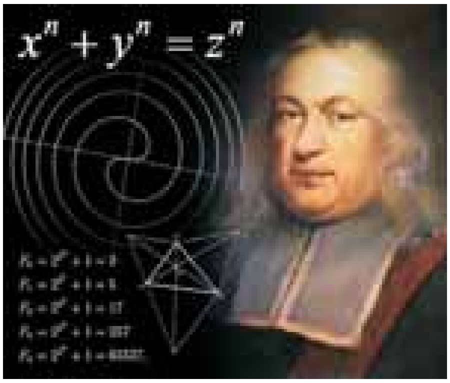
132

Μαθηματικό περιοδικό για το

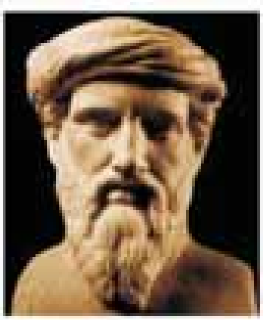
ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Ευκλείδης Α΄
Γυμνάσιο



ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2024 ευρώ 3,00

ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ
Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ.
Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.



Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
για το γυμνάσιο
Ευκλείδης α΄

Τεύχος 132
Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2024
Τιμή Τεύχους 3,00 Ευρω
e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Πανεπιστημίου 34
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Επιμέλεια Έκδοσης:
Μαραγκάκης Στυλιανός

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και μαθήτριες και συνάδελφοι,

Με το τελευταίο αυτό τεύχος της **φετινής σχολικής χρονιάς**, ολοκληρώνουμε έναν νέο κύκλο διαλόγου με τους μαθητές μας, τους εκπαιδευτικούς, αλλά και πολλούς φίλους. Ευχαριστούμε όλους **για τα καλά σας λόγια**, στην αλληλογραφία και τα μηνύματα που πήραμε, από όλη την Ελλάδα. Ευχαριστούμε όλους για τα άρθρα που μας στείλατε, είτε δημοσιεύτηκαν είτε όχι. Εκτός από τα άρθρα στα μαθηματικά των τάξεων, είχαμε και **πολλά γενικά θέματα** ιδιαίτερα για τον εορτασμό του **π**. Πολλά από τα άρθρα μας, δίνουν **αφορμή** στους λάτρεις των μαθηματικών, να ασχοληθούν με μαθηματικά προβλήματα και να μας **στέλνουν τις ιδέες** τους στο περιοδικό. Όμως η αγάπη μας στα Μαθηματικά, το πάθος μας για την **ανακάλυψη** και την **ερμηνεία** της φύσης, μέσα από τα Μαθηματικά, μπορεί να μας οδηγήσουν σε **υπερβολές**. Πιθανόν αυτό να έχει συμβεί και σε άρθρα που εμείς δημοσιεύσαμε στο περιοδικό. **Γράψτε** μας **και τολμήστε**, γιατί όπως έλεγε και ο Μένανδρος τον 4ο αιώνα π.Χ. : «Δεν κάνει λάθη, όποιος δεν τολμάει». Με **λανθασμένα βήματα** η ανθρωπότητα έκανε άλματα.

Σε λίγες μέρες για τους μαθητές μας αρχίζουν οι προαγωγικές εξετάσεις.
Η συντακτική επιτροπή, **εύχεται ολόψυχα καλή επιτυχία σε όλα τα παιδιά.**

ΚΑΛΕΣ ΔΙΑΚΟΠΕΣ, ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

Σας περιμένουμε όπως πάντα, με τις εργασίες σας τη νέα σχολική χρονιά.

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ. : 2054
ISSN: 1105 - 7998

Η έγκαιρη πληρωμή της συνδρομής Βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΙΔΙΟΚΤΗΣΙΑ της
ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Εκτύπωση:
printfair
Τηλ.: 2102469799 -2102401695
Υπεύθυνος Τυπογραφείου:
Α. Κρέτσης

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κτλ. πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ενδειξη «Για τον Ευκλείδη Α΄. Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών.**

Τιμή τεύχους: ευρώ 3,00

Ετήσια συνδρομή (10,00+2,00 Ταχυδρομικά=12,00 ευρώ)
Ετήσια συνδρομή για Σχολεία 10,00 ευρώ
Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:

1. **ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα** λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. **ALPHA**, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. **EUROBANK**, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα **γραφεία** της Ε.Μ.Ε

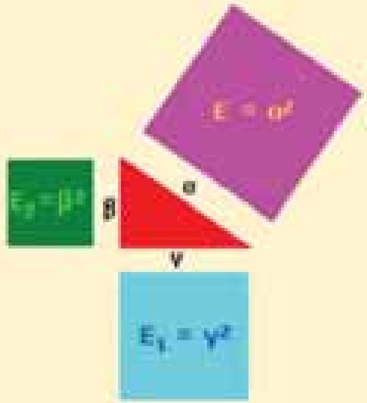
Ο Πυθαγόρας και το Θεώρημα Fermat

του Γιάννη Νικολόπουλου

Όλοι λίγο ή πολύ έχουμε ακούσει για τις Πυθαγόρειες Τριάδες, γιατί στο γυμνάσιο το πλέον σίγουρο που μάθαμε ήταν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, όπου οι αριθμοί 3,4,5 καθώς 6,8,10 το επαληθεύουν, εφόσον $5^2 = 4^2 + 3^2$ γιατί $25 = 16 + 9$. Επίσης $10^2 = 8^2 + 6^2$ γιατί $100 = 64 + 36$, όπως βέβαια και άλλες τριάδες.

Ποιος ήταν ο Πυθαγόρας;

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (580 π.Χ. έως 496 π.Χ.) ήταν σημαντικός Έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης και θεωρητικός της μουσικής. Παντρεύτηκε την επιστήμονα Θεανώ. Είναι ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών, δημιούργησε ένα άρτιο σύστημα για την επιστήμη των ουρανίων σωμάτων που κατοχύρωσε με όλες τις σχετικές αριθμητικές και γεωμετρικές αποδείξεις, επίσης ήταν ιδρυτής ενός φιλοσοφικού κινήματος του οποίου τα μέλη αποκαλούνταν Πυθαγόρειοι.



Σήμερα είναι αρκετά γνωστό το λογισμικό **Geogebra** που το όνομά του προκύπτει από τα αρχικά **Geometry & Algebra**, και αυτό το λογισμικό συνδέει την Άλγεβρα με την Γεωμετρία, μια αντίστοιχη σύνδεση έκανε ο Καρτέσιος όπου με τις συντεταγμένες του συνέδεσε τις δύο αυτές Μαθηματικές οντότητες, εξ ου και ονομάζονται Καρτεσιανές Συντεταγμένες στο χώρο ή στο επίπεδο.

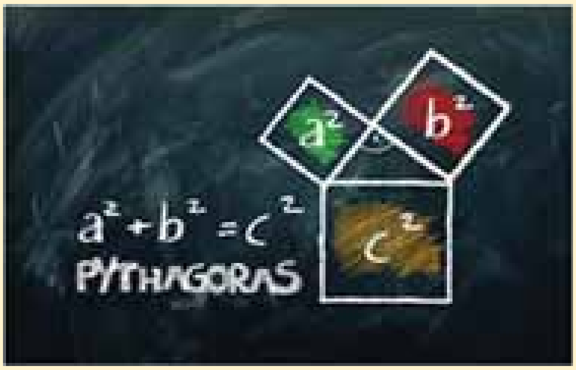
Μπορούμε να πούμε ότι ο Πυθαγόρας συνδύασε τους Αριθμούς με τα Ορθογώνια Τρίγωνα, δηλαδή τις Αριθμητικές Τριάδες που ονομάσθηκαν Πυθαγόρειες και με τον υπολογισμό των τετραγώνων αυτών των πλευρών, κατατάσσεται το τρίγωνο στα Ορθογώνια ή μη τρίγωνα.

Άρα ο Πυθαγόρας πριν 25 αιώνες, ο Καρτέσιος πριν 4 αιώνες και το σημερινό λογισμικό του **Geogebra**, συνδυάζουν την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία.

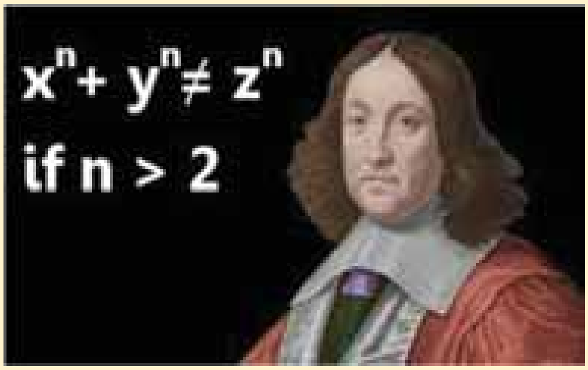
Ποιος ήταν ο Fermat;

Ο Πιερ ντε Φερμά (γαλλικά Pierre de Fermat) έζησε (1601 έως 1665), ήταν Γάλλος νομικός και ερασιτέχνης μαθηματικός με μεγάλη συμβολή στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Ειδικότερα είναι γνωστός για την ανακάλυψη μιας πρωτότυπης μεθόδου υπολογισμού των ελάχιστων και μέγιστων σημείων σε καμπύλες γραμμές. Επίσης είναι γνωστός και για τις έρευνές του στη θεωρία αριθμών, την αναλυτική γεωμετρία, τη θεωρία πιθανοτήτων. Κυρίως όμως είναι γνωστός για το τελευταίο «Θεώρημα του Φερμά», το οποίο το περιέγραψε σε μια μικρή σημείωση στο βιβλίο του «Αριθμητικά του Διόφαντου».

Αυτό το θεώρημα αναφέρει, ότι δεν υπάρχει τριάδα θετικών ακεραίων αριθμών: a,b,c, που να επαληθεύει τη σχέση: $a^v + b^v = c^v$, για $v \geq 3$ και για αιώνες απασχόλησε τους Μαθηματικούς. Γίνεται αντιληπτό, αν αυτή η σχέση δεν απορρίπτεται και ισχύει, τότε θα είχαμε 'γενίκευση' του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Ασχολήθηκαν στη Μαθηματική Κοινότητα, πολλοί και για πολλά χρόνια για να απαντήσουν σχετικά με αυτό το θεώρημα, δηλαδή αν ισχύει ή όχι, εν τέλει την οριστική απάντηση έδωσε ο Άγγλος Μαθηματικός Wiles Andrew το 1993, ωστόσο, η απάντηση, δηλαδή η ορθότητα του Wiles, επιβεβαιώθηκε από την Παγκόσμια Μαθηματική Κοινότητα το 1995.



Το Πυθαγόρειο και μια απόδειξη αυτού



Ο Fermat και η διατύπωση του θεωρήματος

Σχετικά με τις Πυθαγόρειες Τριάδες

Οι τριάδες αυτές ταξινομούνται και ονομάζονται ανεξάρτητες και εξαρτημένες. Για ποιο λόγο γίνεται αυτή η ταξινόμηση/διαχωρισμός, γιατί άλλες από αυτές είναι ‘αυτοδημιούργητες’ και άλλες προκύπτουν από κάποιες διαδικασίες, κάποιους αλγορίθμους. Ποιες ονομάζουμε ως Ανεξάρτητες τριάδες; Αυτές που οι τρείς ακέραιοι θετικοί αριθμοί, δεν έχουν κοινό ακέραιο θετικό διαιρέτη. Ενώ Εξαρτημένη Πυθαγόρεια τριάδα, θα ονομάζονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί που έχουν τουλάχιστον ένα κοινό θετικό ακέραιο διαιρέτη μεγαλύτερο της μονάδας.

Είναι σημαντικό να κάνουμε μια διερεύνηση των αριθμών που ταιριάζουν σε ανεξάρτητη τριάδα: Είναι λογικό οι τρεις αριθμοί να είναι άρτιοι; Σαφώς όχι γιατί από τον παραπάνω ορισμό τέθηκε το ζήτημα πως δεν πρέπει να έχουν και οι τρεις κοινό θετικό ακέραιο διαιρέτη, οπότε στο ερώτημά μας για τους τρεις άρτιους αυτοί έχουν τον αριθμό 2 κοινό διαιρέτη, είναι η περίπτωση σαν το παράδειγμά μας: 6,8,10. Και τρεις είναι άρτιοι και διαιρούνται με το 2.

Είναι λογικό τρεις περιττοί αριθμοί να αποτελούν Ανεξάρτητη Πυθαγόρεια τριάδα; Έστω X_1, X_2, X_3 περιττοί αριθμοί και τα τετράγωνά τους: X_1^2, X_2^2 και X_3^2 που όπως γνωρίζουμε ότι, τα τετράγωνα των περιττών είναι πάντα περιττοί αριθμοί, ωστόσο: $X_1^2 + X_2^2$ ως άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος, ενώ το X_3^2 είναι περιττός, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο εφόσον δεν είναι δυνατό ο περιττός X_3^2, να ισούται με το αποτέλεσμα του $X_1^2 + X_2^2$, που ισούται με άρτιο.

Επόμενο ερώτημα: Γίνεται δύο άρτιοι αριθμοί και ένα περιττός να αποτελούν Ανεξάρτητη τριάδα; Ας επιλέξουμε δύο περιπτώσεις, έστω X_1, X_2, X_3 οι αριθμοί με διάταξη από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, με τον X_3 περιττό, τότε το άθροισμα: $X_1^2 + X_2^2$ με βάση τα προηγούμενα είναι ένας άρτιος αριθμός και το X_3^2 περιττός άρα οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Μια άλλη εκδοχή να είναι ο X_3, άρτιος πάλι απορρίπτεται εφόσον το άθροισμα: $X_1^2 + X_2^2$ είναι περιττός, ως άθροισμα άρτιου και περιττού, ενώ το X_3^2 είναι άρτιος.

Ας ερευνήσουμε την εκδοχή να έχουμε τρεις αριθμούς που να ταιριάζουν με την κλασσική τριάδα που όλοι γνωρίζουμε: 3,4,5 δηλαδή δύο περιττούς και έναν άρτιο. Εν προκειμένω ο 4 που είναι ο άρτιος δεν είναι ο μεγαλύτερος εφόσον μεγαλύτερος είναι ο περιττός. Άρα περιττός, άρτιος, περιττός (με διάταξη από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο) μπορεί να είναι Τριάδα.

Αξίζει για την συνολική έρευνα, να δοκιμάσουμε με δύο περιττούς και τον μεγαλύτερο να είναι άρτιος, δηλαδή $X_1 = 2ω1$, $X_2 = 2κ–1$ και $X_3 = 2λ$ όπου κ, λ, ω θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε έχουμε: $X_1^2 + X_2^2 = X_3^2$ άρα $(2ω–1)^2 + (2κ–1)^2 = (2λ)^2$ και $(2ω)^2 – 4ω +1 + (2κ)^2 – 4κ+1 = (2λ)^2$. Οπότε: $4ω^2 – 4ω +1 + 4κ^2 – 4κ +1 =4λ^2$ άρα: $4ω^2 – 4ω+ 4κ^2 – 4κ +2 = 4λ^2$ αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον αριθμό 2 τότε θα έχουμε: $2ω^2 – 2ω+ 2κ^2 – 2κ +1 = 2λ^2$ δηλαδή πρώτο μέλος περιττός να ισούται με άρτιο. Άτοπο!

Μέθοδος για δημιουργία Τριάδων

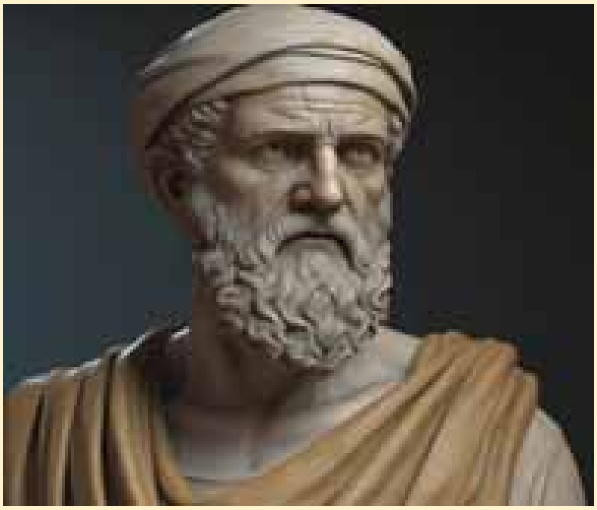
Ακολουθεί μια μέθοδος για να βρίσκουμε Πυθαγόρειες Τριάδες. Έναρξη από την κλασσική.

3	4	5
5	(3+4+5=12) άρα:12	(12+1=13) άρα:13
7	(7+5+12=24) άρα:24	(24+1= 25) άρα:25
9	(9+7+24=40) άρα: 40	(40+1=41) άρα: 41

Πώς λειτουργεί αυτή η μέθοδος; Καταρχάς κατεβάζουμε στην επόμενη σειρά, ως αρχικό τον επόμενο περιττό του 3 που είναι ο 5. Κατόπιν προσθέτουμε το σχηματιζόμενο Γ (5+3+4) για να εξάγουμε το μεσαίο αριθμό 12 και στη συνέχεια στο μεσαίο 12 προσθέτουμε το 1 ώστε να δημιουργηθεί ο τρίτος και περιττός 13. Μετά ως αρχικός επιλέγεται ο επόμενος περιττός του 5 που είναι ο 7. Έτσι δημιουργούμε, εκτός από την αρχική/κλασσική τριάδα, τις άλλες: 5,12,13 ή 7,24,25 και συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο. Υπάρχουν βέβαια και άλλες κινήσεις για τη δημιουργία Πυθαγορείων Ανεξάρτητων Τριάδων.

Η προσπάθεια μας να επιλέξουμε κατάλληλους αριθμούς, που να αποτελούν Πυθαγόρειες Τριάδες, ακολούθησε μια ερευνητική διαδικασία, δηλαδή μια επιλογή μεταξύ άρτιων και περιττών που ως μέθοδος σκέψης ερευνά όλες τις πιθανές περιπτώσεις, κατόπιν αναφέρθηκε και ο αλγόριθμος που παράγει τέτοιες τριάδες, χωρίς να είναι ο μοναδικός.

Η εν λόγω διδακτική ενότητα συγκαταλέγεται στη Θεωρία Αριθμών και όπως γνωρίζουμε η ΕΜΕ στους διαγωνισμούς: **Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης** θέτει θέματα από την συγκεκριμένη διδακτική ενότητα που μαζί με τη Γεωμετρία αναπτύσσουν την εγκεφαλική λειτουργία.



Πυθαγόρας ο Σάμιος

Τριάδες με το Πυθαγόρειο

Ο Μηχανισμός των Αντικυθήρων

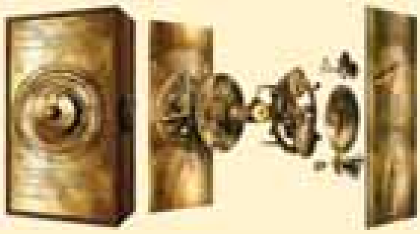
Χριστίνα Πούλιου

Επειδή η μάθηση είναι ανάμνηση και η επιστήμη αρχή ευδαιμονίας, επειδή το καλυμμένο για αιώνες, από την άμμο της θάλασσας, αποκαλύπτεται ….. , σας προσκαλούμε στο βυθό των Αντικυθήρων και στο σύμπαν του πρώτου σωζόμενου **αναλογικού υπολογιστή των Ελλήνων** και της ανθρωπότητας.

Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων γνωστός και ως **αστρολάβος** των **Αντικυθήρων** ή **υπολογιστής** των **Αντικυθήρων** είναι ένα **αρχαίο τέχνημα** που παρουσιάζει **ομοιότητες** με πολύπλοκο **ωρολογιακό μηχανισμό**, ήταν ένας **μηχανικός υπολογιστής** και **όργανο αστρονομικών παρατηρήσεων**.

Ο μηχανισμός των **Αντικυθήρων** ανακαλύφθηκε σε ναυάγιο αρκετά ανοιχτά του ελληνικού νησιού Αντικύθηρα. Επίσης με βάση τη μορφή των ελληνικών επιγραφών που **φέρει χρονολογείται μεταξύ** 150 **και του** 100 **π.Χ**, αρκετά πριν την **ημερομηνία του ναυαγίου**, το οποίο ενδέχεται να συνέβη **ανάμεσα στο** 87 **και** 63 **π.Χ**.

Ο **Μηχανισμός είναι η αρχαιότερη σωζόμενη διάταξη με γρανάζια**. Ήταν φτιαγμένος από **μπρούτζο** και περιβαλλόταν από **ένα ξύλινο πλαίσιο**.



Αφού ανακαλύφθηκε προβλημάτισε και συνάρπασε πολλούς ιστορικούς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Είναι από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις στην ιστορία και κρύβει στα γρανάζια του πολλά μυστικά .

Πριν από αρκετά χρόνια, πραγματοποιήθηκε μια θεατρική παράσταση υψηλής αισθητικής από το Γυμνάσιο Κρυονερίου, με θέμα τον μηχανισμό των Αντικυθήρων. Ο συγγραφέας του έργου, κος Γεράσιμος Παγανόπουλος, λάτρης του αρχαίου Ελληνικού πολιτισμού, έγραψε ένα ποίημα, αφιερωμένο στα γρανάζια, του οξειδωμένου αυτού αριστουργήματος , της αειφόρου τέχνης των Ελλήνων. Με μουσική εισαγωγή, απόσπασμα της **μελωδίας** του **Βαγγέλη Παπαθανασίου**

Θραύσματα μνήμης

Αυτοί που πρώτοι σμίλεψαν γρανάζια/
Αυτοί που πρώτοι φώτισαν αστερισμούς και μονοπάτια/
θραύσματα απέριττα/
μιας μνήμης μυστικής και ουράνιας, που ταξιδεύει στο κρυφό σύμπαν της Μεσογείου/
έρχονται και πάλι/
τις τροχιές των άστρων να μαντέψουν/
τις εκλείψεις του ήλιου και της σελήνης να απεικονίσουν με ακρίβεια στους μπρούτζινους οδοντωτούς τροχούς της μοίρας/
Εσείς που κραυγάζετε φωτεινές Ελληνικές λέξεις,
τις προκαθορισμένες εκείνες ώρες που το εξωκόσμιο φως των σφαιρών ξεγλιστρά σε τούτο το μικρό μα και συνάμα απέραντο σύμπα
αφουγκραστείτε τη μουσική των πλανητών που
αναδεύονται σε θόλους και μηχανισμούς ασταμάτητα εδώ
και δισεκατομμύρια χρόνια και
σε τούτη την ιεροπραξία των αριθμών ακολουθήστε μας !!!

Η αλγοριθμική ικανότητα στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Αλέξανδρος Βαρούχας, Σπύρος Φερεντίνος

Ο διαγωνισμός, στον οποίο συμμετέχουν πολλές χιλιάδες μαθητές και μαθήτριες, μετά από έξη έτη πολύ επιτυχημένης παρουσίας, καθιερώθηκε στη συνείδηση της ελληνικής κοινωνίας ως μια ιδιαίτερα σημαντική συμβολή στο έργο που επιτελούν οι σχολικές μονάδες, Δημόσιες και ιδιωτικές, στο πεδίο της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Η συμβολή του διαγωνισμού αναγνωρίσθηκε και από το Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων το οποίο παρείχε την έγκρισή του μέσω της Γενικής Γραμματείας Π/θμιας και Δ/θμιας Εκπαίδευσης. Τα θέματα του διαγωνισμού, είναι επικεντρωμένα στην Ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα και συνδέονται άμεσα με τα αναλυτικά προγράμματα, καθώς και τα βιβλία των Μαθηματικών. Μεταξύ άλλων στοχεύουν στην ανάδειξη των μαθηματικών ως εργαλείου αντιμετώπισης θεμάτων της καθημερινής ζωής. Επίσης περιέχουν 25 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και απαιτούν κυρίως Μαθηματικό συλλογισμό και όχι μόνο πράξεις ή απλή εφαρμογή τύπων. Τα θέματα είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας με στόχο τη δημιουργία θετικής στάσης, ακόμη και για τους μαθητές που θεωρούν ότι υστερούν σε επίδοση στα Μαθηματικά. Ταυτόχρονα υπάρχουν θέματα που προκαλούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε μαθητές με υψηλούς στόχους στα Μαθηματικά. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες (άριστα είναι το $4 \cdot 25 = 100$). Δεν υπάρχει αρνητική βαθμολόγηση για τις λάθος απαντήσεις ή για τη μη απάντηση.

Ο διαγωνισμός περιλαμβανει 6 ομάδες θεμάτων οι οποίες καλύπτουν σχεδόν το σύνολο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης (από Β΄ Δημοτικού έως Γ΄ Γυμνασίου). Η 1η ομάδα καλύπτει την τάξη Β΄ Δημοτικού, η 2η τις τάξεις Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού, η 3η τις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, η 4η την Α΄ Γυμνασίου, η 5η τη Β΄ Γυμνασίου και η 6η την Γ΄ Γυμνασίου.

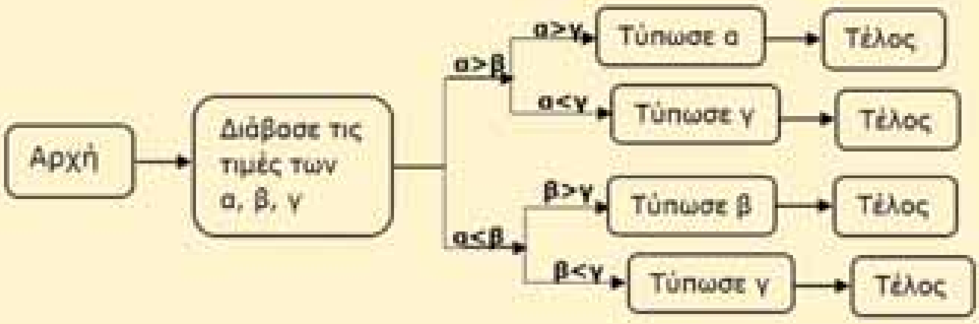
Στον διαγωνισμό αυτό εξετάζονται μια σειρά από μαθηματικές ικανότητες. Για μία από αυτές, την Αλγοριθμική ικανότητα, θα παρουσιάσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της, καθώς και μια σειρά από ασκήσεις που τέθηκαν ως θέματα στο διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ. **Αλγοριθμική ικανότητα** είναι η ικανότητα εκτέλεσης μιας πεπερασμένης σειράς ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων που στοχεύουν στην επίλυση ενός προβλήματος (είναι κύριο χαρακτηριστικό του σχεδιασμού των δράσεων στην Πληροφορική).

Ένας αλγόριθμος είναι ένα λεπτομερές βήμα-προς-βήμα σύνολο οδηγιών που στόχο έχει την επίλυση ενός προβλήματος για την ολοκλήρωση μιας εργασίας. Οι αλγόριθμοι είναι η κινητήριος δύναμη της τεχνολογίας, της φυσικής και των μαθηματικών, γιατί πάνω σε αυτούς είναι κτισμένα όλα τα λογισμικά που ξέρουμε και που κάνουν την ζωή μας πολύ πιο εύκολη

Συγκεκριμένα, η αλγοριθμική σκέψη ωθεί τους μαθητές να διαχωρίζουν ένα-ένα τα στάδια μιας διαδικασίας που μπορεί στο σύνολό της να φαντάζει χρονοβόρα. Με αυτόν τον διαχωρισμό οι μαθητές ξεκινούν να προχωρούν σταδιακά και σταθερά σε κάθε βήμα του ευρύτερου προβλήματος έτσι ώστε όταν φτάσουν στην τελική λύση, να γνωρίζουν πως προέκυψε η απάντηση και τι πρέπει να κάνουν για να ξαναλύσουν το ίδιο ή ένα δυσκολότερο πρόβλημα ((The Impossible Works Team, 1/7/17, ανακτήθηκε στις 11/4/2024 από https://avant-garde.com.cy/opinion-works/grammar-school-algorithms).

Ακολουθούν τρία παραδείγματα ερωτήσεων (ένα για κάθε τάξη) αλγοριθμικής ικανότητας που τέθηκαν σε διαγωνισμό ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

1) Το παρακάτω διάγραμμα περιέχει μία σειρά από εντολές που αναφέρονται σε τρεις διαφορετικούς αριθμούς α, β, γ.



Τι παριστάνει το συγκεκριμένο διάγραμμα;

Α) Ένα πρόγραμμα που βάζει σε μία σειρά 3 αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.
Β) Ένα πρόγραμμα που βρίσκει τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από 3 αριθμούς
Γ) Ένα πρόγραμμα που βρίσκει τον μικρότερο από 3 αριθμούς
Δ) Ένα πρόγραμμα που βρίσκει τον μεγαλύτερο από 3 αριθμούς
Ε) Ένα πρόγραμμα που βρίσκει τον μεγαλύτερο από οσουσδήποτε αριθμούς

Αναλυτική απάντηση

Παρατηρώ: Το πρόγραμμα συγκρίνει και κατατάσσει τους αριθμούς.
Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Θα εξετάσω κάθε κλάδο του αλγόριθμου ξεχωριστά. Παρατηρώ ότι αν α>β και α>γ τότε τυπώνει τον αριθμό α άρα τυπώνει τον μεγαλύτερο. Το ίδιο γίνεται σε κάθε κλάδο, δηλαδή εντοπίζει πάντα τον μεγαλύτερο.
Απάντηση: Δ)

2) Παρακάτω καταγράφονται τα βήματα με τα οποία ένας μαθητής έλυσε την εξίσωση $2\cdot(\chi+1)=\frac{x}{2}+14$ μόνο που δεν έβαλε τα βήματα αυτά στη σωστή σειρά.

α) $4\chi-\chi=28-4$
β) $\chi=8$
γ) $2\chi+2=\frac{x}{2}+14$
δ) $3\chi=24$
ε) $4\chi+4=\chi+28$
ζ) $\chi=\frac{24}{3}$

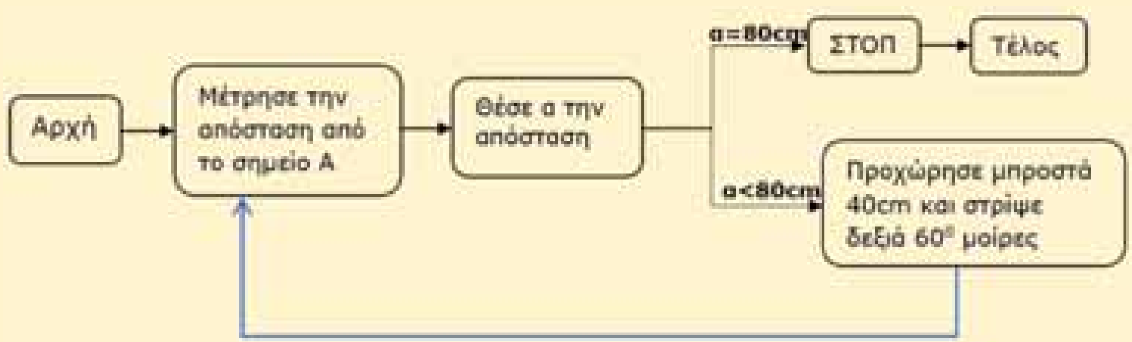
Ποια είναι η σωστή σειρά;

Α) γ) - α) - δ) - ε) - ζ) - β) Β) ε) - γ) - α) - δ) - ζ) - β)
Γ) γ) - ε) - α) - δ) - ζ) - β) Δ) γ) - ε) - α) - ζ) - δ) - β) Ε) κανένα από τα προηγούμενα

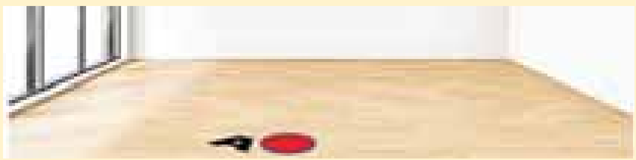
Αναλυτική απάντηση

Παρατηρώ: Είναι ανακατεμένα τα βήματα επίλυσης μιας εξίσωσης.
Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Μελετώ ένα προς ένα τα βήματα και προσπαθώ να τα βάλω σε μία σειρά με βάση τα βήματα:
Απαλοιφή παρενθέσεων → απαλοιφή παρονομαστών → χωρίζω γνωστούς από αγνώστους→ εκτέλεση των πράξεων μεταξύ αγνώστων και μεταξύ αριθμών → διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου.
Απάντηση: Γ)

3) Ένα μικρό ρομπότ έχει προγραμματιστεί με βάση το παρακάτω πρόγραμμα.



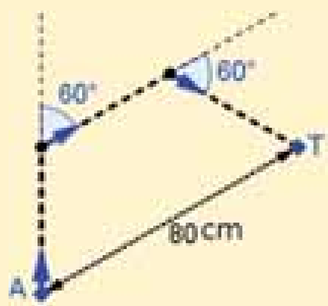
Τοποθετούμε το ρομπότ σε ένα σημείο Α στο πάτωμα και το ενεργοποιούμε.



Πόσα εκατοστά θα διανύσει μέχρι να σταματήσει;
Α) 40 Β) 80 Γ) 100 Δ) 120 Ε) 160

Αναλυτική απάντηση

Παρατηρώ: Οι εξωτερικές γωνίες του σχήματος που θα διανύσει το ρομπότ είναι 60^0.
Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Θα μελετήσω την διαδρομή του ρομπότ κατασκευάζοντας ένα κατάλληλο σχήμα.



Παρατηρώ ότι στην ουσία το ρομπότ διαγράφει ένα μέρος ενός κανονικού εξάγωνου καθώς οι εσωτερικές του γωνίες είναι 120^0 και οι πλευρές του είναι ίσες.
Η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Τ είναι 80cm επομένως εκεί θα σταματήσει το ρομπότ.
Απάντηση: Δ)

Μαθηματικός Λαβύρινθος

Επιμέλεια: Κοτσακιλάφη Ειρήνη

Χρησιμοποιήστε τις μαθηματικές σας γνώσεις για να περιηγηθείτε μέσα στον λαβύρινθο και να φτάσετε στην έξοδο.

$\frac{7}{15}-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{6}\right)=$

$\frac{87}{30}$

$5(x-4)+3(2x-7)=-20$

$x=-4$

Να βρείτε τον αριθμό γ που αν αυξήσουμε το διπλάσιό του κατά 6,δίνει τον αριθμό 10

$\frac{27}{10}$

$x=-5$

$\gamma=8$

$3(x-5)+7=2(x+7)-x-6$

$x=8$

$\frac{2x-1}{3}=\frac{x+2}{4}$

$\sqrt{80}-\sqrt{20}+\sqrt{45}=$

$3\sqrt{5}$

$x=5$

$x=2$

Η ευθεία $y=-5x$ διέρχεται από το σημείο:

$\beta=5$

Να βρείτε τον αριθμό β που αν ελαττώσουμε το διπλάσιό του κατά 5,δίνει τον αριθμό 9.

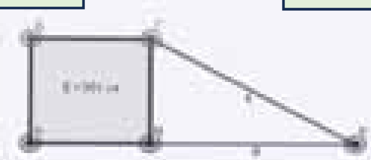
$\beta=7$

$\sqrt{5\sqrt{9}+\sqrt{100}+\sqrt{81}+2}=$

$A(0,-5)$

$\beta=-3$

6



Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με εμβαδό 36 τ.εκ. και το ΒΓΕ ορθογώνιο τρίγωνο. Το κ είναι:

5

Ποιος είναι ο αριθμός που συμπληρώνει την πυθαγόρεια τριάδα:

3,4,…..

0,8

$\kappa=10$

Το ημθ=

0,6

Η ευθεία $y=-\frac{x}{5}$ έχει κλίση:

$a=-\frac{1}{5}$

ΜΠΡΑΒΟ ΕΦΤΑΣΕΣ ΣΤΗΝ ΕΞΟΔΟ

Επαναληπτικά Θέματα

Θανάσης Χριστόπουλος

Άσκηση 1η

Να αναλύσετε τους αριθμούς 84 και 180 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συνέχεια να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών αυτών

Λύση

84	**2**
42	**2**
21	**3**
7	**7**
1	

180	**2**
90	**2**
45	**3**
15	**3**
5	**5**
1	

$84=2^2\cdot3\cdot7$ **$180=2^2\cdot3^2\cdot5$**

Οπότε ΜΚΔ$(84,180)=2^2\cdot3=12$

ΕΚΠ$(84,180)= 2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7=180\cdot7=1260$

Άσκηση 2η

ποιες από τους παρακάτω ισότητες προέρχονται από Ευκλείδειες διαιρέσεις; Για αυτές να αναφέρεται το διαιρετέο το διαιρέτη το πηλίκο και το υπόλοιπο. Όπου αυτό είναι δυνατό να αναφέρετε περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις.

i. **$28=3\cdot8+4$**
ii. **$17=3\cdot5+2$**
iii. **$33=4\cdot7+5$**
iv. **$18=3\cdot4+6$**

Λύση

i. **28:8** (Δ=28,δ=8,π=3 και υ=4<δ)
ii. **17:3** (Δ=17,δ=3,π=5 και υ=2<δ) και
17:5 (Δ=17,δ=5,π=3 και υ=2<δ)
iii. **33:7** (Δ=33,δ=7,π=4 και υ=5<δ)
iv. **Δεν προέρχεται από** Ευκλείδεια διαίρεση (αφού 6>3 και 6>4)

Άσκηση 3η

Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμών: α) (12,18) β) (6,7) γ) (40,140) δ) (200,240) ε) (1,8) στ) (220,284)

Λύση

α) ΕΚΠ(12,18)=36 , ΜΚΔ(12,18)=6

β) ΕΚΠ(6,7)=42 , ΜΚΔ(6,7)=1

γ) ΕΚΠ(40,140)= , ΜΚΔ(40,140)=

δ) ΕΚΠ(2000,2400)=36 , ΜΚΔ(200,240)=6

ε) ΕΚΠ(1,8)=8 , ΜΚΔ(1,8)=1

στ) ΕΚΠ(220,284)= , ΜΚΔ(220,284)=

Άσκηση 4η

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=(4^3-2^4)+(3^3-2^3)-(5^3-11^2)-2024^0+1^{24}$$

$$B=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(3-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}\right)-\left(\frac{1}{7}:3^2\right)$$

α) Να βρείτε τις τιμές των Α,Β

β) Να λύσετε την εξίσωση Χ:Β=Α

Λύση

α) $A=(64-16)+(27-8)-(125-121)-1+1$

$A=48+19-4$ Άρα $A=63$

$$B=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}:\left(3-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)-\left(\frac{1}{7}:9\right)$$

$$B=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}:\left(3-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{7}:9\right)$$

$$B=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}-\frac{1}{63} \quad ή \quad B=\frac{1}{9}-\frac{1}{63} \quad ή \quad B=\frac{6}{63}$$

και τελικά $B=\dfrac{2}{21}$

β) Χ:Β=Α είναι Χ=Α·Β οπότε $X = 63 \cdot \frac{2}{21}$

άρα Χ=6

Άσκηση 5η

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\kappa = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \cdot (-1)^0 (-3)^2$$

$$\lambda = \frac{(5^2 - 4^2) - (7^2 - 6^2 - 6)}{3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0}$$

Αποδείξετε ότι πάνω στην αριθμογραμμή το λ απέχει από το 1 περισσότερο από ότι το κ

Λύση

$$\kappa = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \cdot (-1)^0 (-3)^2$$

$\kappa = \frac{1}{10} : \frac{9}{12} \cdot 1 \cdot 9$ ή $\kappa = \frac{1}{10} \cdot \frac{12}{9} \cdot 9$ τελικά $\kappa = \frac{6}{5}$

$$\lambda = \frac{(5^2 - 4^2) - (7^2 - 6^2 - 6)}{3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0}$$

$\lambda = \frac{(25-16)-(49-36-6)}{27-9-3-1}$ ή $\lambda = \frac{9-7}{14}$ τελικά $\lambda = \frac{1}{7}$

Η απόσταση του λ από το 1 είναι: $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

Η απόσταση του κ από το 1 είναι: $\frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$

Εύκολα διαπιστώνουμε $\frac{6}{7} > \frac{1}{5}$ (30>7)

Άσκηση 6η

Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς:

0, 1, 2 είναι λύση της εξίσωσης:

$$(x-1)^{2020} + 2020^{x-2} + (x-1)^x = 3$$

Λύση

Για χ=0, έχουμε:

$(0-1)^{2020} + 2020^{0-2} + (0-1)^0 = 3$ άρα

$1 + 2020^{-2} + 1 = 3$ ή $2020^{-2} = 1$ ψευδής

Για χ=1, έχουμε:

$(0)^{2020} + 2020^{-1} + (0)^1 = 3$ άρα

$0 + 2020^{-1} + 0 = 3$ ή $2020^{-1} = 3$,ψευδής

Για χ=2, έχουμε :

$(1)^{2020} + 2020^0 + (1)^0 = 3$ άρα

1 +1 +1 = 3, αληθής, οπότε το 2 είναι λύση της εξίσωσης.

Άσκηση 7η

Δίνεται η παράσταση:

$$\kappa = 2^5 - 2^0[(2^3 - 2^2)^2 + (17 - 3 \cdot 2)] + 1$$

α) Να βρείτε την τιμή της του κ

β) να βρείτε τους φυσικούς που όταν διαιρούνται με το 4 (με Ευκλείδεια διαίρεση) δίνουν πηλίκο το κ

Λύση

α) $\kappa = 2^5 - 2^0[(2^3 - 2^2)^2 + (17 - 3 \cdot 2)] + 1$

$\kappa = 32 - 1[(8-4)^2 + (17-6)] + 1$

ή $\kappa = 32 - [(16+11] + 1$ ή $\kappa = 32 - 27 + 1$

άρα κ=6

β) από τη διαίρεση χ:4 προκύπτει πηλίκο κ και άγνωστο υπόλοιπο δηλαδή χ=4κ+υ , αλλά κ=6 και αφού ο διαιρέτης είναι 4 το υπόλοιπο πρέπει να είναι μικρότερο επομένως το υπόλοιπο θα είναι 0ή 1 ή 2 ή 3 τελικά θα έχουμε χ=4·6+υ από αυτό προκύπτουν οι αριθμοί 24,25.26 και 27.

Άσκηση 8η

Η Μαρία αγόρασε 200 καραμέλες για να τις προσφέρει στους συμμαθητές της για τα γενέθλιά της. Αφού χάρισε λιγότερες από τις μισές στον αδελφό της, γέμισε με τις

υπόλοιπες 16 ομοιόμορφα σακουλάκια αλλά άλλαξε γνώμη και στη συνέχεια γέμισε με αυτές τις καραμέλες 20 σακουλάκια για να τα προσφέρει για δώρο (δεν περίσσεψε καμία καραμέλα και στις δύο περιπτώσεις) . Αν όλα τα σακουλάκια είχαν ίδιο αριθμό από καραμέλες, να βρείτε πόσες καραμέλες χάρισε στον αδελφό της.

Λύση

Ο αριθμός από καραμέλες που έβαλε η Μαρία στα σακουλάκια είναι κοινό πολλαπλάσιο του 16 και του 20. Είναι ΕΚΠ(16,20)=80, επομένως αυτός θα είναι 80 ή 160, οπότε στον αδελφό της χάρισε 200-80=120 μη δεκτή λύση αφού ξεπερνάει τις μισές, ή 200-160=40 που είναι σύμφωνη με τα δεδομένα του προβλήματος και άρα δεκτή.

Άσκηση 9η

Ένας κήπος σε σχήμα τετραγώνου, έχει εμβαδόν 400 τετραγωνικά μέτρα. Θέλουμε να τον περιφράξουμε με το κόστος της περίφραξης να είναι 12,50 ευρώ για κάθε μέτρο, στη συνέχεια πληρώσαμε 1.60 ευρώ για κάθε τετραγωνικό μέτρο, προκειμένου να τον σκαλίσουμε και να προσθέσουμε λίπασμα. Ποιο είναι το συνολικό κόστος για όλες τις εργασίες του κήπου;

Λύση

Αν α είναι η κάθε πλευρά του τετραγώνου, έχουμε $α^2=400m^2$ άρα α=20m. Η περίμετρος είναι Π=4·α ή Π=80m και το κόστος της περίφραξης είναι: 80·12,50=1000€

Το κόστος για σκάλισμα και λίπασμα είναι: 400·1,60=640€

Το συνολικό κόστος είναι 1000+640=1640€

Άσκηση 10η

Σε τρία προϊόντα Α,Β,Γ είχαμε αύξηση της τιμής τους ως εξής: το προϊόν Α από 50€ πήγε 60€ , το προϊόν Β από 0,80€ σε 1€ και το προϊόν Γ από 40€ σε 45€ .

α) Ποιο προϊόν είχε το μεγαλύτερο ποσοστό αύξησης επί τοις εκατό;

β) Αν στη συνέχεια μειώσουμε την τιμή του Α κατά 20% θα επανέλθει στην αρχική του τιμή;

Λύση

α) Για το προϊόν Α

Αύξηση = 60-50=10€

Άρα το ποσοστό (επί τοις εκατό) της αύξησης προς την αρχική τιμή θα είναι

$$\frac{10}{50}100\% = 0,2\cdot 100\% = 20\%$$

Για το προϊόν Β

Αύξηση = 1-0,80=0,20€

Άρα το ποσοστό (επί τοις εκατό) της αύξησης προς την αρχική τιμή θα είναι

$$\frac{0,20}{0,80}100\% = \frac{1}{4}100\% = 0,25\cdot 100\% = 25\%$$

Για το προϊόν Γ

Αύξηση = 45-40=5€

Άρα το ποσοστό (επί τοις εκατό) της αύξησης προς την αρχική τιμή θα είναι

$$\frac{5}{40}100\% = 0,125\cdot 100\% = 12,5\%$$

β) η τιμή του Α έχει γίνει 60€ με μείωση 20% γίνεται: $60-\frac{20}{100}60 = 60-12 = 48$ €

Παρατηρούμε ότι η τιμή δεν είναι ίση με την αρχική όπως ίσως λανθασμένα περιμέναμε.

Άσκηση 11η

Ο κυρ Γιάννης έχει κατάστημα ρούχων. Αγοράζει λοιπόν ρούχα και προσθέτει 30% της τιμής αγοράς επιπλέον και έτσι βγάζει την τιμή πώλησης. Μετά από λίγες μέρες ένας φίλος του θέλει να αγοράσει ένα μπουφάν. Ο κυρ Γιάννης του έκανε έκπτωση 30% .

Τι συνέβη τελικά, ο κυρ-Γιάννης εισέπραξε λιγότερα χρήματα ή περισσότερα ή τα ίδια, από την τιμή αγοράς;

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι είχε αγοράσει το μπουφάν 100€ τότε ο κυρ-Γιάννης το πουλάει

$100+\frac{30}{100}100=130$ €

Όταν ήρθε ο φίλος του να το αγοράσει, τότε υπολόγισε 30% έκπτωση, στην τιμή πώλησης που είναι 130€

Οπότε $130-\frac{30}{100}130=130-39=91$€

Επομένως εισέπραξε λιγότερα από αυτά που πλήρωσε για την αγορά του.

Άσκηση 12η

Στην Α΄ τάξη ενός γυμνασίου τα τρία έβδομα των μαθητών είναι αγόρια. Μια μέρα που απουσίαζαν 14 κορίτσια σε σχολικούς αγώνες, τα αγόρια ήταν όσα και τα κορίτσια.

α) πόσα παιδιά έχει η Α΄ τάξη

β) τι ποσοστό του συνόλου των μαθητριών της Α΄ τάξης ήταν τα κορίτσια που απουσίαζαν από το σχολείο.

Λύση

α) Αν x είναι όλοι οι μαθητές της Α΄ τάξης, τότε τα αγόρια είναι: $\frac{3}{7}x$ οπότε τα κορίτσια είναι: $\frac{4}{7}x$ (αφού $1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$)

Μια μέρα που απουσίαζαν 14 κορίτσια σε σχολικούς αγώνες, τα αγόρια ήταν όσα και τα κορίτσια. Δηλαδή $\frac{4}{7}x-14=\frac{3}{7}x$ ή

$\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}x=14$ άρα $\frac{1}{7}x=14$, οπότε $x=14\cdot 7$

ή $x=98$ παιδιά έχει η Α΄τάξη.

β) τα κορίτσια είναι $\frac{4}{7}\cdot 98=56$

οπότε το ποσοστό των μαθητριών που απουσίαζε είναι:

$$\frac{14}{56}100\%=0,25\cdot 100\%=25\%$$

Άσκηση 13η

Για τα μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, ισχύουν τα εξής: η $\hat{A}$ είναι 10^0 μικρότερη από το διπλάσιο της $\hat{\Gamma}$ και η $\hat{B}$ είναι 30^0 μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$

α) να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ

β) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, να βρείτε τη γωνία $B\hat{\Delta}A$

Λύση

α) Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ συγκρίνονται με τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Επομένως αν θέσουμε χ τη γωνία $\hat{\Gamma}$, τότε $\hat{A}=2\chi-10^0$ και $\hat{B}=\chi+30^0$.

Γνωρίζουμε ότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0$

άρα $(2\chi-10^0)+(\chi+30^0)+\chi=180^0$ ή

$4\chi+20^0=180^0$

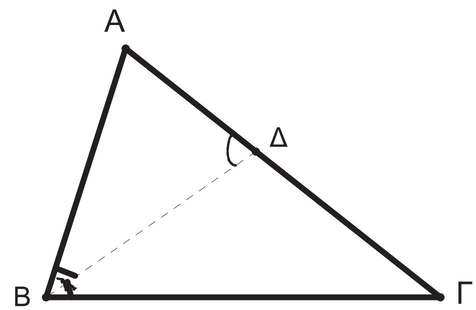
οπότε $4\chi=180^0-20^0$ ή $4\chi=160^0$ άρα $\chi=160^0:4$ και τελικά $\chi=40^0$ ή $\hat{\Gamma}=40^0$ από αυτό προκύπτει:

$\hat{A}=2\cdot 40^0-10^0=70^0$ και $\hat{B}=40^0+30^0=70^0$

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ γνωρίζουμε ότι $\hat{A}=70^0$ και $A\hat{B}\Delta=\frac{\hat{B}}{2}$ αφού ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$, άρα

$A\hat{B}\Delta=35^0$ οπότε $B\hat{\Delta}A=180^0-(70^0+35^0)$ ή

$B\hat{\Delta}A=75^0$

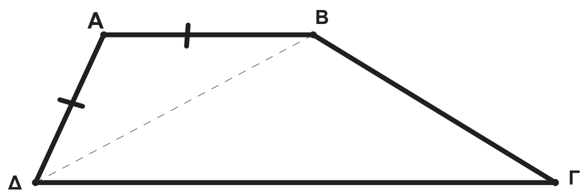


Άσκηση 14η

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) ισχύει ότι ΑΒ = ΑΔ και ΒΔ = ΒΓ

α) να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$

β) Αν γνωρίζουμε ότι $\hat{A}=100^0$, να βρείτε τις γωνίες του τραπεζίου



Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές (δίνεται ΑΒ=ΑΔ) άρα οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, $A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta$. Επίσης ΑΒ//ΔΓ η ΔΒ τις τέμνει, επομένως οι γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εντός εναλλάξ, οπότε είναι ίσες, $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ οπότε από τις δύο αυτές ισότητες και τη μεταβατική ιδιότητα προκύπτει $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma$ αυτό σημαίνει ότι η ΔΒ είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$

β) Στο τρίγωνο ΑΔΒ δίνεται ότι $\hat{A}=100^0$ οπότε $A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = 40^0$ οπότε και $B\hat{\Delta}\Gamma = 40^0$ Επίσης το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές (ΒΔ=ΒΓ) επομένως θα είναι $\hat{\Gamma} = B\hat{\Delta}\Gamma = 40^0$ Οπότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^0 - (40^0+40^0) = 100^0$ Τελικά $\hat{A}=100^0$, $\hat{B}=100^0$, $\hat{\Gamma}=40^0$, $\hat{\Delta}=80^0$

Άσκηση 15η

Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με πλευρές α και β, αν αυξήσουμε την πλευρά α κατά 5 cm το εμβαδόν αυξάνεται κατά 60 cm^2, αν αυξήσουμε την πλευρά β κατά 5 cm το εμβαδόν αυξάνεται κατά 80 cm^2.

α) Να βρείτε τα α,β και το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου

β) Αυξήσαμε την πρώτη φορά, μόνο την πλευρά α κατά κ cm και τη δεύτερη φορά, μόνο την πλευρά β κατά λcm και το εμβαδόν αυξήθηκε και τις δύο φορές το ίδιο, να βρεθεί ο λόγος του κ προς λ.

Λύση

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι Ε=α·β
Αν αυξήσουμε το α κατά 5cm, θα έχουμε $E_1=(\alpha+5)\beta$ ή $E_1=\alpha\beta+5\beta$ δηλαδή αυξημένο κατά 5β που από τα δεδομένα είναι 60cm^2 άρα 5β=60 οπότε β=12cm.
Αν αυξήσουμε την β κατά 5cm, θα έχουμε $E_2=(\beta+5)\alpha$ ή $E_2=\alpha\beta+5\alpha$ δηλαδή αυξημένο κατά 5α που από τα δεδομένα είναι 80cm^2 άρα 5α=80 οπότε α=16cm.
Άρα το αρχικό εμβαδόν είναι: Ε=16cm·12cm=192**cm^2**

β) την πρώτη φορά
$E_3=(\alpha+\kappa)\beta=(16+\kappa)12=192+12\kappa$, αύξηση 12κ
τη δεύτερη φορά
$E_4=(\beta+\lambda)\alpha=(12+\lambda)16=192+16\lambda$, αύξηση 16λ
«το εμβαδόν αυξήθηκε και τις δύο φορές το ίδιο» επομένως 12κ=16λ διαιρούμε και τα δύο μέλη με 12λ οπότε: $\frac{12\kappa}{12\lambda}=\frac{16\lambda}{12\lambda}$ ή $\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{4}{3}$

Ασκήσεις για λύση

Άσκηση 1η

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ είναι ύψος και το ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Αν $\hat{B}=70^0$, $\hat{\Gamma}=30^0$ και ΔΕ//ΑΒ Να βρεθούν οι γωνίες $K\hat{A}\Delta$ και $A\hat{E}\Delta$

Άσκηση 2η

στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓΔ η ΑΚ είναι ύψος και η ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β να βρεθούν οι γωνίες: $A\hat{K}\Delta$, $A\hat{E}B$, $A\hat{B}K$, $K\hat{B}\Gamma$

Άσκηση 3η

Αν α=7_5_
Να συμπληρώσετε τα κενά με κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός α που προκύπτει να διαιρείται με το 2 το 5 και το 9 ταυτόχρονα. Στη συνέχεια να αναλύσετε τον αριθμό αυτό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Άσκηση 4η

ποιος είναι ο διψήφιος αριθμός που όταν διαιρείται με το 12 είτε με το 15 δίνει υπόλοιπο 2 ;

Θέματα για Επανάληψη

Χρίστος Κουστέρης

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$,η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $4y - 3x = 12$ και διέρχεται από το σημείο $M(-4,-3)$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{3}{4}$ και $\beta = 6$

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων και στην συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ

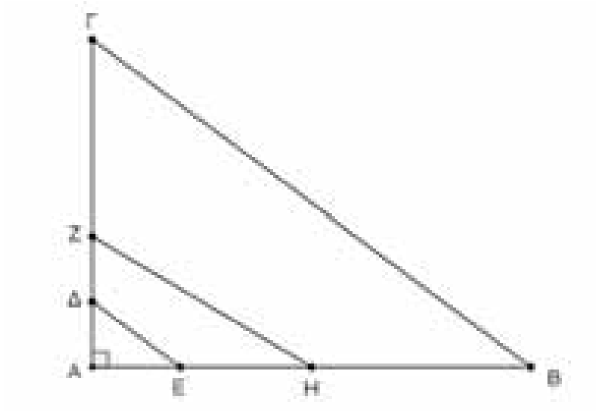
(δ) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $O\hat{A}B$

(ε) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α,Β και Ο .

Θέμα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ και ισχύουν τα παρακάτω

- $A\Gamma = 15cm$
- $AB = 20cm$
- το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΗ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΗ.
- $\Delta E = \frac{1}{5} \cdot B\Gamma$
- Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΑΖ.
- $AE = 3cm$.



(α) Να υπολογίσετε

(i) το μήκος της πλευράς ΒΓ

(ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(iii)το μήκος του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ .

(β) Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΖΗ

(γ) Κατασκευάζουμε τρείς κύκλους με διαμέτρους ΔΕ,ΖΗ και ΒΓ αντίστοιχα .

Αν L_1, L_2, L_3 τα μήκη των αντίστοιχων κύκλων να αποδείξετε ότι $L_3 - L_1 = 2L_2$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $\frac{\alpha-1}{6}-\frac{\alpha-1}{2}=\frac{2\alpha+1}{3}-2$ και οι παραστάσεις

$$\beta=\sqrt{25}-\sqrt{3\sqrt{9}}+\left(\sqrt{3}-12\right)^0-2\sqrt{\sqrt{100}-\sqrt{81}} \quad \text{και} \quad \gamma=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$$

(α) Να βρείτε την τιμή του α που είναι η λύση της εξίσωσης.

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων β και γ

(γ) Για τις τιμές των α,β και γ που βρήκατε στα ερωτήματα **(α)** και **(β)**

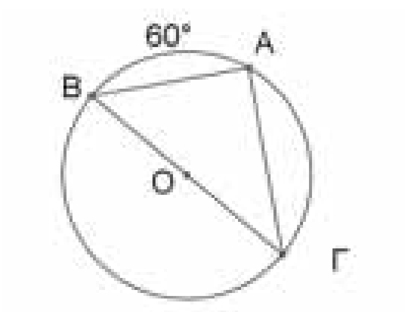
(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α,β και γ είναι ορθογώνιο

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ

(iii) Εξωτερικά του ορθογωνίου κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο μήκους α, ένα τετράγωνο μήκους β και έναν ρόμβο μήκους γ. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριών σχημάτων.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα το τόξο ΑΒ είναι 60° και ο κύκλος έχει κέντρο Ο και ακτίνα ίση με ρ.



(α) Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο.

(γ) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΓ συναρτήσει του ρ.

(δ) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ όπου $\alpha=\sqrt{25-16}+\sqrt{25-9}-\sqrt{(-6)^2}$ και $\beta=2\sqrt{\sqrt{16}}-\sqrt{6\sqrt{36\sqrt{(-1)^{2024}}}}$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-2$

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(γ) Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(1,5)$,στην συνέχεια να βρείτε τα σημεία τομής Γ και Δ της ευθείας (ζ) με τους άξονες

$x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(δ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες (ε) και (ζ) ην ευθεία και στην συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρού ΑΒΓΔ

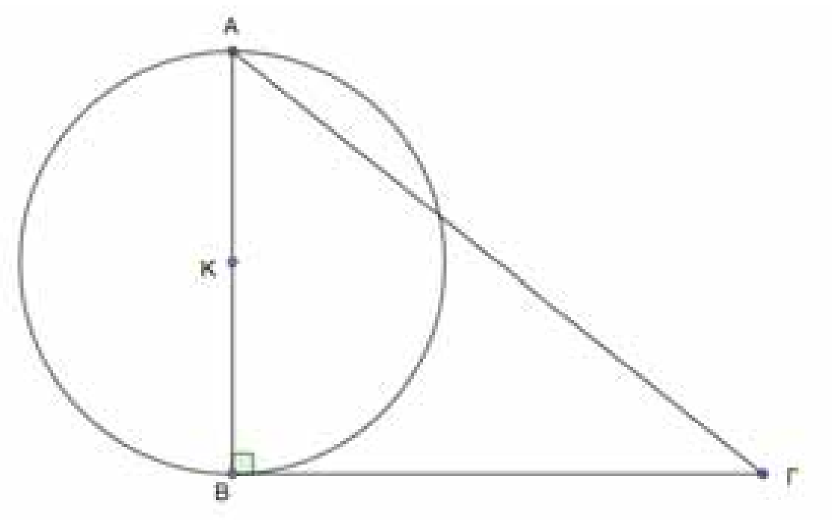
ΘΕΜΑ 6

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho = \frac{5}{2}\text{cm}$ και η $\text{ΒΓ} = 12\text{cm}$

(α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.



ΘΕΜΑ 7

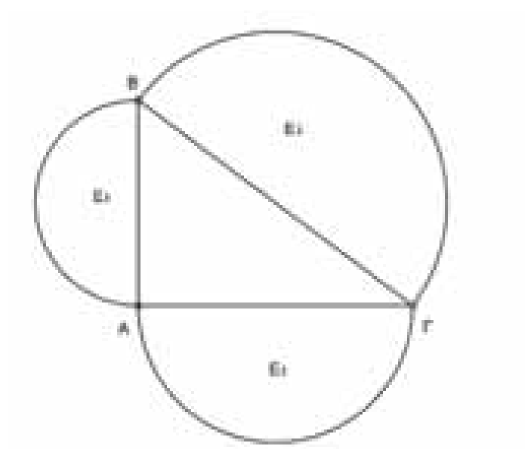
(α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-1}{3} + x = 1 + \frac{2x+4}{6}$

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\text{ΑΒ} = (8-x)\text{cm}$, $\text{ΑΓ} = (3x+2)\text{cm}$ και $\text{ΒΓ} = 10\text{cm}$ όπου x η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος **(α)** είναι ορθογώνιο .

(γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι : $\eta\mu^2\Gamma + \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1$

(δ) Με διαμέτρους ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ διαγράφουμε τρία ημικύκλια , να αποδείξετε ότι

$(E_1)^2 = (E_2)^2 + (E_3)^2$, όπου E_1, E_2, E_3 τα εμβαδά των τριών ημικυκλίων.



Α΄ Τάξη

Επαναληπτικά Θέματα

Στυλιανός Μαραγκάκης Ανδρέας Τριανταφύλλου

ΘΕΜΑ 1ο

Αν ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης α + 5 = 4x με άγνωστο το x, να βρείτε την τιμή του α.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $\alpha = 2\cdot 3^2 + 2\cdot(3^3 - 5^2) - (4^2 - 3\cdot 5)^{2023}$ και

$$\beta = 4^2 : 2 + (13+7) : 4 - 8$$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 33$

Β. Να αποδείξετε ότι $\beta = 5$

Γ. Ποιος αριθμός από τους αριθμούς α και β είναι πρώτος και ποιος σύνθετος;

ΘΕΜΑ 3ο

Να εκτελέσετε τις πράξεις

Α, $\frac{5}{6}+\frac{7}{6}$ **Β.** $\frac{6}{7}+\frac{3}{4}$ **Γ.** $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **Δ.** $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{6}{4}-1\right)$

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\frac{x}{15}=\frac{60}{45}$ **ii)** $\frac{\frac{4}{x}}{\frac{24}{72}}=1$ **iii)** $\frac{5}{8}x=\frac{5}{2}$

ΘΕΜΑ 5ο

Να λυθεί η εξίσωση $x+\frac{1}{2}=\frac{33}{10}+\frac{1}{5}$

ΘΕΜΑ 6ο

Να βρεθεί για ποιες τιμές του ν, όπου ν φυσικός αριθμός, δεν έχει νόημα το κλάσμα $\frac{1}{4\nu-12}$

ΘΕΜΑ 7ο

Να βρείτε ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο άθροισμα των κλασμάτων $\frac{1}{9}$ και $\frac{2}{7}$, ώστε να προκύψει η μονάδα

ΘΕΜΑ 8ο

Το άθροισμα δύο διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 34.

Α) Να γράψετε την εξίσωση που ικανοποιεί το πρόβλημα.

Β) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς

ΘΕΜΑ 9ο

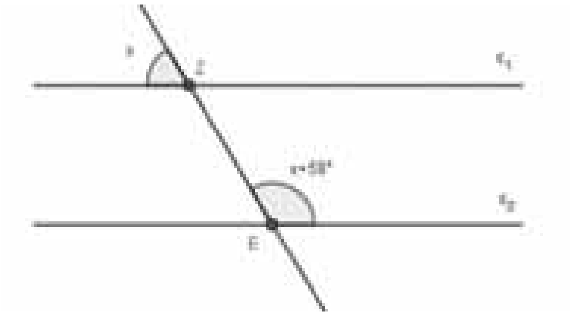
Το άθροισμα δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι 34.

Α) Να γράψετε την εξίσωση που ικανοποιεί το πρόβλημα.

Β) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς

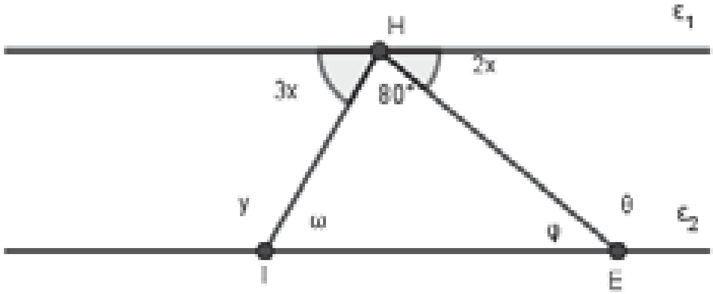
ΘΕΜΑ 10ο

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του σχήματος.



ΘΕΜΑ 11ο

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{y}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\theta}$.



ΘΕΜΑ 12ο

Ένα τραπέζι και 4 καρέκλες κοστίζουν 1.050€. Αν το τραπέζι κοστίζει όσο 3 καρέκλες, ν βρεθούν τα χρήματα που θα πληρώσει κάποιος αν αγοράσει το τραπέζι και 8 καρέκλες.

ΘΕΜΑ 13ο

Ανοίγουμε στην τύχη ένα βιβλίο και το άθροισμα των αριθμών των δύο αντικριστών σελίδων είναι 469. Να βρεθεί σε ποιες σελίδες ανοίξαμε το βιβλίο.

ΘΕΜΑ 14ο

Να βρεθεί ο αριθμός που πρέπει να αφαιρεθεί από τη διαφορά των αριθμών 5 και $2\frac{2}{3}$, για να προκύψει $\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 15ο

Ένας μαθητής απάντησε σε 50 ερωτήματα και πήρε 2 μονάδες για κάθε σωστή απάντηση, ενώ έχασε 1 μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Τελικά ο μαθητής πήρε συνολικά 79 μονάδες . Να βρεθεί σε πόσα ερωτήματα απάντησε σωστά.

ΘΕΜΑ 16ο

Σε ένα μαθητικό αγώνα μπάσκετ και οι δύο ομάδες έβαλαν ίσα τρίποντα. Αν τα τρίποντα της πρώτης ομάδας και τα μισά της δεύτερης είναι 16, να βρείτε πόσα τρίποντα έβαλαν συνολικά και οι 2 ομάδες, σε αυτό τον αγώνα.

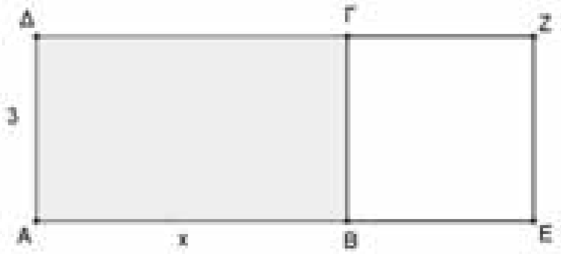
ΘΕΜΑ 17ο

Το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμού 7.064 με τον φυσικό αριθμό α είναι 261 και το υπόλοιπο είναι 17. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 9.

ΘΕΜΑ 18ο

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και το ΒΓΕΖ τετράγωνο. Με τη βοήθεια της μεταβλητής x, να εκφράσετε:

Α. Την περίμετρο του ΑΒΓΔ
Β. Την περίμετρο του ΑΕΖΔ
Γ. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ
Δ. Το εμβαδόν του ΑΕΖΔ



ΘΕΜΑ 19ο

Να γραφούν τα παρακάτω κλάσματα, ως ποσοστά επί τοις εκατό

i $\frac{3}{5}$ **ii** $\frac{7}{20}$ **iii** $\frac{12}{25}$ **iv** $\frac{6}{13}$

ΘΕΜΑ 20ο

Να βρεθεί ποιο ποσοστό του 20 είναι ο αριθμός 5.

ΘΕΜΑ 21ο

Ο μισθός ενός υπαλλήλου είναι 1.200€. Να αντιστοιχίσετε στον παρακάτω πίνακα το ποσοστό επί τοις εκατό της στήλης Α με το αντίστοιχο έξοδο στη στήλη Β

Στήλη Α	
10%	**α**
15%	**β**
30%	**γ**
40%	**δ**

Στήλη Β	
1	Ενοίκιο 480€
2	Διατροφή 360€
3	ΔΕΗ, ΟΤΕ, ΕΥΔΑΠ 180€
4	Δόση δανείου 120€

ΘΕΜΑ 22ο

Στις εκπτώσεις ένα ποδήλατο που είχε 2.600€ πουλήθηκε 2.080€. να βρείτε το ποσοστό της έκπτωσης.

ΘΕΜΑ 23ο

Σε ένα προϊόν με αρχική τιμή 1.200€ έγιναν οι διαδοχικές αυξομειώσεις : αύξηση 12%, μείωση 15% και αύξηση 6%. Να βρεθεί η τελική τιμή του προϊόντος

ΘΕΜΑ 24ο

Αγοράσαμε έναν υπολογιστή και πληρώσαμε 1.580€. Αν ο συντελεστής Φ.Π.Α. 24%, να βρεθεί η αξία του υπολογιστή προ φόρων.

ΘΕΜΑ 25ο
Αν φτιάξουμε 3 κιλά ζυμάρι και το ψήσουμε, θα πάρουμε 2 κιλά ψωμί.
Α. Αν θέλουμε να φτιάξουμε 3 κιλά ψωμί, πόσο ζυμάρι χρειαζόμαστε;
Β. Αν έχουμε 5 κιλά ζυμάρι και το ψήσουμε, πόσα κιλά ψωμί θα φτιάξουμε;

ΘΕΜΑ 26ο
Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση 108χλμ.σε 45 λεπτά. Αν για να περάσει ένα τούνελ χρειάστηκε 75 δευτερόλεπτα, να βρείτε το μήκος του τούνελ.

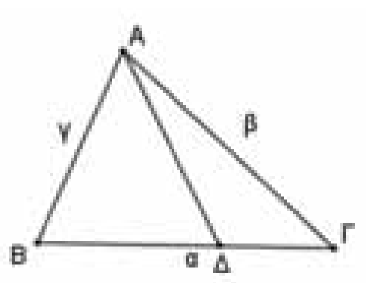
ΘΕΜΑ 27ο
Ένα κατάστημα έχει δάπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 40μ. x 30μ. Το στρώνουμε με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεων 20εκ. x 20εκ.. Πόσα πλακάκια θα χρειαστούμε;

ΘΕΜΑ 28ο
Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες α και β αντίστοιχα. Να βρείτε την τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ όταν:

1. $\alpha = 3$ και $\beta = 7$ **2.** $\alpha = -1$ και $\beta = -7$

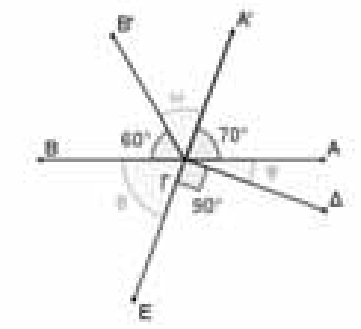
ΘΕΜΑ 29ο
Στο διπλανό σχήμα να ονομάσετε:

- Τις κυρτές γωνίες που σχηματίζονται
- Τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ.
- Την απέναντι πλευρά της γωνίας $A\hat{B}\Delta$ του τριγώνου ΑΒΓ.
- Την περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΔ και ΔΓ.

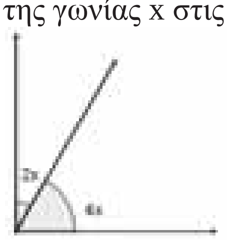


ΘΕΜΑ 30ο
Σε μια ευθεία ε να πάρετε με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ = 2εκ., $A\Gamma = \frac{3}{2}\cdot AB$ και $B\Delta = \frac{5}{2}\cdot AB$. Αν Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΜΝ.

ΘΕΜΑ 31ο
Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{\varphi}$, $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$ του διπλανού σχήματος.



ΘΕΜΑ 32ο
Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας x στις παρακάτω περιπτώσεις




Άλγεβρα Α΄ Γυμνασίου

Κουτσούρης Λέων

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $\chi = (7^2 - 2^4 \cdot 3)^{100}$ και $y = \frac{333}{111}$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$\Lambda = 3 \cdot \chi^2 + 2y^2 - 3(y - \chi)^2$,

$K = x^y + y^x + 2024^{y-3x}$ και

$M = (\Lambda^\chi - K^y) - |-1908|$

Λύση

$\chi = (49 - 16 \cdot 3)^{100}$

$\chi = (49 - 49)^{100}$

$\chi = 1^{100}$

$\chi = 1$

$y = \frac{3 \cdot 111}{111}$

$y = 3$

Αντικαθιστώ τις τιμές των χ και y στις παραστάσεις και κάνω τις πράξεις με την προτεραιότητα.

$\Lambda = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2 - 3(3-1)^2$

$\Lambda = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2$

$\Lambda = 3 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 4$

$\Lambda = 3 + 18 - 12$

$\Lambda = 9$

$K = 1^3 + 3^1 + 2024^{3-3\cdot 1}$

$K = 1 + 3 + 2024^0$

$K = 5$

$M = (9^1 - 5^3) - |-1908|$

$M = (9 - 125) - |-1908|$

$M = -116 - 1908$

$M = -2024$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Α. Δίνονται οι παραστάσεις

$A = 4 \cdot (-1)^\nu - 5(-1)^{\nu+1} + 4(-1)^{\nu+2} - (-1)^{\nu+3}$

$B = (-1)^\nu + 6(-1)^{2\nu} - 11(-1)^{3\nu}$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων αν:

α) ο αριθμός ν είναι άρτιος φυσικός

β) ο αριθμός ν είναι περιττός φυσικός

Β. Έστω ν φυσικός αριθμός

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης Μ=7+ν

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης Ν=8-ν

Γ. Το πηλίκο της διαίρεσης ν:25 είναι 32 και το υπόλοιπο 17 να βρείτε τον φυσικό αριθμό ν

Λύση

Α. Όταν ο εκθέτης είναι άρτιος τότε το “-“ της βάσης απαλείφεται

α) $A = 4 \cdot 1 - 5(-1) + 4 \cdot 1 - (-1)$

$A = 4 + 5 + 4 + 1$

$A = 14$

$B = 1 + 6 - 11(-1)$

$B = 1 + 6 + 11$

$B = 18$

Β. Μ=7+1 , Μ=8 η ελάχιστη τιμή

Ν=8-1 , Ν= 7 η μέγιστη τιμή

Γ. ν:25=32 με υπόλοιπο το 17

Η σχέση που συνδέει αυτά τα μεγέθη είναι η εξής:

ν=25· $32 + 17$

ν=800+17

ν=817

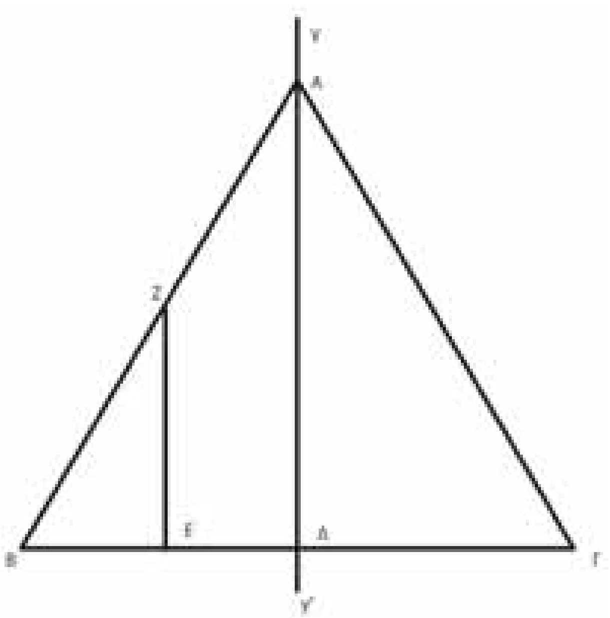
Ασκηση 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ όπου yy’ άξονας συμμετρίας του σχήματος, τα σημεία Ζ και Ε μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΔ αντίστοιχα όπου ΖΕ παράλληλη της ΑΔ (ΖΕ//ΑΔ)

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

β) Αν η γωνία $B\widehat{A}\Delta$ είναι ίση με το μισό της $A\widehat{B}\Delta$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\Gamma\widehat{\Delta}A$, $Z\widehat{E}B$, $B\widehat{Z}E$



Λύση

α) αφού είναι άξονας συμμετρίας ο yy’ τότε οι γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ και $B\widehat{A}\Delta$ είναι ίσες επομένως η ΑΔ διχοτόμος μεταξύ τους όπως και οι γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $A\widehat{\Gamma}\Delta$ γωνίες της βάσης ίσες άρα τρίγωνο ισοσκελές

β) Η γωνία $B\widehat{A}\Delta$ είναι ίση με το μισό της $A\widehat{B}\Delta$ επίσης η γωνία $B\widehat{A}\Delta$ είναι ίση με το μισό της $A\widehat{B}\Gamma$ επομένως $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{B}\Gamma$ άρα και οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες μεταξύ τους άρα ίσες με 60° όποτε το τρίγωνο ισόπλευρο.

γ) Η ΑΔ εκτός από διχοτόμος είναι είναι και διάμεσος και ύψος άρα η $\Gamma\widehat{\Delta}A = 90°$

$B\widehat{\Delta}A = Z\widehat{E}B = 90°$ ώς εντός εκτός εναλλάξ

Από προηγούμενα ερωτήματα

$$B\widehat{\Delta}A = \Gamma\widehat{\Delta}A = 90°$$

$B\widehat{Z}E = B\widehat{A}\Delta = 60: 2 = 30°$ ως εντός εκτός και επιταυτά

Άσκηση 4

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = |-3| + \frac{-1}{2} \cdot (-4)^2 - \left[-\frac{6}{3} - (-2)\right] : (-5)$$

$$B = \frac{-|-5|}{3} + \left(\frac{-3}{2}\right)^3 - \frac{(-7)\cdot(-2)}{4} + \frac{-12}{-3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Gamma = \left(\frac{-10}{|-2|} - |+4|\right) \cdot \left(\frac{-2024}{-1012}\right)^2 - \frac{5^{-3\cdot(-1)}}{2}$$

Α. Να λυθούν οι παραστάσεις.

Ας ξεκινήσουμε βήμα προς βήμα:

1. **Απόλυτη τιμή του -3:**
2. $|-3|=3|-3|=3$
3. Πολλαπλασιασμός του -4 με τον εαυτό του, δηλαδή -4 εις τον τετράγωνο: $(-4)^2=(-4)\times(-4)=16(-4)2=(-4)\times(-4)=16$
4. Διαίρεση του 6 με το 3: 63=236=2

Έχοντας αυτά τα αποτελέσματα, μπορούμε να υπολογίσουμε την τελική αριθμητική παράσταση:

$A= |-3| + \frac{-1}{2} \cdot (-4)^2 - \left[-\frac{6}{3} - (-2)\right] : (-5)$

$A = |-3| + \frac{-1}{2} \cdot 16 - [-2 - (-2)] : (-5)$

$A = 3 - 8 - (-2 + 2) : (-5)$

$A = 3 - 8 - 0 : (-5)$

$A = -5$

Όμοια για τις παραστάσεις

$B=-\frac{253}{24}$ και $\Gamma= -\frac{9001}{250}$

Β. να γράψω κατά φθίνουσα σειρά τους αριθμούς -Α,-Β,-Γ

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Θανάσης Χριστόπουλος

Άσκηση 1η

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

Α. $\dfrac{3-2x}{5}+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{1}{5}(x-4)=6-(-x+1)+\dfrac{3}{10}$

Β. $\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{5x-2}{6}=\dfrac{3(x-2)}{4}-\dfrac{x+4}{-3}$

Γ. $\dfrac{1+\dfrac{x-1}{2}}{2-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{1-x}{6}=0$

Δ. $\dfrac{3x-\sqrt{2}}{4}-\dfrac{x-\sqrt{2}}{3}=\dfrac{x+5\sqrt{2}}{12}$

Λύση:

Α. $10\dfrac{3-2x}{5}+10\dfrac{x-1}{2}-10\dfrac{1}{5}(x-4)=10\cdot 6-10(-x+1)+10\dfrac{3}{10}$

$2(3-2x)+5(x-1)-2(x-4)=60-10(-x+1)+3$

$6-4x+5x-5-2x+8=60+10x-10+3$

$-4x+5x-2x-10x=-6+5-8+60-10+3$

$-11x=44$ οπότε $x=-4$

Β. $\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{5x-2}{6}=\dfrac{3(x-2)}{4}-\dfrac{x+4}{-3}$

$12\dfrac{3x-1}{2}-12\dfrac{5x-2}{6}=12\dfrac{3(x-2)}{4}+12\dfrac{x+4}{3}$

$6(3x-1)-2(5x-2)=3\cdot 3(x-2)+4(x+4)$

$18x-6-10x+4=9x-18+4x+16$

$18x-10x-9x-4x=6-4-18+16$

$-5x=0$ οπότε $x=0$

Γ. $\dfrac{1+\dfrac{x-1}{2}}{2-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{1-x}{6}=0$ άρα $\dfrac{\dfrac{2+x-1}{2}}{\dfrac{6-1}{3}}-\dfrac{1-x}{6}=0$

$\dfrac{3(x+1)}{10}-\dfrac{1-x}{6}=0$ ή $30\dfrac{3(x+1)}{10}-30\dfrac{1-x}{6}=30\cdot 0$

$9(x+1)-5(1-x)=0$ επομένως

$9x+9-5+5x=0$ άρα $14x=-4$ ή $x=-\dfrac{2}{7}$

Δ. $\dfrac{3x-\sqrt{2}}{4}-\dfrac{x-\sqrt{2}}{3}=\dfrac{x+5\sqrt{2}}{12}$

$12\dfrac{3x-\sqrt{2}}{4}-12\dfrac{x-\sqrt{2}}{3}=12\dfrac{x+5\sqrt{2}}{12}$

$3(3x-\sqrt{2})-4(x-\sqrt{2})=x+5\sqrt{2}$

$9x-4x-x=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

$4x=4\sqrt{2}$ οπότε $x=\sqrt{2}$

Άσκηση 2η

Α. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων: $\dfrac{x}{2}-8<4x-1$ και $1-2\dfrac{x+1}{3}>\dfrac{1}{2}(-1-\dfrac{2x-1}{2})$

Β. Εξετάστε αν ο αριθμός $\kappa=7^0\cdot\sqrt{24+\sqrt{23-2\sqrt{121}}}-2^{-2}\cdot 8$ **είναι κοινή λύση των ανισώσεων του Α ερωτήματος.**

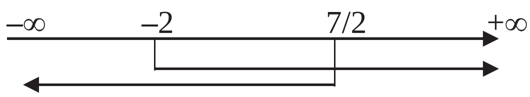
Λύση: Α. Για την 1η ανίσωση: $\dfrac{x}{2}-8<4x-1$, έχουμε διαδοχικά $x-16<8x-2$ ή $-7x<14$ τελικά $x>-2$. Για την 2η ανίσωση έχουμε διαδοχικά $1-2\dfrac{x+1}{3}>\dfrac{1}{2}(-1-\dfrac{2x-1}{2})$,

$1-\dfrac{2(x+1)}{3}>-\dfrac{1}{2}-\dfrac{2x-1}{4}$ (ΕΚΠ=12)

$12-8(x+1)>-6-3(2x-1)$ ή

$-8x+6x>-12+8-6+3$ οπότε $-2x>-7$

και τελικά $x<\dfrac{7}{2}$ $(x<3,5)$



Όπως βλέπουμε και στο σχήμα οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι μεταξύ του –2 και του $\dfrac{7}{2}$ δηλαδή $-2<x<\dfrac{7}{2}$

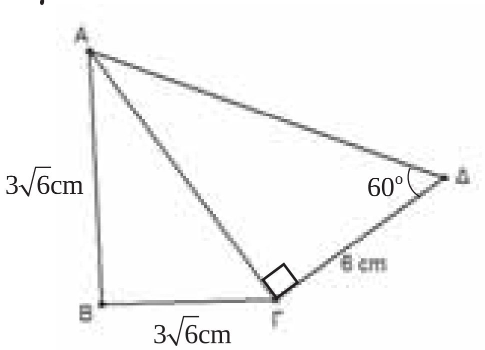
Β. Για τον αριθμό κ έχουμε διαδοχικά $\kappa=7\cdot\sqrt{24+\sqrt{22-2\sqrt{121}}}-2^{-2}\cdot 8$ οπότε $\kappa=1\cdot\sqrt{24+\sqrt{23-2\cdot 11}}-\dfrac{1}{2^2}\cdot 8$, $\kappa=\sqrt{24+1}-2$

άρα κ=3 το οποίο ανήκει στις κοινές λύσεις.

Άσκηση 3η

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\hat{\Gamma}\Delta=90^0$, $A\hat{\Delta}\Gamma=60^0$ επίσης ισχύουν ΓΔ=6cm και ΑΒ=ΒΓ=$3\sqrt{6}$ cm. Να

υπολογίσετε τις πλευρές ΑΔ, ΑΓ και στη συνέχεια δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



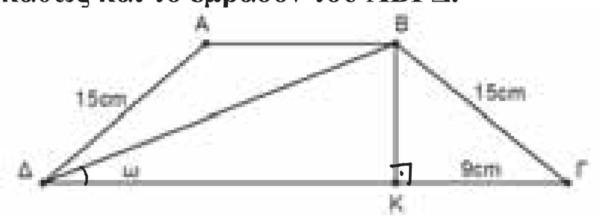
Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu 60^0 = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A}\Delta} = \frac{6}{\mathrm{A}\Delta}$ άρα $\mathrm{A}\Delta \cdot \sigma\upsilon\nu 60^0 = 6$ οπότε $\mathrm{A}\Delta = \frac{6}{0,5} = 12$cm. Στο ίδιο τρίγωνο από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\mathrm{A}\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = \mathrm{A}\Delta^2$ επομένως $\mathrm{A}\Gamma^2 + 6^2 = 12^2$ άρα $\mathrm{A}\Gamma^2 = 144 - 36$ ή $\mathrm{A}\Gamma = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$ cm.

Με το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος θα εξετάσουμε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Έχουμε: $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B}\Gamma^2 = (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{6})^2 = 54 + 54 = 108$

$\mathrm{A}\Gamma^2 = \sqrt{108}^2 = 108$. Επομένως $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B}\Gamma^2 = \mathrm{A}\Gamma^2$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$.

Άσκηση 4η: Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒΓΔ, ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ), ΒΓ=ΑΔ=15cm, $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma = \omega$ με εφω=0,8 και ΒΚ ύψος του τραπεζίου. Αν ΚΓ=9cm να υπολογίσετε το ΒΚ, τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ καθώς και το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

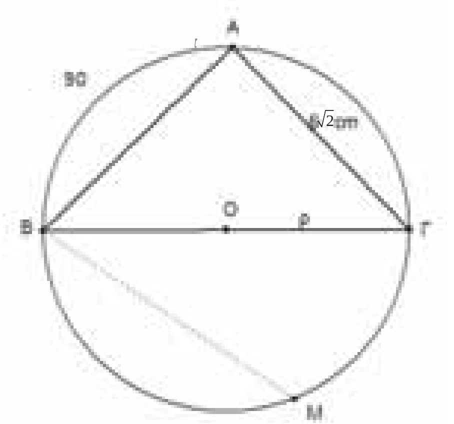


Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα: $\mathrm{AK}^2 + \mathrm{K}\Gamma^2 = \mathrm{B}\Gamma^2$ επομένως $\mathrm{BK}^2 = 15^2 - 9^2$ άρα $\mathrm{BK}^2 = 225 - 81$ ή $\mathrm{BK} = \sqrt{144} = 12$ cm. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΔ ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{BK}}{\Delta\mathrm{K}}$ άρα $0,8 = \frac{12}{\Delta\mathrm{K}}$, οπότε $\Delta\mathrm{K} = \frac{12}{0,8} = 15$cm. Άρα ΔΓ= ΔΚ+ΚΓ= 15cm +9cm =24cm. Αν στο τραπέζιο ΑΒΓΔ φέρουμε το ύψος ΑΛ τότε λόγω συμμετρίας θα είναι ΔΛ=ΒΚ=9cm και ΚΛ= ΔΓ–ΔΛ–ΚΓ=24cm–9cm–9cm=6cm. Το ΑΒΚΛ είναι ορθογώνιο, οπότε ΑΒ=ΚΛ=6cm. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι $(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = \frac{(\mathrm{B}+\beta)\upsilon}{2}$, επομένως είναι $(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = \frac{(24+6)12}{2} = 90\mathrm{cm}^2$.

Άσκηση 5η: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,ρ) και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90^0$ επίσης ΑΓ= $6\sqrt{2}$ cm.

i) Να υπολογίσετε τις ΑΓ και ΒΓ καθώς και το εμβαδόν του κύκλου.

ii) Αν $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = 30^0$. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΒΜ.



Λύση: **i)** Τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ έχουν άθροισμα ένα ημικύκλιο επομένως $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ $=180^0$, άρα ΑΒ= $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ $=90^0$, οπότε και οι αντίστοιχες χορδές θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΑΓ= $6\sqrt{2}$ cm. Στο ισοσκελές, ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε: $\mathrm{B}\Gamma^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A}\Gamma^2$ άρα $\mathrm{B}\Gamma^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2$ ή $\mathrm{B}\Gamma^2 = 144$, επομένως ΒΓ=12cm. Η ακτίνα του κύκλου είναι το μισό της διαμέτρου ΒΓ, άρα $\rho = \frac{12}{2} = 6$ cm.

Το εμβαδόν του κύκλου είναι Ε= $\pi\rho^2$ οπότε $\mathrm{E} = \pi \cdot 6^2 = 36 \cdot 3,14 = 113,04\mathrm{cm}^2$.

ii) Η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M} = 30^0$ είναι εγγεγραμμένη επομένως το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{M}\Gamma}$ θα είναι 60^0 και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{BM}}$, θα είναι $\overset{\frown}{\mathrm{BM}}$ $=180^0–60^0=120^0$.

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{BM}}$ είναι: $l = 2\pi\rho \frac{\mu}{360^0}$

$l_{\mathrm{BM}} = 2\pi 6 \cdot \frac{120^0}{360^0}$ άρα $l_{\mathrm{BM}} = 4\pi = 12,57$ cm

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Επιμέλεια: Παντελής Γρυπάρης–Ειρήνη Κοτσακιλάφη

Πρόβλημα 1

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x-\frac{2x-1}{3}=\frac{x-4}{5}$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$y=\left(\sqrt{36}+\sqrt{9}\right)\sqrt{10^2}-\sqrt{81}\cdot\sqrt{36+8^2}$$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το σημείο Α=(χ,y) ,όπου χ η λύση της εξίσωσης και y η τιμή της παράστασης και είναι παράλληλη στην ευθεία y= –3x+5

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση: α) Για να λύσουμε την εξίσωση πρώτα θα υπολογίσουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών ,δηλαδή ΕΚΠ(3,5)=15.Στη συνέχεια θα πολλαπλασιάσουμε όλα τα μέλη της εξίσωσης με το 15.

$$2x-\frac{2x-1}{3}=\frac{x-4}{5}$$
$$15\cdot 2\mathrm{x}-15\frac{2\mathrm{x}-1}{3}=15\frac{\mathrm{x}-4}{5}$$
$$30\mathrm{x}-5(2\mathrm{x}-1)=3(\mathrm{x}-4)$$
$$30\mathrm{x}-10\mathrm{x}+5=3\mathrm{x}-12$$
$$30\mathrm{x}-10\mathrm{x}-3\mathrm{x}=-12-5$$
$$17\mathrm{x}=-17,\ \frac{17\mathrm{x}}{17}=\frac{-17}{17},\ \mathrm{x}=-1$$

β) $y=\left(\sqrt{36}+\sqrt{9}\right)\sqrt{10^2}-\sqrt{81}\cdot\sqrt{36+8^2}$

$y=(6+3)10-9\cdot\sqrt{36+64}$

$y=9\cdot10-9\cdot\sqrt{100}$

y=90–9·10

y=90–90

y=0

γ) Έστω (ζ) η y=αx+β. Το Α(χ,y) είναι το Α(–1,0) και για να είναι η ευθεία (ζ) παράλληλη στην ευθεία y=–3x+5 πρέπει να έχουν το ίδιο α. Άρα α=–3 και η (ζ) γράφεται y=–3x+β. Για να διέρχεται η (ζ) από το Α (–1,0) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του σημείου την επαληθεύουν. Επομένως: 0= –3·(–1)+β και β=–3. Τελικά η (ζ) είναι y= –3x–3

δ) Για να σχεδιάσουμε μια ευθεία χρειαζόμαστε 2 σημεία της. Σχεδιάζουμε τον πίνακα τιμών της (ζ) : y= –3x–3

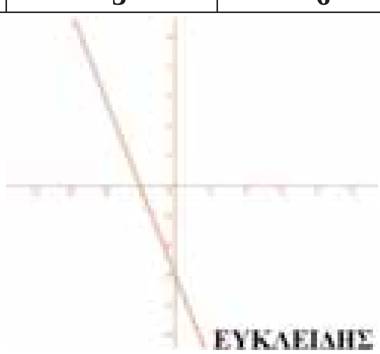
x	**0**	**1**
y	**–3**	**–6**

Για x=0 έχουμε

y= –3·0–3= –3

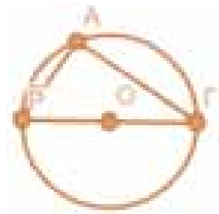
Για x=1 έχουμε

y= –3·1–3= –6



Πρόβλημα 2:

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90°$), η πλευρά ΑΒ=8 cm και η ΑΓ είναι ίση με το διπλάσιο της ΑΒ μειωμένο κατά 1cm.



α) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ

β) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,R).Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και τις πλευρές του τριγώνου.

Λύση: α) Πρώτα υπολογίζουμε την ΑΓ=2·ΑΒ–1= =2·8–1=15 cm. Στη συνέχεια για να βρούμε την πλευρά ΒΓ, η οποία είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου αφού βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Α, πρέπει να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Άρα έχουμε : $Β\Gamma^2=ΑΒ^2+Α\Gamma^2$

$$Β\Gamma^2=8^2+15^2$$
$$Β\Gamma^2=64+225$$
$$Β\Gamma^2=289$$
$$Β\Gamma=\sqrt{289}$$
$$Β\Gamma=17cm$$

β) Η περίμετρος του τριγώνου ισούται με το άθροισμα των πλευρών του. Επομένως,

Π=ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ=8+15+17=40cm

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των δυο κάθετων πλευρών του:

$$E=\frac{ΑΒ\cdot Α\Gamma}{2}=\frac{15\cdot 8}{2}=15\cdot 4=60cm^2$$

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ,R) και η πλευρά ΒΓ είναι η διάμετρος του κύκλου αφού βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία. Η ακτίνα του κύκλου R=$\frac{Β\Gamma}{2}=\frac{17}{2}=8{,}5\ cm$

δ)Τα ο εμβαδόν του κύκλου δίνεται από τον τύπο Ε=$\pi R^2=\pi\left(\frac{17}{2}\right)^2=\frac{289\pi}{4}$ και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και τις πλευρές του τριγώνου θα είναι Ε’=$\frac{289\pi}{4}-60cm^2$

Πρόβλημα 3:

Για την παρακολούθηση μιας ταινίας κάθε ενήλικας πληρώνει 9 € και κάθε παιδί 6€. Η τιμή του κάθε αναψυκτικού είναι 1,5€ και κάθε ποπ–κορν 2,5€.

α) Αν την παράσταση παρακολούθησαν x ενήλικες και y παιδιά ,να γράψετε τη σχέση Π η οποία δίνει το ποσό που πληρώνει η κάθε παρέα αν κάθε άτομο αγοράζει 1 αναψυκτικό και 1 ποπ κορν κατά την παρακολούθηση της ταινίας.

β) Αν η παρέα μας αποτελείται από 3 ενήλικες και 4 παιδιά πόσα χρήματα θα πληρώσουμε;

Λύση: α) Οι x ενήλικες πληρώνουν για το εισιτήριό τους 9χ € και τα y παιδιά πληρώνουν 6y €. Οι x ενήλικες πληρώνουν για το αναψυκτικό τους 1,5x € και για το ποπ κορν τους 2,5x €. Τα y παιδιά πληρώνουν για το αναψυκτικό τους 1,5y € και για το ποπ κορν τους 2,5y €. Η σχέση:

Π=9x+6y+1,5x+2,5x+1,5y+2,5y=13x+10y

β) Θα πληρώσουμε συνολικά

Π=13·3+10·4=39+40=79€

Πρόβλημα 4:

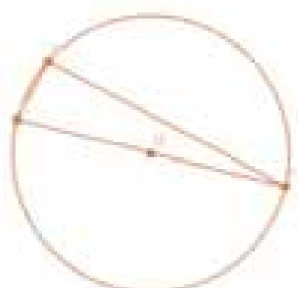
Σε κύκλο (Ο,ρ) να πάρετε δυο διαδοχικά τόξα ΕΔ=30°και ΔΓ=150°.

α)Να δείξετε ότι το ΔΕΓ τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β)Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

γ)Αν η ακτίνα ρ=10cm να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου.

Λύση: α) Η γωνία ΕΟΔ είναι επίκεντρη, άρα είναι ίση με το τόξο στο οποίο βαίνει. Επομένως, $\widehat{EO\Delta} = 30°$.Το ίδιο ισχύει και για την επίκεντρη γωνία $\widehat{\Gamma O\Delta} = 150°$.Άρα η $\widehat{EO\Gamma} = 180°$ και η ΕΓ είναι η διάμετρος του κύκλου. Όμως η $\widehat{E\Delta\Gamma} = 90°$ γιατί βαίνει στη διάμετρο ΕΓ και το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο



β) Η γωνία Ε του τριγώνου είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΔΓ=150°, άρα είναι Ε=$\frac{150°}{2} = 75°$. Αντίστοιχα ,η γωνία Γ του τριγώνου είναι εγγεγραμμένη στο τόξο ΔΕ, άρα είναι Γ=$\frac{30°}{2} = 15°$.

γ) Η διάμετρος είναι δ=ΕΓ=2ρ=2·10=20 cm.Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξειών γωνιών έχουμε:

ημΓ=$\frac{\Delta E}{E\Gamma}$

ημ15° $= \frac{\Delta E}{20}$

0,2588=$\frac{\Delta E}{20}$

ΔΕ=0,2588·20

ΔΕ=5,176 cm

Αντίστοιχα για την ΔΓ : συνΓ=$\frac{\Delta\Gamma}{E\Gamma}$

συν15° $= \frac{\Delta\Gamma}{20}$

0,9659=$\frac{\Delta\Gamma}{20}$

ΔΓ=0,9659·20

ΔΕ=19,318 cm

Πρόβλημα 5:

Αν Α=$\left(-\frac{3}{5} - \frac{-3}{10}\right) : \frac{(-3)^2}{10} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$ να βρείτε

α) τη λύση της εξίσωσης $\frac{x}{9} - x = A$

β) τη λύση της εξίσωσης $x - \frac{x}{3} = 3 \cdot A + \frac{4x-1}{6}$

Λύση: α) Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή της παράστασης Α.

Α=$\left(-\frac{3}{5} - \frac{-3}{10}\right) : \frac{(-3)^2}{10} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

Α=$\left(-\frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right) : \frac{9}{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

Α=$\left(-\frac{6}{10} + \frac{3}{10}\right) : \frac{9}{10} + \frac{4}{9}$

Α=$\left(-\frac{3}{10}\right) : \frac{9}{10} + \frac{4}{9}$

Α=$\left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{10}{9} + \frac{4}{9}$

Α=$-\frac{3}{9} + \frac{4}{9}$

Α=$\frac{1}{9}$

Κάνουμε αντικατάσταση στην εξίσωση την τιμή του Α: $\frac{x}{9} - x = \frac{1}{9}$

$$9\frac{x}{9} - 9x = 9\frac{1}{9}$$
$$x - 9x = 1$$
$$-8x = 1$$
$$\frac{-8x}{-8} = \frac{1}{-8}$$
$$x = -\frac{1}{8}$$

β) $x - \frac{x}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{4x-1}{6}$

$$6x - 6\frac{x}{3} = 18 \cdot \frac{1}{9} + 6\frac{4x-1}{6}$$
$$6x - 2x = 2 + 4x - 1$$
$$6x - 2x - 4x = 1$$
$$0x = 1$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 6:

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΚ ύψος του τραπεζίου και το ημικύκλιο (Μ, 4) όπου Μ το μέσο του τμήματος ΑΚ.

α)Να υπολογίσετε την μικρή βάση ΑΒ, αν

ΑΒ=$\sqrt{31 - \sqrt{42 - 2\sqrt{9}}} + \sqrt{\frac{-16}{-9}} - \sqrt{2024^{\circ}} - \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$.

β) Αν x είναι η λύση της εξίσωσης:

$3\frac{x-1}{2} - \frac{5x-3}{4} = \frac{x}{2} - 1$ να βρείτε την μεγάλη βάση ΔΓ του τραπεζίου η οποία δίνεται από την

σχέση ΔΓ=4·ΑΒ–3x.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

δ) Να γίνει κατάλληλο σχήμα και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος ολόκληρο του τραπεζίου που δεν περιέχει το ημικύκλιο.

Λύση: α) ΑΒ=$\sqrt{31-\sqrt{42-\sqrt{9}}}+$

$$+\sqrt{\frac{-16}{-9}}-\sqrt{2024^{o}}-\sqrt{(\frac{1}{3})^{2}}$$

ΑΒ=$\sqrt{31-\sqrt{42-2\cdot 3}}+\sqrt{\frac{16}{9}}-\sqrt{1}-(\frac{1}{3})$

ΑΒ=$\sqrt{31-\sqrt{42-6}}+\frac{4}{3}-1-\frac{1}{3}$

ΑΒ=$\sqrt{31-\sqrt{36}}+\frac{4}{3}-\frac{3}{3}-\frac{1}{3}$

ΑΒ=$\sqrt{31-6}+0$

ΑΒ=$\sqrt{25}$

ΑΒ=5

β) $3\,\frac{x-1}{2}-\frac{5x-3}{4}=\frac{x}{2}-1$

$$4\cdot 3\,\frac{x-1}{2}-4\,\frac{5x-3}{4}=4\,\frac{x}{2}-4\cdot 1$$

$$2\cdot 3(x-1)-(5x-3)=2x-4$$

$$6(x-1)-5x+3=2x-4$$

$$6x-6-5x+3=2x-4$$

$$6x-5x-2x=-4+6-3$$

$$-x=-1$$

$$x=1$$

Άρα η ΔΓ=4·5–3·1=20–3=17

γ) Για να υπολογίσω την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ πρέπει να βρω την πλευρά ΑΔ. Αρχικά το ύψος ΑΚ είναι η διάμετρος του κύκλου ,άρα ΑΚ=2·4=8. Επίσης, η ΔΚ=$\frac{ΔΓ-5}{2}=\frac{17-5}{2}=\frac{12}{2}=$ 6. Όμως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο γιατί το ΑΚ είναι ύψος ,επομένως εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα και έχω : $AΔ^2=AK^2+ΔK^2$

$$AΔ^2=8^2+6^2$$

$$AΔ^2=64+36$$

$$AΔ^2=100$$

$$AΔ=\sqrt{100}$$

$$AΔ=10$$

Το τραπέζιο είναι ισοσκελές οπότε ΑΔ+ΒΓ=10.Η περίμετρος λοιπόν του ΑΒΓΔ είναι

Π=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ=5+10+17+10=42

δ) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Πρόβλημα 7:

Η μάζα 10 μαθητών σε κιλά είναι:

52, 50, 60, 49, 60, 50, 51, 52, 58, 49

Να υπολογίσετε:

α) την μέση τιμή

β) την διάμεσο

γ) ποια είναι η διαφορά μεταξύ μέσης τιμής και διάμεσου σε αυτό το σύνολο δεδομένων;

Λύση:

α) μέση τιμή=

$$\frac{52+50+60+49+60+50+51+52+58+49}{10}=\frac{531}{10}=53{,}1$$

κιλά

β) Βάζω τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά

Σειρά που δίνεται:

52, 50, 60, 49, 60, 50, 51, 52, 58, 49

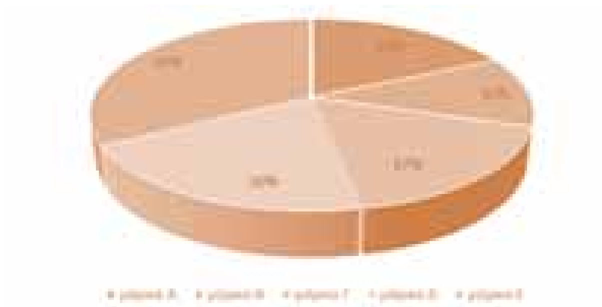
Σε αύξουσα σειρά:

49, 49, 50, 50, 51, 52, 52, 58, 60, 60

Επειδή είναι άρτιο το πλήθος των αριθμών, αρκεί να βρω το ημιάθροισμα των μεσαίων δηλαδή $\frac{51+52}{2}=\frac{103}{2}=51{,}5$ κιλά

γ) Η μέση τιμή είναι ο μέσος όρος όλων των τιμών του συνόλου δεδομένων, ενώ η διάμεσος είναι η τιμή που βρίσκεται στο κέντρο του συνόλου όταν ταξινομούνται οι τιμές κατά αύξουσα σειρά. Η μέση τιμή είναι ευαίσθητη σε ακραίες τιμές, ενώ η διάμεσος όχι, καθιστώντας την κατάλληλη για σύνολα δεδομένων με έντονες ακραίες τιμές. Στην περίπτωση μας δεν έχουμε έντονα ακραίες τιμές για αυτό και η μέση τιμή και η διάμεσος είναι δεν είναι ίσες, αλλά ούτε και διαφέρουν κατά πολύ.

Πρόβλημα 8: Να βρείτε τις γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε κομμάτι πίτας και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα, αν γνωρίζετε πως πουλήθηκαν συνολικά 300 αυτοκίνητα.



Υπόδειξη για τη λύση:

Για την εύρεση των γωνιών πολλαπλασιάζουμε κάθε ποσοστό με τις 360°

Πρόβλημα 9: Μια εταιρεία κατασκευής βιντεοπαιχνιδιών δημιουργεί 4 τύπους βιντοπαιχνιδιών Α (Adventures), Β (Role Playing Games), Γ (Open World) και Δ(Real Time Strategy). Τα ποσοστά για τους τύπους βιντεοπαιχνιδιών είναι αντίστοιχα 20%, 30%, 10% και 40%. Αν συνολικά η επιχείρηση παρήγαγε 2.400.000 βιντεοπαιχνίδια, να βρείτε:

α. Πόσα βιντεοπαιχνίδια από κάθε τύπο παρήγαγε;

β. Να παραστήσετε τα δεδομένα με ένα ραβδόγραμμα.

Κύλινδρος - Κώνος – Κύβος – Πυραμίδα

Μαρία Παππά

Κύλινδρος

Έχουμε ένα κουτί και σκεφτόμαστε να το βάψουμε. Πρέπει λοιπόν να βρούμε το εμβαδόν όλης της επιφάνειας του κυλίνδρου.

Αρχικά, βρίσκουμε το εμβαδόν της **παράπλευρης** επιφάνειας (το γύρω γύρω δηλαδή). Βρίσκουμε την περίμετρο της βάσης και την πολλαπλασιάζουμε με το ύψος υ. Δηλαδή:

$$\mathbf{E_{\pi\alpha\rho} = 2\pi\rho \cdot \upsilon}$$

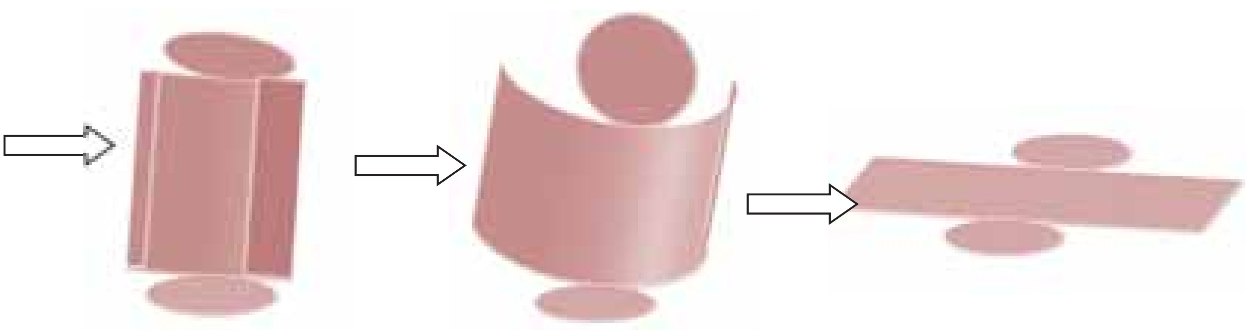
Σε αυτό προθέτουμε και το εμβαδόν των δύο βάσεων.

$$\mathbf{E_{o\lambda} = E_{\pi\alpha\rho} + 2E_{\beta} = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2}$$

Στη συνέχεια θέλουμε να βρούμε και πόσο νερό μπορεί να χωρέσει. Βρίσκουμε λοιπόν τον όγκο του V.

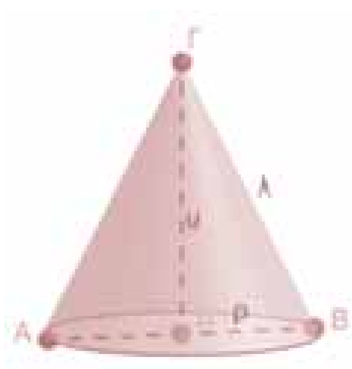
$$\boldsymbol{V = E_{\beta} \cdot \upsilon = \pi\rho^2\upsilon}$$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ



Κώνος

Θέλουμε να φτιάξουμε τα διπλανά χωνάκια. Μας ενδιαφέρει οπότε να ξέρουμε πόση είναι η γύρω επιφάνεια (παράπλευρη).



λ : γενέτειρα

υ : ύψος

ρ : ακτίνα

$$\boldsymbol{E_{\pi\alpha\rho} = \pi\rho\lambda}$$

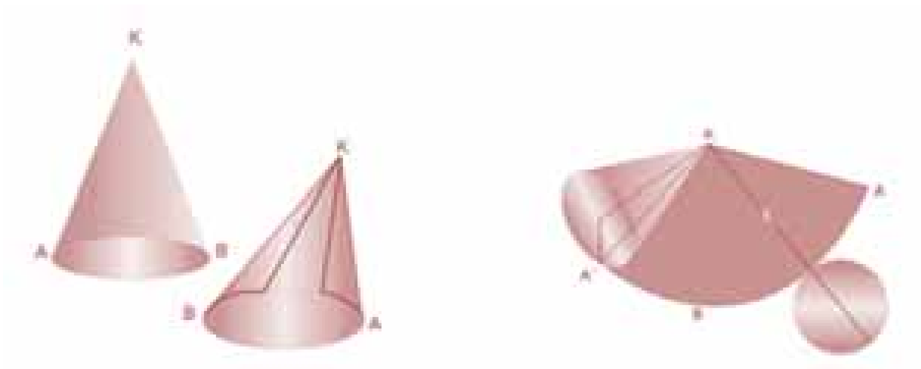
Αν τώρα θελήσουμε να το κλείσουμε κιόλας, δηλαδή να να βρούμε το εμβαδόν και της βάσης έχουμε:

$$\boldsymbol{E_{\beta} = \pi\rho^2} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{E_{o\lambda} = E_{\beta} + E_{\pi\alpha\rho} = \pi\rho^2 + \pi\rho\lambda}$$

Στη συνέχεια, θέλουμε να γεμίσουμε το χωνάκι με νερό. Θα βρούμε λοιπόν την χωρητικότητά του, δηλαδή τον όγκο του V.

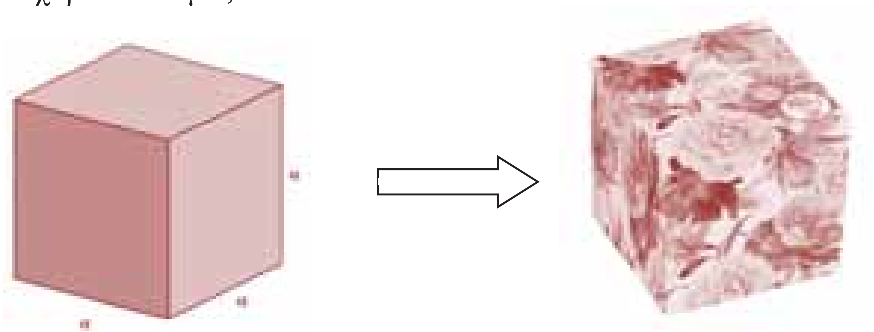
Όγκος : $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon}$.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΚΩΝΟΥ



Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο
Κύβος

Έχουμε ένα κουτί και θέλουμε να φτιάξουμε σε δώρο όπως βλέπουμε παρακάτω. Το ερώτημα είναι πόσο χαρτί θέλουμε ;



Για να το βρούμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας (γύρω-γύρω) αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την περίμετρο της βάσης με το ύψος.

$$\boldsymbol{E_{\pi\alpha\rho} = 4\alpha \cdot \alpha = 4\alpha^2}$$

Σε αυτό θα προσθέσουμε και το εμβαδόν των 2 βάσεων :

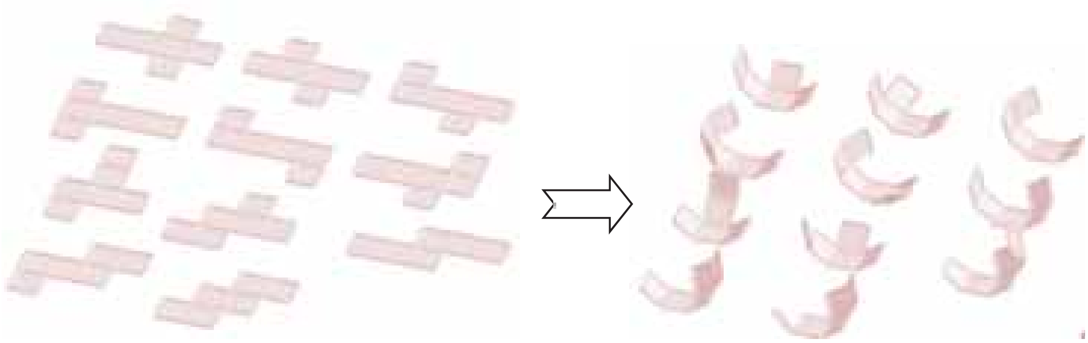
$$\boldsymbol{E_{o\lambda} = E_{\pi\alpha\rho} + 2E_{\beta} = 4\alpha^2 + 2\alpha^2 = 6\alpha^2}$$

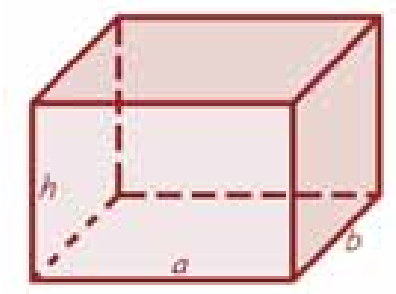
(**Υπάρχει και άλλος τρόπος**: Βρίσκουμε το εμβαδόν της μίας έδρας και πολλαπλασιάζουμε με το 6.)

Στη συνέχεια θέλουμε να το γεμίσουμε με νερό το κουτί. Πόσο νερό μπορούμε να βάλουμε; Ποιος είναι ο όγκος του;

Όγκος: $\boldsymbol{V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3}$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΚΥΒΟΥ





Το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου ορίζεται από τον μαθηματικό τύπο: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{b}$. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

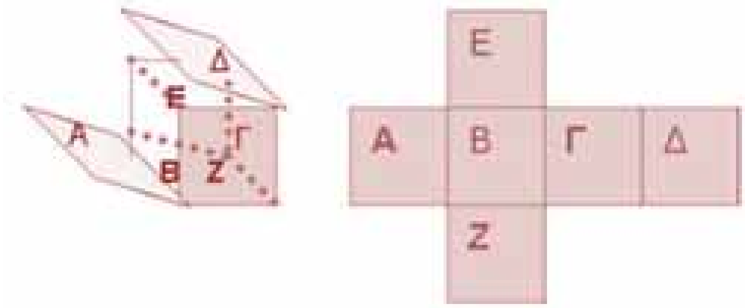
$$\boldsymbol{E\pi} = (\boldsymbol{\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma}\ \boldsymbol{\beta}\acute{\alpha}\boldsymbol{\sigma\eta\varsigma}) \cdot (\acute{\upsilon}\boldsymbol{\psi o\varsigma})$$

Το ολικό εμβαδόν (S) ενός ορθογωνίου παραλλελεπιπέδου είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και των εμβαδών των δύο βάσεων.

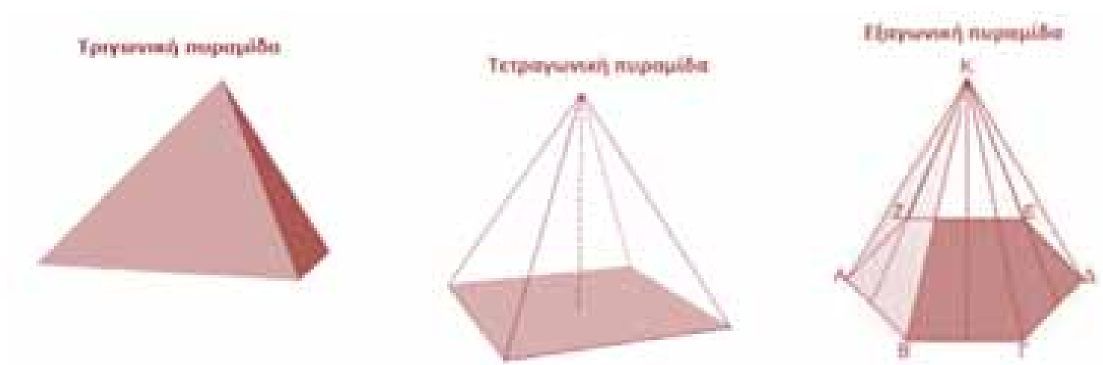
$$S = 2\,(a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$$

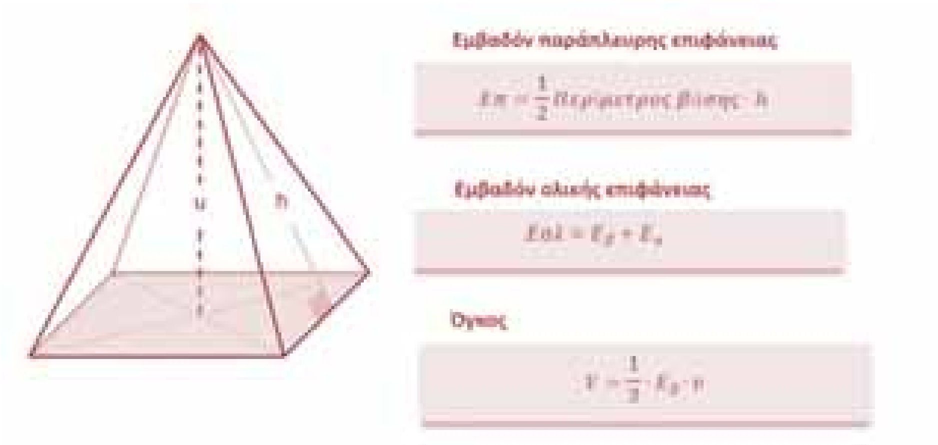
Για να υπολογίσουμε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου αρκεί να πολλαπλασιάσομε τις τρεις διαστάσεις. Δηλαδή: $\acute{O}\boldsymbol{\gamma\kappa o\varsigma} = \boldsymbol{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma}\ \boldsymbol{x}\ \acute{\upsilon}\boldsymbol{\psi o\varsigma}$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΔΟΥ

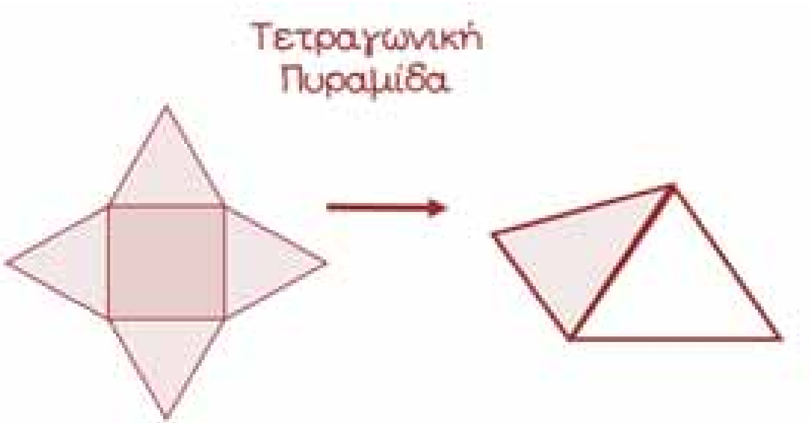


Πυραμίδα



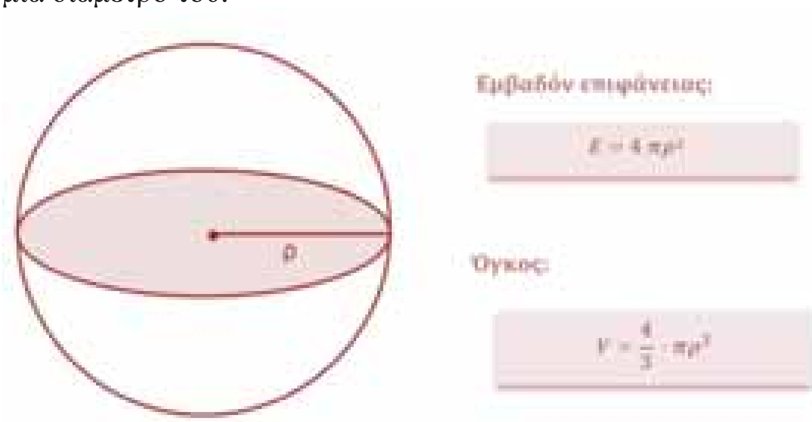


ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ



Σφαίρα

Σφαίρα είναι το στερεό σχήμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο γύρω από μια διάμετρό του.



Ο Αρχιμήδης διατύπωσε πρώτος αυτήν την πρόταση.

Β΄ Τάξη

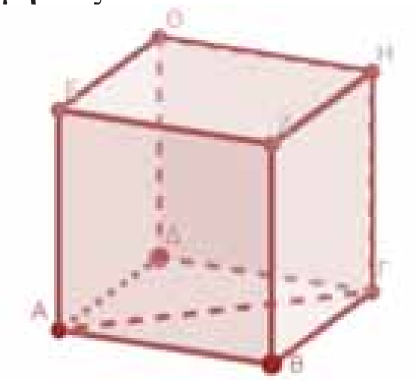
Γεωμετρικά στερεά και πυθαγόρειο θεώρημα

Θέμις Καψή

Ας δούμε μερικά προβλήματα όπου υπολογίζουμε μεγέθη σε τρισδιάστατα σχήματα χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα :

Άσκηση 1η

Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων Α και Γ, που αποτελούν κορυφές κύβου ακμής μήκους 3 cm:



Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, διότι η γωνία Β βρίσκεται στη βάση του κύβου και είναι ορθή.

Οπότε με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα θα ισχύει : $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$

Και αντικαθιστώντας το μήκος 3cm των ΑΒ και ΒΓ προκύπτει:

$$A\Gamma^2 = 3^2 + 3^2$$
$$A\Gamma^2 = 18$$
$$A\Gamma = \sqrt{18}$$

Οπότε $A\Gamma = 3\sqrt{2}\ cm$

Άσκηση 2η

Στην παρακάτω πυραμίδα η βάση είναι τετράγωνο πλευράς 4 cm.

Α. Να υπολογιστεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΗΒ.

Β. Να υπολογιστεί το ύψος του τριγώνου ΑΗΒ.

Γ. ΝΑ υπολογιστεί το μήκος ΕΒ αν το ύψος της πυραμίδας ΕΗ είναι διπλάσιου μήκους από το ΗΒ.

Δ. Να υπολογιστεί το εμβαδό της βάσης της πυραμίδας.

Ε. Να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου ΕΒΓ (υπόδειξη: φέρουμε το ύψος του ΕΒΓ και εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται).

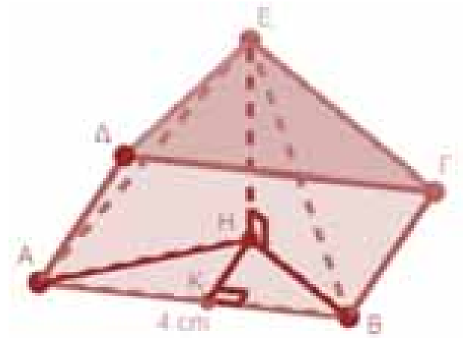
ΣΤ. Να υπολογιστεί το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.

Άσκηση 3η

Α. Στον παρακάτω κύλινδρο να υπολογίσετε το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας.

Β. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.

Γ. Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων Β και C. Τι σχήμα προκύπτει αν περιστρέψουμε την BC γύρω από τον άξονα ΑΒ;



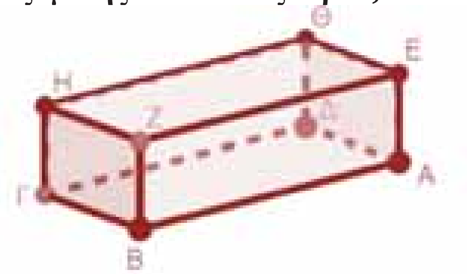
Δ. Ποιος είναι ο λόγος των όγκων δύο κυλίνδρων με βάσεις ίσων ακτινών και ύψος του ενός διπλάσιου του ύψους του άλλου;

Ε. Ποιος είναι ο λόγος των όγκων δύο κυλίνδρων με ίσα ύψη και βάσεις όπου η ακτίνα του ενός είναι διπλάσια της ακτίνας του άλλου;

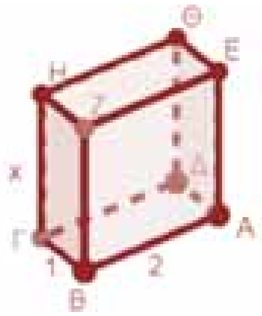
ΣΤ. Με βάση τα ερωτήματα Δ και Ε , η μεταβολή της ακτίνας της βάσης ή το ύψος κυλίνδρου προκαλεί μεγαλύτερη μεταβολή στον όγκο του στερεού;
Να αιτιολογήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

Άσκηση 4η

Μία δεξαμενή έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Τα $\frac{3}{4}$ είναι γεμάτα νερό. Τι μέρος του ύψους της δεξαμενής είναι εκτός νερού;



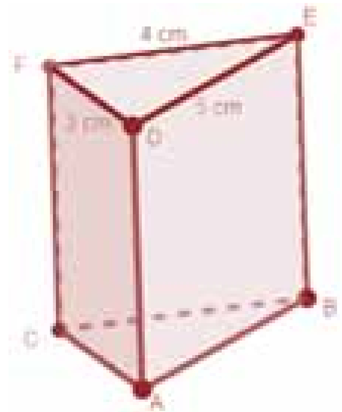
Γεμίζουμε με νερό τη δεξαμενή και ο όγκος είναι ίσος με 7200 λίτρα.
Αν το ύψος της δεξαμενής είναι ίσο με 4 μέτρα και το μήκος διπλάσιο του πλάτους της, να υπολογίσετε τις διαστάσεις της δεξαμενής.



Από το σημείο Α που σημειώνεται στο σχήμα δένουμε συρματόσχοινο μέχρι το σημείο Η, με ενσωματωμένο θερμόμετρο για να μετράμε τη θερμοκρασία του νερού. Να υπολογιστεί το μήκος του συρματόσχοινου.

Άσκηση 5η

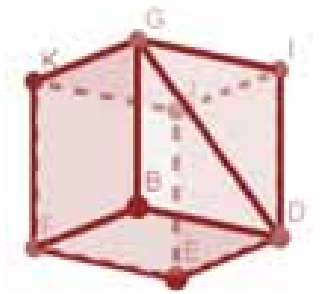
Στο παρακάτω πρίσμα να εξετάσετε αν η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο αιτιολογώντας αντίστοιχα.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ύψος του πρίσματος, αν το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος BD είναι ίσο με $\sqrt{61}$ cm.
Τέλος να υπολογίσετε το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος και τον όγκο του.



Άσκηση 6η

Δίνονται ένας κύλινδρος και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, όπως φαίνονται παρακάτω στα παρακάτω σχήματα, όπου το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 1, 2 και x μονάδες μήκους, ενώ η διαγώνιος της έδρας του κύβου έχει μήκος $\sqrt{2}\cdot x$ μονάδες.

Α. Να υπολογιστεί η τιμή του x , ώστε τα δύο στερεά να έχουν ίσους όγκους.



Β. Να υπολογιστεί η τιμή του x , ώστε τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών των δύο στερεών να είναι ίσα.

Και λίγη ιστορία:
Ανάμεσα στα στερεά ξεχωρίζουν από την αρχαιότητα τα «Πλατωνικά Στερεά» τα οποία είναι στερεά με έδρες κανονικά πολύγωνα.
Ο κύβος , το τετράεδρο και το δωδεκάεδρο είναι γνωστά και έχουν κατασκευαστεί από τους Πυθαγορείους, πριν τον Πλάτωνα , ενώ το οκτάδερο και εικοσάεδρο αποδίδονται στον επιφανή Θεαίτητο, μέλος της ακαδημίας του Πλάτωνα.
Αξίζει να σημειωθεί ότι τα κανονικά πολύγωνα είναι άπειρα στο πλήθος , ενώ τα κανονικά πολύεδρα είναι ακριβώς πέντε και δεν μπορούν να κατασκευαστούν άλλα.

Στυλιανός Αμπράζης - Ε.Μ.Ε. Παράρτημα Ν. Τρικάλων

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1η

Δίνονται τα πολυώνυμα

$\mathbf{A(x)=(3x-2)^2-2x(4x-5)-7}$ **και**

$\mathbf{B(x)=(3x-1)(x-3)-(4x^2-10x-1)}$.

Α. Να αποδειχτεί ότι

$\mathbf{A(x)=x^2-2x-3}$ **και** $\mathbf{B(x)=4-x^2}$

Β. Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα $\mathbf{A(x)}$ **και** $\mathbf{B(x)}$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{\dfrac{A(x)+3}{3}=\dfrac{B(x)}{4}}$.

Λύση: Α. Έχουμε

$A(x)=(3x-2)^2-2x(4x-5)-7$

$=9x^2-12x+4-8x^2+10x-7=x^2-2x-3$

και $B(x)=(3x-1)(x-3)-(4x^2-1)+10x$

$=3x^2-9x-x+3-4x^2+1+10x=4-x^2$

Β. Είναι $A(x)=x^2-2x-3=x^2-3x+x-3$

$=x(x-3)+(x-3)=(x-3)(x+1)$

$B(x)=4-x^2=(2-x)(2+x)$

Γ. Για τη λύση της εξίσωσης θα είναι

$\dfrac{A(x)+3}{3}=\dfrac{B(x)}{4}\Rightarrow\dfrac{x^2-2x}{3}=\dfrac{4-x^2}{4}$

$\Rightarrow 4x^2-8x=12-3x^2\Rightarrow 7x^2-8x-12=0$

Με $\alpha=7$, $\beta=-8$ και $\gamma=-12$ έχουμε

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot7\cdot(-12)=400$

Οπότε $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\dfrac{8\pm20}{14}=\begin{cases}x_1=\dfrac{28}{14}=2\\[2ex] x_2=\dfrac{-12}{14}=-\dfrac{6}{7}\end{cases}$

Άσκηση 2η

Α. Δίνονται τα πολυώνυμα

$\mathbf{A(x)=7x^2+3x}$ **και** $\mathbf{B(x)=5x^2-6x+5}$

Να βρείτε το πολυώνυμο $\mathbf{A(x)-B(x)}$.

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathbf{K(x)=\frac{[A(x)-B(x)]\cdot(2x+1)}{4x^2-1}}$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{\dfrac{x+5}{2022}=\dfrac{x^2}{337}}$.

Λύση: Α. Έχουμε

$A(x)-B(x)=7x^2+3x-(5x^2-6x+5)$

$=7x^2+3x-5x^2+6x-5=2x^2+9x-5$

Β. Είναι: $K(x)=\dfrac{[A(x)-B(x)]\cdot(2x+1)}{4x^2-1}$

$=\dfrac{(2x^2+9x-5)\cdot(2x+1)}{(4x^2-1)}$

$=\dfrac{(2x-1)\cdot(x+5)\cdot(2x+1)}{(2x-1)\cdot(2x+1)}=x+5$

Γ. Για τη λύση της εξίσωσης θα είναι

$\dfrac{x+5}{2022}=\dfrac{x^2}{337}\Rightarrow\dfrac{x+5}{6\cdot337}=\dfrac{x^2}{337}$

$\Rightarrow 6x^2=x+5\Rightarrow 6x^2-x-5=0$

Με $\alpha=6$, $\beta=-1$ και $\gamma=-5$ έχουμε

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot6\cdot(-5)=121$

Οπότε: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\dfrac{1\pm11}{12}=\begin{cases}x_1=\dfrac{12}{12}=1\\[2ex] x_2=\dfrac{-10}{12}=-\dfrac{5}{6}\end{cases}$

Άσκηση 3η

Α. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

$\mathbf{A(x)=(x+2)^2}$, $\mathbf{B(x)=(x-1)^2}$ **και** $\mathbf{\Gamma(x)=(x+3)^3}$

Β. Να λύσετε την εξίσωση

$$\mathbf{(x+3)^3-17(x+2)=x\cdot(x+2)^2+1}$$

Γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathbf{K(x)=\frac{-5(x-1)^2+4(3-4x)+1}{25x^2-16}}$$

Λύση: Α. Για τα αναπτύγματα έχουμε

$A(x)=(x+2)^2=x^2+4x+4$

$B(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$

$\Gamma(x)=(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27$

Β. Για τη λύση της εξίσωσης θα είναι

$(x+3)^3-17(x+2)=x\cdot(x+2)^2+1$

$\Rightarrow x^3+9x^2+27x+27-17x-34=$

$=x\left(x^2+4x+4\right)+1\Rightarrow 5x^2+6x-8=0$

Με $\alpha=5$, $\beta=6$ και $\gamma=-8$ προκύπτει

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=6^2-4\cdot5\cdot(-8)=196$

Οπότε: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\dfrac{-6\pm14}{10}=\begin{cases}x_1=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}\\[2ex] x_2=\dfrac{-20}{14}=-2\end{cases}$

Γ. Είναι: $K(x)=\dfrac{-5(x-1)^2+4(3-4x)+1}{25x^2-16}$

$=\dfrac{-5\left(x^2-2x+1\right)+4(3-4x)+1}{25x^2-16}$

$=\dfrac{-5x^2+10x-5+12-16x+1}{25x^2-16}$

$=\dfrac{-5x^2-6x+8}{25x^2-16}=\dfrac{-\left(5x^2+6x-8\right)}{(5x-4)(5x+4)}$

$=\dfrac{-(5x-4)(x+2)}{(5x-4)(5x+4)}=-\dfrac{x+2}{5x+4}$.

Άσκηση 4η

Α. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}3\alpha-2\beta=7\\ \alpha+\beta=-11\end{cases}$

Β. Αν γνωρίζουμε ότι $(\alpha,\beta)=(-3,-8)$ να λύσετε το σύστημα $\begin{cases}2x+y=130\cdot(\alpha-\beta)\\ x+y=4\cdot(1-9\alpha-9\beta)\end{cases}$

Γ. Μια ποτοποιία παρασκεύασε 600 λίτρα ούζο περιεκτικότητας 20% vol, αναμειγνύοντας τρεις διαφορετικές ποιότητες. Η πρώτη είχε περιεκτικότητα 32% vol, η δεύτερη 16% vol και η τρίτη που ήταν 200 λίτρων είχε περιεκτικότητα 8% vol. Πόσα λίτρα είχε αρχικά η πρώτη ποιότητα και πόσα λίτρα είχε αρχικά η δεύτερη ποιότητα;

Λύση: Α. Έχουμε

$\begin{cases}3\alpha-2\beta=7\\ \alpha+\beta=-11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha-2\beta=7\\ 2\alpha+2\beta=-22\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}5\alpha=-15$

$\Rightarrow\alpha=-3$, οπότε $-3+\beta=-11\Rightarrow\beta=-8$

Άρα λύση είναι $(\alpha,\beta)=(-3,-8)$.

Β. Είναι $\begin{cases}2x+y=130\cdot(\alpha-\beta)\\ x+y=4\cdot(1-9\alpha-9\beta)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2x+y=130\cdot(-3+8)\\ x+y=4\cdot(1+27+72)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=650\\ x+y=400\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2x+y=650\\ -x-y=-400\end{cases}\Rightarrow x=250$, και $y=150$.

Άρα η λύση είναι $(x,y)=(250,150)$

Γ. Έστω x τα λίτρα της πρώτης ποιότητας και y τα λίτρα της δεύτερης ποιότητας. Για τις περιεκτικότητες % vol θα έχουμε:

$\dfrac{32}{100}x+\dfrac{16}{100}y+\dfrac{8}{100}200=\dfrac{20}{100}600$

$\Rightarrow 32x+16y+8\cdot200=20\cdot600$

$\Rightarrow 2x+y+100=750\Rightarrow 2x+y=650 \quad (1)$

Ακόμη, $x+y+200=600\Rightarrow x+y=400 \quad (2)$

Οι (1) και (2) δημιουργούν το σύστημα

$\begin{cases}2x+y=650\\ x+y=400\end{cases}$ με τη λύση από το (Β) ερώτημα να είναι $(x,y)=(250,150)$. Δηλαδή η πρώτη ποιότητα ούζου είναι 250 λίτρα και η δεύτερη 150 λίτρα.

Άσκηση 5η

Α. Να λυθεί η εξίσωση $x^2+x-2=0$

Β. Να απλοποιηθεί η κλασματική παράσταση $K=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$

Γ. Να παραγοντοποιηθούν οι ακόλουθες παραστάσεις: $\Lambda=x^2-y^2-2x+4y-3$

$M=(3x-y)(3-4x)+(y-3x)\left(x^2-3x+1\right)$

Λύση: Α. Για τη λύση της εξίσωσης με $\alpha=1$, $\beta=1$ και $\gamma=-2$ έχουμε

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$

Οπότε: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\dfrac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{2}=1\\[2ex] x_2=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$

Β. Ισχύει $x^2+x-2=(x-1)\cdot(x+2)$, οπότε

$K=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\dfrac{x-1}{x-2}$

Γ. Για την παραγοντοποίηση των παραστάσεων θα έχουμε $\Lambda = x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3$

$= x^2 - 2x + 1 - y^2 + 4y - 4 = x^2 - 2x + 1 - (y^2 - 4y + 4)$

$= (x-1)^2 - (y-2)^2 = [x - 1 - (y-2)] \cdot (x - 1 + y - 2)$

$= (x - y + 1) \cdot (x + y - 3)$

Ακόμη $M = (3x - y)(3 - 4x) + (y - 3x)(x^2 - 3x + 1)$

$= (3x - y)(3 - 4x) - (3x - y)(x^2 - 3x + 1)$

$= (3x - y)[3 - 4x - (x^2 - 3x + 1)]$

$= (3x - y)(3 - 4x - x^2 + 3x - 1)$

$= (3x - y)(-x^2 - x + 2) = -(3x - y)(x^2 + x - 2)$

$= -(3x - y)(x - 1) \cdot (x + 2)$.

Άσκηση 6η

Δίνονται τα πολυώνυμα $\mathbf{A(x) = 3x + 2}$, $\mathbf{B(x) = x^2 - 2}$ και $\mathbf{\Gamma(x) = x^2 - 6x + 8}$

Α. Να βρεθεί η παράσταση $\mathbf{B(x) - A(x)}$

Β. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\mathbf{\dfrac{B(x) - A(x)}{\Gamma(x)}}$

Γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{[A(2x)]^2 - 5 \cdot B(3x) = -5x^2 - 4 \cdot \Gamma(x) + 46}$$

Λύση: Α. Έχουμε

$B(x) - A(x) = x^2 - 2 - (3x + 2) = x^2 - 3x - 4$

Β. Για την παραγοντοποίηση των δύο τριωνύμων θα έχουμε: $x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4x + x - 4$

$= x(x - 4) + x - 4 = (x - 4)(x + 1)$,

και $x^2 - 6x + 8 = x^2 - 4x - 2x + 8$

$= x(x - 4) - 2(x - 4) = (x - 4)(x - 2)$.

Άρα, $\dfrac{B(x) - A(x)}{\Gamma(x)} = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-2)}$

$= \dfrac{x+1}{x-2}$.

Γ. Παίρνουμε τα $A(2x) = 3(2x) + 2 = 6x + 2$, οπότε $[A(2x)]^2 = (6x + 2)^2 = 36x^2 + 24x + 4$

$B(3x) = (3x)^2 - 2 = 9x^2 - 2$

Είναι **Α΄ Μέλος** $= [A(2x)]^2 - 5 \cdot B(3x) =$

$= 36x^2 + 24x + 4 - 5(9x^2 - 2)$

$= -9x^2 + 24x + 14$, και

Β΄ Μέλος $= -5x^2 - 4 \cdot \Gamma(x) + 46$

$= -5x^2 - 4 \cdot (x^2 - 6x + 8) + 46$

$= -5x^2 - 4 \cdot x^2 + 24x - 32 + 46 = -9x^2 + 24x + 14$

Άρα ισχύει η ισότητα Α΄ Μέλος = Β΄ Μέλος.

Άσκηση 7η

Α. Να βρείτε τα αναπτύγματα των: $\mathbf{A(x) = (x + 4)^2}$, $\mathbf{B(x) = (x - 3)^2}$ και $\mathbf{\Gamma(x) = (x + 2)^3}$

Β. Να λύσετε την εξίσωση

$$\mathbf{\Gamma(x) + 8x = x \cdot B(x) + 13}$$

Γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathbf{K(x) = \frac{B(x) + 6x(x+3) - (x+15)}{49x^2 - 9}}$$

Λύση: Α. Για τα αναπτύγματα έχουμε

$A(x) = (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

$B(x) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$\Gamma(x) = (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Β. Για τη λύση της εξίσωσης θα είναι

$\Gamma(x) + 8x = x \cdot B(x) + 13 \Rightarrow$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8x = x(x^2 - 6x + 9) + 13$

$\Rightarrow 12x^2 + 11x - 5 = 0$. Με $\alpha = 12$, $\beta = 11$ και $\gamma = -5$ προκύπτει $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 11^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-5) = 361$.

Οπότε $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \dfrac{-11 \pm 19}{24} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-30}{24} = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Γ. Είναι $K(x) = \dfrac{B(x) + 6x(x+3) - (x+15)}{49x^2 - 9}$

$= \dfrac{x^2 - 6x + 9 + 6x^2 + 18x - x - 15}{49x^2 - 9} = \dfrac{7x^2 + 11x - 6}{49x^2 - 9}$.

Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $7x^2 + 11x - 6$, λύνουμε την $7x^2 + 11x - 6 = 0$.

Αυτή έχει ως λύσεις $x_1 = \dfrac{3}{7}$ και $x_2 = -2$, άρα

$7x^2 + 11x - 6 = (7x - 3)(x + 2)$, οπότε

$K(x) = \dfrac{(7x-3)(x+2)}{(7x-3)(7x+3)} = \dfrac{x+2}{7x+3}$.

Άλγεβρα Γ΄ Γυμνασίου

Μαρία Παππά

Άσκηση 1$^{\alpha}$.

Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = 3x$

Λύση

Ξεκινάμε από το 1^{o} μέλος :

$$\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = \frac{x^2+6x+9}{4} - \frac{x^2-6x+9}{4} = \frac{x^2+6x+9-x^2+6x-9}{4} = \frac{12x}{4} = 3x$$

Άσκηση 2

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$\boldsymbol{A = x^2 - 4\,, \qquad B = x^2 + 2x, \quad \Gamma = (2x-1)^2 - x^2}$$

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: A, B, Γ.

Β. Να δειχθεί ότι: $\frac{A+B}{\Gamma}\cdot(3x^2 - x) = 2x^2 + 4x$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{A+B}{\Gamma}\cdot(3x^2 - x) = 0$.

Λύση

Α. $A = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$

$B = x^2 + 2x = x(x+2)$

$\Gamma = (2x-1)^2 - x^2 = (2x-1-x)(2x-1+x) = (x-1)(3x-1)$

Β. $\frac{A+B}{\Gamma}\cdot(3x^2 - x) = \frac{(x-2)(x+2)+x(x+2)}{(x+1)(3x+1)}\cdot x(3x-1) =$

$\frac{(x+2)(x-2+x)}{(x-1)(3x-1)}\cdot x(3x-1) = \frac{(x+2)(2x-2)}{(x-1)(3x-1)}\cdot x(3x-1) =$

$\frac{(x+2)2(x-1)\cdot x(3x-1)}{(x-1)(3x-1)} = 2x(x+2) = 2x^2 + 4x$

Γ. $\frac{A+B}{\Gamma}\cdot(3x^2 - x) = 0$ ή $2x^2 + 4x = 0$ ή $2x(x+2) = 0$ ή

$2x = 0$ ή $x + 2 = 0$ ή $\boldsymbol{x = 0}$ ή $\boldsymbol{x = -2}$

Άσκηση 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x που να είναι λύση και της εξίσωσης $x^2 - 9 = 0$ και της ανίσωσης $2(x-3) + 4(x-1) > 10 + x$.

Λύση

α) $x^2 - 9 = 0$ ή

$(x-3)(x+3) = 0$ ή

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$ ή

$x = 3$ ή $x = -3$

β) Θα λύσουμε την ανίσωση και θα δούμε αν το -3 ή το 3 ανήκουν στις λύσεις της.

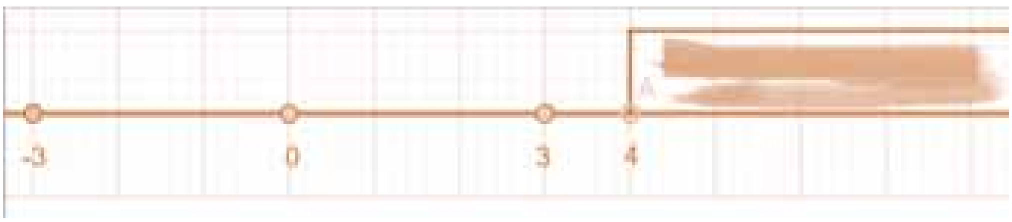
$$2(x-3) + 4(x-1) > 10 + x \quad ή$$

$$2x - 6 + 4x - 4 > 10 + x \quad ή$$

$$2x + 4x - x > 10 + 6 + 4 \quad ή$$

$$5x > 20 \quad ή$$

$$x > 4$$



Παρατηρούμε ότι το -3 και το 3 δεν ανήκουν στις λύσεις της ανίσωσης.

Άσκηση 4

i. **Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:**

$$\boldsymbol{A = x^2 - x, \qquad B = x^2 - 3x + 2, \qquad \Gamma = x^2 + 4x + 4.}$$

ii. **Να δείξετε ότι η εξίσωση $B - 6 = 0$ έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και 4.**

iii. **Αν α είναι η θετική λύση της εξίσωσης και β η αρνητική λύση της να λυθεί το σύστημα :**

$$\begin{cases} 2x + \beta y = -3 \\ x - 2\alpha y = \alpha + \beta \end{cases}$$

Λύση

i) $A = x^2 - x = x(x-1)$

$B = x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)$

$\Gamma = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

ii) $B - 6 = 0$ ή $B = 6$ ή $x^2 - 3x + 2 = 6$ ή $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 4}$$

iii) $\alpha = 4 \quad , \quad \beta = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 8y = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -2x + y = 3 \\ 2x - 16y = 6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -2x + y + 2x - 16y = 3 + 6 \\ x - 8y = 3 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} -15y = 9 \\ x - 8y = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = -\frac{3}{5} \\ x - 8\left(-\frac{3}{5}\right) = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = -\frac{3}{5} \\ x = 3 - \frac{24}{5} = \frac{15}{5} - \frac{24}{5} = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

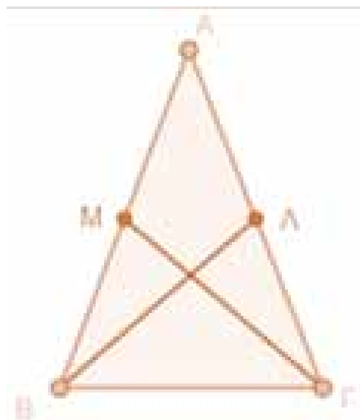
Άρα, η λύση του συστήματος είναι : $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{5}} \ , \ -\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}})$

Άσκηση 5

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\Gamma A = BA$). Αν Μ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι :

α) $B\Lambda = \Gamma M$ β) Τα M και Λ έχουν την ίδια απόσταση από την πλευρά $B\Gamma$.

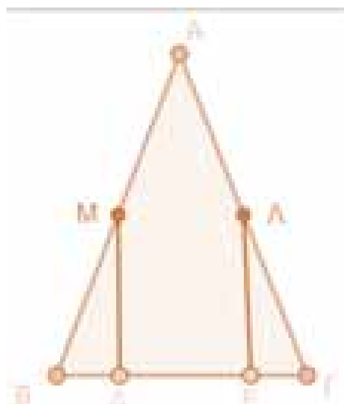
Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Lambda\Gamma$, $BM\Gamma$. Έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή πλευρά
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς
- $BM = \Gamma M$ ως μισά των ίσων πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα

Ισχύει το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ οπότε τα τρίγωνα είναι ισα άρα και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους είναι ίσα. Απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. Επομένως, $B\Lambda = \Gamma M$.



β) Αρκεί να συγκρίνουμε τα ΜΔ και ΛΕ. Για το σκοπό αυτό συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $MB\Delta$, $\Lambda E\Gamma$. Έχουν:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς
- $BM = \Gamma M$ ως μισά των ίσων πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα

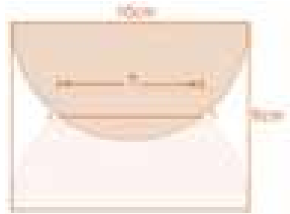
Αφού έχουν 1 αντίστοιχη πλευρά και μια αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τα τρίγωνα είναι ίσα. Οπότε και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους είναι ίσα. Δηλαδή: $M\Delta = \Lambda\Gamma$.

Καλοκαιρινοί Προβληματισμοί

Γ. Τσαπακίδη

Προβλήματα κατάλληλα για καλοκαιρινή ενασχόληση.

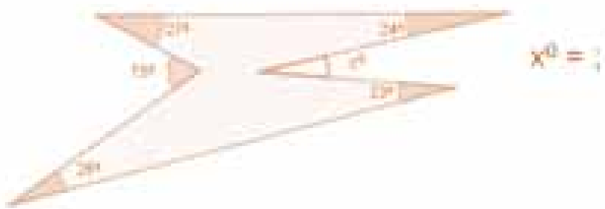
1. Αν τρεις διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι έχουν άθροισμα 3^{2024}, ποιος είναι ο μεσαίος αριθμός;

2. 

   Ποιο είναι το μήκος της κοινής χορδής ΑΒ των δύο ημικυκλίων;

3. 

   Στο διπλανό τραπέζιο, ποιο είναι το μήκος της πλευράς ΓΔ;

4. 

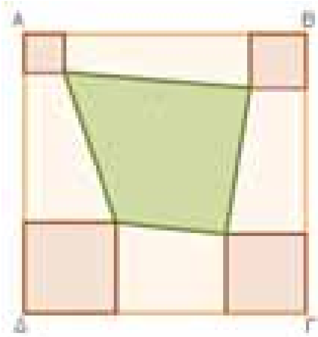
5. Πόσο χρόνο θέλουμε για να γράψουμε όλους τους φυσικούς από το ένα μέχρι και το ένα εκατομμύριο, όταν για τη γραφή ενός ψηφίου απαιτείται χρόνος ενός δευτερολέπτου;

6. Το 65% μιας τάξης είναι κορίτσια από τα οποία το 20% είναι ξανθιές. Το ποσοστό των ξανθών μαθητών στην τάξη είναι 17,2%. Ποιο είναι το ποσοστό των ξανθών αγοριών στην τάξη;

7. $A=[(\underbrace{2^5+2^5+\cdots+2^5}_{16\text{ φορές}}):4^4+(\underbrace{3^7+3^7+\cdots+3^7}_{81\text{ φορές}}):9^5]^{15}:25^7=;$

8. Όταν ο φυσικός αριθμός n διαιρεθεί με τον 6 αφήνει υπόλοιπο 3. Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης (n+3):6;

9. Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 11 και τα γωνιακά τετράπλευρα με κορυφές τα Α, Β, Γ, Δ είναι τετράγωνα με πλευρές 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Ποιο είναι το εμβαδόν του πράσινου τετραπλεύρου;

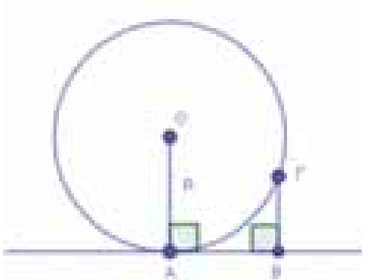


10. Πόσες φορές πρέπει να γράψουμε μέσα στη ρίζα το 7^3 για να ισχύει

$$\sqrt{7^3+7^3+\cdots+7^3}=7^5;$$

11. Αν $\alpha \neq \beta$ και $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+10\beta}{\beta+10\alpha}=2$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}=$;

12.



Αν ΑΒ = 15 και ΒΓ= 9, τότε R=;

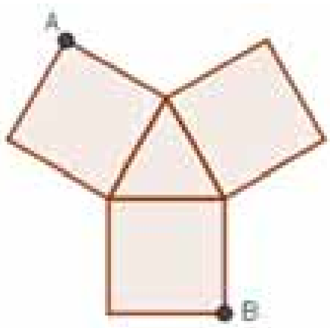
13. Ποια δύναμη του 2 είναι ο αριθμός $4^{30}+8^{20}+16^{15}+32^{12}$;

14. Για πόσα ζεύγη (x,y) θετικών ακεραίων ισχύει $x^2-xy=13$;

15. Ένα δοχείο όταν είναι κατά 30% άδειο περιέχει 20 λίτρα περισσότερο από την περίπτωση που θα ήταν κατά 30% γεμάτο. Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες;

16. Έχουμε 200 αυγά τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε καλάθια κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε καλάθι να περιέχει διαφορετικό αριθμό αυγών. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πλήθος καλαθιών που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;

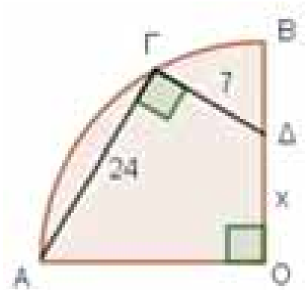
17.



Το τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 6 και τα τετράπλευρα είναι τετράγωνα. Η απόσταση του Α από το Β μπορεί να γραφεί ως $n+\sqrt{m}$ όπου n, m θετικοί ακέραιοι.

m+n = ;

18. Η Μαρία κάνει λεμονάδα. Η συνταγή απαιτεί 4 φορές νερό από ότι ζάχαρη και διπλάσια ζάχαρη από χυμό λεμονιού. Η Μαρία χρησιμοποίησε 3 φλιτζάνια χυμό λεμονιού. Πόσα φλιτζάνια νερό χρειάστηκε;

19. 

Το ΟΑΓΒ είναι τεταρτοκύκλιο,

ΑΓ = 24, ΓΔ = 7,

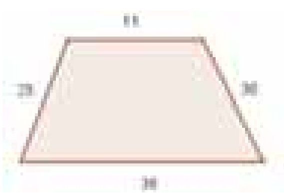
ΟΔ = x και $\angle \text{ΑΓΔ} = 90^o$. x = ;

20. Από μια ομάδα αγοριών και κοριτσιών φεύγουν 15 κορίτσια. Μένουν τότε δύο αγόρια για κάθε κορίτσι. Σε λίγο φεύγουν 45 αγόρια, οπότε μένουν 5 κορίτσια για κάθε αγόρι. Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια υπήρχαν αρχικά στην ομάδα;

21. Ποια είναι η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου x για την οποία ο αριθμούς S=(x+20)+(x+21)+(+22)+…+(x+100) είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

22. Σε μια γιορτή όλα τα άτομα που συμμετείχαν αλληλοχαιρετήθηκαν. Μεταξύ των γυναικών έγιναν ακριβώς 28 χειραψίες και μεταξύ των ανδρών 36. Πόσες χειραψίες έγιναν μεταξύ ανδρών και γυναικών;

23. Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{7-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}}$ είναι φυσικός.

24. 

Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού τραπεζιού;

25. Σε τέσσερα κιβώτια ενός παλατιού υπάρχουν 507, 1006, 1505 και 2004 διαμάντια, αντίστοιχα. Κάθε μέρα επιλέγονται δύο κιβώτια από τα οποία αφαιρούνται ή προστίθενται ένα ή πέντε διαμάντια στο καθένα. Είναι δυνατόν σε κάποια στιγμή να υπάρχουν 2005, 2004, 2002 και 1998 διαμάντια, αντίστοιχα, στα τέσσερα κιβώτια;

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 (Α) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ ισχύει:

$$(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})^2 \geq 3(\boldsymbol{\kappa\lambda}+\boldsymbol{\lambda\mu}+\boldsymbol{\mu\kappa}).$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Β) Αν $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ **είναι** θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{yz}+\boldsymbol{zx}) = \boldsymbol{xyz},$$

να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{\alpha} \geq 3\boldsymbol{\beta}^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Σ. Μπραζιτίκος)

Λύση (Α) Κάνοντας πράξεις βλέπουμε ότι η προς απόδειξη ανισότητα είναι ισοδύναμη με $\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+2\kappa\lambda+2\lambda\mu+2\mu\kappa \geq 3\kappa\lambda+3\lambda\mu+3\mu\kappa$, ή ισοδύναμα με την

$$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-\kappa\lambda-\lambda\mu-\mu\kappa \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\kappa-\lambda)^2+(\lambda-\mu)^2+(\mu-\kappa)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ.

Η ισότητα αληθεύει, αν, και μόνο αν, $\kappa=\lambda=\mu$. ■

(Β) (1ος τρόπος)

Από την δοθείσα σχέση παίρνουμε ότι: $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$ και $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι $\alpha, \beta > 0$ και από τη βοηθητική ανισότητα θέτοντας $\kappa=\frac{1}{x}, \lambda=\frac{1}{y}$ και $\mu=\frac{1}{z}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\beta^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{3}{a}$$

Από την τελευταία παίρνουμε $\alpha \geq 3\beta^2$, που είναι το ζητούμενο.

Η ισότητα αληθεύει, αν, και μόνο αν, $x=y=z$.

(2ος τρόπος) Λύνοντας τις δοθείσες εξισώσεις ως προς α και β παίρνουμε

$$\alpha=\frac{xyz}{x+y+z} \text{ και } \beta=\frac{xyz}{xy+yz+zx}.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{xyz}{x+y+z} \geq 3\left(\frac{xyz}{xy+yz+zx}\right)^2,$$

ή ισοδύναμα, μετά από απαλοιφή των παρονομαστών, αφού $x, y, z > 0$, ότι

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z).$$

Η τελευταία έπεται από την βοηθητική ανισότητα με $\kappa=xy, \lambda=yz$ και $\mu=zx$.

Η ισότητα αληθεύει, αν, και μόνο αν, $xy=yz=zx$ ή ισοδύναμα: $x=y=z$.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του ω. Με κέντρο το σημείο Α γράφουμε κύκλο γ που τέμνει το τόξο ΑΒ του κύκλου ω, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Δ και το τόξο ΑΓ, που δεν περιέχει το Β, στο σημείο Ε. Υποθέτουμε ότι το σημείο τομής Κ των ευθειών ΒΕ και ΓΔ ανήκει στον κύκλο γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

(Ι. Προδρομίδης)

Λύση (1ος τρόπος)

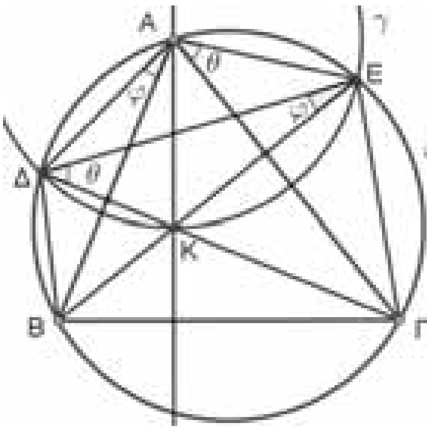
Από τη σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνουν στο τόξο ΔΚ του κύκλου γ, (σχήμα 1), έχουμε:

$$\Delta\widehat{A}K = 2\cdot\Delta\widehat{E}K \qquad (1)$$

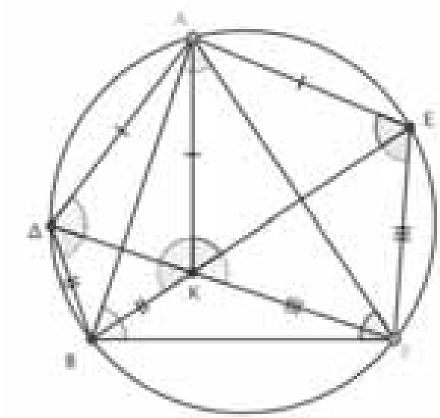
Από ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο τόξο ΒΔ του κύκλου ω έχουμε:

$$\Delta\widehat{E}K = \Delta\widehat{A}B \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $\Delta\widehat{A}K = 2\cdot\Delta\widehat{A}B$, οπότε η ευθεία ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{A}K$. Επειδή $A\Delta = AK$, ως ακτίνες του κύκλου γ, το τρίγωνο ΔΑΚ είναι ισοσκελές, οπότε θα είναι $AB \perp \Delta K$, δηλαδή $AB \perp \Gamma\Delta$. Ομοίως προκύπτει και ότι $A\Gamma \perp BE$. Άρα το σημείο Κ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $AK \perp B\Gamma$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(2ος τρόπος)

Από το εγγεγραμμένο πεντάγωνο ΒΔΑΕΓ, (σχήμα 2), έχουμε ότι $B\widehat{\Delta}\Gamma = B\widehat{E}\Gamma = B\widehat{A}\Gamma$ (1). Επίσης, αφού το τρίγωνο ΔΑΚ είναι ισοσκελές, έχουμε $\widehat{AK\Delta} = \widehat{A\Delta K} = A\widehat{B}\Gamma$. Ομοίως, αφού το τρίγωνο ΕΑΚ είναι ισοσκελές, $\widehat{AKE} = \widehat{AEK} = A\widehat{\Gamma}B$. Συνεπώς, $\Delta\widehat{K}E = A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B$, οπότε

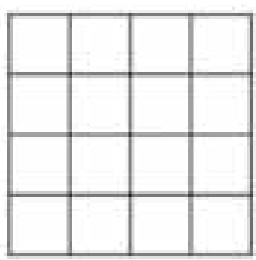
$$\widehat{\Delta KB} = E\widehat{K}\Gamma = 180^\circ - \Delta\widehat{K}E = 180^\circ - A\widehat{B}\Gamma - A\widehat{\Gamma}B = B\widehat{A}\Gamma \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $B\Delta = BK$. Αφού ΑΔ=ΑΚ και ΒΔ=ΒΚ, τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΔΚ, οπότε η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοκάθετος του ΔΚ. Συνεπώς, $\widehat{BAK} = 90^\circ - \widehat{AK\Delta} = 90^\circ - A\widehat{B}\Gamma$, οπότε η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους δεκαέξι θετικούς διαιρέτες του 2024 στα κελιά του διπλανού πίνακα έτσι ώστε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Α. Συνεφακόπουλος)



Λύση

Ναι, μπορούμε. Οι διαιρέτες του $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ είναι οι δεκαέξι αριθμοί

$$1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024.$$

Κανείς τους δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες, αυτούς που αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3:

$$1, 4, 22, 46, 88, 184, 253, 1012,$$

και σε αυτούς που αφήνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3:

$$2, 8, 11, 23, 44, 92, 506, 2024.$$

Κάθε ομάδα αποτελείται από οκτώ αριθμούς. Επίσης, παρατηρούμε ότι μια στήλη ή μια γραμμή του τετραγωνικού πλέγματος μπορεί να έχει άθροισμα το οποίο να είναι πολλαπλάσιο του 3 αν και μόνο αν περιέχει δύο αριθμούς της πρώτης ομάδας και δύο αριθμούς της δεύτερης ομάδας.

Ας επιλέξουμε από κάθε στήλη και κάθε γραμμή του πλέγματος ακριβώς δύο κελιά για να τοποθετήσουμε τους οκτώ αριθμούς της πρώτης ομάδας. (Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε με $6 \cdot 6 = 36$ τρόπους). Μια τέτοια επιλογή είναι, για παράδειγμα, η εξής:

1			4
22			46
	88	184	
	253	1012	

Στη συνέχεια ας τοποθετήσουμε τους αριθμούς της δεύτερης ομάδας στα κενά κελιά του πλέγματος, έναν σε κάθε κελί και με όποια σειρά θέλουμε. Για παράδειγμα, μια ολοκληρωμένη επιλογή είναι η εξής:

1	2	8	4
22	11	23	46
44	88	184	92
506	253	1012	2024

Στον τελικό πίνακα παρατηρούμε ότι το άθροισμα των αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Να δειχθεί ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) τέτοιες ώστε

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6xyz.}$$

(Α. Συνεφακόπουλος)

Λύση. Γράφοντας της δοθείσα σχέση ως

$$x^2 + y^2 + xy = (6xy - x - y - z)z$$

βλέπουμε ότι αντικαθιστώντας το z με το $6xy - x - y - z$, το δεξί μέλος παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι, αν (x, y, z) είναι λύση της (1) με $x > y > z$, τότε λύση της είναι και η $(6xy - x - y - z, x, y)$ με $6xy - x - y - z > x > y$, αφού

$$(6xy - x - y - z) - x = \frac{x^2 + y^2 + xy}{z} - x = \frac{x(x - z) + y^2 + xy}{z} > 0.$$

Παρατηρώντας ότι η $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ είναι λύση της (1) παίρνουμε την $(x, y, z) =$(3, 1, 1), η οποία με τη σειρά της δίνει την $(x, y, z) = (13, 3, 1)$ (με $13 > 3 > 1$).

Συμπεραίνουμε ότι η (1) έχει άπειρες ακέραιες λύσεις (x, y, z) με $x > y > z > 0$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 131Α

Α77. **Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 3$. Να αποδείξετε ότι:**

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha \geq 6.$$

Ρουμανία 2023

Λύση

Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το άθροισμα $2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$, τότε αυτή γίνεται

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha \geq 6 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

και αφού $\alpha + \beta + \gamma = 3$, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + 3 \geq 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

ή πάλι λόγω της ισότητας $\alpha + \beta + \gamma = 3$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(\beta + \alpha^2\beta) + (\gamma + \beta^2\gamma) + (\alpha + \gamma^2\alpha) \geq 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha.$$

Πράγματι, από τις ανισότητες

$$\beta + \alpha^2\beta = \beta(1 + \alpha^2) \geq 2\alpha\beta, \;\; \gamma + \beta^2\gamma = \gamma(1 + \beta^2) \geq 2\beta\gamma, \;\; \alpha + \gamma^2\alpha = \alpha(1 + \gamma^2) \geq 2\alpha\gamma$$

με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ανισότητα που ζητάμε.

Ν52. **Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους μ, ν που ικανοποιούν την ισότητα**

$$\nu(\nu + 1) = 3^\mu + \Sigma(\nu) + 1182,$$

όπου $\Sigma(\nu)$ είναι το άθροισμα των ψηφίων του ν.

Ρουμανία 2023

Λύση

Η δεδομένη ισότητα είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$\nu^2 = 3^\mu + 1182 - \big(\nu - \Sigma(\nu)\big). \qquad (1)$$

Έστω $\mu \geq 2$. Επειδή $9\big|\big(\nu - \Sigma(\nu)\big)$, $3|1182$ *και* $9 \nmid 1182$, από τη σχέση (1)προκύπτει ότι $3|\nu^2$ και $9 \nmid \nu^2$, που είναι άτοπο.

Ομοίως, αν $\mu = 1$, προκύπτει ότι $3|\nu^2$ και $9 \nmid \nu^2$, που είναι άτοπο. Επομένως, πρέπει $\mu = 0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\nu^2 + \big(\nu - \Sigma(\nu)\big) = 1183. \qquad (2)$$

Αν είναι $\nu \leq 9$, τότε $\Sigma(\nu) = \nu$ και $\nu^2 = 1183$, άτοπο. Επομένως πρέπει $\nu \geq 10$, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $\nu - \Sigma(\nu) > 0$ και $\nu \leq 34$, αφού $34^2 = 1156$ και $35^2 = 1225$. Επειδή $1183 - 1156 = 27$, εύκολα ελέγχουμε ότι η μοναδική λύση είναι $\mu = 0, \nu = 34$.

Γ64. **Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Έστω Ρ σημείο του τμήματος ΟΓ και έστω Q το σημείο τομής των ευθειών ΜΡ και ΒΓ. Η παράλληλη από το Ο προς την ευθεία ΜΡ τέμνει την ευθεία ΓΔ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Ν και Q είναι συνευθειακά, αν, και μόνον αν, το σημείο Ρ είναι το μέσο του ΟΓ.**

Ρουμανία 2023

Λύση

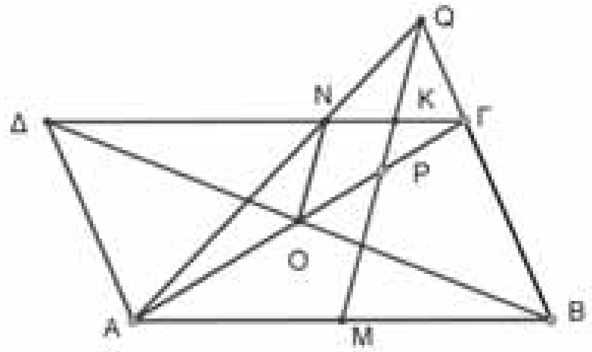
Έστω Κ το σημείο τομής των ευθειών ΜΡ και ΓΔ. Αν τα σημεία Α, Ν και Q είναι συνευθειακά, τότε λόγω της παραλληλίας ΑΒ ∥ ΓΔ, έπεται ότι

$$\frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΜΒ}} = \frac{\text{QΓ}}{\text{QΒ}} = \frac{\text{ΓΝ}}{\text{ΑΒ}}$$

και αφού $AB = 2 \cdot MB$, έπεται ότι:

$$\frac{K\Gamma}{MB} = \frac{Q\Gamma}{QB} = \frac{\Gamma N}{2 \cdot MB} \Rightarrow \Gamma N = 2 \cdot K\Gamma.$$

Επειδή $KP \parallel ON$ και $\Gamma N = 2 \cdot K\Gamma$ έπεται ότι η KP είναι μεσοπαράλληλη στο τρίγωνο ΓON, οπότε το P είναι το μέσο της $O\Gamma$.



Αντίστροφα, έστω P μέσο του ΟΓ. Τότε η KP είναι μεσοπαράλληλη στο τρίγωνο ΓON, οπότε $\Gamma N = 2 \cdot K\Gamma$. Αν οι ευθείες AQ και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο N', τότε, λόγω του ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και M μέσο της AB θα έχουμε

$$\frac{\Gamma K}{MB} = \frac{QK}{QM} = \frac{KN'}{MA} \Rightarrow \frac{\Gamma K}{KN'} = \frac{MB}{MA} = 1 \Rightarrow \Gamma K = KN' \Rightarrow \Gamma N' = 2 \cdot \Gamma K = \Gamma N,$$

οπότε τα σημεία N και N' ταυτίζονται, δηλαδή τα σημεία A, N και Q είναι συνευθειακά.

Ασκήσεις για λύση

Α78. Ο θετικός ακέραιος ν είναι τέλειο τετράγωνο. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του 2023 με το ν είναι $223 - \frac{3\nu}{2}$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης αυτής.

Α79. **(i)** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί α, β, γ τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $\alpha + \beta\gamma, \beta + \gamma\alpha, \gamma + \alpha\beta$ να είναι ρητοί.
(ii) Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ έχουν άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και οι αριθμοί $\alpha + \beta\gamma,\ \beta + \gamma\alpha, \gamma + \alpha\beta$ είναι ρητοί μη μηδενικοί, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι ρητοί.

Ν53. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους ν για τους οποίους υπάρχουν $1 + 2^{\nu+2}$ ακέραιοι μεταξύ των αριθμών 3^{ν} και $3^{\nu+1}$.

Ν54.. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (μ, ν) θετικών ακέραιων που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$(3\mu - 2)(5\mu - 1) = 6^{\nu}.$$

Γ65. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{B} = 72^0$. Θεωρούμε σημείο Δ στην ευθεία $B\Gamma$ έτσι ώστε $\Gamma\Delta = AB$ και το σημείο Γ να βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και Δ .
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Gamma$ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{A}\Delta$.
(β) Στην παράλληλη που άγεται από το σημείο Δ προς την ευθεία AB παίρνουμε σημείο E έτσι ώστε τα σημεία A και E να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$ και επιπλέον $\Delta E = \Delta B$. Αν οι ευθείες $A\Delta$ και BE τέμνονται στο Z να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$ και AE είναι κάθετες και $AZ = Z\Gamma = B\Gamma$.

Τα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Όποιος δεν έκανε ποτέ λάθος, δεν έχει δοκιμάσει ποτέ κάτι καινούργιο. ***Αϊνστάιν***

Πόσοι είναι ενδιάμεσα

Από το 1^2 μέχρι το 2^2 είναι 2 αριθμοί ενδιάμεσα, από το 2^2 μέχρι το 3^2 είναι 4 αριθμοί ενδιάμεσα. Πόσοι αριθμοί είναι από το 50^2 μέχρι το 51^2;

Ο αριθμός 2025

Έχουμε τον 2025 που είναι τέλειο τετράγωνο, $2025= 45^2$, αν αυξήσουμε όλα τα ψηφία μια μονάδα η νέα σχέση είναι: $3136 = 56^2$.

Α) Είναι αληθής;

Β) Αυτό ισχύει για όλα τα τέλεια τετράγωνα;

Γ) Μπορείτε να βρείτε ένα διψήφιο για τον οποίο ισχύει;

Το ταξίδι

Ένας τουριστικό γραφείο για το καλοκαίρι ανακοίνωσε ότι οργανώνει ταξίδια για την ΤΑΚΑΜΑΚΑ στις Σεϋχέλλες. Η ανακοίνωση αναφέρει: «το κόστος για όποιον ενδιαφέρεται είναι: «***να γράψει έναν 4ψήφιο αριθμό με διαδοχικά τα ψηφία του, να αντιστρέψει την σειρά των ψηφίων και να αφαιρέσει τον μικρότερο από τον μεγαλύτερο αριθμό***». Ποιο είναι το κόστος της εκδρομής;

Οι κύβοι και το τετράγωνο

Μπορείτε (αριθμητικά) με 10 κύβους να κάντε ένα τετράγωνο;

Κόψτε τους σε κύβους

Μπορείτε να κόψετε τους αριθμούς 153, 371, 407, 165033 σε 3 κύβους τον καθένα ;

Με ίδια ψηφία

Η Αθηνά είναι μαθήτρια της Α΄ Γυμνασίου και είπε σε τρείς φίλες της να γράψουν από ένα 3ψήφιο αριθμό με ίδια ψηφία. Ύστερα να τον διαιρέσουν με το άθροισμα των ψηφίων του. Το αποτέλεσμα που θα βρουν το έγραψε στο τετράδιό τους. Πώς το μάντεψε;

Με εννέα ίδια ψηφία

Ένας αριθμομνήμων ζήτησε τρία άτομα από το κοινό, να γράψουν από έναν αριθμό με εννέα ίδια ψηφία. Ύστερα να τον διαιρέσουν με το άθροισμα αυτών των ψηφίων. Το πηλίκο που θα έβρισκε ο καθένας, το έγραψε αμέσως ο αριθμομνήμων σε ένα χαρτί και το έδωσε στο κοινό, καθώς και το άθροισμά τους. Πώς το μάντεψε;

Το 222 και ο 3ψήφιος

Πάρτε ένα 3ψήφιο και με τα ίδια ψηφία γράψτε και τους άλλους 5 τριψήφιους αριθμούς. Χωρίς να κάνετε την πρόσθεση, γνωρίζετε το άθροισμα των 6 αριθμών;

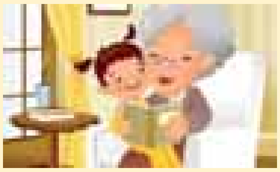
Όλες οι πράξεις με το 3

Η Βάσω παίζοντας πρόσθεσε στην ηλικία της τον αριθμό 3, ύστερα διαίρεσε το άθροισμα δια 3, από το πηλίκο αφαίρεσε 3 και το αποτέλεσμα το πολλαπλασίασε επί 3. Ο αριθμός που προέκυψε ήταν τα 2/3 της ηλικίας της. Ποια είναι η ηλικία της Βάσως;

Με 16 διαδοχικούς αριθμούς

Μπορείτε να βρείτε 16 διαδοχικούς αριθμούς που να έχουν άθροισμα το 600;

Η γιαγιά



Η γιαγιά έχει 2 εγγονές που το άθροισμα των ηλικιών τους είναι το μισό της ηλικίας της γιαγιάς. Σε 10 χρόνια η γιαγιά θα είναι 70 ετών. Ποια θα είναι η σχέση της ηλικίας της γιαγιάς με το άθροισμα των ηλικιών που θα έχουν οι εγγονές;

Απαντήσεις στους γρίφους

Πόσοι είναι ενδιάμεσα

Είναι 100

Ο αριθμός 2025

Α) Αληθής

Β) Όχι

Γ) Είναι ο $25=5^2$, $36=6^2$.

Το Ταξίδι

Η διαφορά 4ψήφιου αριθμού με διαδοχικά ψηφία με τον αντίστροφό του είναι πάντα 3087. Αυτό είναι το κόστος του ταξιδιού.

Οι κύβοι και το τετράγωνο

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3=$
$=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)^2=3025=55^2$

Κόψτε τους σε κύβους

Οι αριθμοί σε κύβους είναι: $153=1^3+5^3+3^3$, $371 = 3^3+7^3+1^3$, $407=4^3+0^3+7^3$ και $165033=16^3+50^3+33^3$

Με ίδια ψηφία

Είναι πάντα ο αριθμός 37.

Με εννέα ίδια ψηφία

Το πηλίκο είναι πάντα ο αριθμός: 12345679 και το άθροισμα: 3χ12345679= 37037037.

Το 222 και ο 3ψήφιος

Αν π.χ. πάρετε τον 735 έχουμε 753 375 357 537 573, το άθροισμά τους είναι: (7+5+3)x222. Δηλαδή πάντα (α+β+γ)x222.

Όλες οι πράξεις με το 3

Αν είναι Χ ο αριθμός τότε [(Χ+3):3-3].3 =2/3.Χ και Χ=18.

Με 16 διαδοχικούς αριθμούς

Διαιρούμε το 600 δια 16 έχουμε 37,5, δηλαδή οι αριθμοί έχουν μεσαίο το 37,5 . Άρα 8 είναι μικρότεροι και 8 μεγαλύτεροι του 37,5. Είναι 30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45=600.

Η γιαγιά

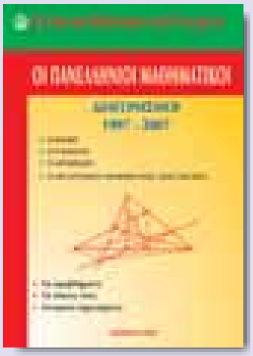
Η σχέση ήταν $Γ=2(Ε_1+Ε_2)$ ή 60=2x30, σε 10 χρόνια θα είναι: Η γιαγιά Γ+10 και οι εγγονές $(Ε_1+Ε_2)+20=30+20=50$. Δηλαδή η γιαγιά 70 και οι εγγονές συνολικά 50.

Η σχέση θα είναι: $Γ'-20=Ε'_1+Ε'_2$.

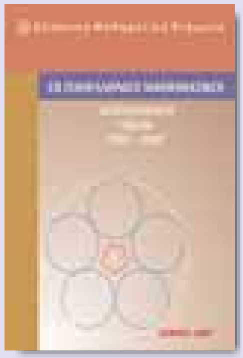
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ολυμπιάδες

Προσφορές



Νέα τιμή βιβλίου: 15€



Νέα τιμή βιβλίου: 10€

Τιμή βιβλίου: 25€

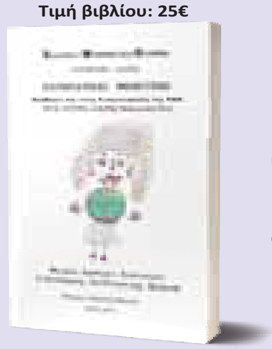
Διαγωνισμοί

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

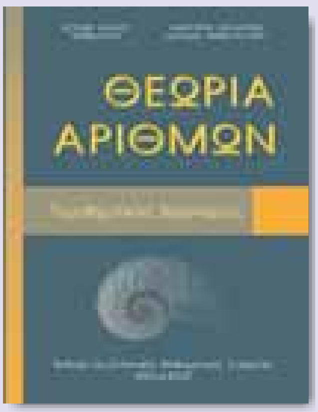


2η έκδοση

Τιμή βιβλίου: 18€

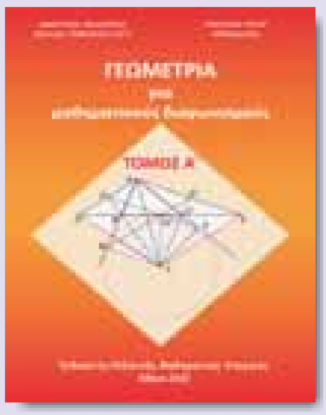
Βιβλία της ΕΜΕ

Νέο Βιβλίο



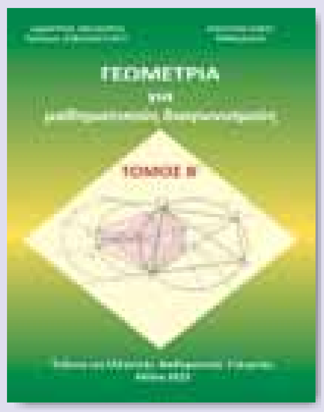
Τιμή βιβλίου: 25€

Νέο Βιβλίο



Τιμή βιβλίου: 25€

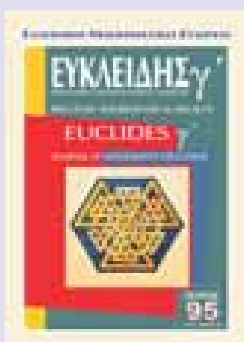
Νέο Βιβλίο



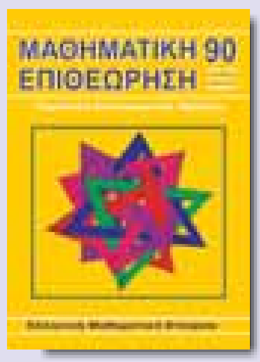
Τιμή βιβλίου: 20€

Περιοδικά

Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€



Τιμή τεύχους: 10€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr