος αριθμός στην ακολουθία. Ο όγδοος αριθμός Dedekind, ο οποίος ακολουθεί τους ίδιους κανόνες για οκτώ διαστάσεις, **υπολογίστηκε το 1991**. Αλλά λόγω του άλματος στην υπολογιστική ισχύ, που απαιτείται για τον υπολογισμό της ένατης, ορισμένοι μαθηματικοί θεώρησαν ότι **ήταν αδύνατο** να υπολογίσουν την ακριβή τιμή του.

Οι αριθμοί Dedekind γίνονται ολοένα και μεγαλύτεροι για κάθε νέα διάσταση, γεγονός που καθιστά όλο και πιο δύσκολο, τον προσδιορισμό τους. Κύριο αντικείμενο των αριθμών Dedekind είναι οι μονότονες συναρτήσεις **Boolean** με άπειρες διαστάσεις, που μοιάζει σαν **ένα παιχνίδι** με **έναν κύβο n** διαστάσεων. Χρωματίζουμε **τις γωνίες** του κύβου με λευκό ή κόκκινο χρώμα και ψάχνουμε πόσες διαφορετικές διασταυρώσεις υπάρχουν. Θυμίζει, κατά την **αρχαιότητα**, το γνωστό πρόβλημα, "με τους **κόκκους** ρύζι που βάζουμε στα τετράγωνα στο σκάκι".

Αλλά τώρα, δύο άσχετες μελέτες, από ξεχωριστές ερευνητικές ομάδες – η πρώτη που υποβλήθηκε στον διακομιστή προεκτύπωσης arXiv στις 5 Απριλίου 2023 και η δεύτερη στον ίδιο διακομιστή στις 6 Απριλίου 2023 – έχουν κάνει το αδύνατο. Οι μελέτες -η καθεμία χρησιμοποιώντας έναν υπερυπολογιστή αλλά εκτελούσε διαφορετικά προγράμματα- παρήγαγαν τον ίδιο ακριβώς αριθμό.

Τι είναι οι αριθμοί Dedekind; Οι αριθμοί Dedekind περιγράφηκαν για πρώτη φορά από τον Γερμανό μαθηματικό Richard Dedekind, τον 19ο αιώνα. Οι αριθμοί **σχετίζονται** με **λογικά προβλήματα** γνωστά ως "μονότονες **δυαδικές συναρτήσεις**" (MBFs). Οι συναρτήσεις Boolean είναι ένα είδος λογικής που μπορεί να λάβει ως είσοδο μόνο μία από τις δύο τιμές -0 (false) και 1 (true)- και να ξεχωρίσει μόνο αυτές τις δύο τιμές. Στα MBF μπορούμε να αλλάξουμε το 0 με ένα 1 στην είσοδο, αλλά μόνο εάν επιτρέπει στην έξοδο να αλλάξει από 0 σε 1, όχι από 1 σε 0. Οι αριθμοί Dedekind είναι η έξοδος των MBF όπου η είσοδος είναι συγκεκριμένη χωρική διάσταση. Αυτή η έννοια μπορεί να προκαλέσει **σύγχυση** για τους **μη μαθηματικούς**. Αλλά είναι δυνατό να οπτικοποιήσουμε τι συμβαίνει **χρησιμοποιώντας σχήματα** για να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς Dedekind για κάθε διάσταση, εξήγησε ο Van Hirtum. Για παράδειγμα, στη δεύτερη διάσταση, ο αριθμός Dedekind σχετίζεται με ένα τετράγωνο, ενώ ο τρίτος μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν κύβο, ο τέταρτος και μεγαλύτερος με υπερκύβους. Για κάθε διάσταση, οι κορυφές ή τα σημεία ενός συγκεκριμένου σχήματος αντιπροσωπεύουν τις πιθανές διαμορφώσεις των MBF. Για να βρούμε τον αριθμό Dedekind, μπορούμε να μετρήσουμε πόσες φορές μπορούμε να χρωματίσουμε κάθε κορυφή από κάθε σχήμα με ένα από τα δύο χρώματα (σε αυτήν την περίπτωση κόκκινο και λευκό), αλλά με την προϋπόθεση ότι δεν μπορεί να τοποθετηθεί ένα χρώμα (σε αυτήν την περίπτωση το λευκό). πάνω από το άλλο (σε αυτή την περίπτωση κόκκινο).



Διάγραμμα που δείχνει τις πιθανές διαμορφώσεις έγχρωμων κορυφών μέσα σε όλο και πιο πολύπλοκα σχήματα

Ένα σχετικό διάγραμμα παραπλεύρως δείχνει τις εξόδους για τους τέσσερις πρώτους αριθμούς Dedekind: Από αριστερά προς τα δεξιά D(0), D(1), D(2) και D(3). Οι κύκλοι αντιπροσωπεύουν μια πιθανή διαμόρφωση για κάθε σχήμα όπου οι λευκές κορυφές δεν τοποθετούνται πάνω από τις κόκκινες. Για μηδενικές διαστάσεις, το σχήμα είναι μόνο ένα σημείο και D(0)=2 επειδή το σημείο μπορεί να είναι είτε κόκκινο είτε λευκό. Για μια διάσταση, το σχήμα είναι μια γραμμή με δύο σημεία και D(1)=3 επειδή και τα δύο σημεία μπορεί να είναι είτε το ίδιο χρώμα είτε κόκκινα πάνω από το λευκό. Για δύο διαστάσεις, το σχήμα είναι τετράγωνο και D(2)=6 επειδή υπάρχουν πλέον έξι πιθανά σενάρια όπου καμία λευκή κουκκίδα δεν βρίσκεται πάνω από μια κόκκινη κουκκίδα.

Και για τις τρεις διαστάσεις, το σχήμα είναι ένας κύβος, και ο αριθμός των πιθανών διαμορφώσεων μεταβαίνει σε 20, άρα D(3)=20. Καθώς ο αριθμός των διαστάσεων αυξάνεται, το υποθετικό σχήμα γίνεται ένας όλο και πιο πολύπλοκος **υπερκύβος** με μεγαλύτερο αριθμό αποτελεσμάτων, είπε ο Van Hirtum. Οι τιμές των επόμενων πέντε αριθμών Dedekind είναι:

68, 7581, 7828354, 2414682040998 και 56130437228687557907788.

Η πρόσφατη τιμή για το **D(9)** είναι: **286386577668298411128469151667598498812366**.

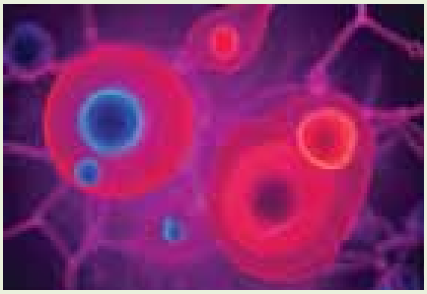
Όλο και πιο περίπλοκοι υπολογισμοί: O Van Hirtum εργάζεται για τον εντοπισμό του **D(9)** για περισσότερα από τρία χρόνια. Για να το κάνει αυτό, δημιούργησε ένα νέο είδος προγράμματος υπολογιστή για να επιτρέψει σε έναν υπερυπολογιστή να επεξεργάζεται τα δεδομένα με συγκεκριμένο τρόπο. Εάν είχε χρησιμοποιήσει ένα πιο **βασικό πρόγραμμα**, θα μπορούσαν να χρειαστούν έως και **100 χρόνια** για να ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί. Συγκριτικά, ο υπολογιστής που χρησιμοποιήθηκε το 1991 για την επεξεργασία του **D(8)** ήταν λιγότερο ισχυρός από ένα σύγχρονο **smartphone** και ολοκλήρωσε την εργασία σε περίπου 200 ώρες. Ένας σύγχρονος φορητός υπολογιστής θα μπορούσε πιθανώς να εκτελέσει αυτούς τους υπολογισμούς σε λιγότερο από 10 λεπτά.

Ο Van Hirtum πιστεύει ότι ένα παρόμοιο **άλμα**, στην επεξεργαστική ισχύ του υπολογιστή, θα απαιτηθεί για τον υπολογισμό του 10ου αριθμού Dedekind. «Αν το κάναμε τώρα, θα απαιτούσε επεξεργαστική ισχύ ίση με τη συνολική **ισχύ εξόδου του ήλιου**», είπε, γεγονός που καθιστά «πρακτικά αδύνατο» τον υπολογισμό του.

Πηγές: Live Science, ecozen.gr, apeiro.gr, Nothing Ahead

Ένα μαθηματικό μοτίβο στα ανθρώπινα κύτταρα

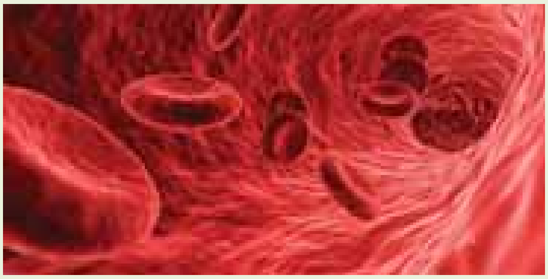
Σε μια προσπάθεια που ξεκίνησε, πριν από περισσότερα από δέκα χρόνια, οι επιστήμονες υπολόγισαν πόσα **κύτταρα** συνθέτουν το **ανθρώπινο σώμα**. Χρησιμοποιώντας δεδομένα από περισσότερες από 1.500 δημοσιευμένες πηγές, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι **άνδρες** αποτελούνται από περίπου **36** τρισεκατομμύρια κύτταρα, οι **γυναίκες** έχουν περίπου **28** τρισεκατομμύρια κύτταρα και ένα **παιδί 10** ετών έχει περίπου **17** τρισεκατομμύρια κύτταρα.



Επιπλέον, τα κύτταρα αυτά ακολουθούν ένα **μαθηματικό**

μοτίβο, με βάση το μέγεθος και τη μάζα που εμφανίζεται και αλλού στην φύση. Τα νέα δεδομένα αποκάλυψαν ότι εάν τα κύτταρα, ενός ανθρώπου, παρόμοιου μεγέθους ομαδοποιηθούν κάθε ομάδα συνεισφέρει περίπου την ίδια συνολική ποσότητα μάζας στο σώμα. Η διεθνής ομάδα ερευνητών δημοσίευσε τα αποτελέσματά αυτά, στο **Proceedings of the National Academy of Sciences.**

«**Το κλειδί** ήταν να βρούμε τα έγγραφα που περιέγραφαν τον αριθμό των κυττάρων σε διαφορετικούς ιστούς» ανέφερε στο New Scientist, ο **Eric Galbraith**, οικολόγος στο Πανεπιστήμιο McGill στον Καναδά. «Και μετά έπρεπε να μάθουμε ότι αυτά τα είδη ιστών αποτελούνταν από συγκεκριμένα κύτταρα και ποιο ήταν το εύρος μεγέθους αυτών των κυττάρων».

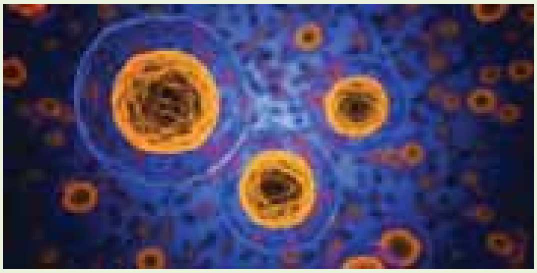


Τα ανθρώπινα κύτταρα, αντί να έχουν όλα περίπου το ίδιο μέγεθος, ποικίλλουν ευρέως. Οι ερευνητές υπολόγισαν τη μάζα, το εύρος μεγέθους και τον αριθμό κυττάρων για **1.200** κυτταρικές **ομάδες**, οι οποίες μπορούν περαιτέρω να αναλυθούν σε 400 τύπους κυττάρων σε 60 διαφορετικούς ιστούς. Βρήκαν ότι τα μικρότερα κύτταρα, όπως **τα κύτταρα του αίματος**, είναι πιο κοινά στο σώμα μας, ενώ τα μεγαλύτερα, όπως **τα μυϊκά κύτταρα**, είναι **λιγότερο άφθονα**. Όμως η ποσότητα της ύλης που συνθέτει τα κύτταρα σε κάθε κατηγορία μεγέθους είναι σε μεγάλο βαθμό σταθερή.

Παρόμοιες κατανομές μεγέθους μπορούν να παρατηρηθούν και σε άλλα επιστημονικά πεδία. Στην οικολογία, για παράδειγμα, οι **θαλάσσιοι οργανισμοί** από τα βακτήρια έως τις φάλαινες εμφανίζουν το **ίδιο μοτίβο**. Εάν τα πλάσματα ταξινομηθούν κατά μέγεθος σε μια λογαριθμική κλίμακα -όπου οι τιμές σε κάθε άξονα γίνονται εκθετικά μεγαλύτερες- οι μικρότεροι οργανισμοί είναι πιο συνηθισμένοι από τους μεγαλύτερους, αλλά η συνολική μάζα των οργανισμών σε κάθε κατηγορία παραμένει ως επί το πλείστον συνεπής για όλες τις κατηγορίες μεγέθους. Τα δεδομένα αυτά παραλληλίζονται με **τον νόμο του Zipf**, ένα μοτίβο συχνότητας που καταγράφεται **σε πόλεις και αστεροειδείς**, ακόμα και στην **γλωσσολογία**. Για παράδειγμα, μια μικρή ποικιλία από σύντομες λέξεις (όπως το «το») εμφανίζεται συχνά σε ένα βιβλίο, ενώ οι μεγαλύτερες λέξεις είναι λιγότερο κοινές.

Αυτό το εκτεταμένο μοτίβο υποδηλώνει ότι μπορεί να υπάρχει «**κάποιος** βαθύς υποκείμενος μηχανισμός που θα μπορούσε να είναι **κοινός** σε όλα αυτά τα διαφορετικά πράγματα» τονίζει ο επικεφαλής συγγραφέας και βιολόγος στο Ινστιτούτο «Max Planck **για τα Μαθηματικά** στις Επιστήμες» στη Γερμανία και στο Πανεπιστήμιο McGill, Ian Hatton. Όμως η ομάδα των ερευνητών δεν γνωρίζει ποιος είναι αυτός ο μηχανισμός. «Δεν είμαστε ακόμα εκεί».

Η περισσότερη γνώση για την συχνότητα των κυττάρων στο σώμα θα μπορούσε να είναι κρίσιμης σημασίας για την κατανόηση της ανθρώπινης υγείας και των **ασθενειών -ειδικά ο καρκίνος**, ο οποίος εμφανίζεται όταν ο αριθμός των κυττάρων αποβάλλεται από την ισορροπία λόγω της ταχείας διαίρεσης- δηλώνουν οι ερευνητές στο Science News. Η ομάδα υπολόγισε επίσης ότι οι άνθρωποι έχουν περίπου τέσσερις φορές περισσότερα συνολικά λεμφοκύτταρα στο σώμα μας από ό,τι πιστεύαμε προηγουμένως. Τα λεμφοκύτταρα είναι **λευκά** αιμοσφαίρια που βοηθούν στην καταπολέμηση **λοιμώξεων** και ασθενειών.



«Είναι απλά συναρπαστικό από καθαρά επιστημονική σκοπιά να έχουμε κάποιο είδος **ποσοτικοποίησης** της **κυτταρικής** ποικιλομορφίας στο ανθρώπινο σώμα» ανέφερε ο **John Runions** από το Πανεπιστήμιο **Oxford Brookes** στην Αγγλία. "Όταν δίνω διάλεξη σε μαθητές για κυτταρική βιολογία και ανάπτυξη, λέω κάτι σαν: … "Όλοι ξεκινούμε ως ένα ενιαίο γονιμοποιημένο κύτταρο, ο ζυγώτης, ο οποίος υφίσταται διαδοχικούς κύκλους κυτταρικής διαίρεσης που συνοδεύονται από διαφοροποίηση για να παράγει έναν ενήλικο οργανισμό με κύτταρα X" όπου "…Το X ήταν πάντα το δύσκολο κομμάτι …" τονίζει στην δημοσίευση της έρευνας.

Πηγές: Sciences.gr, Unboxholics.com, inews, msn.com, newsbase.gr

Charles W. Misner [1932-2023]

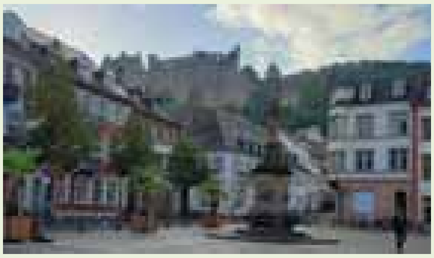
Ο θεωρητικός φυσικός Charles W. Misner, **συν-συγγραφέας** του κλασικού **βιβλίου Gravitation**, έφυγε από τη ζωή στις 24 Ιουλίου 2023. Ήταν 91 ετών. Σπούδασε φυσική στο Πανεπιστήμιο της Notre Dame και εκπόνησε διδακτορική διατριβή με θέμα «Outline of Feynman Quantization of General Relativity. Derivation of Field Equations. Vanishing of the Hamiltonian(1957)», στο Πανεπιστημίο του **Πρίνστον** υπό την επίβλεψη του John Archibald Wheeler.

Το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας του Misner βρίσκεται στην περιοχή της γενικής θεωρίας της **σχετικότητας** και περιγράφει τις **βαρυτικές αλληλεπιδράσεις πολύ μεγάλων σωμάτων**. Οι δημοσιεύσεις του συνέβαλαν επίσης και στην εξέλιξη της της κοσμολογίας. Ήταν από τους πρώτους που επεσήμανε το πρόβλημα του ορίζοντα, τον **ρόλο της τοπολογίας** στη **γενική σχετικότητα**, την κβαντική βαρύτητα και τον κλάδο της γενικής σχετικότητας που χρησιμοποιεί αριθμητικές **μεθόδους** και **αλγορίθμους** για την επίλυση και την ανάλυση **προβλημάτων**. Στους τομείς της **κοσμολογίας** και της τοπολογίας, επινόησε και μελέτησε αρχικά το **σύμπαν mixmaster**, σε μια προσπάθεια να κατανοήσει καλύτερα τη **δυναμική του αρχέγονου σύμπαντος** και ανέπτυξε μια λύση στην εξίσωση πεδίου του Αϊνστάιν. που είναι πλέον γνωστό ως **χώρος Misner**. Σε συνεργασία με τους Richard Arnowitt και Stanley Deser, δημοσίευσε μια Χαμιλτονιανή διατύπωση της εξίσωσης Αϊνστάιν που διαχώρισε τον ενοποιημένο χωρόχρονο του Αϊνστάιν σε **ξεχωριστό χώρο και χρόνο**. Αυτό το σύνολο εξισώσεων, γνωστό ως **φορμαλισμός ADM**, παίζει ρόλο σε ορισμένες προσπάθειες ενοποίησης της κβαντικής μηχανικής με την γενική σχετικότητα. Αποτελεί επίσης το **μαθηματικό σημείο** εκκίνησης για τις περισσότερες τεχνικές για την **αριθμητική επίλυση** των εξισώσεων του Αϊνστάιν.

O Charles Misner, είναι επίσης γνωστός, ως συν-συγγραφέας, του θρυλικού βιβλίου «**Gravitation**» (Charles W. Misner, Kip S. Thorne και John Archibald), ένα βιβλίο που έγινε γνωστό ως «**MTW**». Το MTW ήταν τόσο **περιεκτικό** και γλαφυρό στο **παιδαγωγικό του ύφος**, που παραμένει ακόμα και σήμερα πολύτιμο βοήθημα παρά τις μεταγενέστερες εξελίξεις.

Πηγές: umdphysics.umd.edu, en.wikipedia.org, amazon.com, telescoper.blog

Στη Χαϊδελβέργη οι πρωτοπόροι των Μαθηματικών και της Πληροφορικής



Στις **24 Σεπτεμβρίου 2023** ξεκίνησε η συνάντηση των νέων ερευνητών στο πεδίο των μαθηματικών και της πληροφορικής στο χώρο της γερμανικής πόλης, τη Χαϊδελβέργη.

Όπως κάθε χρόνο έτσι και φέτος, **200** συνολικά νεαροί επιστήμονες (100 από το πεδίο της Πληροφορική και 100 από των Μαθηματικών) από περισσότερες από 50 χώρες, οι οποίοι επιλέχθηκαν από ειδική επιτροπή του ιδρύματος που υποστηρίζει το HLF, **θα συναντήσουν 33 κατόχους** των παραπάνω βραβείων και για ένα πενθήμερο (24-29 Σεπτεμβρίου 2023), θα παρακολουθήσουν μοναδικές διαλέξεις και συζητήσεις και θα συμμετάσχουν, μέσω ποικίλων δραστηριοτήτων, ενεργά στον επιστημονικό διάλογο. Εκεί θα έχουν την ευκαιρία να γνωρίσουν από κοντά λαμπρούς μαθηματικούς και επιστήμονες υπολογιστών, αποδέκτες των Abel Prize, Fields Medal, IMU Abacus (γνωστό ως Rolf Nevanlinna Prize), ACM prize in computing και Turing, βραβείων αντίστοιχων του Nobel Μαθηματικών και Πληροφορικής. Η διοργάνωση του **ετήσιου αυτού forum** είναι το αποτέλεσμα μιας κοινής πρωτοβουλίας του Heidelberg Institute for Theoretical Studies, HITS και του Klaus Tschira Stiftung (KTS). Και τα δυο ιδρύματα ιδρύθηκαν με πρωτοβουλία του Γερμανού φυσικού **Klaus Tschira** (1940 - 2015), γνωστού και ως “τιτάνα του software”, δημιουργού της εταιρείας SAP, του μεγαλύτερου **παραγωγού λογισμικού** διαχείρισης επιχείρησης **παγκοσμίως**.

Η ιδέα αυτών των συναντήσεων συζητήθηκε αρχικά στα τέλη του 2011 από επιστήμονες και από εκπροσώπους του “Mathematisches Forschungszentrum Oberwolfach” και του “Schloss Dagstuhl – Leibniz Center for Informatics” και τον Μάιο του 2013 ιδρύθηκε επίσημα το Ίδρυμα Heidelberg Laureates Forum ως υποστηρικτής του αντίστοιχου ετήσιου θεσμού στη Χαϊδελβέργη.

Στις 18 Σεπτεμβρίου του **2013** ξεκίνησε η πρώτη συνάντηση **30 κορυφαίων** επιστημόνων **παλαιότερων γενεών** με νέους ερευνητές από όλο τον κόσμο. Σήμερα, το **HLF** υποστηρίζεται από ένα παγκόσμιο επιστημονικό δίκτυο ιδρυμάτων-εταίρων, το οποίο περιλαμβάνει ακαδημίες επιστημών, υπουργεία, πανεπιστημιακές σχολές και τμήματα, ερευνητικούς οργανισμούς, ιδρύματα, εταιρείες, διεθνείς οργανώσεις. Ο διαχρονικός στόχος του Heidelberg Laureates Forum (HLF), που φέτος συμπληρώνει 10 χρόνια, είναι η **δημιουργία**, μέσα σε μια χαλαρή ατμόσφαιρα, μιας ζωντανής πλατφόρμας επιστημονικής αλληλεπίδρασης, ενός **forum έμπνευσης** και ευκαιριών.

Η Τεχνητή Νοημοσύνη στο επίκεντρο του forum:

Οι συμμετέχοντες στο forum καλούνται φέτος να διερευνήσουν τις εφαρμογές και τις επιπτώσεις της Τεχνητής Νοημοσύνης στη ζωή των ανθρώπων, αφού οι εξελίξεις στο πεδίο, αλλά και οι κοινωνικές και ηθικές επιπτώσεις της, αποτελούν φέτος το “**Hot topic**” της συνάντησης που λαμβάνει χώρα στο Νέο Πανεπιστήμιο της πόλης. Στη φετινή διοργάνωση, περιλαμβάνονται ο κορυφαίος **Jack Dongarra** που άνοιξε τον δρόμο στους **υπερυπολογιστές**, η κρυπτογράφος της Microsoft Yael Tauman Kala, ο Αμερικανός επιστήμονας υπολογιστών Jeffrey Ullman, τα βιβλία του οποίου είναι για τους μεταγλωττιστές, τη θεωρία του υπολογισμού, τις δομές και τις βάσεις δεδομένων θεωρούνται πρότυπα στα πεδία τους, ο Αμερικανός μηχανικός και επιχειρηματίας **Robert “Bob” Melancton Metcalfe**, που με το Ethernet συνέβαλε στην ανάπτυξη του **διαδικτύου** τη δεκαετία του **1970**, και ο Έλληνας **Ιωσήφ Σηφάκης**, ένας εκ των κορυφαίων επιστημόνων παγκοσμίως στον τομέα της Πληροφορικής, που το 2007 τιμήθηκε με το “ACM Turing Award” για την εργασία του στον **έλεγχο μοντέλων**, μιας μεθόδου τυπικής επαλήθευσης πληροφοριακών συστημάτων, που φέτος θα έχει εισήγηση με θέμα “Testing System Intelligence”. Επίσης συμμετέχει ο Καθηγητής Πληροφορικής του ΕΚΠΑ **Γιάννης Ιωαννίδης**, ο οποίος είναι πρόεδρος-και ο πρώτος Έλληνας-της Association for Computing Machinery (ACM), της μεγαλύτερης ένωσης επιστημόνων κι επαγγελματιών πληροφορικής στον κόσμο και ο καθηγητής του Τμήματος πληροφορικής και διευθυντής του Εργαστηρίου βιοπληροφορικής και Ανθρώπινης ηλεκτροφυσιολογίας (Bihelab) του Ιονίου Πανεπιστημίου, **Παναγιώτης Βλάμος**. Η εβδομάδα θα περιλαμβάνει επίσης πολλές ειδικές εκδηλώσεις για τον εορτασμό της δέκατης επετείου του HLF.

Πηγές: Dnews, inews, Mantalk.gr, startupper.gr, HLF2022, HLF2023.

Διακρίσεις στον 30ο Μαθηματικό Φοιτητικό Διαγωνισμό IMC 2023 (International Mathematics Competition)

Σημαντικές οι **διακρίσεις** φοιτητών του τμήματος Μαθηματικών του **ΕΚΠΑ** και του **ΑΠΘ** στον διεθνή διαγωνισμό Μαθηματικών **IMC 2023**. Ο Φοιτητικός Διαγωνισμός IMC (International Mathematics Competition), πραγματοποιήθηκε στις 31 Ιουλίου έως 6 Αυγούστου 2023. Σε αυτόν συμμετείχαν 393 φοιτητές, με 72 ομάδες, από 43 χώρες. Οι επιδόσεις των φοιτητών των μαθηματικών τμημάτων, του **ΕΚΠΑ** και του **ΑΠΘ,** ήταν από τις κορυφαίες επιδόσεις τους, σε αυτόν τον διαγωνισμό.

Οι επιδόσεις των φοιτητών του Πανεπιστημίου Αθηνών **ΕΚΠΑ** ήταν οι εξής:

- Δημήτρης Εμμανουήλ: **χρυσό μετάλλιο**
- Γιώργος Γεωργελές: **χρυσό μετάλλιο**

Οι επιδόσεις των φοιτητών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης **ΑΠΘ** ήταν οι εξής:

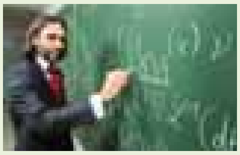
- Ιωάννης Ιακωβάκης: **Χρυσό μετάλλιο**
- Αλέξανδρος Καϊόπουλος: **Αργυρό μετάλλιο**
- Δημοσθένης Παυλίδης: **Χάλκινο μετάλλιο**
- Κωνσταντίνος Φωτιάδης: **Χάλκινο μετάλλιο**
- Ιωάννης Νάκος: **Χάλκινο μετάλλιο**
- Ιωάννης Δημουλιός: **Εύφημη μνεία**

Επίσης **Χάλκινο μετάλλιο** κατέκτησε ο Σουκαράς Γεώργιος Πανεπιστήμιο **Πάτρας**.

Ο IMC είναι ο μεγαλύτερος **παγκόσμιος μαθηματικός** διαγωνισμός για φοιτητές. Οργανώνεται από το **1994,** από το **University College London** και συμμετέχουν σε αυτόν κορυφαία Πανεπιστήμια των ΗΠΑ, της Ευρώπης και της Ασίας. Η χώρα μας συνεχίζει τις διακρίσεις **και** στους διεθνείς φοιτητικούς διαγωνισμούς, από μαθητές που **είχαν διακριθεί** και στο παρελθόν στους μαθητικούς διαγωνισμούς της **ΕΜΕ και** στις διεθνείς Ολυμπιάδες jBMO, BMO, IMO.

Το Festum π προάγει την ταυτότητα των νησιών του Αιγαίου

Όλα αυτά τα χρόνια έχει **χτιστεί** μια **γέφυρα** μεταξύ Ελλάδας και Γαλλίας. Αυτή τη φορά η αφορμή είναι το **Festum π**, η μεγάλη γιορτή των Μαθηματικών και της Μουσικής που έγινε 18-28 Αυγούστου 2023 στη **Σάμο**, μια εκπληκτική ιδέα που γεννήθηκε κατά τη διάρκεια του lockdown, την οποία συζήτησε ο Διονύσης Δερβής – Μπουρνιάς με τον μεγάλο μαθηματικό της Γαλλίας **Cédric Villani**. Φέτος δε, για δεύτερη φορά, φέρνει στη **Σάμο** για τα Μαθηματικά τη **Université Paris-Saclay***, την πρώτη μαθηματική σχολή στον κόσμο, και για τη μουσική το Conservatoire de Paris – μάλιστα θα δώσουν δωρεάν μαθήματα σε Έλληνες και Γάλλους φοιτητές.



Cédric Villani

Το Festum π είναι παιδί του lockdown, όταν όλοι είχαμε χρόνο να σκεφτούμε κάτι διαφορετικό. "Εμείς είχαμε **την τύχη** να ενδιαφερθεί για τους προβληματισμούς μας αυτούς, ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Μουσική, ο Cédric Villani, ο μεγάλος μαθηματικός της Γαλλίας, και να πάρει το καράβι μαζί μου σε αυτή την περιπέτεια. **Καράβι**, στην κυριολεξία. Έχουμε σκεφτεί αυτό το **project**, αποκλειστικά στα νησιά του Αιγαίου, στη Σάμο πέρυσι και φέτος, το πιθανότερο στη **Σύρο** από του **χρόνου**", λέει ο διοργανωτής και η ψυχή αυτής της προσπάθειας Διονύσης Δερβής – Μπουρνιάς. Μεταξύ αυτών και ο **Bertrand Maury**, από τους σημαντικότερους Γάλλους μαθηματικούς, ειδικευμένος στα **εφαρμοσμένα Μαθηματικά**. Ο **Bertrand** είναι και εξαιρετικός πιανίστας. Θα διδάξει Μαθηματικά και θα δώσει ένα ρεσιτάλ **Chopin-Rameau**. Επίσης ομιλίες θα γίνουν από τον **Franck Jedrzejewski**, μαθηματικό και μουσικολόγο, τον **Claude Abromont**, μεγάλη μορφή **Μουσικής Ανάλυσης** του **Conservatoire de Paris**.

Αφίσα του Festum π

Αυτό που θέλουμε να υπενθυμίσουμε, ο Cédric Villani και εγώ, είναι πως το Αιγαίο είναι **τόπος αδιάκοπης επιστημονικής έρευνας** των Ελλήνων από την Αρχαιότητα (Πυθαγόρας της Σάμου, Γέμινος της Ρόδου, Οινοπίδης της Χίου) **μέχρι τις μέρες μας**. Βάζουμε όλη την **ενέργειά** μας για τη δημιουργία ενός διεθνούς κέντρου **Πυθαγορείων σπουδών**, μουσικής και Μαθηματικών. Ενώ εξέφρασε θετικά λόγια για τον κοσμήτορα Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αθηνών, Γιάννη Εμμανουήλ που μας δίνει κουράγιο με τη διαπίστωση ότι άνθρωποι που έχουν φιλοδοξία για αυτόν τον τόπο και **ικανότητα** πραγματοποίησής της, υπάρχουν, ακόμα.

… «*Θεωρώ ότι το σχέδιο του μαέστρου Διονύση Δερβή-Μπουρνιά είναι πολύ ενδιαφέρον, καθώς με το πρόγραμμα αυτό αναδεικνύεται* ***η σχέση των Μαθηματικών*** *με τη μουσική. Η σχέση αυτή είναι γοητευτική,* ***δεν είναι ευρέως γνωστή*** *και αποτελεί ένα παρθένο* ***πεδίο έρευνας****. Η πρωτοβουλία του αυτή υποστηρίζεται από το Πανεπιστήμιο Paris-Saclay, ένα από τα κορυφαίο Ακαδημαϊκά Ιδρύματα διεθνώς. Πιστεύω ότι η πρωτοβουλία αυτή πρέπει να τύχει της δέουσας προσοχής και να στηριχθεί έμπρακτα και από τους αρμόδιους φορείς της πατρίδας μας*» … αναφέρει μεταξύ άλλων ο **Ιωάννης Εμμανουήλ**, Κοσμήτωρ **Θετικών Επιστημών Πανεπιστημίου Αθηνών** για αυτό το Φεστιβάλ.

* **Université Paris-Saclay:** Θεωρείται η πρώτη **μαθηματική σχολή** στον κόσμο και αυτό σε όλες τις διεθνείς κατατάξεις. Τα Princeton, MIT, Stanford καταλαμβάνουν τη 2η, 6η και 7η θέση αντίστοιχα στην κατάταξη της Σανγκάης. Φέτος, όπως και πέρυσι, θα έχουμε στη Σάμο καθηγητές από το Paris-Saclay για τα Μαθηματικά και από το Conservatoire de Paris για τη μουσική.

Πηγές: Athens voice, math.uoa.gr, CultureNow.gr

Τα Nobel του 2023

Πάντα έχουν, ενδιαφέρον, οι βραβεύσεις με τα **Nobel**. Η επικαιρότητα, η έρευνα, η ανακάλυψη, ο τρόπος πως διαμορφώνονται οι επιστήμες σε ένα απώτερο μέλλον, παίζουν το ρόλο τους. Όλα αυτά μαζί, με αθέατο ρυθμιστή, **τα Μαθηματικά**, επηρεάζουν πολλές φορές τις εξελίξεις, στο σύγχρονο κόσμο. Έτσι φέτος είχαμε:

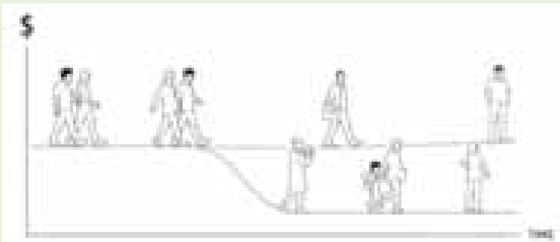
Ιατρική: Απονεμήθηκε στους **Katalin Kariko** και **Drew Weissman (ΗΠΑ)**, για τις ανακαλύψεις τους σχετικά με τις τροποποιήσεις των νουκλεοσιδικών βάσεων που επέτρεψαν την ανάπτυξη αποτελεσματικών **εμβολίων mRNA** κατά του COVID-19. Μέσω των πρωτοποριακών ευρημάτων τους, τα οποία άλλαξαν ριζικά την **κατανόηση** του τρόπου με τον οποίο **το mRNA αλληλεπιδρά** με το ανοσοποιητικό μας σύστημα. Συνέβαλαν στον πρωτοφανή ρυθμό ανάπτυξης εμβολίων κατά τη διάρκεια μιας από τις μεγαλύτερες απειλές για την ανθρώπινη υγεία στη σύγχρονη εποχή. Ανακάλυψαν ότι το τροποποιημένο mRNA μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εμποδίσει την **ενεργοποίηση** των **φλεγμονωδών** αντιδράσεων και να αυξήσει την παραγωγή πρωτεϊνών όταν το mRNA παραδίδεται στα κύτταρα.

Χημεία: Απονεμήθηκε στους **M. Bawendi, L. Brus** και **Al. Ekimov (ΗΠΑ)** για την ανακάλυψη και την ανάπτυξη των **κβαντικών τελειών**, νανοσωματιδίων τόσο μικροσκοπικών που το μέγεθός τους καθορίζει τις ιδιότητές τους. Τα σωματίδια αυτά έχουν μοναδικές ιδιότητες και τώρα **διαχέουν το φως** τους από τις οθόνες τηλεόρασης και τις λάμπες LED. Καταλύουν χημικές αντιδράσεις και το διαυγές φως τους μπορεί να φωτίσει μέχρι και τον καρκινικό ιστό για έναν χειρουργό. Σήμερα οι κβαντικές τελείες αποτελούν σημαντικό μέρος της εργαλειοθήκης της νανοτεχνολογίας για την εξερεύνηση του νανοκόσμου.

Φυσική: Απονεμήθηκε στους **Pierre Agostini** (ΗΠΑ), **Ferenc Krausz** (Γερμανία) και **Anne L'Huillier** (Σουηδία) για την ανάπτυξη πειραματικών μεθόδων που παράγουν παλμούς φωτός **διάρκειας**

attosecond, για την μελέτη της δυναμικής των ηλεκτρονίων στην ύλη. Υπενθυμίζεται ότι 1 attosecond$=1\times10^{-18}$ sec. Τα πειράματα με το φως αποτυπώνουν τις πιο σύντομες στιγμές, έναν τρόπο δημιουργίας εξαιρετικά **σύντομων παλμών** φωτός που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση των ταχέων διεργασιών στις οποίες τα ηλεκτρόνια κινούνται ή μεταβάλλεται η ενέργειά τους. Τα ταχέως **κινούμενα γεγονότα ρέουν** το ένα μετά το άλλο όταν **γίνονται αντιληπτά** από τον άνθρωπο, ακριβώς όπως μια ταινία που αποτελείται από ακίνητες εικόνες γίνεται αντιληπτή ως συνεχής κίνηση. Οι πειραματικές αυτές μέθοδοι βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στην **ηλεκτρονική** και στη **διαγνωστική** ιατρική.

Οικονομία: Απονεμήθηκε στην αμερικανίδα οικονομολόγο **Claudia Goldin** «επειδή προώθησε την **κατανόησή** μας για τα αποτελέσματα των γυναικών στην αγορά εργασίας». Οι γυναίκες **υποεκπροσωπούνται** σε μεγάλο βαθμό στην **παγκόσμια αγορά εργασίας** και, όταν εργάζονται, **κερδίζουν λιγότερα** από τους άνδρες. Συγκέντρωσε στοιχεία για περισσότερα από **200 χρόνια**, επιτρέποντάς της, να καταδείξει **πώς** και **γιατί** έχουν αλλάξει οι διαφορές μεταξύ των φύλων στις αποδοχές και τα ποσοστά απασχόλησης. Απέδειξε με την ερευνά της ότι η συμμετοχή των γυναικών στην αγορά εργασίας δεν έχει ανοδική τάση σε μια περίοδο 200 ετών, αλλά αντίθετα σχηματίζει καμπύλη **σχήματος U.** Η συμμετοχή των παντρεμένων γυναικών μειώθηκε με τη μετάβαση από την αγροτική στη βιομηχανική κοινωνία στις αρχές του 19ου αιώνα, αλλά στη συνέχεια άρχισε να αυξάνεται με την ανάπτυξη του τομέα των υπηρεσιών στις αρχές του 20ού αιώνα. Εξήγησε αυτό το μοτίβο ως αποτέλεσμα της **διαρθρωτικής αλλαγής** και των εξελισσόμενων **κοινωνικών προτύπων** όσον αφορά τις ευθύνες των γυναικών για το σπίτι και την οικογένεια.

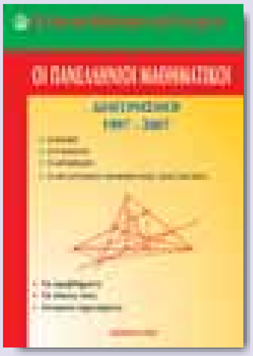


Λογοτεχνία: Απονεμήθηκε στον Νορβηγό συγγραφέα **Jon Fosse** για τα "καινοτόμα θεατρικά έργα και την πεζογραφία του που δίνουν φωνή στο ανείπωτο". Γράφει μυθιστορήματα σε ένα ύφος που έχει γίνει γνωστό ως «μινιμαλισμός του Fosse» και διακρίνεται από βαθειά ανθρωποκεντρικά χαρακτηριστικά.

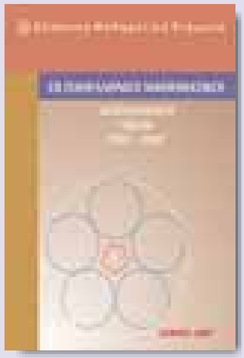
Ειρήνη: Απονεμήθηκε στην **Narges Mohammadi** (**ΙΡΑΝ**) για τον αγώνα της κατά της καταπίεσης των γυναικών **στο Ιράν** και τον αγώνα της για την προώθηση των ανθρωπίνων δικαιωμάτων και της ελευθερίας για όλους. Είναι μια γυναίκα με έντονη προσωπικότητα, υπέρμαχος της ελεύθερης και ασυμβίβαστης φωνής απέναντι στο άδικο. Μαχητική αγωνίστρια της ζωής, της ελευθερίας και της γυναικείας χειραφέτησης σε όλο τον κόσμο.

Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

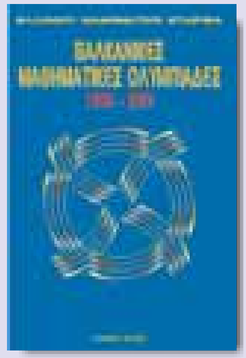
Ολυμπιάδες



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€



Τιμή βιβλίου: 25€

Προσφορές

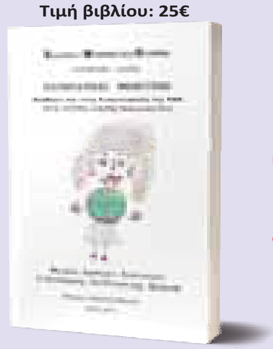
Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

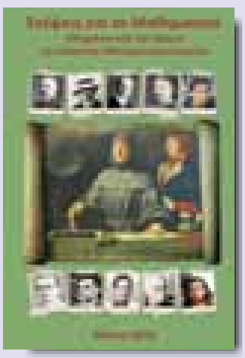
Τιμή βιβλίου: 18€



2η έκδοση

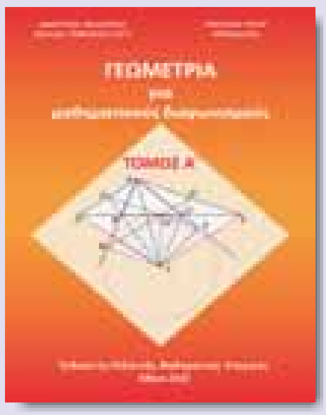
Τιμή βιβλίου: 18€

Βιβλία της ΕΜΕ

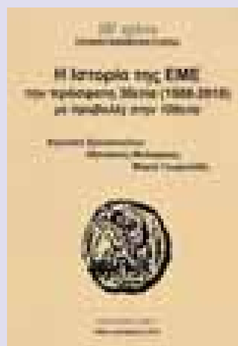


Τιμή βιβλίου: 15€

Νέο Βιβλίο



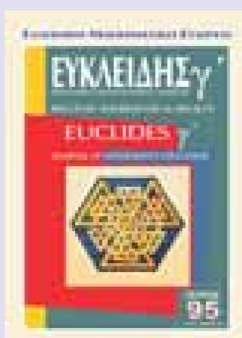
Τιμή βιβλίου: 25€



Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr