ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

132

ΕΜΕ: ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

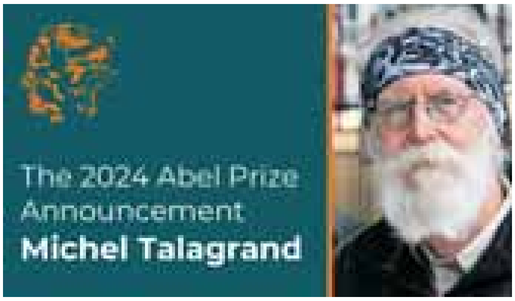
Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2024 ευρώ 3,5

EG MO | EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD 2024 GEORGIA

όταν ... τα Μαθηματικά “δίνουν φτερά”...

ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΛΟΓΙΑ ΤΟΥ **M. TALAGRAND** ΣΤΗΝ ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ ΤΗΣ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ



ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/98 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 132 - Απρίλιος - Μάϊος - Ιούνιος 2024 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επίκαιρα Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ΄ Τάξη

Γενικά Θέματα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

...πολλές ευχές
για επιτυχία
στις εξετάσεις

με πείσμα,
με όνειρο,
με ελπίδα,

... και καλή δύναμη
στην τελική προσπάθεια

Καλό
Καλοκαίρι

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Σας ευχαριστούμε πολύ και από αυτή τη θέση, για τις πολλές εργασίες που λάβαμε. Προσπαθήσαμε να αξιοποιήσαμε τις **περισσότερες**. Σε επόμενα τεύχη θα δημοσιευτούν και οι υπόλοιπες. Τα πολλά **απρόοπτα**, της έκδοσης, έκαναν την **προσπάθεια** αυτή να φαίνεται όλο και πιο **δύσκολη** ...
Σας ευχαριστούμε για την **κατανόηση** και να είστε πάντα καλά.

Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση για τα Μαθηματικά και την επικαιρότητα

$$[20+24]^2 + 2[20+24]=2024$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	4	Νοεμβρίου	2023
Ευκλείδης:	20	Ιανουαρίου	2024
Αρχιμήδης:	24	φεβρουαρίου	2024

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης:
Φελλούρης Ανάργυρος
Διευθυντής:
Τυρλής Ιωάννης

Επιμέλεια Έκδοσης:
Ζώτος Ευάγγελος

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη “Για τον Ευκλείδη Β΄”. Τα πρωτότυπα κείμενα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση με σύστημα κριτών,** αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς
1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA, 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK, 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: printfair **Τηλ.: 2102469799 -2102401695** **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Α. Κρέτσης

George Boole και η απαρχή του ψηφιακού υπολογιστή

Αδάμ Αγγελής – Ανδρέας Τριανταφύλλου


George Boole

Περισσότερο από 2000 έτη, η Λογική και τα Μαθηματικά ήταν δύο ξεχωριστοί κλάδοι. Ήταν ο George Boole (1815-1864) που κατόρθωσε να συνδέσει αυτούς τους δύο κλάδους με την συγγραφή και έκδοση το **1847** του δοκιμίου με τίτλο: The Mathematical Analysis of Logic[1] (**Η Μαθηματική Ανάλυση της Λογικής**). Στο σύγγραμμα αυτό υποστήριζε την σύνδεση της Λογικής με τα Μαθηματικά. Πώς δηλαδή μπορεί η Λογική (Αριστοτέλεια), να τυποποιηθεί με βάση τα Μαθηματικά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι και **ο Gottfried Leibniz** (1646-1716), **150 χρόνια νωρίτερα**, είχε σκεφτεί παρόμοια αλλά φαίνεται πως δεν προχώρησε στη διατύπωση και επεξεργασία των σκέψεων του. Και **ο Augustus de Morgan** (1806-1871), σύγχρονος και φίλος του Boole, είχε προβληματιστεί πάνω στο θέμα και αυτό ενθάρρυνε τον Boole να επεξεργαστεί και να διατυπώσει τις ιδέες του στο παραπάνω σύγγραμμα. Με βάση τις δημοσιεύσεις του, ο Boole, αφενός κέρδισε την εκτίμηση τού De Morgan αφετέρου δε προσλήφθηκε ως καθηγητής το 1849 στο Queen's College του Cork στην Ιρλανδία. Ως καθηγητής πλέον ασχολήθηκε ακόμη περισσότερο και συνέγραψε το An Investigation into the Laws of Thought[2] (Έρευνα στους Νόμους της Σκέψης).

Σύγγραμμα με το οποίο ουσιαστικά ορίζεται μια άλγεβρα με δίτιμες μεταβλητές – λογικές μεταβλητές – με τιμές «αληθής» (συμβολικά Α ή α ή 1ή T=true) και «ψευδής» (συμβολικά Ψ ή ψ ή 0 ή F=false).

Σήμερα μας είναι γνωστή η Άλγεβρα αυτή ως «**Άλγεβρα Boole**». Την Άλγεβρα αυτή θεμελίωσε αξιωματικά, το 1933, ο Αμερικανός Μαθηματικός **Edward Hantington** (1874-1952) ως μία αλγεβρική δομή Β εφοδιασμένη με τις πράξεις της σύζευξης ($\wedge$)(conjunction) της διάζευξης ($\vee$)(disjunction) και της άρνησης ($\neg$)(negation) που ορίζονται για τις μεταβλητές p και q όπως παρακάτω:

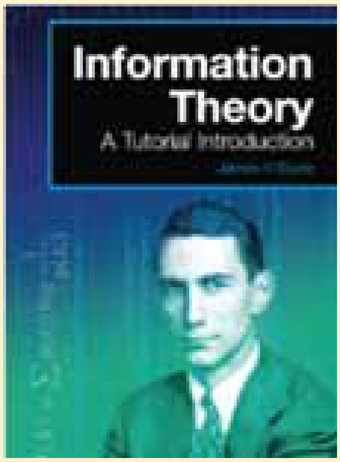
Λογική πράξη	Τελεστής	Συμβολισμός	Άλλος συμβολισμός	Ορισμός
Σύζευξη	AND	$p\wedge q$	*P AND q, Kpq,* $p\cdot q$, $p\otimes q$	$p \wedge q = 1\ αν\ p = q = 1$ $αλλιώς\ p \wedge q = 0$
Διάζευξη	OR	$p \vee q$	*P OR q, Apq,* $p+q$, $p\oplus q$	$p \vee q = 0\ αν\ p = q = 0$ $αλλιώς\ p \vee q = 1$
Άρνηση	NOT	$\neg p$	*NOT p, Np,* $\bar{p},\ p',!p$	$\neg p = 0\ αν\ p = 1,$ $\neg p = 1\ αν\ p = 0$

Τα αποτελέσματα των λογικών πράξεων μπορούν να παρουσιαστούν με πίνακες αληθείας, όπως παρακάτω:

[1] www.gutenberg.org/ebooks/36884 Πρόσβαση Σεπ. 2023
[2] www.gutenberg.org/ebooks/15114 Πρόσβαση Σεπ. 2023

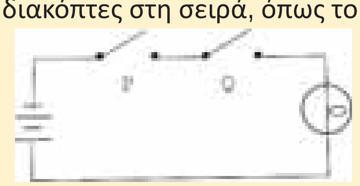
p	*q*	*p AND q*	*p OR q*	*NOT p*
0	0	0	0	1
0	1	0	1	
1	0	0	1	0
1	1	1	1	

Ο Claude Shannon (Κλοντ Σάνον, 1916-2001) το 1930 παρατήρησε ότι υπήρχε μία αναλογία μεταξύ των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων με διακόπτες και των λογικών πράξεων. Το 1938, στη διπλωματική εργασία που κατέθεσε για την λήψη μεταπτυχιακού τίτλου στο M.I.T.[3], βασισμένος στην παρατήρησή του αυτή, έδειξε ότι με βάση την Άλγεβρα Boole μπορούν να εκφραστούν και να μελετηθούν οι ιδιότητες ηλεκτρονικών κυκλωμάτων. Αποτέλεσμα υπήρξε η Άλγεβρα Boole **να βρει ευρεία εφαρμογή** στην σχεδίαση και υλοποίηση τέτοιων κυκλωμάτων και στην εν συνεχεία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Κατασκευάστηκαν έτσι τα ηλεκτρονικά κυκλώματα, με βάση τις «Λογικές Πύλες – Logic Gate»[4], τα οποία υλοποιούν τις λογικές πράξεις της Άλγεβρας Boole αλλά και ακόμη πιο σύνθετες. Οι λογικές πύλες ως ηλεκτρονικά κυκλώματα τροφοδοτούνται στην είσοδό τους με τάσεις της τάξης των 0,5 Volt που αντιστοιχεί στο λογικό 0 και της τάξης των 5 - 7 Volt που αντιστοιχούν στο λογικό 1. Έχουμε δηλαδή την αντιστοίχιση των δύο bits 0 και 1 σε χαμηλή και υψηλή στάθμη. Με τον συνδυασμό πολλών λογικών πυλών δημιουργούμε σύνθετα κυκλώματα τα λεγόμενα **λογικά κυκλώματα** τα οποία υλοποιούν κάποια λογική συνάρτηση. Ακολούθησαν τα ολοκληρωμένα κυκλώματα (IC – Integrated Circuits) και η κατασκευή και εξέλιξη των ψηφιακών υπολογιστών.

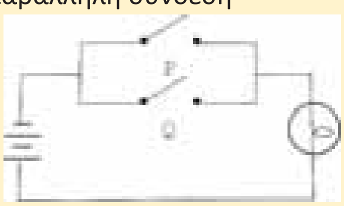


Η πράξη της άρνησης, όπως ορίζεται, αντιστοιχίζεται στη λειτουργία ενός κυκλώματος με έναν διακόπτη:

της σύζευξης ενός κυκλώματος με δύο διακόπτες στη σειρά, όπως το παρακάτω σχήμα:



και της διάζευξης με δύο διακόπτες σε παράλληλη σύνδεση



Τα σύμβολα των αντίστοιχων λογικών πυλών είναι τα παρακάτω.

[3] Εμ Άι Τι: Massachusetts Institute of Technology. Τεχνολογικό Ινστιτούτο Μασαχουσέτης

[4] Οι λογικές πύλες αποτελούν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες των ψηφιακών κυκλωμάτων και **λειτουργούν σαν διακόπτες που ελέγχουν τη ροή της ψηφιακής πληροφορίας.**

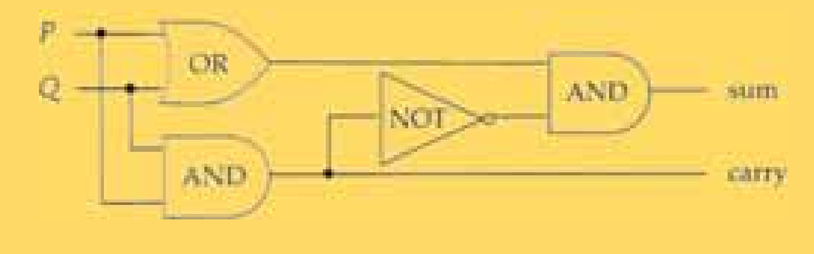
Η λογική πύλη NOT

Η λογική πύλη AND

Η λογική πύλη OR

Ας δούμε ένα παράδειγμα κυκλώματος «Ημιαθροιστή» (Half adder) χρησιμοποιώντας τις παραπάνω λογικές πύλες.

Κύκλωμα (Circuit)



Αν διατρέξουμε το κύκλωμα για τις τιμές 0 και 1 των P και Q, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

P	*Q*	*Κρατούμενο carry*	*Άθροισμα sum*
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αν προσθέσουμε τους δύο αριθμούς 1100 και 1010 του δυαδικού συστήματος:

$$\begin{array}{r} 1100 \\ 1010 \\ \hline 1\quad 0110 \end{array}$$

Όπως αναφέραμε στην αρχή ο Boole ασχολήθηκε με την «ποσοτικοποίηση» των λογικών εκφράσεων. Για τον σκοπό αυτό αντιστοιχίζει τις τιμές αληθείας **α** (αληθές) και **ψ** (ψευδές) με τις αριθμητικές τιμές **1** και **0** αντίστοιχα. Επιπροσθέτως, χρησιμοποιεί τα σύμβολα των αριθμητικών πράξεων για να συσχετίσει λογικές πράξεις μεταξύ τους.

Παρατηρεί π.χ. ότι αν στη σχέση $0{\cdot}1= 1{\cdot}0=0$ *της* κλασικής Άλγεβρας ο πολλαπλασιασμός αντιστοιχιστεί στην σύζευξη και τα 0 και 1 στο ψευδές και αληθές τότε η $p\wedge q$ αντικαθίσταται από το γινόμενο $p{\cdot}q$, όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

P	*q*	*P AND q*
Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Α	Α	Α

p	*q*	*p·q*
0	0	0 • 0 =0
0	1	0 • 1 =0
1	0	1 • 0 =0
1	1	1 • 1 =1

Έχουμε λοιπόν:

$p \text{ AND } q = p\wedge q = p \cdot q$ (B1)

και ακολούθως για τη διάζευξη:

$p \text{ OR } q = p \vee q = p + q - p \cdot q$[5] (B2)

και την άρνηση:

$\text{NOT } p = \neg p = p' = 1 - p$ (B3)

Σχετικό το απόσπασμα που ακολουθεί από το The Mathematical Analysis of Logic p.58.

1st. Disjunctive Syllogism.

Either X is true, or Y is true (exclusive),

$x + y - 2xy = 1;$

But X is true, $x = 1;$

Therefore Y is not true, $y = 0:$

Either X is true, or Y is true (not exclusive),

$x + y - xy = 1;$

But X is not true, $x = 0;$

Therefore Y is true, $y = 1:$

*1ος. **Διαζευκτικός συλλογισμός**.*

Είτε το x είναι αληθές, είτε το y είναι αληθές (αποκλειστικά),

$x + y - 2xy = 1;$

Αλλά το x είναι αληθές, $x = 1;$

Επομένως το y δεν είναι αληθές, $y = 0:$

Είτε το x είναι αληθές, είτε το y είναι αληθές (όχι αποκλειστικά), $x + y - xy = 1;$

Αλλά το x δεν είναι αληθές, $x = 0;$

Επομένως το y είναι αληθές, $y = 1:$

Ενδιαφέρον και το απόσπασμα από το An Investigation into the Laws of Thought p.41.

Let us assume.

x = hard, y = elastic, z = metals; and we shall have the following results:

"Non-elastic metals," will be expressed by z(1 − y);

"Elastic substances with non-elastic metals," by y + z(1 −y);

Ας υποθέσουμε.

x = σκληρό, y = ελαστικό, z = μέταλλα; και θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

«Μη ελαστικά μέταλλα,» θα εκφραστεί με z(1 – y);

«Ελαστικές ουσίες με μη ελαστικά μέταλλα», θα εκφραστεί με y + z(1 – y);

[5] Η αποκλειστική διάζευξη εκφράζεται από την σχέση: $p \veebar q = p + q - 2 \cdot p \cdot q$

"Hard substances, except metals," by $x - z$;

"Metallic substances, except those which are neither hard nor elastic," by

$z - z(1 - x)(1 - y)$, or by $z\{1 - (1 - x)(1 - y)\}$,

«Σκληρές ουσίες, εκτός από μέταλλα», θα εκφραστεί με $x - z$;

«Μεταλλικές ουσίες, εκτός από αυτές που δεν είναι ούτε σκληρές ούτε ελαστικές», από

$z - z(1 - x)(1 - y)$, ή κατά $z\{1 - (1 - x)(1 - y)\}$,

Στη συνέχεια θα αξιοποιήσουμε τις (Β1), (Β2) και (Β3) για να αποδείξουμε μερικές ιδιότητες της Άλγεβρας Boole, όπως αυτή έχει θεμελιωθεί από τον Edward Huntington.

I) ***Ισχύουν***: $p \wedge 0 = 0$, $p \wedge 1 = p$, $\mathbf{p \vee 0 = p}$, $\mathbf{p \vee 1 = 1}$

Απόδειξη:

Είναι $p \wedge 0 = p \cdot 0 = 0$

$p \wedge 1 = p \cdot 1 = p$

$p \vee 0 = p + 0 - p \cdot 0 = p$

$p \vee 1 = p + 1 - p \cdot 1 = 1$

II) p AND $p = p$ **και** p OR $p = p$ **ή αλλιώς** $p \wedge p = p$ **και** $p \vee p = p$ **ή ακόμη** $p^2 = p$ ***καθώς* και 2** $p - p^2 = p$

Απόδειξη:

Είναι $p \wedge p = (p \wedge p) \vee 0 = (p \wedge p) \vee (p \wedge p')$ αλλά και

$p = p \wedge 1 = p \wedge (p \vee p') = (p \wedge p) \vee (p \wedge p')$ *λόγω επιμεριστικής.*

Τα δεύτερα μέλη ίσα άρα και τα πρώτα.

Όμοια και με την διάζευξη $p \vee p = (p \vee p) \wedge 1 = (p \vee p) \wedge (p \vee p')$ και

$p = p \vee 0 = p \vee (p \wedge p') = (p \vee p) \wedge (p \vee p')$

Ας δούμε τώρα και την απόδειξη αλλιώς.

Είναι από (Β1) $p \wedge p = p \cdot p = p^2$

και $p = p \cdot 1 = p \cdot (p \vee p') =$ *λόγω της (Β2)* $= p \cdot (p + p' - p \cdot p') = p \cdot (p + p' - 0) = p \cdot p = p^2$.

Είναι λοιπόν $p \wedge p = p^2 = p$.

Όμοια και για την διάζευξη

III) $(p')' = p$

Απόδειξη:

Είναι $(p')' = 1 - p' = 1 - (1 - p) = p$ με εφαρμογή της (Β2).

IV) $\mathbf{(p \wedge q) \vee p = p}$ **και** $\mathbf{(p \vee q) \wedge p = p}$

Απόδειξη:

$(p \wedge q) \vee p = (p \cdot q) \vee p = p \cdot q + p - p \cdot q \cdot p = p \cdot q + p - p^2 \cdot q = p \cdot q + p - p \cdot q = p$

Αλλιώς: $(p \wedge q) \vee p = (p \wedge q) \vee (p \wedge 1) = p \wedge (q \vee 1) = p$

Ομοίως και η άλλη.

V) **Αν $\mathbf{p \vee q = 1}$ και $\mathbf{p \wedge q = 0}$, τότε $\mathbf{q = p'}$.**

Απόδειξη:

$p \vee q = 1$ είναι $p + q - p \cdot q = 1$ Τώρα η $p \wedge q = 0$ μας δίνει $p \cdot q = 0$ και η προηγούμενη γίνεται

$p + q - 0 = 1$ δηλαδή $q = 1 - p$. *Άρα* $q = p'$.

Με άλλο τρόπο (λαβαίνουμε υπόψη την ΙΙΙ).

$q = q \vee 0 = q \vee (p \wedge p') = (q \vee p) \wedge (q \vee p') = (p \vee q) \wedge (p' \vee q) =$

$1 \wedge (p' \vee q) = (p \vee p') \wedge (p' \vee q) = (p' \vee p) \wedge (p' \vee q) =$

$[(p' \vee p) \wedge p'] \vee [(p' \vee p) \wedge q] = p' \vee [(p' \wedge q) \vee (p \wedge q)] =$

$p' \vee [(p' \wedge q) \vee 0] = p' \vee (p' \wedge q) = p'$.

Νόμοι De Morgan

$(p \vee q)' = p' \wedge q'$,

$(p \wedge q)' = p' \vee q'$.

Απόδειξη:

Είναι $(p \vee q)' = 1 - (p \vee q) = 1 - (p + q - p \cdot q) = (1 - p) \cdot (1 - q) = p' \cdot q' = p' \wedge q'$

Η άλλη ομοίως.

Λέων ο Φιλόσοφος ή Μαθηματικός [790 - 869]

Γιώργος Α. Κουσινιώρης – Παράρτημα **ΕΜΕ Ηλείας**

Λέων ο Μαθηματικός

Ο Λέων ο **Φιλόσοφος** ή Λέων ο **Μαθηματικός** γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη την τελευταία δεκαετία του 8ου αιώνα. Ήταν περίφημος Βυζαντινός λόγιος, ένας εκ των πρωτεργατών της **Αναγέννησης** της εποχής της Δυναστείας των **Μακεδόνων**[1], μαθηματικός, γεωμέτρης, αστρονόμος, μηχανικός και φιλόσοφος. Σαν χαρακτήρας ήταν ήπιος, ταπεινός και μετριοπαθής. Ο ίδιος δεν επιθυμούσε την αναγνώριση και τη δόξα. Φαίνεται μάλιστα να **τις απέφευγε** και τις θεωρούσε ανούσιες. Προκειμένου να λάβει την καλύτερη δυνατή μόρφωση, **ταξίδεψε** σε διάφορα μέρη και εντρύφησε στις βιβλιοθήκες και στα αρχεία μοναστηριών. Τη στοιχειώδη εκπαίδευση την έλαβε στην Άνδρο, όπου και πέρασε τα παιδικά του χρόνια. Κατόπιν, σπούδασε γραμματική στην Κωνσταντινούπολη, καθώς και φιλοσοφία. Η μεγάλη του **αγάπη** όμως ήταν **οι θετικές επιστήμες**. Γι' αυτό ξαναγύρισε στην Άνδρο και, υπό την καθοδήγηση κάποιου σοφού δασκάλου – μοναχού, άρχισε την αναζήτηση σπάνιων χειρογράφων μαθηματικών και αστρονομίας. Για τρία χρόνια διετέλεσε αρχιεπίσκοπος Θεσσαλονίκης, απομακρύνθηκε όμως μετά το τέλος της Εικονομαχίας επειδή υποστήριζε εικονομαχικές απόψεις. Μετά την καθαίρεσή του επανήλθε στην Κωνσταντινούπολη και έγινε ιδιωτικός δάσκαλος, παρέχοντας ένα εκπληκτικό εύρος εγκυκλοπαιδικής παιδείας. Ζούσε μία πολύ ταπεινή και φτωχική ζωή μέχρι τη γνωριμία του με τον τότε εικονομάχο αυτοκράτορα Θεόφιλο[2] ο οποίος τον διόρισε κρατικό δάσκαλο και όταν ο Βάρδας[3] ίδρυσε το Πανδιδακτήριο (ή σχολή της Μαγναύρας), ένα εκπαιδευτικό ίδρυμα πανεπιστημιακού επιπέδου, στο Λέοντα που θεωρούνταν "*αληθινός **αναγεννησιακός** άνθρωπος*" και "*ο πιο **έξυπνος** άνθρωπος μέσα στο Βυζάντιο τον 9ο αιώνα*'' και διατηρούσε τη φήμη ως του πιο αξιόλογου ανδρός για την μόρφωσή του, ανέθεσε τη διεύθυνση της νέας ανώτατης αυτής σχολής, ενώ σε μαθητές του Λέοντα ανέθεσε την διδακτική ευθύνη. Η ημερομηνία θανάτου του Λέοντα είναι άγνωστη. Η τελευταία μαρτυρία γι' αυτόν είναι το **869** αλλά πιθανότατα πέθανε λίγο αργότερα.

Ο Λέων ο Φιλόσοφος ή Μαθηματικός διδάσκοντας σε πολυπληθές ακροατήριο. Μικρογραφία σε κώδικα με την «Σύνοψη Ιστοριών» του Ιωάννου Σκυλίτζη, 13ος αιώνας, Εθνική Βιβλιοθήκη της Ισπανίας.

Το έργο του Λέοντα

Τα γραπτά του Λέοντα που έχουν φτάσει στις μέρες μας είναι μερικές σημειώσεις που περιέχονται στα χειρόγραφα των διαλόγων του Πλάτωνα. Όπως αναφέραμε παραπάνω ο Λέων δίδαξε στο Πανδιδακτήριο. Το αντικείμενο της διδασκαλίας του ήταν η **τετρακτύς** (αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία και μουσική). Η ιστορία αναφέρει ότι όταν ένας από τους μαθητές του **αιχμαλωτίστηκε** κατά τους Βυζαντινούς-Αραβικούς Πολέμους, ο Χαλίφης Αλ-Μαμούν[4] (ή κατά άλλους ο αδελφός του Αλ-Μουτάσιμ) εντυπωσιάστηκε τόσο πολύ από τις γνώσεις του στα Μαθηματικά και προσέφερε στον Λέοντα **μεγάλα πλούτη** για να έρθει στη Βαγδάτη. Ο Λέων πήγε την επιστολή από τον χαλίφη στον Βυζαντινό αυτοκράτορα Θεόφιλο, ο οποίος, εντυπωσιασμένος από τη διεθνή του φήμη, του πρόσφερε ένα σχολείο (εκπαιδευτήριο) είτε στη Μαγναύρα είτε στην εκκλησία των Σαράντα Μαρτύρων. Μαθητές του ήταν

---

[1] **Μακεδονική Δυναστεία:** Αυτοκρατορική Δυναστεία της βυζαντινής αυτοκρατορίας (867-1056 μ.Χ.).

[2] **Θεόφιλος** (813 – 842 μ.Χ.): Βυζαντινός αυτοκράτορας (829-842). Η βασιλεία του χαρακτηρίζεται από την τελευταία περίοδο της εικονομαχίας.

[3] **Βάρδας** (816 – 866 μ.Χ.): Βυζαντινός αξιωματούχος, αρμενικής καταγωγής, από την Παφλαγονία.

[4] **Al Mamun** (786 – 833 μ.Χ.): **Χαλίφης της Βαγδάτης** από τη δυναστεία των Αββασιδών.

μεγάλα ονόματα «Μακεδονικής Αναγέννησης», δηλαδή της περιόδου της Μακεδονικής Δυναστείας (867 – 1081), όπως ο Μέγας Φώτιος[5] ο Αρέθας[6] Πατρών, οι Κύριλλος και Μεθόδιος[7] κ.α.).

Το έργο του Λέοντος ως μαθηματικού – αστρονόμου αλλά και μηχανικού ήταν πολυτιμότατο. Πρώτος παγκοσμίως εισήγαγε **τα γράμματα** αντί **των αριθμών** τόσο στη θεωρητική αριθμητική όσο και στην **Άλγεβρα** και **όχι οι Άραβες**, οι οποίοι εισήγαγαν ως αριθμητικά σημεία τους ινδικούς αριθμούς που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα. Διέσωσε όλα τα συγγράμματα μεγάλων Ελλήνων επιστημόνων όπως του **Απολλωνίου** του Περγαίου[8], του **Θέωνα** του Αλεξανδρέως[9], του μεγάλου **Ευκλείδη**, στα οποία προσέθεσε ερμηνευτικά σχόλια και τα οποία χρησιμοποιήθηκαν κατόπιν πάρα πολύ στη Δύση, του Αρχιμήδη και του Πτολεμαίου[10] και φρόντισε για τη μεταφορά πολλών εξ αυτών των έργων στην **αυλή του χαλίφη**. Επίσης συνέταξε αστρονομικούς πίνακες και ασχολήθηκε με τη μελέτη της κίνησης των πλανητών, καθώς και ένα ιατρικό έργο με τίτλο «*Σύνοψις εἰς τὴν φύσιν τοῦ ἀνθρώπου*» στο οποίο οι περισσότερες από τις ονομασίες που αναφέρονται χρησιμοποιούνται **απαράλλαχτες** μέχρι και σήμερα από τη σύγχρονη **ιατρική επιστήμη.** Δυστυχώς από το μεγάλο συγγραφικό του έργο δεν σώζεται τίποτα, με την εξαίρεση των σχολίων στο έργο του Ευκλείδη, λόγω του χρόνου και, κυρίως, του θρησκευτικού φανατισμού κάποιων εικονολατρών, που μετά τον θρίαμβο της Ορθοδοξίας και την επικράτηση της λατρείας των εικόνων, «**εξαφάνισαν**» τα έργα του εικονομάχου επιστήμονα, μετά το θάνατό του.

Ο Λέων έγινε γνωστός και ως μηχανικός για την τελειοποίηση του αρχαίου συστήματος τηλεπικοινωνίας, του οπτικού τηλέγραφου, γνωστού ως φρυκτωρίου, ενός συστήματος από φλεγόμενους πυρσούς για τη μετάδοση μηνυμάτων. Δημιούργησε μία αλυσίδα μόλις επτά πύργων – σταθμών, μήκους περίπου δύο χιλιάδων χιλιομέτρων από την Κωνσταντινούπολη ως την Ταρσό της Κιλικίας, τους οποίους και έκτισε στις ψηλότερες κορυφές των οροσειρών που μεσολαβούσαν μεταξύ των δύο πόλεων, ώστε η φωτιά τους να είναι ορατή από εκατοντάδες χιλιόμετρα μακριά. Το σύστημα μετέδιδε όχι μόνο ένα αλλά δώδεκα διαφορετικά μηνύματα. Αυτό ήταν δυνατό χάρη σε δύο τέλεια **συγχρονισμένα μηχανικά ρολόγια**, τα οποία πιθανώς κατασκεύασε ο ίδιος, που ήταν τοποθετημένα στην αρχή και στο τέλος της αλυσίδας. Με το παραπάνω σύστημα, το αυτοκρατορικό επιτελείο στην Κωνσταντινούπολη μπορούσε να πληροφορηθεί για το τι συνέβαινε στα ανατολικά σύνορα της αυτοκρατορίας μέσα σε μία έως το πολύ έντεκα ώρες. Αυτή η ταχύτητα μετάδοσης μηνυμάτων σε μεγάλες αποστάσεις ξεπεράστηκε χίλια χρόνια αργότερα με την ανακάλυψη του τηλέγραφου από τον Σάμιουελ Μορς το **1838**.

Ο Λέων ως βαθύς γνώστης της αλεξανδρινής τεχνολογίας τελειοποίησε μηχανήματα που είχε κατασκευάσει **ο Ήρων** ο Αλεξανδρεύς, ή που προϋπήρχαν στα βυζαντινά ανάκτορα δημιουργώντας διάφορα αυτόματα μεταλλικά αντικείμενα για τα βυζαντινά ανάκτορα, αξιοποιώντας την υδροστατική και αεροστατική πίεση. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι κατασκεύασε και τοποθέτησε στην αίθουσα του θρόνου έναν επιχρυσωμένο πλάτανο, που στα κλαδιά του κάθονταν χρυσά πουλιά που κουνούσαν τα φτερά τους και κελαηδούσαν ενώ στην κορυφή του υπήρχε ένας χρυσός άγγελος που έπαιζε σάλπιγγα, κάτω δε από το δένδρο υπήρχαν ολόχρυσοι αυτόματοι οινοχόοι που κερνούσαν κρασί τους καλεσμένους του αυτοκράτορα. Στη μαρμάρινη βάση του

*Ο **ήλιος**, οι μήνες και τα σημεία του ζωδιακού κύκλου, όπως απεικονίζονται σε **μικρογραφία** χειρογράφου της «Μαθηματικής Σύνταξης του Πτολεμαίου» (Vat. Gr. 594). Έναν αντίστοιχο **κώδικα** είχε στη συλλογή του ο Λέων ο Φιλόσοφος.*

---

5 **Μέγας Φώτιος** (820 – 893 μ.Χ.): Πατριάρχης Κωνσταντινουπόλεως, άγιος της Εκκλησίας.

6 **Αρέθας** (Πάτρα 860 – Καισάρεια 935 μ.Χ.): Αρχιεπίσκοπος Καισάρειας. Διαπρεπής λόγιος της Μεσοβυζαντινής περιόδου.

7 **Κύριλλος (**827–828 μ.Χ.) και **Μεθόδιος (**815–820 μ.Χ.): Αδελφοί Ιεραπόστολοι από τη Θεσσαλονίκη που έκαναν τον εκχριστιανισμό των Σλάβων.

8 **Απολλωνίος του Περγαίος**: Έλληνες μαθηματικός, γεωμέτρης και αστρονόμος του 3ου π.Χ. αιώνα.

9 **Θέων ο Αλεξανδρεύς** (περ. 335 – περ. 405μ.Χ.): Έλληνας λόγιος και μαθηματικός, που έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου.

10 **Κλαύδιος Πτολεμαίος** (100 – 170μ.Χ): Ελληνο-Ρωμαίος μαθηματικός, αστρονόμος και γεωγράφος.

θρόνου του αυτοκράτορα τοποθέτησε ορειχάλκινα επιχρυσωμένα λιοντάρια τα οποία, όταν κάποιος πλησίαζε το θρόνο, σηκώνονταν όρθια άνοιγαν το στόμα και βρυχιόνταν.
Το πιο εντυπωσιακό επίτευγμα του Λέοντος στον **τομέα του αυτοματισμού** υπήρξε το «μηχανικόν σάρωθρον», μια μηχανική χελώνη που **καθάριζε τους δρόμους** της Κωνσταντινούπολης.
Η βιβλιοθήκη του Λέοντα είναι η πρώτη ιδιωτική βιβλιοθήκη για την οποία διαθέτουμε κάποιες πληροφορίες αναφορικά με το περιεχόμενό της σε κλασικά κείμενα. Κάπως περισσότερα γνωρίζουμε για τα βιβλία του που αφορούσαν στις θετικές επιστήμες, όπως η πραγματεία μηχανικής του Κυρίνου και του Μαρκέλλου, το σύγγραμμα περί κωνικών τομών του Απολλώνιου του Περγαίου, ένα αστρονομικό σύγγραμμα του Θέωνα του Αλεξανδρέα και ένα εγχειρίδιο γεωμετρίας του Πρόκλου του Ξανθία, δεμένα μαζί. Βέβαιο πρέπει να θεωρείται ότι είχε και τα έργα του Ευκλείδη. Επίσης ο Λέων απέκτησε, ή έβαλε να αντιγράψουν για λογαριασμό του, την *Κοσμογραφία* του Πτολεμαίου, ενώ τον βρίσκουμε και στην αρχή της χειρόγραφης παράδοσης του κειμένου του Αρχιμήδη, καθώς δύο χειρόγραφα (του 13ου και 16ου αιώνα) αναγράφουν στο τέλος τους την ακόλουθη επίκληση: *Ευτυχοίης Λέον γεωμέτρα πολλούς εις λυκάβαντας ίοις πολύ φίλτατε Μούσαις* (*Βιβλ*. ΙΙΙ, 195-200).

Αποτίμηση

Εν κατακλείδι, ο Λέων ο Μαθηματικός υπήρξε πολύ σπουδαία προσωπικότητα για τη **βυζαντινή παιδεία** και το βυζαντινό πολιτισμό κατά τον 9ο αιώνα. Ενώ την εποχή των πρώτων βημάτων του δεν έβρισκε βιβλία και δασκάλους στη πρωτεύουσα, όταν πέθανε λειτουργούσε μία **ανώτατη σχολή** και πολλές νέες βιβλιοθήκες. Ο Λέων μπορεί και πρέπει να θεωρηθεί ως ένας από τους προδρόμους και τους βασικότερους πρωταγωνιστές **της αναγέννησης** των γραμμάτων και της παιδείας κατά τον ένατο αιώνα. Όλοι οι σύγχρονοί του τον τίμησαν και αναγνώρισαν την αξία του ως διδασκάλου και ανθρώπου. Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα το αποτελεί το γεγονός ότι αν και ανιψιός του πατριάρχη Ιωάννη Γραμματικού και ενταγμένος στη παράταξη των εικονομάχων, δεν κατηγορήθηκε ούτε στηλιτεύτηκε από τους συγχρόνους του γι΄ αυτή του τη στάση, σε αντίθεση με το θείο του, ο οποίος υβρίστηκε και κατηγορήθηκε βαρύτατα. Είναι πάντως βέβαιο ότι το όνομα του Λέοντος του **Μαθηματικού ή Έλληνος**, όπως τον χαρακτήρισαν οι σύγχρονοι του, είναι ταυτισμένο με την εποχή του στην πρόοδο και πνευματική ακμή της οποίας συνέβαλλε τα μέγιστα.

Πηγές:

- https://el.wikipedia.org/wiki/Λέων_ο_Φιλόσοφος
- https://el.wikipedia.org/wiki/Μακεδονική_Αναγέννηση
- https://el.wikipedia.org/wiki/Βάρδας
- https://www.csd.auth.gr/news/lectures/
- https://www.lecturesbureau.gr/1/leo-the-mathematician-2437/
- https://www.aboutlibraries.gr/libraries/handle/20.500.12777/pro_276
- https://24grammata.com/ λεων-ο-μαθηματικοσ-ή-φιλοσοφοσ /

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε δύο από αυτούς να έχουν διαφορά μεγαλύτερη του $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός $\boldsymbol{x}$, ώστε

$$\boldsymbol{x^2 - 4(a+b+c)x + 12(ab+bc+ca) < 0}.$$

(Σ. Μπραζιτίκος)

Λύση **(1ος τρόπος)** Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 16(a+b+c)^2 - 48(ab+bc+ca) = 8((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)).$$

Αφού δύο από τους αριθμούς απέχουν τουλάχιστον $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, το τετράγωνο της διαφοράς τους θα είναι μεγαλύτερο του $1/8$, άρα $\Delta > 1$. Αφού η διακρίνουσα είναι θετική, το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες, έστω $\rho_1 > \rho_2$ μεταξύ των οποίων το πρόσημο του τριωνύμου είναι αρνητικό. Επιπλέον, έχουμε:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{4(a+b+c)+\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{4(a+b+c)-\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\Delta} > 1,$$

οπότε μεταξύ των ρ_1, ρ_2 υπάρχει ακέραιος, έστω x, ο οποίος κάνει το δεδομένο τριώνυμο αρνητικό σύμφωνα με τα παραπάνω.

2ος τρόπος: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\mathrm{f(x)} = x^2 - 4(a+b+c)x + 12(ab+bc+ca) = x(x - 4(a+b+c)) + 12(ab+bc+ca).$$

Παρατηρούμε ότι $f\big(2(a+b+c)\big) = -4(a+b+c)^2 + 12(ab+bc+ca)$

$$= -2((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) < 0.$$

Η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = 2(a+b+c)$. Έτσι, ισχύει

$$f(2(a+b+c) + \frac{1}{2}) = f(2(a+b+c) - \frac{1}{2}).$$

Κάνοντας πράξεις, έχουμε

$$f(2(a+b+c) + \frac{1}{2}) = 2(a+b+c) + \frac{1}{2})(-2(a+b+c) + \frac{1}{2}) + 12(ab+bc+ca)$$

$$= \frac{1}{4} - 4(a+b+c)^2 + 12(ab+bc+ca) = \frac{1}{4} - 2((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$$
$$= \frac{1 - 8((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)}{4} < 0,$$

αφού $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}$, από την υπόθεση. Έτσι, το τριώνυμο διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο διάστημα $\left[2(a+b+c) - \frac{1}{2}, 2(a+b+c) + \frac{1}{2}\right]$, το οποίο έχει μήκος 1. Συνεπώς, υπάρχει κάποιος ακέραιος σε αυτό το διάστημα για τον οποίο ικανοποιείται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ_1 με κέντρο το σημείο O. Θεωρούμε το κύκλο Γ_2 που έχει κέντρο σημείο D, που ανήκει στον κύκλο Γ_1, και εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F. Οι κύκλοι Γ_1 και Γ_2 τέμνονται στα σημεία K και G (το σημείο K βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου BFE). Αν η ευθεία KG τέμνει τις ευθείες FE και CD στα σημεία M και N, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο BCNM είναι εγγράψιμο.

(Ε. Ψύχας)

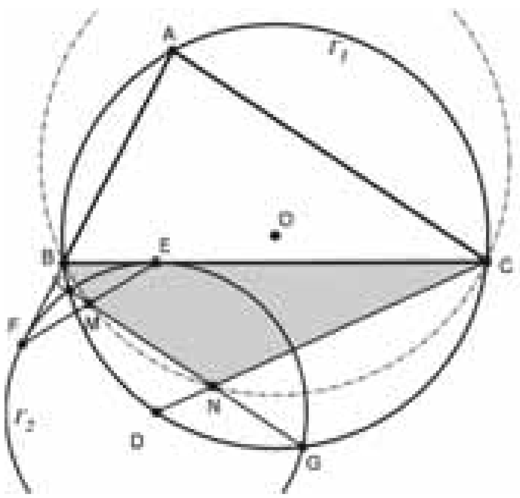
Λύση

Ισχύουν οι καθετότητες DE ⊥ BC και DF ⊥ AB (διότι ο κύκλος Γ_2 εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F).

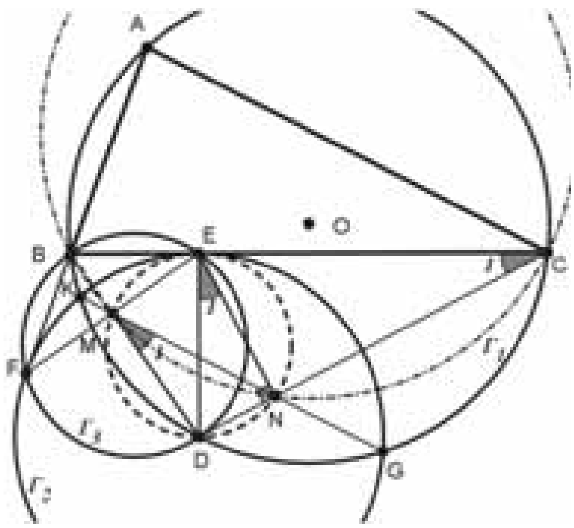
Άρα το τετράπλευρο BEDF είναι εγγράψιμο (σε κύκλο έστω Γ_3) και ισχύουν οι ισότητες τμημάτων:

$$BE = BF \text{ και } DE = DF \qquad (1)$$

Η EF είναι η κοινή χορδη των κύκλων Γ_2 και Γ_3 και η KG είναι η κοινή χορδη των κύκλων Γ_1 και Γ_2. Οι δύο παραπάνω χορδές τέμνονται (σύμφωνα με την εκφώνηση) στο σημείο M και επειδή η BD είναι η κοινή χορδη των κύκλων Γ_1 και Γ_3, η BD θα διέρχεται από το σημείο M (ριζικό κέντρο των τριών κύκλων $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

1ος τρόπος: Τα ορθογώνια τρίγωνα AFD, CED είναι ίσα καθώς έχουν $FD = ED$, και $F\hat{A}D = E\hat{C}D$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο), άρα DA=DC. Έπεται ότι η DO είσαι μεσοκάθετη της AC, και αφού $DO \perp KG$, έπεται ότι $AC \parallel KG$, (*).
Αφού η BD διχοτομεί την $F\hat{B}E$ και το BDCA είναι εγγεγραμμένο στον Γ_1 έχουμε $M\hat{B}C = F\hat{B}M = A\hat{C}D = M\hat{N}D$ (λόγω της (*)), οπότε το τετράπλευρο BCNM εγγράψιμο, σχήμα 1.

2ος τρόπος: Η BD είναι η μεσοκάθετος της EF (από τις σχέσεις (1)), σχήμα 2, οπότε έχουμε:

$$D\hat{M}E = 90° \qquad (2).$$

Από το κύκλο Γ_1 έχουμε: $NC \cdot ND = NG \cdot NK$.

Το γινόμενο όμως $NG \cdot NK$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου N ως προς το κύκλο Γ_2, και άρα

$$NG \cdot NK = DE^2 - DN^2.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $NC \cdot ND = DE^2 - DN^2 \qquad (3).$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο DCE (σε συνδυασμό με την σχέση (3)) συμπεραίνουμε ότι το NE είναι ύψος του τριγώνου **(*)** και κατά συνέπεια: $D\hat{N}E = 90° \qquad (4).$

Από τις σχέσεις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο DMEN είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $\hat{M}_1 = \hat{E}_1$. Από τα ορθογώνια τρίγωνα DNE και CDE έχουμε: $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε ότι το τετράπλευρο BCNM είναι εγγράψιμο.

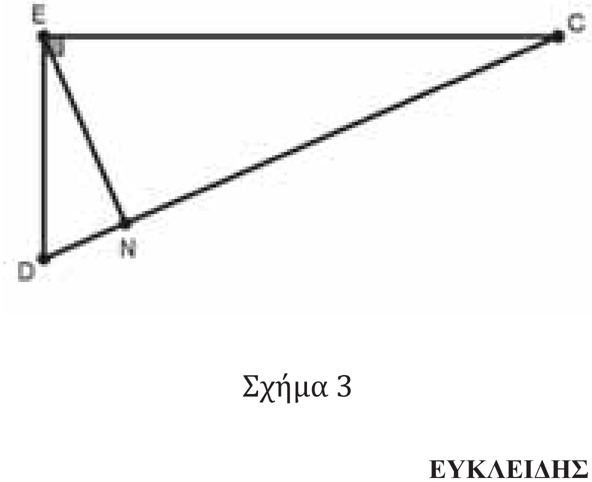
(*)

$$NC \cdot ND = DE^2 - DN^2 \qquad (3).$$

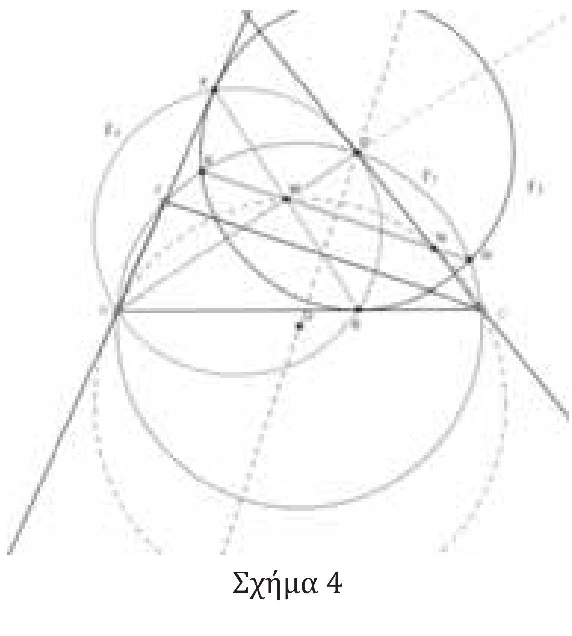
$$NC \cdot ND = DE^2 - DN^2 \Leftrightarrow (CD - ND) \cdot ND = DE^2 - DN^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow DC \cdot DN - DN^2 = DE^2 - DN^2 \Leftrightarrow DC \cdot DN = DE^2 \Leftrightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{DN}{DE}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι τα τρίγωνα DNE και DEC είναι όμοια, (σχήμα 3).



Σχήμα 3



Σχήμα 4

3ος τρόπος

Εφόσον το σημείο D ισαπέχει από τις ευθείες AB και BC και είναι σημείο του Γ_1, θα είναι το μέσο του τόξου AC, (σχήμα 2). Άρα OD ⊥ AC. Όμως OD ⊥ KG, αφού OD είναι διάκεντρος των κύκλων Γ_1, Γ_2. Άρα είναι KG ∥ AC. Από την παραπάνω παραλληλία έχουμε:

$$\mathrm{D\widehat{N}M} = \mathrm{D\widehat{C}B} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{B}}.$$

Το τετράπλευρο DEBF είναι εγγεγραμμένο και έστω Γ_3 ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Οι κύκλοι Γ_1, Γ_2 και Γ_3 τέμνονται ανά δύο, οπότε οι χορδές που ορίζουν τα σημεία τομής τους, συντρέχουν. Δηλαδή το σημείο M, που είναι το σημείο τομής των KG, FE, θα ανήκει και στην ευθεία BD. Όμως η ευθεία BD είναι διχοτόμος της γωνίας B.

Άρα έχουμε $\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{M\widehat{B}C} = \mathrm{D\widehat{N}M}$, οπότε το τετράπλευρο BCNM είναι εγγράψιμο.

4ος τρόπος: Ισχύουν οι καθετότητες DE ⊥ BC και DF ⊥ AB (διότι ο κύκλος Γ_2 εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F). Άρα το τετράπλευρο BEDF είναι εγγράψιμο (σε κύκλο έστω Γ_3), (σχήμα 4).

Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο Γ_2 (με κέντρο D). Εφόσον ο κύκλος Γ_3 περνάει από το D, γίνεται ευθεία, η κοινή τους χορδή FE, και επομένως:

η εικόνα του B ανήκει στην ευθεία FE. (5)

Εφόσον ο κύκλος Γ_1 περνάει από το D γίνεται ευθεία, η κοινή τους χορδή KG, επομένως:

η εικόνα του B ανήκει και στην KG. (6)

Από τις (5), (6) συμπεραίνουμε ότι η εικόνα του B μέσω της αντιστροφής είναι το σημείο M. Τέλος, το σημείο C πηγαίνει στο σημείο N. Άρα το τετράπλευρο BMNC είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Έστω $n \geq 2$ ένας ακέραιος. Θεωρούμε δύο πεπερασμένα υποσύνολα A, B των ακεραίων αριθμών, ώστε το σύνολο A να έχει το πολύ n στοιχεία και έστω Γ ένα υποσύνολο του συνόλου $\{(\alpha,\beta): \alpha \in A, \beta \in B\}$. Ο Αχιλλέας γράφει σε ένα πίνακα όλες τις δυνατές διαφορές $\alpha - \beta$, με $(\alpha,\beta) \in \Gamma$. Έστω d το πλήθος όλων αυτών των διαφορών. Στη συνέχεια ο Αχιλλέας καταγράφει σε ένα άλλο πίνακα όλες τις τριάδες (κ,λ,μ) με $(\kappa,\lambda) \in \Gamma, (\kappa,\mu) \in \Gamma$. Έστω p το πλήθος όλων αυτών των τριάδων. Να αποδείξετε ότι: $n \cdot p \geq d^2$.

(Σ. Μπραζιτίκος)

Λύση

Για ένα σύνολο X, θα συμβολίζουμε με $|X|$, το πλήθος των στοιχείων του. Το πλήθος των δυνατών διαφορών $\alpha - \beta$, με $(\alpha,\beta) \in \Gamma$, είναι το πολύ όσο το πλήθος των στοιχείων του Γ, δηλαδή

$$d \leq |\Gamma|. \qquad (*)$$

Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ και για κάθε i, υποθετούμε ότι υπάρχουν b_i ζεύγη $(a_i, b) \in \Gamma$.

Τότε υπάρχουν b_i^2 τριάδες (a_i, λ, μ) με $(a_i, \lambda) \in \Gamma, (a_i, \mu) \in \Gamma$.

Συνεπώς, υπάρχουν συνολικά $p = b_1^2 + \cdots + b_m^2$ τριάδες (κ, λ, μ) με $(\kappa, \lambda) \in \Gamma, (\kappa, \mu) \in \Gamma$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$m(b_1^2 + \cdots + b_m^2) \geq (b_1 + \cdots + b_m)^2 \qquad (1)$$

Το αριστερό μέλος είναι ίσο με $|A| \cdot p$, ενώ το δεξί μέλος είναι ίσο με $|\Gamma|^2$. Όμως, από την εκφώνηση έχουμε $|A| \leq n$, επομένως η (1) δίνει: $n \cdot p \geq |\Gamma|^2 \geq d^2$, όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την (*).

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος $\boldsymbol{n \geq 1}$, τέτοιος ώστε το πλήθος όλων των ζευγών $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ θετικών ακέραιων αριθμών με $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$ να είναι μεγαλύτερο του 2024.

(Α. Συνεφακόπουλος)

Λύση (**1^{ος} τρόπος**) Αναζητούμε λύσεις (a, b) με $a - b = kb$, δηλ. $a = (k+1)b$ για κάποιο ακέραιο $k > 0$. Τότε η παράσταση στο αριστερό μέλος της δοθείσας εξίσωσης είναι ίση με

$$\frac{1}{kb} - \frac{1}{(k+1)b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + 1\right) = \frac{1}{b} \cdot \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}$$

οπότε έχουμε $\quad b = \frac{(k(k+1)+1)n}{k(k+1)} = n + \frac{n}{k(k+1)}$

Αρκεί, λοιπόν, να επιλέξουμε ως n έναν θετικό ακέραιο ο οποίος έχει περισσότερους από 2024 διαιρέτες της μορφής $k(k+1)$. Πράγματι, για παράδειγμα, αν (p_n) είναι η ακολουθία των πρώτων με p_1=2, p_2=3, ..., τότε ο αριθμός $n = p_1(p_1+1)\, p_2\, (p_2+1) \cdots p_{2025}\, (p_{2025}+1)$, ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

2^{ος} τρόπος: Η εξίσωση γράφεται ως $\frac{a^2 - ab + b^2}{ab(a-b)} = \frac{1}{n}$.

Θέτουμε $d = (a, b)$, οπότε $a = dx, b = dy$ και η εξίσωση γίνεται: $\frac{xy(x-y)}{x^2 - xy + y^2} = \frac{n}{d}$.

Αν $(n, d) = S$, τότε $n = Su$ και $d = Sv$. Για να ισχύει η τελευταία είναι πρέπει να έχουμε:

$xy(x-y) = u$ και $x^2 - xy + y^2 = v$. Αν θέσουμε $xy = s$ και $x - y = t$, τότε οι δύο σχέσεις γίνονται $st = u$ και $t^2 - 3s = v$. Τότε $x = \frac{s}{y}$ και $\frac{s}{y} - y = t \Leftrightarrow y^2 + yt - s = 0$.

Η διακρίνουσα της τελευταίας είναι $\Delta = t^2 + 4s$. Ένας τρόπος για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση είναι να πάρουμε $s = k(t+k)$ για κάποιον θετικό ακέραιο k και τότε η εξίσωση έχει λύση την $y = k$. Σε αυτή την περίπτωση $x = k + t$, οπότε $u = st = kt(k+t)$ και $v = t^2 - 3k(t+k)$. Πρέπει $v > 0$ (ένας τρόπος είναι να επιλέξουμε $k = 1$ και $t \geq 4$).

Η κατασκευή τώρα γίνεται ως εξής: Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο n που έχει 2024 διαιρέτες u της μορφής $kt(k+t)$. Για κάθε έναν από αυτούς, σύμφωνα με τα παραπάνω, προσδιορίζεται μια τριάδα x, y, v ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση. Από αυτή την τριάδα προσδιορίζεται ένα ζεύγος (a, b) που ικανοποιεί την εξίσωση.

13η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια

11-17 Απριλίου 2024

Τσκαλτούμπο, Γεωργία

Η 13η Ευρωπαϊκή Μαθηματική Ολυμπιάδα για Κορίτσια πραγματοποιήθηκε από 11 έως 17 Απριλίου 2024 στην πόλη Τσκαλτούμπο της Γεωργίας. Συνολικά συμμετείχαν πενήντα τέσσερεις χώρες από όλο τον κόσμο με διακόσιες δώδεκα μαθήτριες.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, μέσω των διαγωνισμών «ΘΑΛΗΣ», «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» και «ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» επέλεξε τις παρακάτω τέσσερις (4) μαθήτριες ως μέλη της ελληνικής αποστολής:

Αγνιάδη Παρασκευή	2ο Γενικό Λύκειο Λιβαδειάς	Συμμετοχή
Ζάχου Ιωάννα	Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη	Εύφημη Μνεία
Κράτσα Λυδία	Σχολή Μωραΐτη	Συμμετοχή
Νταραρά Ασπασία	Πρότυπο Γενικό Λύκειο Πατρών	Συμμετοχή

Τις μαθήτριες συνόδευσαν ως αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ο διδάκτωρ μαθηματικός Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, στον οποίο οφείλεται και η επιμέλεια των λύσεων που ακολουθούν, και ως υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1 (Σλοβακία). Δύο διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί u και v είναι γραμμένοι σε έναν πίνακα. Εκτελούμε μια ακολουθία βημάτων. Σε κάθε βήμα κάνουμε μια από τις ακόλουθες δύο ενέργειες:

(i) Εάν οι a και b είναι διαφορετικοί αριθμοί στον πίνακα, τότε μπορούμε να γράψουμε τον $a+b$ στον πίνακα, αν δεν είναι ήδη εκεί.

ii) Εάν οι a, b και c είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί στον πίνακα, και αν ο ακέραιος αριθμός x ικανοποιεί την $ax^2+bx+c=0$, τότε μπορούμε να γράψουμε τον x στον πίνακα, αν δεν είναι ήδη εκεί. Να βρείτε όλα τα ζεύγη των αρχικών αριθμών (u, v) από τα οποία μπορεί τελικά να γραφεί στον πίνακα οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός, μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Λύση. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $u<v$. Πρώτα, σημειώνουμε ότι εάν ένας από τους u ή v είναι ίσος με 0, τότε δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα τρίτο αριθμό εκτός από αυτούς για να χρησιμοποιήσουμε την (ii).

Επίσης, εάν $v<0$, δηλαδή και οι δύο είναι αρνητικοί, τότε $u+v<0$, και δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν θετικό αριθμό, αφού οι λύσεις της $ax^2+bx+c=0$ με $a, b, c<0$ δεν μπορούν να είναι θετικές.

Αν $u=-1$, και $v=1$, τότε μπορούμε μόνο να πάρουμε $u+v=0$, και κολλήσαμε. Για οποιαδήποτε άλλη επιλογή του u ή v, μπορούμε να γράψουμε οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό στον πίνακα.

Πράγματι, πρώτα ας εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου $u \neq -1$ ή $v \neq 1$ και $u < 0 < v$.

Αν $u = -1$ και $1 < v$, μπορούμε να πάρουμε όλους τους αριθμούς $v-1, v-2, ...,1, 0$ χρησιμοποιώντας την (i). Έχοντας δημιουργήσει το 1, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να δημιουργήσουμε οποιονδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό. Καθώς το $-v$ είναι λύση της $x^2+(v+1)x+v=0$, μπορούμε να δημιουργήσουμε όλους τους αρνητικούς ακεραίους από το $-v$ έως το -2 χρησιμοποιώντας την (i) με το $-v$ και το 1, και όλους τους ακεραίους μικρότερους του $-v$ χρησιμοποιώντας την λειτουργία (i) με το $-v$ και το -1.

Αν $u < -1$ και $v = 1$, τότε μπορούμε να πάρουμε το $u+v$, το οποίο είναι διαφορετικό από u, v, και αυτό θα μας δώσει το -1 ως λύση της $ux^2+(u+v)x+v=0$. Τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε όλους τους ακεραίους μικρότερους του u χρησιμοποιώντας την (i) με το -1, και όλους τους απουσιάζοντες αριθμούς μεταξύ του u και του 1 χρησιμοποιώντας την (i) . Καθώς το 2 είναι ακέραια λύση της $x^2-x-2=0$, μπορούμε να πάρουμε το 2 και συνεπώς οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό, όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

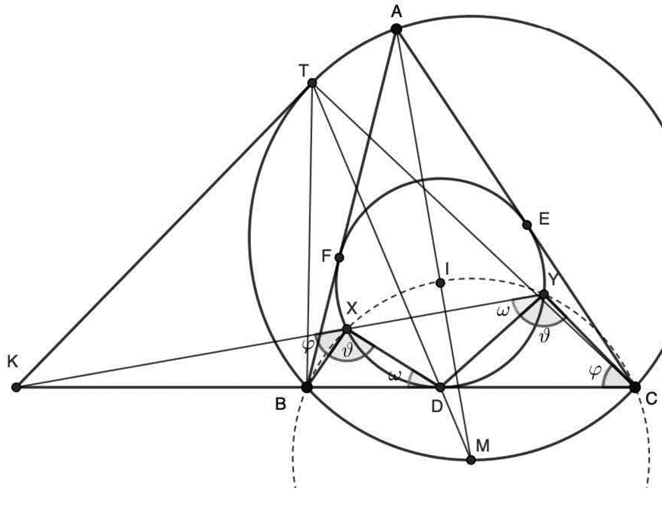
Αν $u < -1$ και $1 < v$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (ii) για να πάρουμε το -1, και έχουμε τελειώσει από προηγούμενη περίπτωση.

Αν $u > 0$, τότε $v \geq 2$, και μπορούμε να δημιουργήσουμε το -1 από την $ux^2+(u+v)x+v=0$. Αυτό θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε την (i) για να δημιουργήσουμε όλους τους θετικούς ακεραίους, καθώς και το 0. Καθώς το $-c$ είναι λύση της $x^2+(c+1)x+c=0$, μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιονδήποτε ακέραιο μικρότερο ή ίσο με -2 επίσης.

Τα επιθυμητά αρχικά ζεύγη (u,v) είναι αυτά με $\min\{u,v\} > 0$ ή $\min\{u,v\} < 0 < \max\{u,v\}$ εκτός από το ζεύγος $(-1,1)$.

Πρόβλημα 2 (Ηνωμένο Βασίλειο). Δίνεται ένα τρίγωνο ABC με $AC > AB$, ο περιγεγραμμένος κύκλος του Ω και το έγκεντρο του I. Έστω ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου εφάπτεται στις πλευρές του BC, CA, AB στα σημεία D, E, F, αντίστοιχα. Έστω X και Y δύο σημεία στα μικρά τόξα $\widehat{DF}$ και $\widehat{DE}$ του εγγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\angle BXD = \angle DYC$. Έστω ότι η ευθεία XY τέμνει την ευθεία BC στο K. Έστω T το σημείο του Ω τέτοιο, ώστε η KT να είναι εφαπτόμενη στον Ω, και το T να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας BC με το σημείο A. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες TD και AI τέμνονται στον Ω.

Λύση. Έστω $\vartheta = B\widehat{X}D = D\widehat{Y}C$, και έστω $\omega = K\widehat{Y}D = X\widehat{D}B$, και $k = Y\widehat{K}C = X\widehat{K}D$ από το θεώρημα γωνιας χορδής και εφαπτομένης. Αρχικά παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο $BXYC$ είναι εγγράψιμο, αφού $K\widehat{B}X = B\widehat{X}D + B\widehat{D}X = X\widehat{Y}C$. Ας θέσουμε $\varphi = K\widehat{X}B = Y\widehat{C}D$. Αφού η KD είναι εφαπτόμενη του εγγεγραμμένου κύκλου του $\triangle ABC$ και η KT είναι εφαπτόμενη του Ω στο T, από τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο παίρνουμε $KD^2 = KX \cdot KY = KB \cdot KC = KT^2$, οπότε $KD = KT$, και άρα $K\widehat{T}D = K\widehat{D}T$.



Αρκεί να δείξουμε ότι η TD διχοτομεί την γωνία $B\widehat{T}C$, οπότε θα συναντά την AI στο μέσο M του ελάσσονος τόξου BC του Ω. Πράγματι, είναι $K\widehat{T}B = B\widehat{C}T = K\widehat{C}T$. Αφού η $K\widehat{D}T$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο DCT, έπεται ότι

$$C\widehat{T}D = K\widehat{D}T - K\widehat{C}T = K\widehat{T}D - K\widehat{T}B = B\widehat{T}D.$$

Άρα η TD διχοτομεί την γωνία $B\widehat{T}C$, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3 (Ολλανδία). Ονομάζουμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό n *παράξενο* αν, για κάθε θετικό διαιρέτη d του n, ο ακέραιος $d(d+1)$ διαιρεί τον $n(n+1)$. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε τέσσερεις διαφορετικούς παράξενους αριθμούς A, B, C και D, ισχύει ότι

$$\text{ΜΚΔ}(A, B, C, D) = 1.$$

Εδώ $\text{ΜΚΔ}(A, B, C, D)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των A, B, C και D.

Λύση. Παρατηρούμε ότι ο $n = 1$ είναι παράξενος και ότι κάθε πρώτος αριθμός είναι επίσης παράξενος. Έστω $n > 1$ ένας παράξενος αριθμός. Αν $d > 1$ είναι ένας διαιρέτης του n, τότε ο $\frac{n}{d}$ διαιρεί τον n, οπότε ο $\frac{n}{d}\left(\frac{n}{d}+1\right)$ διαιρεί τον $n(n+1)$. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι ο $n+d$ διαιρεί τον $d^2(n+1) = d^2(n+d) - (d^3 - d^2)$. Άρα ο $n+d$ διαιρεί τον $d^3 - d^2 > 0$, οπότε $n + d \leq d^3 - d^2$. Συγκεκριμένα, έχουμε $n < d^3$.

Θεωρώντας τον d ως τον μικρότερο πρώτο διαιρέτη του n, συμπεραίνουμε ότι ο n δεν μπορεί να έχει περισσότερους από δύο πρώτους διαιρέτες, λαμβάνοντας υπόψιν και τις πολλαπλότητες τους. Έτσι, από εδώ και στο εξής, ας θεωρήσουμε ότι $n = pq$, όπου p, q είναι πρώτοι αριθμοί. Μάλιστα, είναι $p \neq q$. Πράγματι, αν ήταν $p = q$ και $n = p^2$, τότε αφού $\text{ΜΚΔ}(p, p+1) = 1$, και ο $p(p+1)$ διαιρεί τον $p^2(p^2+1)$, θα είχαμε ότι ο $p+1$ διαιρεί τον $(p^2+1) - (p+1) = p^2 - p = p(p-1)$. Τότε ο $p+1$ θα διαιρεί τον $(p+1) - (p-1) = 2$, άτοπο.

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $p > q$. Αφού ο $p(p+1)$ διαιρεί τον $n(n+1) = pq(pq+1)$, ο $p+1$ διαιρεί τον $(p+1)q^2 - q(pq+1) = q(q-1)$. Ομοίως, ο $q+1$ διαιρεί τον $(q+1)p^2 - p(pq+1) = p(p-1)$. Αν $\text{ΜΚΔ}(q, p+1) = 1$, τότε ο $p+1$ διαιρεί τον $q-1$, οπότε $p < p+1 \leq q-1 < q$, άτοπο. Άρα $\text{ΜΚΔ}(q, p+1) \neq 1$, οπότε ο q διαιρεί τον $p+1$.

Επίσης, ο p δεν διαιρεί τον $q+1$, αφού $p > q$ (εκτός αν ήταν $p = 3$ και $q = 2$, που δεν γίνεται αφού ο $p+1$ πρέπει να διαιρεί τον $q(q-1)$). Συνεπώς $\text{ΜΚΔ}(q+1, p) = 1$, και άρα ο $q+1$ διαιρεί τον $p-1$.

Έστω $p + 1 = mq$ για κάποιο θετικό ακέραιο m. Τότε ο $q+1$ διαιρεί τον $p - 1 = mq - 2 = m(q+1) - (m+2)$, οπότε ο $q+1$ διαιρεί τον $m+2$. Από την άλλη, αφού ο $p+1$ διαιρεί τον $q(q-1)$, ο m διαιρεί τον $q-1$. Αν το πηλίκο των τελευταίων είναι μεγαλύτερο από το 1, τότε $m \leq \frac{q-1}{2}$. Αλλά, αφού ο $q+1$ διαιρεί τον $m+2$, είναι $q \leq m+1$, οπότε θα είχαμε $m \leq \frac{q-1}{2} \leq \frac{m}{2}$, άτοπο. Συνεπώς $m = q-1$ και έχουμε αποδείξει το εξής: αν ο $n > 1$ είναι σύνθετος και παράξενος, τότε $n = pq$, όπου οι $p > q$ είναι πρώτοι αριθμοί με $p = q^2 - q - 1$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ένας πρώτος αριθμός p μπορεί να διαιρεί τους παράξενους αριθμούς p, $p(p^2 - p - 1)$ (αν ο $p^2 - p - 1$ είναι πρώτος) και pq, όπου $p = q^2 - q - 1$ με q πρώτο. Έτσι, ο μεγιστος κοινός διαιρέτης περισσότερων των τεσσάρων παράξενων αριθμών πρέπει να ισούται με 1.

Πρόβλημα 4 (Ουκρανία). Για μια ακολουθία $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ακέραιων αριθμών, ένα ζεύγος (a_i, a_j) με $1 \leq i < j \leq n$ ονομάζεται *ενδιαφέρον* εάν υπάρχει ζεύγος (a_k, a_ℓ) με $1 \leq k < \ell \leq n$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Για κάθε $n \geq 3$, να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος από ενδιαφέροντα ζεύγη σε μια ακολουθία μήκους n.

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία $a_1 = 0$ και $a_i = 2^i$ για $2 \le i \le n$. Αν $2 \le j \le n-1$, τότε $\dfrac{a_{j+1}-a_1}{a_j-a_1} = \dfrac{2^{j+1}}{2^j} = 2$. Αν $3 \le i+1 \le j \le n-1$, τότε $\dfrac{a_{j+1}-a_{i+1}}{a_j-a_i} = \dfrac{2^{j+1}-2^{i+1}}{2^j-2^i} = 2$. Επιπλέον, $\dfrac{a_n-a_1}{a_n-a_{n-1}} = \dfrac{2^n-0}{2^n-2^{n-1}} = \dfrac{2^n}{2^{n-1}} = 2$. Έτσι, όλα τα ζεύγη (a_i, a_j) με $1 \le i < j \le n-1$ είναι ενδιαφέροντα, τα οποία μαζί με το (a_{n-1}, a_n) δίνουν $\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ ενδιαφέροντα ζεύγη.

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{1}{2}n(n-1) - \left(\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right) = n-2$ ζεύγη που δεν είναι ενδιαφέροντα. Προφανώς, το ζεύγος (a_1, a_n) δεν είναι ενδιαφέρον. Αν το ζεύγος (a_i, a_j) με $1 \le i < j \le n$ είναι ενδιαφέρον, τότε $a_j - a_i \le \frac{1}{2}(a_n - a_1)$. (Αφού αν το (a_i, a_j) είναι ενδιαφέρον, τότε $a_\ell - a_k = 2(a_j - a_i)$ για κάποιο ζεύγος (k, ℓ). Αν ήταν $2(a_j - a_i) > a_n - a_1$, θα είχαμε $a_\ell - a_k > a_n - a_1$, που είναι αδύνατον.)

Τέλος, για οποιοδήποτε $2 \le i \le n-1$, τότε θεωρούμε τα ζεύγη (a_1, a_i) και (a_i, a_n). Αν είναι και τα δύο ενδιαφέροντα, τότε από την παραπάνω παρατήρηση, η μόνη δυνατοτητα είναι $a_i - a_1 = a_n - a_i = \frac{a_n - a_1}{2}$. Προφανώς, αυτό είναι δυνατό για ένα το πολύ i, οπότε για τις υπόλοιπες $n-3$ τιμές του i, τουλάχιστον ένα από τα ζεύγη (a_1, a_i) και (a_i, a_n) δεν είναι ενδιαφέρον. Μαζί με το (a_1, a_n) παίρνουμε τουλάχιστον $n-2$ που δεν είναι ενδιαφέροντα, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 5 (Κροατία). Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοιες, ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων (x, y):

(i) Ο x και ο $f(x)$ έχουν το ίδιο πλήθος θετικών διαιρετών.

(ii) Αν ο x δεν διαιρεί τον y και ο y δεν διαιρεί τον x, τότε

$$\text{ΜΚΔ}(f(x), f(y)) > f(\text{ΜΚΔ}(x, y)).$$

Εδώ ο $\text{ΜΚΔ}(m, n)$ *είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των* m *και* n.

Λύση. Έστω f μια τέτοια συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Από την συνθήκη (i) έπεται ότι $f(1) = 1$, και ότι για κάθε πρώτο αριθμό p, ο $f(p)$ είναι επίσης πρώτος. Έστω $f(2) = q$ πρώτος, και έστω $p \ne 2$. Τότε από την συνθήκη (ii) με $(x, y) = (2, p)$ παίρνουμε

$$\text{ΜΚΔ}(f(2), f(p)) > f(\text{ΜΚΔ}(2, p)) = f(1) = 1.$$

Συνεπώς, $f(p) = f(2) = q$.

Θα αποδείξουμε με επαγωγή επί του πλήθους $k \ge 0$ των διαφορετικών πρώτων διαιρετών του n, ότι για κάθε θετικό ακέραιο n, ο $f(n)$ είναι δύναμη του q. Κατά συνέπεια, θα συμπεράνουμε από την πρώτη ιδιότητα ότι $f(n) = q^{d(n)-1}$, όπου $d(n)$ είναι ο αριθμός των (θετικών) διαιρετών του n.

Για $k = 0$, ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. Για $k = 1$, πρέπει να αποδείξουμε ότι ο $f(p^m)$ είναι δύναμη του q για κάθε θετικό ακέραιο m. Η περίπτωση $m = 1$ έχει αποδειχθεί. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα για όλους τους θετικούς ακέραιους $\le m$. Αφού $d(p^t) = t+1$, γνωρίζουμε ότι $f(p^t) = q^t$ για κάθε $t \le m$. Θεωρούμε την περίπτωση $t = m+1$.

Έστω $r \ne p$ πρώτος. Από την συνθήκη (ii) με $(x, y) = (p^{m-1}r, p^m)$ παίρνουμε

$$\text{ΜΚΔ}(f(p^{m-1}r), q^m) = \text{ΜΚΔ}(f(p^{m-1}r), f(p^m)) > f(\text{ΜΚΔ}(p^{m-1}r, p^m)) = f(p^{m-1}) = q^{m-1}.$$

Συνεπώς ο q^m διαιρεί τον $f(p^{m-1}r)$. Αφού ο $f(p^{m-1}r)$ έχει $2m$ θετικούς διαιρέτες, και $v_p(f(p^{m-1}r)) \ge m$, έπεται ότι ο $f(p^{m-1}r)$ δεν έχει πρώτους διαιρέτες διαφορετικούς από τον q, αφού τότε θα είχε τουλάχιστον $2\left(v_q(f(p^{m-1}r))+1\right) > 2m$ θετικούς διαιρέτες. Επομένως ο $f(p^{m-1}r)$ ισούται με δύναμη του q, και αφού έχει $2m$ θετικούς διαιρέτες, πρέπει να έχουμε $f(p^{m-1}r) = q^{2m-1}$.

Έπειτα, από την συνθήκη (ii) με $(x,y)=(p^{m+1},p^{m-1}r)$ παίρνουμε

$$\text{ΜΚΔ}(f(p^{m+1}),q^{2m-1})=\text{ΜΚΔ}(f(p^{m+1}),f(p^{m-1}r))>f(p^{m-1})=q^{m-1}.$$

Συνεπώς ο q^m διαιρεί τον $f(p^{m+1})$. Αν ο $f(p^{m+1})$ είχε κάποιον πρώτο διαιρέτη διαφορετικό από τον q, τότε θα είχε τουλάχιστον $2(m+1)$ θετικούς διαιρέτες, ενώ έχει $m+2<2(m+1)$ θετικούς διαιρέτες (αφού $m\geq 1$). Επομένως, ο $f(p^{m+1})$ ισούται με δύναμη του q, και άρα, επαγωγικά, η απόδειξη ολοκληρώθηκε για $k=1$.

Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους n με το πολύ k διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες, για κάποιο $k\geq 1$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για τους θετικούς ακέραιους με $k+1$ διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο N με k διαφορετικούς πρώτους διαιρέτες, κάθε θετικό ακέραιο m και κάθε πρώτο αριθμό p που δεν διαιρεί τον N, ο αριθμός $f(Np^m)$ είναι δύναμη του q, Αυτό θα το αποδείξουμε με επαγωγή επί του m.

Η βασική περίπτωση $m=0$ έπεται από την προηγούμενη επαγωγική υπόθεση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχει αποδειχθεί ο ισχυρισμός για κάποιο $m\geq 0$.

Έστω s ένας πρώτος διαιρέτης του N. Από την συνθήκη (ii) με $(x,y)=(Np^{m+1},Nsp^m)$ παίρνουμε

$$\text{ΜΚΔ}(f(Np^{m+1}),q^{d(Nsp^m)-1})=\text{ΜΚΔ}(f(Np^{m+1}),f(Nsp^m))>f(Np^m)=q^{d(Np^m)-1}.$$

Συνεπώς ο $q^{d(Np^m)}$ διαιρεί τον $f(Np^{m+1})$. Αν ο $f(Np^{m+1})$ είχε ένα πρώτο διαιρέτη διαφορετικό από τον q, τότε θα είχε τουλάχιστον $2(d(Np^m)+1)=2((m+1)d(N)+1)=(2m+2)d(N)+2$ θετικούς διαιρέτες, ενώ έχει μόνο $(m+2)d(N)$ θετικούς διαιρέτες. Επομένως, ο $f(Np^{m+1})$ είναι δύναμη του q. Τέλος, ας ελέγξουμε ότι πράγματι η συνάρτηση $f(n)=q^{d(n)-1}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος για κάθε πρώτο q. Πράγματι, η συνθήκη (i) είναι προφανής. Για την συνθήκη (ii), παρατηρούμε ότι

$$\text{ΜΚΔ}(f(x),f(y))=q^{\min(d(x),d(y))}>q^{d(\text{ΜΚΔ}(x,y))}=f(\text{ΜΚΔ}(x,y)),$$

οποτεδήποτε ο x δεν διαιρεί τον y και ο y δεν διαιρεί τον x.

Πρόβλημα 6 (Λουξεμβούργο-Βέλγιο). Βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς d για τους οποίους υπάρχει πολυώνυμο P βαθμού d με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο, ώστε να υπάρχουν το πολύ d διαφορετικές τιμές ανάμεσα στις $P(0),P(1),P(2),\ldots,P(d^2-d)$.

Λύση (Liang Xiao, αρχηγός της Κινέζικης αποστολής.) Υπάρχουν τέτοια πολυώνυμα αν και μόνο αν $d\leq 3$. Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν την ύπαρξη τέτοιων πολυωνύμων για $d\leq 3$:

$$P_1(x)=x,\quad P_2(x)=x(x-1)\quad\text{και}\quad P_3(x)=x(x-4)(x-5).$$

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν τέτοια πολυώνυμα για $d\geq 4$. Έστω, με απαγωγή σε άτοπο, ένα πολυώνυμο P βαθμού d με πραγματικούς συντελεστές που να ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος και έστω

$$\{P(0),P(1),\ldots,P(d^2-d)\}=\{k_1,k_2,\ldots,k_d\},$$

με $k_1<k_2<\cdots<k_d$. Έστω n_i το πλήθος των $x\in\{0,1,\ldots,d^2-d\}$ τέτοιων ώστε $P(x)=k_i$. Αφού $n_1+n_2+\cdots+n_d=d^2-d+1$ και $n_j\leq d$ για κάθε j, υπάρχει i τέτοιο ώστε $n_i=d$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$P(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_d)+k_i$$

για κάποια $\alpha_1,\ldots,\alpha_d\in\{0,1,\ldots,d^2-d\}$. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής του x^{d-1}–οστού όρου του $P(x)$ είναι ακέραιος. (Δεν χρειαζόμαστε τον συγκεκριμένο αριθμό i πια.)

Παρατηρούμε ότι είναι σπάνιο να έχουμε $n_i=d-1$, διότι από το θεώρημα Vieta αυτό θα εξανάγκαζε και την άλλη ρίζα να είναι ακέραιος για τον συντελεστή του x^{d-1}–οστού όρου (που δεν είναι στο $\{0,1,\ldots,d^2-d\}$, εκτός αν υπάρχει διπλή ρίζα).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι οι παρακάτω τρεις περιπτώσεις δεν μπορούν να συμβούν:

(α) $n_i = n_{i+1} = d$ για κάποιο i,

(β) $n_i = d$ και $n_{i+1} = d-1$ για κάποιο i,

(γ) $n_i = d-1$ και $n_{i+1} = d$ για κάποιο i.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι κάποια από τις παραπάνω περιπτώσεις συμβαίνει. Έστω $x_1 > x_2 > \cdots > x_d$ οι ρίζες της $P(x) = k_i$ και έστω $y_1 \geq \cdots \geq y_d$ οι ρίζες της $P(x) = k_{i+1}$ (λαμβάνοντας υπόψιν τις πολλαπλότητες). Τότε (με ίσως την εξαίρεση κάποιου δείκτη j στην περίπτωση (β) ή (γ)) έχουμε

$$y_j = x_j + (-1)^{j-1}. \qquad (1)$$

Από το θεώρημα Vieta, $\sum x_j = \sum y_j$. Ισχυριζόμαστε ότι στις περιπτώσεις (β) ή (γ), η παραπάνω ισότητα αληθεύει για όλα τα j. Το στοιχείο κλειδί είναι ότι από το θεώρημα Vieta, αν μια λύση της $P(x) = k_{i+1}$ δεν είναι ακέραια, τότε υπάρχει τουλάχιστον άλλη μια μη ακέραια λύση της. Έχουμε δύο υποπεριπτώσεις:

(i) Η περίπτωση της διπλής ρίζας. Σε αυτήν, η παραπάνω ισότητα (1) ισχύει αυτόματα για όλα τα j.

(ii) Η περίπτωση που η $P(x) = k_{i+1}$ (ή k_i) έχει λύση εκτός του $\{0, 1, \ldots, d^2 - d\}$. Αλλά αυτό το j θα πρέπει να είναι 1 ή d. Αν ο d είναι περιττός, τότε $j = d$ στην περίπτωση (β) και $j = 1$ στην περίπτωση (γ). Αλλά σε κάθε περίπτωση, το θεώρημα Vieta δίνει $y_j = x_j$, που είναι αδύνατον. Αν ο d είναι άρτιος, τότε η (1) ισχύει από το θεώρημα Vieta για το j.

Έτσι, η (1) ισχύει για κάθε j. Θα δείξουμε ότι αυτό δεν μπορεί να ισχύει. Πάλι από το θεώρημα Vieta $\sum x_j = \sum y_j$, το πλήθος των $+1$ ισούται με το πλήθος των -1. Άρα ο d είναι άρτιος. Όταν ο d είναι άρτιος, τότε από το θεώρημα Vieta, $\sum x_j^2 = \sum y_j^2$. Αν αναπτύξουμε τα αθροίσματα, λόγω της (1) έχουμε

$$0 = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + \cdots - x_d + d.$$

Αλλά $x_{2j-1} > x_{2j}$ οπότε η παραπάνω ισότητα δεν μπορεί να ισχύει. Συνεπώς, οι περιπτώσεις (α), (β), (γ) είναι αδύνατες.

Έχουμε ότι $n_i + n_{i+1} \leq 2d - 2$ για κάθε i, ενώ είναι $n_1 + n_2 + \cdots + n_d = d^2 - d + 1$. Η μοναδική δυνατή περίπτωση είναι ο d να είναι περιττός και

$$n_1 = n_3 = n_5 = \cdots = n_d = d \quad \text{και} \quad n_2 = n_4 = \cdots = n_{d-1} = d - 2.$$

Από εδώ θα καταλήξουμε σε άτοπο. Συγκρίνουμε τις λύσεις $x_1 > x_2 > \cdots > x_d$ της $P(x) = k_1$ με τις $z_1 > z_2 > \cdots z_d$ της $P(x) = k_3$ (παρατηρώντας ότι η $P(x) = k_2$ έχει ακριβώς $d-2$ λύσεις).Τότε

$$z_1 > x_1 > x_2 = x_1 - 1 > z_2 > z_3 > \cdots > z_{d-2} > x_{d-2} > x_{d-1} = x_{d-2} - 1 > z_{d-1} > z_d > x_d,$$

και εκτός από δύο ακριβώς δείκτες j,

$$z_j = x_j + 2(-1)^{j-1} \qquad (2)$$

(όπου για τα j που εξαιρούνται έχουμε $z_j = x_j + (-1)^{j-1}$.) Από το θεώρημα Vieta $\sum x_j = \sum z_j$ (και αφού d περιττός), τα δύο j είναι περιττοί αριθμοί. Έστω ότι είναι j_1 και j_2. Από το θεώρημα Vieta

$$\sum x_j^2 = \sum z_j^2 = \sum \left(x_j + 2(-1)^{j-1}\right)^2 + \left((x_{j_1} + 1)^2 - (x_{j_1} + 2)^2 + (x_{j_2} + 1)^2 - (x_{j_2} + 2)^2\right).$$

Αφού $x_{2j} = x_{2j-1} - 1$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$4d + 4 \cdot \frac{d-1}{2} + 4x_1 - (2x_{j_1} + 3 + 2x_{j_2} + 3) = 0.$$

$$(x_{j_1} - x_1) + (x_{j_2} - x_1) = 3d - 4.$$

Αλλά $x_5 - x_1 \geq 4d - (d-1) > 3d - 4$, Οπότε $\{j_1, j_2\} = \{1, 3\}$, ενώ $x_3 - x_1 < 2d < 3d - 4$, αδύνατον. Η απόδειξη για d περιττό ολοκληρώθηκε.

Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 131

Α80. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ που ικανοποιούν την ισότητα $$f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=1+f(y), \text{για κάθε } x,y\in(0,+\infty).$$

(Βιετνάμ 2022)

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}, x\in(0,+\infty)$, είναι σταθερή. Έστω ότι υπάρχουν $a,b>0$ τέτοια ώστε $\frac{f(a)}{a}\neq\frac{f(b)}{b}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$.

Από τη σχέση της υπόθεσης έχουμε

$$f\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha}+y\right)=\ f\left(\frac{f(b)}{b}+y\right)=1+f(y), \text{για κάθε } y>0. \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $K=\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}$ και στη σχέση (1) $y=x-\frac{f(a)}{a}$, τότε προκύπτει ότι:

$$f(x)=f(x+K), \qquad \text{για κάθε } x>\frac{f(a)}{a}.$$

Επιπλέον, από την ισότητα $f\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha}+y\right)=1+f(y)$, για κάθε $y>0$, θέτοντας διαδοχικά όπου y το $y+\frac{f(\alpha)}{\alpha}$, λαμβάνουμε:

$$f\left(y+n\cdot\frac{f(\alpha)}{\alpha}\right)=f\left(y+(n-1)\cdot\frac{f(\alpha)}{\alpha}\right)+1=\cdots=f(y)+n>n.$$

Επομένως έχουμε $f(x)>n$, για κάθε $x>n\cdot\frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Αν τώρα για τον τυχόντα θετικό πραγματικό αριθμό x επιλέξουμε $n=\lfloor f(x)\rfloor+2>f(x)$ και ένα θετικό ακέραιο m τέτοιον ώστε $x+mK>n\cdot\frac{f(\alpha)}{\alpha}$, τότε $f(x+mK)>n>f(x)=f(x+mK)$, άτοπο.

Επομένως, έχουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x}=c, x\in(0,+\infty)$, σταθερή, δηλαδή $f(x)=cx,\ c,x\in(0,+\infty)$.

Με αντικατάσταση στην αρχική συνθήκη λαμβάνουμε

$$f\left(\frac{cx}{x}+y\right)=1+cy\Rightarrow c(c+y)=1+cy\Rightarrow\ c=1, \text{οπότε } f(x)=x, x\in(0,+\infty).$$

Α81. Οι αριθμοί $2^3-2,3^3-3,4^3-4,\dots,(2\nu+1)^3-(2\nu+1)$, όπου $\nu\geq 2$ ακέραιος, είναι γραμμένοι στον πίνακα. Με την πράξη $*$ διαγράφουμε από τον πίνακα τρεις αριθμούς α,β,γ και εμφανίζουμε στον πίνακα τον αριθμό $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta+\gamma\alpha}$. Εφαρμόζουμε την πράξη $*$ μέχρις ότου μείνουν στον πίνακα μόνο δύο αριθμοί. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των δύο αριθμών που θα απομείνουν στον πίνακα είναι μεγαλύτερο του 16.

(Ρουμανία 2023)

Λύση

Παρατηρούμε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει ότι:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^{-1},$$

δηλαδή παρατηρούμε ότι μετά την εφαρμογή της πράξης $*$, το άθροισμα των αντίστροφων των αριθμών που παραμένουν στον πίνακα ισούται με το άθροισμα των αντίστροφων των αριθμών

που διαγράφηκαν. Επειδή μετά την εφαρμογή της πράξης $*$ οι δεδομένοι αριθμοί του πίνακα μειώνονται κατά δύο, μετά την εφαρμογή της πράξης $*$ κατά $\nu-1$ φορές θα μείνουν στον πίνακα μόνο δύο αριθμοί, οι οποίοι θα έχουν άθροισμα των αντιστρόφων τους ίσο με το άθροισμα Σ των αντιστρόφων όλων των αριθμών που ήταν γραμμένοι αρχικά στον πίνακα.
Επειδή ισχύει ότι:

$$\frac{1}{\kappa^3-\kappa}=\frac{1}{\kappa(\kappa-1)(\kappa+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\kappa-1)\kappa}-\frac{1}{\kappa(\kappa+1)}\right),\qquad \text{για κάθε } \kappa>1,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\Sigma&=\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{3^3-3}+\cdots+\frac{1}{(2\nu+1)^3-(2\nu+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\frac{1}{2\nu\cdot(2\nu+1)}-\frac{1}{(2\nu+1)\cdot(2\nu+2)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(2\nu+1)\cdot(2\nu+2)}\right)=\frac{2\nu^2+3\nu}{8\nu^2+12\nu+4}.\end{aligned}$$

Αν x, y είναι οι δύο τελευταίοι αριθμοί που θα μείνουν στον πίνακα, τότε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2\nu^2+3\nu}{8\nu^2+12\nu+4}.$$

Άρα έχουμε:

$$\frac{4}{x+y}\le\frac{x+y}{xy}\Rightarrow\frac{4}{x+y}\le\frac{2\nu^2+3\nu}{8\nu^2+12\nu+4}<\frac{1}{4}\Rightarrow x+y>16.$$

Γ67. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Ζ και Θ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΖ = ΑΘ και η ευθεία ΖΘ περνάει από το έγκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ. Έστω Μ το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΒΖΙ και ΓΘΙ. Οι ευθείες ΖΜ και ΒΙ τέμνονται στο σημείο Δ και οι ευθείες ΘΜ και ΓΙ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ περνάει από το μέσο του τμήματος ΔΕ.

(Ρουμανία 2023)

Λύση

Επειδή $\mathrm{AZ}=\mathrm{A\Theta}$, το τρίγωνο ΑΖΘ είναι ισοσκελές, οπότε: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Theta=\mathrm{A}\hat{\Theta}\mathrm{Z}$. (1)

Επειδή το τετράπλευρο ΒΜΙΖ είναι εγγεγραμμένο, έχουμε: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Theta=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{I}$. (2)

Επειδή το τετράπλευρο ΜΓΘΙ είναι εγγεγραμμένο, έχουμε: $\mathrm{A}\hat{\Theta}\mathrm{Z}=\Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{I}$. (3)

Από τις ισότητες (1) - (3) έπεται ότι: $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{I}=\Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{I}$. (4)

Έστω Κ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΙΜ τέμνει την πλευρά ΒΓ.

Επειδή η ΒΙ είναι διχοτόμος της γωνίας Β και το τετράπλευρο ΒΜΙΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχουμε:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{I}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I}=\mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}.\qquad (5)$$

Άρα το τετράπλευρο ΒΜΚΔ είναι εγγράψιμο, οπότε: $\mathrm{I}\hat{\Delta}\mathrm{K}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K}$. (6)
Ομοίως, συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{K}=\Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K}$. (7)

Από τις ισότητες (6) και (7), λόγω της (4) έπεται ότι:

$$\mathrm{I}\hat{\Delta}\mathrm{K} = \mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{K}. \qquad (8)$$

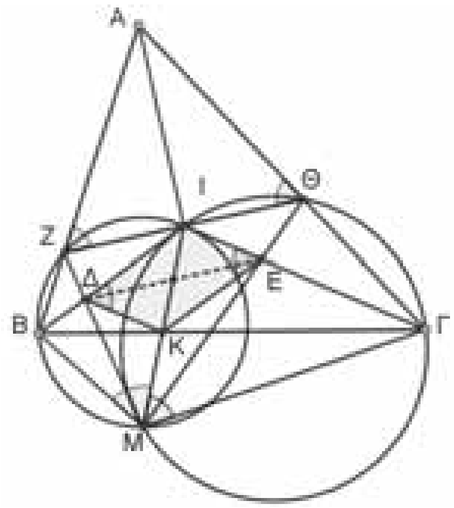
Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα ΒΜΙΖ και ΒΜΚΔ προκύπτουν οι ισότητες

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Delta = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} \qquad (9)$$

Ομοίως , από τα εγγράψιμα τετράπλευρα ΜΓΘΙ και ΜΓΕΚ προκύπτουν οι ισότητες

$$\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{M}}\Theta = \Gamma\hat{\mathrm{I}}\Theta. \qquad (10)$$

Από τις ισότητες (9) και (10) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:



Σχήμα 5

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Delta + \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} + \Gamma\hat{\mathrm{I}}\Theta \Rightarrow 180^0 - \left(\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Delta + \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}\right) = 180^0 - \left(\mathrm{Z}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} + \Gamma\hat{\mathrm{I}}\Theta\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\hat{\mathrm{I}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E} \quad (11)$$

Από τις ισότητες (8), (12) έπεται ότι το τετράπλευρο ΙΔΚΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, δηλαδή η ευθεία ΜΙ περνάει από το μέσο του τμήματος ΔΕ.

Ασκήσεις για λύση

Α82. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 e^{ax}, a \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ισότητα

$$f\big(\varphi(x) + f(y)\big) = y + \varphi\big(f(x)\big), \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ν56. Για κάθε ζεύγος θετικών ακέραιων (n, m) με $n < m$, συμβολίζουμε με $s(n, m)$ τον αριθμό των θετικών ακέραιων που περιέχονται στο κλειστό διάστημα $[n, m]$ και είναι σχετικά πρώτοι με τον m. Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους $m \geq 2$ οι οποίοι ικανοποιούν και τις δύο παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\dfrac{s(n,m)}{m-n} \geq \dfrac{s(1,m)}{m}$, για κάθε $n = 1,2, \ldots, m-1$.

(β) m^2 διαιρεί τον $2022^m + 1$.

Γ68. Έστω ABCD εγγράψιμο τετράπλευρο τέτοιο ώστε DB = DC. Έστω M, N τα μέσα των πλευρών AB, AC και J, E, F τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC με τις πλευρές BC, CA, AB, αντίστοιχα. Η ευθεία MN τέμνει τις ευθείες JE, JF στα K, H, αντίστοιχα. Η ευθεία IJ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο γ του τριγώνου BIC στο σημείο G και η ευθεία DG τέμνει τον κύκλο γ στο σημείο T.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία JA περνάει από το μέσο του HK και είναι κάθετη προς την ευθεία IT.

(β) Έστω R, S οι ορθές προβολές του σημείου D πάνω στις πλευρές AB,AC, αντίστοιχα. Θεωρούμε σημεία P, Q πάνω στις ευθείες IF, IE, αντίστοιχα, έτσι ώστε οι ευθείες KP και HQ να είναι και οι δύο κάθετες προς την ευθεία MN.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες MP, NQ και RS συντρέχουν.

HOMO MATHEMATICUS

Η ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I_1. ***τι είναι τα Μαθηματικά***

Όπως είδαμε στο προηγούμενο τεύχος, τα Μαθηματικά είναι ο τρόπος που αντιλαμβανόμαστε την υλική πραγματικότητα στον χώρο και στον χρόνο. Συνακόλουθα, η εξαγωγή συμπερασμάτων και προβλέψεων.Γι' αυτό το θέμα θα συνεχίσουμε σε ένα άλλο μελλοντικό δημοσίευμά μας.

I_2. ***Αυτό το ξέρατε;***

α. *Γνωρίζετε κάτι για την μη ευκλείδεια Γεωμετρία του* Nikolai Lobachevsky;

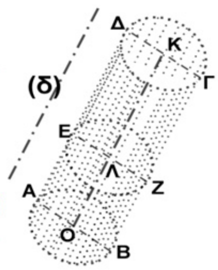
β. *τί ξέρετε για τις ωοειδείς επιφάνειες του Kepler;*

Γεωμετρία αγάπη μου

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

01. προκαταρκτικά. Τα στερεά που θα δούμε εδώ έχουν καμπύλες επιφάνειες. Παράγονται με πανομοιότυπη διαδικασία, που παράγονται τα πολύεδρα και τα πρίσματα, μόνο που εδώ, η οδηγός καμπύλη είναι κύκλος (ή έλλειψη, ή παραβολή, ή υπερβολή).

02. μια επιφάνεια που γεννά κυλίνδρους. Δίνεται κύκλος (O,R) και μια διεύθυνση (δ). Από κάθε σημείο της δοσμένης περιφέρειας φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τη δοσμένη διεύθυνση (δ). Το σύνολο όλων αυτών των ευθειών, ορίζει μια **επιφάνεια.**(σχήμα 27.01)



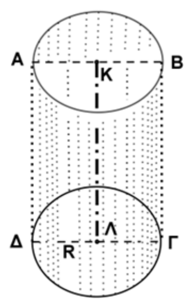
σχήμα 27.01

03. γεννήτρια κυλίνδρων. Η επιφάνεια της προηγούμενης παραγράφου (§27.01.02), λέγεται **γεννήτρια** κυλίνδρων.

04. στοιχεία της γεννήτριας κυλίνδρων.

- κάθε μια από τις ευθείες που αποτελούν μια *γεννήτρια* κυλίνδρου, λέγεται *γενέτειρα* αυτής,
- ο κύκλος (O,R), λέγεται ***οδηγός***,
- η ευθεία που περνά από το κέντρο της οδηγού και είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση (δ), λέγεται ***άξονας*** της κυλινδρικής επιφάνειας,
- κάθε τομή αυτής της επιφάνειας, με επίπεδο κάθετο προς τον άξονά της, λέγεται *κάθετη* ***τομή*** αυτής,
- μια γεννήτρια κυλίνδρων θα λέγεται ***πλάγια*** , αν η διεύθυνση (δ), είναι πλάγια προς το επίπεδο της οδηγού, ενώ αν είναι κάθετη, θα λέγεται ***ορθή***.

05. τι είναι ο κύλινδρος. Δίνεται μια γεννήτρια κυλίνδρων και δυο επίπεδες τομές αυτής, παράλληλες μεταξύ τους. Το μέρος της κυλινδρικής επιφάνειας, που βρίσκεται ανάμεσα από τις δυο τομές καθώς και τα εσωτερικά σημεία των δύο τομών, αποτελούν ένα σημειοσύνολο, που το ονομάζουμε *κύλινδρο*. ("σχ.27.02")



σχήμα 27.02

06. στοιχεία κυλίνδρων.

- οι δύο τομές και τα εσωτερικά τους σημεία, λέγονται ***βάσεις*** του κυλίνδρου,
- η ευθεία που συνδέει τα κέντρα των βάσεων του κυλίνδρου, λέγεται ***άξονας*** αυτού,
- κάθε τομή του κυλίνδρου με επίπεδο που περιέχει τον άξονά του, λέγεται

μεσημβρινή τομή του κυλίνδρου ("σχ.27.02"), μεσημβρινή τομή είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ),

- το ευθ. τμήμα, που ‘χει τα άκρατου στις δυο βάσεις κι είναι κάθετο σ’ αυτές, λέγεται ύψος αυτού.

0 7. είδη κυλίνδρων.

- ένας κύλινδρος λέγεται **ορθός**, αν ο άξονάς του είναι κάθετος προς τις βάσεις του. Αν συμβεί ο άξονας να μη είναι κάθετος στις βάσεις, ο κύλινδρος λέγεται *πλάγιος,*
- τον ορθό κύλινδρο ονομάζουμε και "***κύλινδρο από περιστροφής***",
- αν το ορθογώνιο παραλ/μο ΑΚΛΔ ("σχ.27.02"), θεωρήσουμε ότι περιστρέφεται γύρω από την κάθετη πλευρά ΚΛ, παράγεται, μ’ αυτό τον τρόπο, ένας ορθός κύλινδρος,
- *αν η μεσημβρινή τομή ενός κυλίνδρου είναι τετράγωνο, τότε ο κύλινδρος ονομάζεται* ***ισόπλευρος***.

ΙΙΙ *Κατασκευή Μαθηματικών μοντέλων*

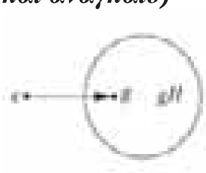
III_1 *ιδιαιτερότητες κατασκευής μοντέλων*

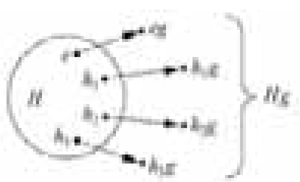
Το πρόβλημα στην κατασκευή μοντέλων, συνίσταται στην κατασκευή, τέτοιων μοντέλων των αντικειμένων (πραγμάτων, διαδικασιών, φαινομένων), που να απεικονίζουν τα ποσοτικά χαρακτηριστικά τους, αλλά και τις χωρο- δομικές ιδιαιτερότητες. ***Συστατικά στοιχεία του μαθηματικού μοντέλου αποτελούν τα σύμβολα και τα σημεία.*** Ο χαρακτήρας αυτών των σημείων μπορεί να είναι διάφορος: σχηματικές εικόνες (σχήματα, σχέδια, γραφήματα), συλλογές αριθμητικών συμβόλων, στοιχεία τεχνητών ή φυσικών γλωσσών. Για τα σύμβολα εισάγουν μετασχηματισμούς (πράξεις). Τα σύμβολα και οι μετασχηματισμοί τους, οπωσδήποτε ερμηνεύονται με όρους των πρωτότυπων αντικειμένων. Οι συνδυασμοί των συμβόλων που χρησιμοποιούνται και οι μετασχηματισμοί τους, υπαγορεύονται από τις ιδιότητες των αντικειμένων και τις συνδέσεις που επιλέχθηκαν και συμπεριελήφθησαν στο μοντέλο.

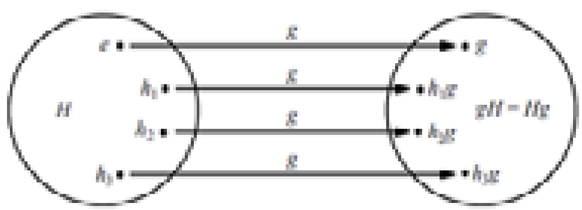
Τα μαθηματικά μοντέλα, που με τη βοήθεια των ανθρώπινων αισθήσεων εξάγονται άμεσα από τα υλικά αντικείμενα, στις περισσότερες φορές εκφράζουν τις πρωταρχικές, απλούστερες αφαιρέσεις, ποσοτικού και χωρικού χαρακτήρα (απαρίθμηση, διαστάσεις, μορφή, θέση στο χώρο κλπ.).

III_2.*Ένας γενικότερος ορισμός του μαθηματικού μοντέλου,*

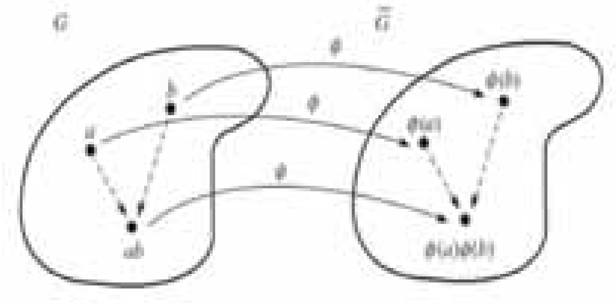
για τους μαθηματικούς η έννοια της κατασκευής μοντέλου είναι τυποποιημένη και εκφράζεται με ειδικό τρόπο, *φαίνεται ότι μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:* ***δίνονται δύο σύνολα (συστήματα) αντικειμένων Α και Β. Καθένα απ' αυτά είναι μοντέλο του άλλου, αν είναι δυνατή η ομόμορφη απεικόνιση του συστήματος Α στο σύστημα Α', του συστήματος Β στο σύστημα Β', όπου τα Α' και Β' είναι ισόμορφα. Για τη μεγαλύτερη γενίκευση και πληρότητα της κατασκευής των μοντέλων οι σχέσεις του ομομορφισμού και του ισομορφισμού πρέπει να ορίζονται όχι μόνο ως προς τα ξεχωριστά στοιχεία του συστήματος, αλλά και ως προς τα διάφορα δυνατά υποσύνολα του (βέβαια, στο βαθμό, που αυτό είναι δυνατό και αναγκαίο)***







Αυτός ο ορισμός του μαθηματικού μοντέλου πραγματικά αποδείχνεται ο πιο γενικός. Ωστόσο, αυτός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί «σε καθαρή μορφή». Εμπόδιο γι' αυτό είναι ακριβώς η γενικότητα του, η οποία αποδείχνεται υπερβολική. Μπορούμε, για παράδειγμα, αντί για τα σύνολα Α' και Β' να επιλέξουμε σύνολα, που να αποτελούνται μόνο από ένα στοιχείο. Αυτό αμέσως θα οδηγήσει στο συμπέρασμα, ότι οποιαδήποτε δύο συστήματα είναι μοντέλα το ένα του άλλου. Στην πραγματικότητα, παρόμοιος κίνδυνος «**εκφυλισμού**» της έννοιας δεν εμφανίζεται ποτέ. Σε κάθε ξεχωριστή περίπτωση διακρίνονται σύνολα ιδιοτήτων και σχέσεων, ως προς τις οποίες εξετάζονται οι προαναφερόμενες έννοιες του ομομορφισμού και ισομορφισμού. Η έννοια του μοντέλου ορίζεται πάντα ως προς το αρκετά πλούσιο σύνολο δεδομένων που επιλέχτηκε.



Μπορεί να προστεθεί, ότι για τους μαθηματικούς η έννοια της κατασκευής μοντέλου είναι τυποποιημένη και εκφράζεται με ειδικούς όρους. Αυτή είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική σχέση, δηλαδή σχέση τύπου ισοδυναμίας. Αυτή είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική σχέση, δηλαδή σχέση ***τύπου ισοδυναμίας.*** *Αυτή η ομάδα των λογικό - μαθηματικών όρων, που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό της έννοιας του μοντέλου χρησιμεύει όχι μόνο για την έκφραση του γεγονότος, ότι το μοντέλο είναι, ή πρέπει να είναι, απεικόνιση του αντικειμένου, αλλά, επίσης, και εισάγει τον* ***ισομορφισμό*** *των δυνατών απεικονίσεων.*

III$_3$. *Διαφορετικές μορφές μοντέλων*

Ανάλογα με το χαρακτήρα των υπό κατασκευή αντικειμένων, τα μαθηματικά μοντέλα δέχονται διαφορετικές μορφές. Περισσότερο απ' όλα διαδομένες είναι οι εξισώσεις: αλγεβρικές, διαφορικές και άλλες, καθώς και οι κατασκευές γεωμετρικού τύπου. Τα τελευταία χρόνια επεκτείνεται το οπλοστάσιο και η σφαίρα εφαρμογής των στοχαστικών μοντέλων, εμφανίστηκαν και αναπτύσσονται ραγδαία τα κυβερνητικά μοντέλα.

Από την άποψη της θεωρητικής τους ουσίας τα Μαθηματικά, στο σύνολο τους, μπορούν να θεωρηθούν ως επιστήμη ειδικών κλάσεων μοντέλων. Τα τελευταία, στην πλειονότητά τους. είναι *τυπικά - λογικά σύμβολα, κατασκευασμένα σε αξιωματική βάση με επακριβώς καθορισμένες πράξεις.* Όταν παρουσιάζεται η ανάγκη της κατασκευής μοντέλου ενός αντικειμένου, οι μαθηματικοί πρώτ' απ' όλα αναζητούν, και συχνά βρίσκουν, απ' αυτό το οπλοστάσιο έτοιμα μοντέλα, η σημασία των οποίων γίνεται έτσι πιο φανερή. Αν, όμως, δε βρίσκεται κατάλληλο μοντέλο, τότε κατασκευάζουν νέα, εμπλουτίζοντας τις δυνατότητες της μαθηματικής επιστήμης

III$_4$. *θεωρητικά μοντέλα των Μαθηματικών*

Γενικά, δεν είναι δυνατόν να περιγράψουμε την πρακτική της κατασκευής μαθηματικού μοντέλου σε όλες, ή έστω στις βασικές εκδηλώσεις της. Το να ξεκινήσει κανείς μια τέτοια απόπειρα θα σήμαινε μια προσπάθεια περιγραφής όλων των Μαθηματικών, θεωρητικών και πρακτικών, όλης της πολυμορφίας των μαθηματικών κατασκευών και των μεθόδων κατασκευής, έρευνας και εφαρμογών.

Σ' αυτό εμποδίζει η προαναφερόμενη αοριστία και ο μη - μονοσήμαντος χαρακτήρας των όρων που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή μαθηματικού μοντέλου. Γι' αυτό, εδώ θα μπορέσουμε να φωτίσουμε μόνο μερικά από τα μεθοδολογικά προβλήματα που δημιουργούνται κατά την πρακτική της κατασκευής μαθηματικών μοντέλων.

Θα εξετάσουμε δύο καταστάσεις όπου εμφανίζεται η κατασκευή μαθηματικού μοντέλου : α) όταν αυτή γίνεται σε σύνδεση με τη μελέτη των υπαρκτών στην πραγματικότητα αντικειμένων και εμφανίζεται σε σύνδεση με το πείραμα, β) στην περίπτωση, όταν κατασκευάζονται μοντέλα αφηρημένων αντικειμένων και των συστημάτων τους.

Όπως είναι γνωστό, η μελέτη της πραγματικότητας αρχίζει από την πρακτική, από το πείραμα. Κατόπιν περνά το στάδιο (ή τα στάδια) της θεωρητικής ανάλυσης, συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών κατασκευών και μετασχηματισμών. Το σύστημα εννοιών και συναγωγών (η μαθηματική θεωρία) που προκύπτει με τον τρόπο αυτό επανελέγχεται από την πρακτική.

Από πολύ παλιά είχε παρατηρηθεί, ότι στα υπάρχοντα στην πραγματικότητα συστήματα της τεχνικής και της φύσης έχουν θέση όχι μόνο αιτιοκρατικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, αλλά και οι τυχαίες, «**πιθανοκρατικές**» σχέσεις. Η ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων επέτρεψε την επεξεργασία μοντέλων νέου τύπου και τη διάδοση τους σε ευρύ κύκλο προβλημάτων. Με τη σειρά της, η πρακτική έδειξε ότι τα συστήματα, όπου οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών είναι τυχαίες, δεν είναι λιγότερα, απ' ό,τι τα αιτιοκρατικά συστήματα. Εκτός αυτού, οι πραγματικές καταστάσεις που μελετώνται είναι συνήθως τόσο σύνθετες, ώστε σ' αυτές σχεδόν πάντα παρουσιάζεται το στοιχείο του τυχαίου.

Η διαφορά μεταξύ του αιτιοκρατικού και του τυχαίου, από την άποψη του τυπικά απόλυτου, αφορά μόνο τα μαθηματικά μοντέλα. Για παράδειγμα, η σχέση μεταξύ **του όγκου και της** πίεσης του αερίου είναι αντικειμενικά αληθής αιτιοκρατικός νόμος της φύσης, αν και βρίσκει εξήγηση πιθανοκρατικού χαρακτήρα στην **στατιστική φυσική**. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση των δημογραφικών νομοτελειών, αν και λειτουργούν με μικρότερη ακρίβεια

III$_5$. *Συνέπειες της ανάπτυξης της μαθηματικής Λογικής και μαθηματικά μοντέλα*

Στον καιρό μας, η ανάπτυξη της μαθηματικής Λογικής προχώρησε τόσο βαθιά, ώστε έγινε δυνατό να τεθεί ως άμεσο πρόβλημα η ταξινόμηση γενικών μαθηματικών συστημάτων (κατά την ορολογία των N. Bourbaki), των δομών. Σύμφωνα μ' αυτή την ταξινόμηση, ως βασικές δομές αποδείχτηκαν **οι αλγεβρικές**, οι δομές διάταξης και **οι τοπολογικές**. Με τη βοήθεια τους κατασκευάζουν άλλες ειδικές, επί μέρους δομές. Λόγω της γενικότητας των βασικών δομών το πεδίο δράσης των Μαθηματικών επεκτάθηκε ασυνήθιστα.

Τα αφηρημένα μαθηματικά μοντέλα που απεικονίζουν επιλεγμένες προς μελέτη ιδιότητες ανήκουν στη μια ή στην άλλη δομή. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί κατά την εξέταση ενός συγκεκριμένου μοντέλου όλο το υλικό, που συσσωρεύτηκε κατά τη θεωρητική ανάλυση της δομής, και να αποκαλυφθούν οι νομοτέλειες, οι οποίες είναι δύσκολο ή και ακατόρθωτο να αποκαλυφθούν στις διαδικασίες που διεξάγονται στην πραγματικότητα, λόγω του μεγάλου αριθμού ασήμαντων για την δοσμένη μελέτη ιδιοτήτων.

«*Η πρακτική της θεωρητικής κατασκευής οδηγεί, επομένως, σε πρακτικές εφαρμογές και σε δυνατότητες πρόβλεψης. Στις μέρες μας ο ρυθμός ανάπτυξης, αυτού του τύπου της μαθηματικής κατασκευής μοντέλων, επιταχύνθηκε* . Σ' αυτό συντελούν ορισμένες καταστάσεις: α) είναι προσαρμοσμένα τα μέσα κατασκευής μαθηματικών συστημάτων, β) προωθήθηκε η επεξεργασία των λογικών μέσων, που αποτελούν τη βάση αυτών των συστημάτων, γ) η χρησιμοποίηση των υπολογιστικών μηχανών που απλοποιεί την ανάλυση των μαθηματικών μοντέλων. Να γιατί τα μαθηματικά μοντέλα διαδόθηκαν πρακτικά σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης γνώσης και δραστηριότητας.

III$_6$. βήματα κατά την κατασκευή των μαθηματικών μοντέλων

Παραθέτουμε παρακάτω μια από τις απόπειρες λεπτομερούς περιγραφής της σειράς των πράξεων κατά την κατασκευή των μαθηματικών μοντέλων:

1. ***Τοποθέτηση και, όσο το δυνατόν, σαφής διατύπωση του προβλήματος.***
2. ***Εύρεση των βασικών μεταβλητών μεγεθών που καθορίζουν τη διαδικασία ή που επιλέγονται για τη μελέτη.***
3. ***Ορισμός των σχέσεων μεταξύ αυτών των μεταβλητών και παραμέτρων, από τις οποίες εξαρτάται η κατάσταση της διαδικασίας.***
4. ***Σχηματισμός και διατύπωση υπόθεσης (ή υποθέσεων) σχετικά με το χαρακτήρα των υπό μελέτη συνθηκών.***
5. ***Κατασκευή μοντέλου: τεχνικής απομίμησης, μαθηματικής περιγραφής ή άλλου συστήματος, οι ιδιότητες του οποίου, έστω και για μεμονωμένες καταστάσεις, συμπίπτουν με τις αρχικά καθορισμένες.***
6. ***Διεξαγωγή πειραμάτων ελέγχου.***
7. ***Έλεγχος της υπόθεσης, που έγινε αποδεχτή για την κατασκευή του μοντέλου, και η αξιολόγηση της ανάλογα με την έκβαση των πειραμάτων ελέγχου.***
8. ***Αποδοχή, απόρριψη ή μετατροπή της υπόθεσης με επαναληπτικούς ελέγχους και συμπεράσματα.***

III$_7$. κατασκευή μαθηματικών μοντέλων

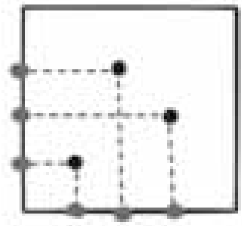
III$_{7α}$. περιγραφή κατά A.N. Tichonof

1^ο **στάδιο:** έγκειται στη διατύπωση των νόμων, οι οποίοι συσχετίζουν τα κύρια αντικείμενα του μοντέλου...

2^ο **στάδιο:** έγκειται στη διερεύνηση των μαθηματικών προβλημάτων, στα οποία οδηγεί το μαθηματικό μοντέλο...

3^ο **στάδιο:** συνίσταται στον έλεγχο κατά πόσο το δεδομένο υποθετικό μοντέλο ανταποκρίνεται στο «κριτήριο της εμπειρίας», δηλαδή στην εξακρίβωση, κατά πόσο τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων συμφωνούν με τα θεωρητικά συμπεράσματα του μοντέλου, εντός των ορίων ακρίβειας των παρατηρήσεων...

4ο στάδιο: συνίσταται στην ανάλυση του μοντέλου σε συνδυασμό με νέα δεδομένα για τα προκείμενα φαινόμενα και τον εκσυγχρονισμό του μοντέλου..



III$_{7\beta}$. περιγραφή κατά G. B. Ovsienko

1ο στάδιο: Η οικονομική έρευνα πού χρησιμοποιεί μοντέλα, υποδιαιρείται συμβατικά σε ορισμένα στάδια. Στο πρώτο διατυπώνεται το γενικό πρόβλημα, σύμφωνα με το οποίο προσδιορίζεται το αντικείμενο της έρευνας (π.χ. η διεθνής οικονομία στο σύνολό της, ή η οικονομία μιας συγκεκριμένης χώρας, ενός κλάδου, μιας επιχείρησης ή...

2ο στάδιο: Οι πληροφορίες πού λαμβάνονται στο πρώτο στάδιο χρειάζονται για τη δημιουργία μ. οικονομικού συστήματος, το οποίο και αποτελεί περιεχόμενο του δεύτερου σταδίου...

3ο στάδιο: Τρίτο στάδιο είναι ή μαθηματική ανάλυση του μοντέλου, που αποτελεί μέσο για να εξαχθούν όχι μόνο ποσοτικά, αλλά και ποιοτικά συμπεράσματα (στο σημείο αυτό έχει σημασία να διασαφηνιστεί σε ποια ερωτήματα μπορούν να δοθούν απαντήσεις μα τη βοήθεια των μαθηματικών και σε ποια όχι...).

4ο στάδιο: Προτού χρησιμοποιηθούν τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί στη θεωρία ή στην πρακτική, είναι απαραίτητο να διανυθεί το τέταρτο στάδιο της «μοντελοποίησης», δηλ. να γίνει ο έλεγχος των αποτελεσμάτων. Στο σημείο αυτό ο ερευνητής θα αντιμετωπίσει τεράστιες δυσκολίες. 0ι συνηθισμένες μέθοδοι των φυσικών επιστημών (το πείραμα, η σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα χαρακτηριστικά των πραγματικών διαδικασιών), ελάχιστε μπορούν να χρησιμοποιηθούν....

5ο στάδιο: Το πέμπτο και τελευταίο στάδιο — η εφαρμογή — πρέπει να οδηγήσει (αν είχε επιτυχία το προηγούμενο στάδιο) σε τελειοποίηση της θεωρίας και των μεθόδων διεύθυνσης των οικονομικών διαδικασιών, των τιμών και των σχεδίων οικονομικής ανάπτυξης…

V. *απάντηση στο "αυτό το ξέρατε" ;*

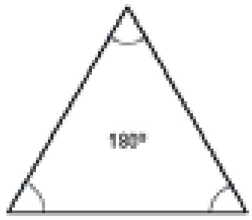
V$_{1.}$ — N. *Lobachevsky*

Η ανακάλυψη της ***μη ευκλείδειας γεωμετρίας*** ως γεγονός αυτό καθαυτό έχει κολοσιαία σημασία για ολόκληρη τη σύγχρονη και τις επιστήμες που συνδέονται μ΄ αυτήν. Ένας από τους πιο μεγάλους σύγχρονους τοπολόγους ο μαθηματικός P. S. Alejandrov, γράφει: «Ο Lobachevsky απόδειξε πειστικά, ότι **η γεωμετρία** του είναι μια από τις μερικές λογικά ισοδύναμες γεωμετρίες, εξ ίσου άψογες, εξ ίσου άρτιες από λογική άποψη, εξ ίσου αληθείς ως μαθηματικές θεωρίες. Το ερώτημα είναι το εξής: Ποια απ΄ αυτές τις θεωρίες είναι αληθής από την άποψη της Φυσικής, δηλ. είναι προσαρμοσμένη καλύτερα στη μελέτη αυτού ή εκείνου του κύκλου φυσικών φαινομένων» **(1)**

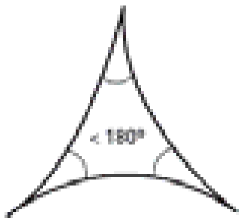
Με άλλα λόγια, αντίθετα από τις προσδοκίες των αδαών η πιθανή επιβεβαίωση στο μέλλον του γεγονότος, ότι κάποια από τις γεωμετρίες προσεγγίζει καλύτερα, προσαρμόζεται καλύτερα στις μορφές του φυσικού χώρου, δε μειώνει ούτε στο ελάχιστο την ηλίθια των υπόλοιπων γεωμετριών.

Η γενική μαθηματική και φιλοσοφική σημασία της γεωμετρίας του Lobachevsky είναι κολοσιαία. Η ανακάλυψή της ώθησε ουσιαστικά τη θέση των Μαθηματικών στο γενικό σύστημα της γνώσης μας για τη φύση. Κατά τον 18ο αιώνα τα Μαθηματικά κατέχουν σ΄ αυτή τη γνώση πραγματικά πολύ σπουδαία θέση, αλλά παρόλα αυτά στην ουσία υπηρετική θέση: Κατά την εποχή του Euler οι εκπρόσωποι της Αστρονομίας, της Μηχανικής και της Φυσικής βλέπουν στη μαθηματική ανάλυση μόνο ένα σύνολο μεθόδων για τη λύση Lobachevsky των προβλημάτων που θέτουν οι φυσικές επιστήμες. Ο μαθηματικός είναι υποχρεωμένος να εκφράσει με τις διαφορικές εξισώσεις τα διάφορα μηχανικά ή φυσικά προβλήματα και να δώσει τις μεθόδους για τη λύση των εξισώσεων αυτών. Οι επιστήμονες αυτής της περιόδου βρίσκονται μακριά από τη σκέψη ότι τα Μαθηματικά αυτά καθαυτά, και όχι μονάχα μέσω της Φυσικής ή της Αστρονομίας, αποτελούν σημαντικό τμήμα της γνώσης μας για την πραγματικότητα και ότι αυτός ο αυτοτελής γνωστικός ρόλος των Μαθηματικών συνδέεται αναπόφευκτα με το δικό της αντικείμενο. Οι εργασίες του Lobachevsky μας οδηγούν ακριβώς σ΄ αυτό το ιδιαίτερο αντικείμενο των Μαθηματικών.

Έτσι το έργο του μεγάλου Lobachevsky θεμελιώνει οριστικά μια σκέψη, (την οποία υπογραμμίσαμε αναφέροντας ορισμένα σημεία της)που είναι ουσιαστική για την ανάπτυξη των Μαθηματικών, δηλ. την ύπαρξη μιας περιοχής προβλημάτων, η μελέτη των οποίων είναι αποκλειστικά θέμα των Μαθηματικών. Με την άποψη αυτή κάθε άλλο παρά αρνούμαστε τη σύνθεση, την οργανική σχέση και την πλήρη δυνατότητα δανεισμού μεθόδων και ιδεών μεταξύ των Μαθηματικών και των άλλων επιστημών. Έτσι πραγματώνεται η ενότητα στις θετικές επιστήμες και η συνέχεια στις επιστημονικές γνώσεις.



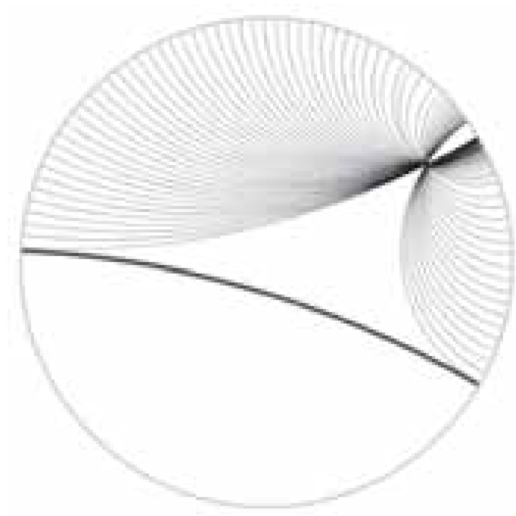
Ευκλείδεια Γεωμετρία



Υπερβολική Γεωμετρία

Το έργο του **Lobachevsky** προσδιορίζει ταυτόχρονα πολύ καλά και τη φύση των μαθηματικών προβλημάτων. Σε σχέση με το ζήτημα για το χαρακτήρα των προβλημάτων αυτών είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε εν τω μεταξύ ότι ο **Riemann** την περίοδο της δημιουργικής του ακμής έγραφε: «Το κύριο έργο μου συνίσταται στο να **ερμηνεύω** τους νόμους της φύσης.» Όποιος θέλει να ασχοληθεί σε βάθος με την ουσία και το περιεχόμενο των Μαθηματικών, πρέπει το δίχως άλλο να γνωρίσει τις ιδέες του Lobachevsky .

Η ύπαρξη στη μαθηματική γνώση δικού της αντικειμένου, μας δίνει τη δυνατότητα να βγάλουμε και ενδιαφέροντα συμπεράσματα σχετικά με τα προβλήματα που εξετάζουμε εδώ. Λόγω κάποιας ιδιαιτερότητας των Μαθηματικών, οι μελέτες σ΄ αυτά γίνονται πάνω σε έναν ελάχιστο αριθμό βασικών αντικειμένων και στις αμοιβαίες σχέσεις τους. Αποτέλεσμα αυτής τους της ποιότητας, αυτής της "απλότητας", που βγαίνει από τους νόμους της φύσης με δικές τους μεθόδους, είναι το γεγονός ότι τα Μαθηματικά μπορούν σε σύντομο χρονικό διάστημα να σημειώσουν ραγδαία πρόοδο, ξεπερνώντας σε ορισμένη κατεύθυνση τι; άλλες επιστήμες και φτάνοντας στα φυσικά φαινόμενα πολύ πριν απ΄ αυτές, εξ αιτίας της πολυπλοκότητας γενικά των προβλημάτων των επιστημών αυτών. Και όταν κάποια **Χ επιστήμη** στην εξέλιξή της φτάσει σε νέο αποτέλεσμα προς την ίδια κατεύθυνση και διαπιστωθεί ότι στα Μαθηματικά είναι ήδη γνωστή παρόμοια περίπτωση, αμέσως καταγράφεται η ιδιότητα αυτή των Μαθηματικών να είναι "a priori" επιστήμη.

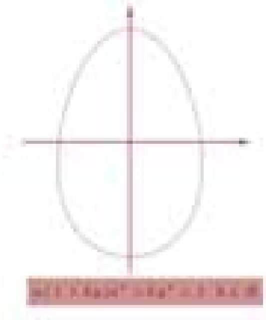


Τα Μαθηματικά έχουν δική τους εμπειρία και δικές τους μεθόδους στο αντικείμενό τους …
[εκδόσεις: "ΕΠΙΣΤΗΜΗ και ΚΟΙΝΩΝΙΑ" Θεσσαλονίκη – 1988, θέμα: Lobachevsky]

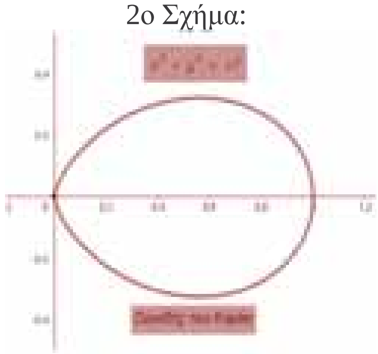
$V_{2.}$ — Ωοειδείς του *Johannes Kepler*

Την απάντηση δανειστήκαμε από δημοσίευμα του σημαντικού συναδέλφου μας Κ. Δόρτσιου. Τον ευχαριστούμε

1ο Σχήμα:



2ο Σχήμα:



3ο Σχήμα: Ωοειδείς επιφάνειες του J. Kepler

Ασκήσεις Επανάληψης

Β. Μπαλτσαβιάς - Θ. Ξένος

Α΄ Μέρος: Θ. Ξένου

Άσκηση 1η: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x-x^2-3}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε να ορίζεται η τιμή $f(3\lambda-2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$.

Λύση: α) Η f ορίζεται όταν ισχύει:

$4x-x^2-3\ge 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3\le 0$ (1).

Το τριώνυμο x^2-4x+3 έχει $\Delta=4$ και ρίζες $x_1=1$, $x_2=3$. Άρα η (1) αληθεύει όταν $x\in[1,3]$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta=[1,3]$.

β) Η τιμή $f(3\lambda-2)$ ορίζεται, όταν ο αριθμός $3\lambda-2$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, δηλαδή όταν: $1\le 3\lambda-2\le 3 \Leftrightarrow 3\le 3\lambda\le 5 \Leftrightarrow 1\le\lambda\le\frac{5}{3}$.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα $f(x)<x$, για κάθε $x\in[1,3]$. Έχουμε $f(x)<x \Leftrightarrow \sqrt{4x-x^2-3}<x \Leftrightarrow$ $4x-x^2-3<x^2 \Leftrightarrow 2x^2-4x+3>0$, που αληθεύει πάντα, γιατί το τριώνυμο $2x^2-4x+3$ έχει $\Delta=-8<0$ και είναι πάντα θετικό.

Άσκηση2η: Δίνονται οι ανισώσεις:

$|2x-3|\le 2$ (i) και $2x^2-9x+9>0$ (ii)

α) Να αποδειχθεί ότι συναληθεύουν όταν το x ανήκει στο διάστημα $\Delta=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

β) Αν οι αριθμοί α και β επαληθεύουν τις ανισώσεις (i) και (ii), να αποδειχθεί ότι:

1) $\frac{1}{4}\le\alpha\beta<\frac{9}{4}$ 2) $-1<\alpha-\beta<1$

3) $-1<4\alpha-2\beta<5$ 4) $\frac{1}{6}<\frac{\alpha^2}{\beta}<\frac{9}{2}$

ΛΥΣΗ: α) $|2x-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le 2x-3\le 2 \Leftrightarrow 1\le 2x\le 5 \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$ (1) Το τριώνυμο $2x^2-9x+9$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες $x_1=\frac{9+3}{4}=3$ και $x_2=\frac{9-3}{4}=\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-9x+9$		+	0	−	0	+	

Άρα το τριώνυμο είναι θετικό όταν

$x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup(3,+\infty)$ (2)

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις των (1) και (2), που είναι: $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$.

β) 1) Γνωρίζουμε ότι: $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\le\beta<\frac{3}{2}\end{array}\right\}$.

Τα μέλη είναι όλα θετικά, οπότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε: $\frac{1}{4}\le\alpha\beta<\frac{9}{4}$.

2) Έχουμε

$\frac{1}{2}\le\beta<\frac{3}{2} \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}\ge-\beta>-\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<-\beta\le-\frac{1}{2}$.

Άρα προσθέτοντας κατά μέλη με την $\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{3}{2}$ έχουμε $-1<\alpha-\beta<1$.

3) Έχουμε: $\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{3}{2} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 2\le 4\alpha<6$ και $\frac{1}{2}\le\beta<\frac{3}{2} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} -3<-2\beta\le-1$.

Προσθέτοντας κατά μέλη $-1<4\alpha-2\beta<5$.

4) Έχουμε $\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le\alpha^2<\frac{9}{4}$ και $\frac{1}{2}\le\beta<\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}<\frac{1}{\beta}\le 2$. Τα μέλη είναι όλα θετικά, οπότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε: $\frac{1}{6}<\frac{\alpha^2}{\beta}<\frac{9}{2}$.

Άσκηση 3η: Δίνονται, η εξίσωση $\lambda(x+3)+2(\lambda^2-x)=\lambda^3+6$, $\lambda\in\mathbb{R}$ παράμετρος και η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

α) Να λυθεί η εξίσωση.

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Λύση: α) Η εξίσωση γράφεται:

$\lambda x+3\lambda+2\lambda^2-2x=\lambda^3+6 \Leftrightarrow (\lambda-2)x=\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+6 \Leftrightarrow$ $(\lambda-2)x=(\lambda-2)\lambda^2-3(\lambda-2) \Leftrightarrow (\lambda-2)x=(\lambda-2)(\lambda^2-3)$ (1).

- Αν $\lambda\ne 2$, τότε η (1) έχει μοναδική λύση, την

$x=\lambda^2-3$.

- Αν $\lambda=2$, η (1) γράφεται: $0\cdot x=0$ και είναι αόριστη.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν

$$x-x^2>0\Leftrightarrow x(1-x)>0\Leftrightarrow 0<x<1.$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A=(0,1)$.

γ) Θα βρούμε τις τιμές του λ, ώστε να ισχύει $0<\lambda^2-3<1$.

- $\lambda^2-3>0\Leftrightarrow\lambda^2>3\Leftrightarrow|\lambda|>\sqrt{3}\Leftrightarrow\lambda<-\sqrt{3}$ ή $\lambda>\sqrt{3}$ (2).
- $\lambda^2-3<1\Leftrightarrow\lambda^2<4\Leftrightarrow|\lambda|<2\Leftrightarrow-2<\lambda<2$ (3).

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις των (2), (3) οπότε προκύπτει $\lambda\in\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},2\right)$.

Άσκηση 4η: Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x)=x^2-(\alpha+1)x+\alpha+4.$$

α) Για ποιες τιμές του α, έχει δύο ρίζες άνισες;

β) Για ποιες τιμές του α, οι άνισες ρίζες x_1, x_2 του τριωνύμου $f(x)$, επαληθεύουν τη σχέση: $x_1^2+x_2^2=9$;

γ) Για ποιες τιμές του α, ισχύει: $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$;

Λύση: α) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες όταν $\Delta>0\Leftrightarrow(\alpha+1)^2-4(\alpha+4)>0\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha-15>0$ (1).

Αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta'=64>0$, άρα έχει ρίζες $\alpha_1=-3$, $\alpha_2=5$. Επομένως η (1) αληθεύει όταν $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$.

β) Για $\alpha<-3$ ή $\alpha>5$, ισχύει ότι $x_1+x_2=\alpha+1$, $x_1\cdot x_2=\alpha+4$.

Έτσι έχουμε: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=(\alpha+1)^2-2(\alpha+4)=\alpha^2-7$.

Άρα $\alpha^2-7=9\Leftrightarrow\alpha^2=16\Leftrightarrow\alpha=\pm4$.

Αφού όμως έχουμε ότι $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$ δεκτή τιμή είναι η $\alpha=-4$.

γ) Αυτό συμβαίνει όταν $\Delta<0\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha-15<0\Leftrightarrow-3<\alpha<5$.

Άσκηση 5η: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x^2-9x}+\frac{1}{\sqrt[3]{|x-2|-1}}$$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να εξεταστεί αν η γραφική της παράσταση έχει κοινά σημεία με τους άξονες συντεταγμένων.

β) Να εξεταστεί αν ο αριθμός

$$A=27^{\frac{2}{3}}+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-5\cdot32^{\frac{3}{5}}+(0{,}25)^{-1}$$

ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Λύση: α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2-9x\geq0$ (1) και $|x-2|-1>0$ (2).

$(1)\Leftrightarrow x(x-9)\geq0\Leftrightarrow x\leq0$ ή $x\geq9$

$(2)\Leftrightarrow|x-2|>1\Leftrightarrow x-2<-1$ ή $x-2>1\Leftrightarrow$ $x<1$ ή $x>3$.

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις τους, οπότε $x\leq0$ ή $x\geq9$. Άρα $A=(-\infty,0]\cup[9,+\infty)$.

Επειδή $f(x)>0$ (γιατί;), η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τον $x'x$. Επίσης, για $x=0$ έχουμε $f(0)=\sqrt{0}+\frac{1}{\sqrt[3]{1}}=1$, δηλαδή η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $K(0,1)$.

β) Έχουμε $A=27^{\frac{2}{3}}+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-5\cdot32^{\frac{3}{5}}+(0{,}25)^{-1}=$

$\left(\sqrt[3]{27}\right)^2+4\cdot4^{\frac{1}{2}}-5\cdot\left(\sqrt[5]{32}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=$

$3^2+4\cdot\sqrt{4}-5\cdot2^3+4^1=9+8-40+4=-19$, που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Άσκηση 6η: Δίνεται η παράσταση $A=|x+1|+|x-1|$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι: $A=\begin{cases}-2x & ,x<-1\\ 2 & ,-1\leq x<1\\ 2x & ,x\geq1\end{cases}$

β) Να λυθεί η εξίσωση $|x-1|+|x+1|=3$

γ) Να αποδειχθεί ότι: $|x-1|+|x+1|\geq2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: α) Έχουμε

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x+1		−	0	+		+	
x−1		−		−	0	+	

Αν $x<-1$, τότε $x+1<0$ και $x-1<0$, οπότε $A=(-x-1)+(-x+1)=-2x$

Αν $-1\leq x<1$, τότε $x+1\geq0$ και $x-1<0$, οπότε $A=(x+1)+(-x+1)=2$

Αν $x\geq1$, τότε $x+1>0$ και $x-1\geq0$, οπότε $A=(x+1)+(x-1)=2x$.

Άρα $A=\begin{cases}-2x & ,x<-1\\ 2 & ,-1\leq x<1\\ 2x & ,x\geq1\end{cases}$

β) Αν $x<-1$, τότε η εξίσωση γράφεται: $-2x=3\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$, δεκτή. Αν $-1\leq x<1$, τότε η εξίσωση γράφεται: $A=2\neq3$, άρα είναι αδύνατη.

Αν $x \geq 1$, τότε η εξίσωση γράφεται: $2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$, δεκτή. Άρα τελικά ρίζες οι $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$.

γ) Αν $x<-1$, τότε $A=-2x>2$.
Αν $-1 \leq x<1$, τότε $A=2$. Αν $x \geq 1$, τότε $A=2x \geq 2$.
Άρα $A \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7η: α) Ένα κερί ύψους $50\,cm$ καίγεται με ρυθμό $2,5\,cm$ την ώρα.

i) Να βρεθεί το ύψος του κεριού, 10 ώρες μετά, από την στιγμή που άρχισε να καίγεται.
ii) Σε πόσο χρόνο το κερί θα έχει ύψος $10\,cm$;
iii) Σε πόσο χρόνο το κερί θα λιώσει;
β) Ένα δεύτερο κερί ύψους $60\,cm$, αρχίζει να καίγεται μαζί με το πρώτο και μετά από 15 ώρες έχουν το ίδιο ύψος. Με τι ρυθμό καίγεται το δεύτερο κερί;
γ) Ένα τρίτο κερί καίγεται με ρυθμό $4cm$ την ώρα και λιώνει συγχρόνως με το πρώτο κερί. Ποιο είναι το αρχικό ύψος του κεριού αυτού;

Λύση: α) Την 1η ώρα το ύψος του κεριού είναι $\alpha_1=47,5\ cm$, την 2η ώρα $\alpha_2=45\ cm$ κ.ο.κ.
Τα ύψη $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega=-2,5\,cm$.

i) $\alpha_{10}=\alpha_1+9\omega=47,5-9\cdot 2,5=25\ cm$

ii) $\alpha_\nu=10 \Leftrightarrow 47,5+(\nu-1)\cdot(-2,5)=10 \Leftrightarrow \nu=16$

iii) $\alpha_\nu=0 \Leftrightarrow \nu=20$ ώρες.

β) Έστω $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ τα ύψη του δεύτερου κεριού, την 1η ώρα, την 2η ώρα κ.ο.κ. Έχουμε πάλι διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά τον άγνωστο ρυθμό δ. Έτσι έχουμε: $\beta_1=60+\delta$ και $\beta_{15}=\alpha_{15}$. Άρα:

$\beta_1+14\delta=\alpha_1+14\omega \Leftrightarrow 60+15\delta=12,5 \Leftrightarrow$

$\delta=-\frac{19}{6}$. Άρα το δεύτερο κερί λιώνει με ρυθμό $\frac{19}{6}$ cm την ώρα.

γ) Αν το αρχικό ύψος του τρίτου κεριού είναι $\gamma_o=x$ τότε έχουμε: $\gamma_1=x-4$ και $\gamma_{20}=0$, αφού σε 20 ώρες λιώνει.
Επομένως $\gamma_1+19\cdot(-4)=0 \Leftrightarrow x-4-76=0 \Leftrightarrow x=80$
Άρα το αρχικό ύψος του 3ου κεριού είναι $80\ cm$.

Β΄ Μέρος: Β. Μπαλτσαβιά

Άσκηση 1η : Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.
ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.
iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση: i) Η f ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει: $\begin{cases} x^2-4x+4 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Άρα $A=\mathbb{R}-\{2\}$

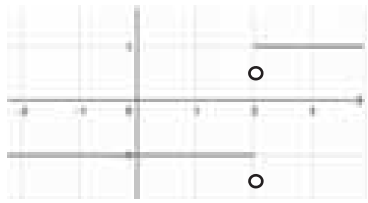
ii) Για $x \neq 2$ έχουμε: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}=\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}=\frac{|x-2|}{x-2}$

Για $x>2$ είναι $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1$

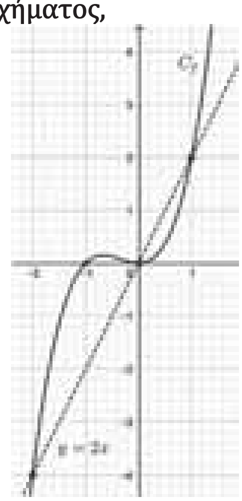
Για $x<2$ είναι $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$

Άρα $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x>2 \\ -1, & \text{αν } x<2 \end{cases}$

iii)



Άσκηση 2η :Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=2x$. Με τη βοήθεια του σχήματος,



i) α) να λύσετε την ανίσωση $f(x)>2x$.
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης $g(x)=\frac{\sqrt{|x|+x}}{\sqrt{f(x)-2x}}$
ii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=2x$.

Λύση: i) α) Η επίλυση της ανίσωσης $f(x)>2x$, γεωμετρικά «μεταφράζεται» ως η αναζήτηση των τετμημένων x των σημείων $(x,f(x))$ της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία (ε). Από το σχήμα έχουμε ότι:

$$f(x)>2x \Leftrightarrow x \in (-2,0) \cup (1,+\infty).$$

β) Η g ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει: $\begin{cases}|x|+x\geq 0\\ f(x)-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\geq -x\\ f(x)>2x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\in(-2,0)\cup(1,+\infty)\end{cases}$

Άρα $A=(-2,0)\cup(1,+\infty)$

iii) Η C_f και η ευθεία (ε) τέμνονται στα σημεία $A(-2,-4), O(0,0)$ και $B(1,2)$. Οπότε $f(x)=2x\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=0$ ή $x=1$ Για την $|f(x)|=2x$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• Αν $x<0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Αν $x\geq 0$ τότε στο $[0,+\infty)$ η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τον x΄x, δηλαδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$, οπότε $|f(x)|=f(x)$.

Άρα $|f(x)|=f(x)\Leftrightarrow f(x)=2x\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=0$ ή $x=1$ από τις οποίες δεκτές είναι οι $x=0$ και $x=1$.

Άσκηση 3η :Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

i) Να βρείτε το A.

ii) Να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f(0)$.

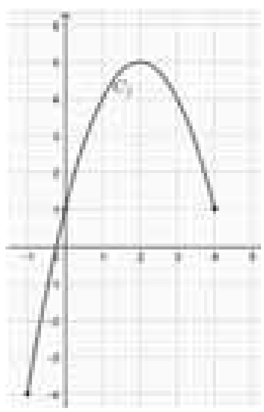
iii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση: i) $A=[-1,4]$

ii) $f(4)=1$ και $f(0)=1$

iii) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• Αν $\lambda<-4$ τότε η οριζόντια ευθεία $y=\lambda$ δεν τέμνει τη C_f άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.



• Αν $-4\leq\lambda<1$ τότε η ευθεία $y=\lambda$ τέμνει τη C_f μια φορά ακριβώς άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μόνο μια λύση.

• Αν $1\leq\lambda<5$ τότε η ευθεία $y=\lambda$ τέμνει τη C_f δυο φορές άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς δυο λύσεις.

• Αν $\lambda=5$ τότε η ευθεία $y=\lambda$ τέμνει τη C_f μια φορά ακριβώς άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μόνο μια λύση.

• Αν $\lambda>5$ τότε η ευθεία $y=\lambda$ δεν τέμνει τη C_f άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.

Άσκηση 4η : Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\lambda x+1$. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η C_f

i) τέμνει τον άξονα x΄x σε δυο διαφορετικά σημεία;

ii) τέμνει τον άξονα x΄x σε μοναδικό σημείο;

iii) δεν είναι κάτω από τον x΄x για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: Είναι $\alpha=1,\beta=-\lambda,\gamma=1$ και το τριώνυμο $f(x)$ έχει $\Delta=\lambda^2-4$.

i) Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε δυο σημεία όταν η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-\lambda x+1=0$ έχει δυο ρίζες άνισες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\Delta>0\Leftrightarrow\lambda^2-4>0\Leftrightarrow\lambda^2>4\Leftrightarrow\sqrt{\lambda^2}>\sqrt{4}\Leftrightarrow$ $\lambda<-2$ ή $\lambda>2$.

ii) Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε μοναδικό σημείο όταν η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-\lambda x+1=0$ έχει μια διπλή ρίζα. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\Delta=0\Leftrightarrow\lambda^2-4=0\Leftrightarrow\lambda^2=4\Leftrightarrow\lambda=-2$ ή $\lambda=2$.

iii) Η C_f είναι πάνω από τον x΄x για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x^2-\lambda x+1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$\begin{cases}\Delta\leq 0\\ \alpha>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^2-4\leq 0\\ 1>0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda^2\leq 4\Leftrightarrow|\lambda|\leq 4\Leftrightarrow -2\leq\lambda\leq 2.$

Άσκηση 5η : Έχουμε έναν αυτόματο πωλητή διακεκριμένων προϊόντων. Σχηματίζουμε το σύνολο A όλων των προϊόντων που έχει ο πωλητής και το σύνολο B των τιμών των προϊόντων του πωλητή. Ορίζουμε τη διαδικασία $f:A\to B$ με την οποία αντιστοιχίζουμε κάθε προϊόν στην τιμή του και τη διαδικασία $g:B\to A$ με την οποία αντιστοιχίζουμε κάθε τιμή στο προϊόν.

i) Να εξετάσετε αν η f παριστάνει πάντοτε συνάρτηση.

ii) Να εξετάσετε αν η g παριστάνει πάντοτε συνάρτηση.

Λύση: i) Η απεικόνιση f παριστάνει συνάρτηση, διότι κάθε προϊόν αντιστοιχίζεται σε έναν ακριβώς αριθμό, την τιμή του.

ii) Η g δεν παριστάνει απαραίτητα συνάρτηση διότι, ενδεχομένως, μια τιμή να αντιστοιχίζεται σε δυο διαφορετικά προϊόντα.

Άσκηση 6η : Ένας βιοτέχνης θέλει να νοικιάσει ένα φορτηγό για μια απόσταση 100 χλμ. από την βιοτεχνία B μέχρι το πρατήριο Π. Η εταιρία ενοικίασης ζητάει για κάθε μέρα ενοικίασης 40 € και επιπλέον α ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που θα διανυθεί. Ο βιοτέχνης υπολογίζει ότι το κόστος μεταφοράς στο πρατήριο Π ανέρχεται στα 90 ευρώ.

i) Να βρείτε την τιμή του α.

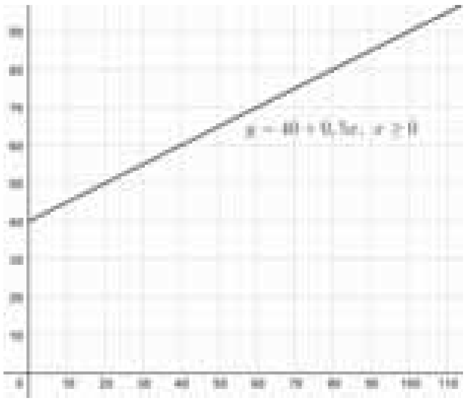
ii) Να γράψετε τη συνάρτηση που υπολογίζει το ημερήσιο κόστος y της ενοικίασης του φορτηγού όταν διανύσει x χιλιόμετρα.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

Λύση: i) Έχουμε $90=40+\alpha\cdot100 \Leftrightarrow 50=100\alpha \Leftrightarrow \alpha=0{,}5$

ii) Το κόστος y όταν διανυθούν x χιλιόμετρα την ημέρα ενοικίασης δίνεται από τη συνάρτηση $y=40+0{,}5\cdot x$, με $x\geq 0$.

iii)



Άσκηση 7η : Δίνεται το τριώνυμο

$$x^2-\lambda x-\frac{\lambda}{4}+\frac{3}{16},\lambda\in\mathbb{R} \ \textbf{(1)}$$

i) Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει ρίζες;

ii) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο (1) έχει ρίζες

α) αντίθετες β) αντίστροφες

γ) ομόσημες δ) αρνητικές.

iii) Υπάρχουν τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η σχέση:

$$3+(4x-2\lambda)^2-4\lambda=4\lambda^2+\left|16x^2-16\lambda x-4\lambda+3\right|;$$

Λύση: i) Είναι $\alpha=1,\beta=-\lambda,\gamma=-\frac{\lambda}{4}+\frac{3}{16}$ και το τριώνυμο έχει $\Delta=\lambda^2+\lambda-\frac{3}{4}$.

Το τριώνυμο έχει ρίζες όταν

$$\Delta\geq0\Leftrightarrow\lambda^2+\lambda-\frac{3}{4}\geq0\Leftrightarrow\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

λ	$-\infty$	$-3/2$		$1/2$	$+\infty$
$\lambda^2+\lambda-\frac{3}{4}$	+	0	−	0	+

ii) Είναι $S=-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$ και $P=\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{\lambda}{4}+\frac{3}{16}=\frac{3-4\lambda}{16}$

α) έχει ρίζες αντίθετες όταν

$$\begin{cases}\Delta\geq0\\ S=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\\ \lambda=0\end{cases}$$

αδύνατο, άρα δεν υπάρχει τέτοια τιμή για το λ.

β) έχει ρίζες αντίστροφες όταν

$$\begin{cases}\Delta\geq0\\ P=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\\ \frac{3-4\lambda}{16}=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\\ \lambda=-\frac{13}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=-\frac{13}{4}$$

γ) έχει ρίζες αντίθετες όταν

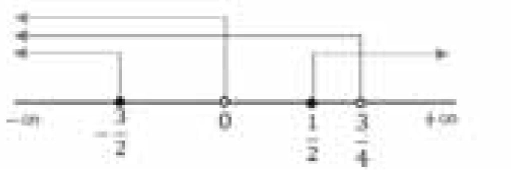
$$\begin{cases}\Delta\geq0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\\ \frac{3-4\lambda}{16}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\\ \lambda<\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$$

δ) έχει ρίζες αρνητικές όταν

$$\begin{cases}\Delta\geq0\\ P>0\\ S<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\\ \frac{3-4\lambda}{16}>0\\ \lambda<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\\ \lambda<\frac{3}{4}\\ \lambda<0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$$



iii) Έχουμε ισοδύναμα:

$$3+(4x-2\lambda)^2-4\lambda=4\lambda^2+\left|16x^2-16\lambda x-4\lambda+3\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|16x^2-16\lambda x-4\lambda+3\right|=16x^2-16\lambda x-4\lambda+3$$

$$\Leftrightarrow\left|x^2-\lambda x-\frac{\lambda}{4}+\frac{3}{16}\right|=x^2-\lambda x-\frac{\lambda}{4}+\frac{3}{16}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-\lambda x-\frac{\lambda}{4}+\frac{3}{16}\geq0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases}\Delta\leq0\\ \alpha>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]\\ 1>0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$$

Γενικά Θέματα Άλγεβρας

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:

- Η έννοια των ταυτοτήτων και ανισοτικών σχέσεων είναι μια αλγεβρική διαδικασία που στηρίζεται στην αποδεικτική διαδικασία όπως και η έννοια της απόλυτης τιμής είναι μία από τις ποιο σημαντικές έννοιες η οποία εισάγει την έννοια της απόστασης μεταξύ των πραγματικών αριθμών.
- Οι ρίζες είναι χρήσιμες στη μελέτη των πραγματικών αριθμών.
- Οι εξισώσεις έχουν τη δική τους, πολύ ενδιαφέρουσα ιστορική καταγωγή και εξέλιξη.
- Οι ακολουθίες αριθμών αποτέλεσαν ιστορικά ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα για την εξέλιξη των Μαθηματικών. Κάποια σημειώματα σε πάπυρο έχουν δείξει ότι γύρω στο 2100 π.Χ. **οι Βαβυλώνιοι** γνώριζαν αριθμητικές και γεωμετρικές ακολουθίες. Το όνομα αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος πιθανόν να έχει δοθεί από τη σχέση που έχει ο κάθε όρος με τον προηγούμενο και τον επόμενό του και συνδέονταν με γεωμετρικά προβλήματα. **Οι Πυθαγόρειοι**, είχαν δημιουργήσει τους **πολύγωνους αριθμούς**, οι οποίοι βασικά ήταν ακολουθίες αριθμών που η γεωμετρική αναπαράστασή τους έδινε κανονικά πολύγωνα.
- Η συνάρτηση είναι ένα κομψό μαθηματικό εργαλείο με προεκτάσεις σε όλους τους χώρους που υπεισέρχονται τα Μαθηματικά.

Θέμα 1ο

α. Έστω κ,ν θετικοί ακέραιοι. Αν $\kappa\nu+1$ το πλήθος αντικείμενα τοποθετηθούν τυχαία σε ν διαφορετικές θέσεις, τότε σε μία τουλάχιστον από τις θέσεις αυτές είναι $\kappa+1$ τοποθετημένα αντικείμενα.

β. Δίνεται ο αριθμός $A=\dfrac{2024^4+2025^3-1}{2024^2+3}$.

Να δείξετε ότι:

i. Ο Α είναι άρτιος.

ii. $A=\left(2023+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{4026}-\sqrt{2023}\right)^2$.

γ. Για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει: $|xy|+xy=0$ (1). Για τις τιμές των x,y που το κλάσμα $K=\dfrac{x^2|x|+y^2|y|}{x-y}$ είναι θετικό, να δείξετε ότι $|x+y|<\sqrt{K}<x-y$.

Λύση: α. Υποθέτουμε ότι σε καμία από τις ν θέσεις δεν έχουν τοποθετηθεί $\kappa+1$ αντικείμενα. Έστω ότι στην πρώτη θέση έχουμε τοποθετήσει ρ_1 αντικείμενα, στη δεύτερη θέση ρ_2 αντικείμενα και γενικά στη νιοστή θέση ρ_ν αντικείμενα. Θα έχουμε $\rho_1\le\kappa$, $\rho_2\le\kappa$, $\rho_3\le\kappa,\cdots,\rho_\nu\le\kappa$. Έτσι το πλήθος των αντικειμένων θα είναι $\rho_1+\rho_2+\cdot\cdots+\rho_\nu\le\kappa\nu\Rightarrow\kappa\nu+1\le\kappa\nu$. Άτοπο.

Άρα σε μία τουλάχιστον από τις ν διαφορετικές θέσεις είναι τοποθετημένα $\kappa+1$ αντικείμενα.

β. Θέτουμε $2024=x$ και έχουμε

$$A=\frac{x^4+(x+1)^3-1}{x^2+3}=\frac{x^4+x^3+3x^2+3x}{x^2+3}=$$

$$\frac{x^3(x+1)+3x(x+1)}{x^2+3}=\frac{x(x+1)(x^2+3)}{x^2+3}=$$

$x(x+1)=2024\cdot2025=2(1012\cdot2025)$, που σημαίνει ότι ο Α είναι άρτιος.

ii. Θα χρησιμοποιήσουμε την **ταυτότητα του Lagrange**: Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,x,\ y$ ισχύει: $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(\alpha x+\beta y)^2+\ (\alpha y-\beta x)^2$ [βλέπε σχ. βιβλίο σελ. 48-49 σχόλιο 2ο].

Για $\alpha=\sqrt{2023}$, $\beta=1$ και $x=\sqrt{2023}$, $y=\sqrt{2}$ έχουμε $A=2024\cdot2025=(2023+1)(2023+2)=$

$$\left(\sqrt{2023}^2+1^2\right)\left(\sqrt{2023}^2+\sqrt{2}^2\right)=$$

$$\left(\sqrt{2023}\sqrt{2023}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2023}\sqrt{2}-\sqrt{2023}\right)^2=$$

$$\left(2023+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{4046}-\sqrt{2023}\right)^2.$$

γ. $(1)\Leftrightarrow|xy|=-xy$. Άρα οι x,y είναι ετερόσημοι, οπότε $x-y\neq0$.

— Αν $x>0$ και $y<0$, τότε

$$K=\frac{x^3-y^3}{x-y}=\frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{x-y}=$$

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}\left(2x^2+2xy+2y^2\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+x^2+y^2\right]>0.$$

— Αν $x<0$ και $y>0$, τότε

$$K=\frac{-x^3+y^3}{x-y}=-\frac{x^3-y^3}{x-y}=-\left(x^2+xy+y^2\right)<0$$

Άρα αν $x>0$ και $y<0$ έχουμε

$K=x^2+xy+y^2>0$.

$(x+y)^2<K\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2<x^2+xy+y^2\Leftrightarrow$ $xy<0$, που ισχύει.

$K<(x-y)^2\Leftrightarrow x^2+xy+y^2<x^2-2xy+y^2\Leftrightarrow$ $3xy<0$, που ισχύει.

Άρα $(x+y)^2 < K < (x-y)^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+y)^2} < \sqrt{K} < \sqrt{(x-y)^2} \Leftrightarrow$

$|x+y| < \sqrt{K} < |x-y| \overset{x-y>0}{\Leftrightarrow} |x+y| < \sqrt{K} < x-y$.

Σχόλια: **1ο.** Το ερώτημα α αναφέρεται ως “**Αρχή Dirichlet ή αρχή της περιστεροφωλιάς**”.
2ο. Για το ερώτημα β ii , εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ταυτότητες και από την παράσταση $\left(2023+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{4026}-\sqrt{2023}\right)^2$ να οδηγηθούμε στην Α.

Θέμα 2ο

Αν τρεις αριθμοί α,β,γ είναι διαφορετικοί ανά δύο και ισχύουν οι σχέσεις $\alpha^3+\mu\alpha+\lambda=0$ (1), $\beta^3+\mu\beta+\lambda=0$ (2) και $\gamma^3+\mu\gamma+\lambda=0$ (3), τότε:

i. Να δείξτε ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}.$$

Λύση: Αφαιρούμε τη (2) από την (1) και παίρνουμε $\alpha^3-\beta^3+\mu(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)+\mu(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\mu\right)=0 \overset{\alpha-\beta\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\mu=0$ (4).

Όμοια αφαιρούμε την (3) από την (1) και έχουμε

$(\alpha-\gamma)\left(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2+\mu\right)=0 \overset{\alpha\neq\gamma}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2+\mu=0$ (5).

Αφαιρούμε την (5) από την (4) και παίρνουμε $\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta^2-\gamma^2=0 \Leftrightarrow$

$\alpha(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)=0 \Leftrightarrow$

$(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=0 \overset{\beta-\gamma\neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha+\beta+\gamma=0$.

ii. Αφού $\alpha\neq\beta$ έχουμε $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=$ $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}\neq 0$. Άρα η παράσταση Π είναι καλά ορισμένη για τους α,β,γ της υπόθεσης. Από το ερώτημα i έχουμε:

$\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2=0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\alpha+2\gamma\alpha=0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=$

$-2\left[\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)\right] \overset{\gamma=-(\alpha+\beta)}{=} -2\left[\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2\right]=$

$-2\left(-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2\right)=2\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$.

Άρα $\Pi=\dfrac{2\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=2$.

Θέμα 3ο

Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του κλάσματος $K=\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-3x+4}$ για τις διάφορες τιμές του $x\in R-\{0\}$.

Λύση: Το τριώνυμο x^2-3x+4 έχει διακρίνουσα -7, οπότε είναι $x^2-3x+4>0$ για κάθε $x\in R$, Έτσι το σύνολο ορισμού του κλάσματος είναι το R.

$K=\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-3x+4} \Leftrightarrow K\left(x^2-3x+4\right)=x^2+3x+4$

$\Leftrightarrow (K-1)x^2-3(K+1)x+4K-4=0$ (1). Όταν $x\neq 0$ είναι $K\neq 1$ και η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού και αφού $x\in R-\{0\}$, πρέπει

$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 9(K+1)^2-16(K-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\left[3(K+1)+4(K-1)\right]\left[3(K+1)-4(K-1)\right]\geq 0 \Leftrightarrow$

$(7K-1)(-K+7)\geq 0 \Leftrightarrow \left(K-\dfrac{1}{7}\right)(K-7)\leq 0$.

K	$-\infty$ 1 $\frac{1}{7}$ 7 $-\infty$
$\left(K-\frac{1}{7}\right)(K-7)$	+ ‖ + 0 − 0 +

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου του τριωνύμου $\left(K-\frac{1}{7}\right)(K-7)$ παίρνουμε $\frac{1}{7}\leq K\leq 7$. Οι τιμές $K=\frac{1}{7}$, $K=7$ προέρχονται όταν $\Delta=0$, δηλαδή όταν η (1) έχει διπλή ρίζα την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=\dfrac{3(K+1)}{2(K-1)}$ (2).

Αν $K=\frac{1}{7}$ $(2)\Rightarrow x=-2$ και αν $K=7$ $(2)\Rightarrow x=2$.

Άρα η μέγιστη τιμή του K είναι το 7 για $x=2$ και η ελάχιστη τιμή του K είναι $\frac{1}{7}$ για $x=-2$.

Θέμα 4ο

Θεωρούμε την εξίσωση

$$(2x+1)^{4038}-\lambda|2x+1|^{2019}-\left(\lambda^2-\frac{5}{4}\right)=0 \ (1),$$

$\lambda\in R$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) έχει τέσσερις πραγματικές και άνισες ρίζες.

Λύση: $(1)\Leftrightarrow\left(|2x+1|^{2019}\right)^2-\lambda|2x+1|^{2019}-\left(\lambda^2-\frac{5}{4}\right)=0$

Θέτουμε $|2x+1|^{2019}=\omega$ (2) και η εξίσωση γράφεται $\omega^2-\lambda\omega-\left(\lambda^2-\frac{5}{4}\right)=0$ (3).

Είναι $\omega\geq 0$ και $(2)\Leftrightarrow|2x+1|=\sqrt[2019]{\omega}$ (4).

Πρέπει το ω να παίρνει δύο θετικές τιμές ώστε η (4) για τις τιμές του ω να μας δίνει τέσσερις πραγματικές και άνισες ρίζες.
Αυτό συμβαίνει όταν η (3) έχει δύο άνισες ρίζες θετικές.

Δηλαδή $\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}$ (Σ).

- $\Delta>0\Leftrightarrow 5\lambda^2-5>0\Leftrightarrow\lambda^2>1\Leftrightarrow\sqrt{\lambda^2}>1\Leftrightarrow$ $|\lambda|>1\Leftrightarrow\lambda<-1$ ή $\lambda>1$.
- $P>0\Leftrightarrow-\left(\lambda^2-\frac{5}{4}\right)>0\Leftrightarrow\lambda^2<\frac{5}{4}\Leftrightarrow$. $\sqrt{\lambda^2}<\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow|\lambda|<\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{5}}{2}<\lambda<\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- $S>0\Leftrightarrow\lambda>0$.

Από τη συναλήθευση των παραπάνω ανισοτήτων παίρνουμε $1<\lambda<\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\lambda\in\left(1,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Θέμα 5ο

Οι θετικοί αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda\neq 1$. Θεωρούμε την εξίσωση $(\alpha\beta\gamma)x^2-\sqrt{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}.x+\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)=0$ (1).

α. Δείξτε ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

β. Αν η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1) είναι $\rho=\frac{\sqrt{7\alpha}}{2\beta\gamma}$, να βρείτε το λόγο της γεωμετρικής προόδου.

γ. Αν έχουμε επιπλέον ότι οι α, β+2, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και το άθροισμά τους είναι 30 να βρείτε τους α,β,γ.

Λύση:

Έχουμε $\beta=\alpha\lambda,\gamma=\beta\lambda\Leftrightarrow\gamma=\alpha\lambda^2$.

α. Η (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με άγνωστο τον x. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)$.

$$\Delta=\alpha^3+\alpha^3\lambda^3+\alpha^3\lambda^6-\alpha^6\lambda^6\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^3\lambda^3}+\frac{1}{\alpha^3\lambda^6}\right)=$$
$$\alpha^3\left(1+\lambda^3+\lambda^6\right)-\alpha^6\lambda^6\frac{\lambda^6+\lambda^3+1}{\alpha^3\lambda^6}\Leftrightarrow$$
$$\Delta=\alpha^3\left(1+\lambda^3+\lambda^6\right)-\alpha^3\left(\lambda^6+\lambda^3+1\right)=0.$$

Άρα η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

β. Η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι
$$\rho=\frac{\sqrt{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}}{2\alpha\beta\gamma}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}}{2\alpha\beta\gamma}=\frac{\sqrt{7\alpha}}{2\beta\gamma}\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}=\alpha\sqrt{7\alpha}\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7\alpha^3\Leftrightarrow$$
$$\alpha^3\left(1+\lambda^3+\lambda^6\right)=7\alpha^3\Leftrightarrow\lambda^6+\lambda^3-6=0\ (2).$$

Θέτουμε $\lambda^3=t$ και η (2) γράφεται $t^2+t-6=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $t=-3$ ή $t=2$. Επειδή οι α,β,γ είναι θετικοί αριθμοί θα είναι $\lambda>0$, οπότε $t>0$. Έτσι δεκτή τιμή είναι η $t=2$. Άρα $\lambda^3=2\Leftrightarrow\lambda=\sqrt[3]{2}$.

γ. Τους $\alpha,\beta+2,\gamma$ μπορούμε να τους γράψουμε $\alpha=(\beta+2)-\omega,\ \beta+2,\ \gamma=(\beta+2)+\omega$ όπου ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου στην οποία ανήκουν οι αριθμοί $\alpha,\beta+2,\gamma$.

Έχουμε $(\beta+2)-\omega+\beta+2+(\beta+2)+\omega=30\Leftrightarrow$ $3\beta=24\Leftrightarrow\beta=8$.

Άρα $\alpha=10-\omega,\gamma=10+\omega$.

Αφού οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει $\beta^2=\alpha\gamma\Leftrightarrow$ $64=(10-\omega)(10+\omega)\Leftrightarrow$ $\omega^2=36\Leftrightarrow\omega=\pm 6$.

— Αν $\omega=-6$, τότε: $\alpha=16,\ \beta=8,\gamma=4$.

— Αν $\omega=6$, τότε: $\alpha=4,\beta=8,\gamma=16$.

Θέμα 6ο

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon:y=\left(7-\left|2-\alpha^2\right|\right)x+2$, $\alpha\in R$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία. Το σύνολο A από το οποίο παίρνει τιμές το α είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f για την οποία ισχύει

$$f(-x)=-f(x)\ (1)\ \text{για κάθε}\ x\in A.$$

i. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(|x|)+f(x)$ και έχουμε $\kappa\in(-3,0)$, $\lambda\in(0,3)$ για τα οποία ισχύει $g(\kappa)+g(\lambda)=m$ (2), $m\in R$.

Δείξτε ότι το συμμετρικό σημείο του $M\left(\lambda,\frac{m}{2}\right)$

ως προς την αρχή των αξόνων καθώς και το M ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση:

Η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία όταν $7-\left|2-\alpha^2\right|>0 \Leftrightarrow \left|2-\alpha^2\right|<7 \Leftrightarrow$

$-7<2-\alpha^2<7 \Leftrightarrow -9<-\alpha^2<5 \Leftrightarrow -5<\alpha^2<9 \Rightarrow$

$\alpha^2<9 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2}<\sqrt{9} \Leftrightarrow |\alpha|<3 \Leftrightarrow -3<\alpha<3$.

Άρα $A=(-3,3)$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f=(-3,3)$.

i. Για $x=0$ από την (1) παίρνουμε

$f(0)=-f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$ που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

ii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $D_g=(-3,3)$.

$g(\kappa)=f(-\kappa)+f(\kappa)=-f(\kappa)+f(\kappa)=0$ και

$g(\lambda)=2f(\lambda)$.

$(2) \Leftrightarrow 2f(\lambda)=m \Leftrightarrow f(\lambda)=\dfrac{m}{2}$ (3).

$(3) \Rightarrow M \in C_f$. $(3) \overset{(1)}{\Rightarrow} -f(-\lambda)=\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow f(-\lambda)=-\dfrac{m}{2}$ (4).

Το συμμετρικό σημείο του M ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $N\left(-\lambda,-\dfrac{m}{2}\right)$, οπότε λόγω της (4) το σημείο N είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f.

Σχόλιο: Οι συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το μηδέν (π.χ $(-\alpha,\alpha)$, ή $[-\alpha,\alpha]$ ή $(-\alpha,0)\cup(0,\alpha)$ ή $[-\alpha,0)\cup(0,\alpha]$ με $\alpha>0$ ή $R-\{0\}$ ή R) για τις οποίες ισχύει $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in D_f$ ανήκουν σε μία κατηγορία συναρτήσεων που ονομάζονται περιττές, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Θέμα 7ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=\left(2-|x-1|\right)^{\frac{3}{4}} \text{ και } g(x)=\left(x^2-2x+1\right)^{-\frac{3}{8}}$$

Δείξτε ότι:

i. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων έχουν δύο κοινά σημεία A, B.

ii. Για οποιοδήποτε σημείο $M(x,0)$ το εμβαδόν των τριγώνων MAB είναι σταθερό, όπου A, B τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,g.

Λύση: i. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει και αρκεί:

$2-|x-1|\geq 0 \Leftrightarrow |x-1|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x-1\leq 2 \Leftrightarrow$

$-1\leq x\leq 3$. Άρα $D_f=[-1,3]$.

Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει και αρκεί

$x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Άρα $D_g=R-\{1\}$.

Η τομή των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων είναι το σύνολο $D=[-1,1)\cup(1,3]$.

Έχουμε $f(x)=\sqrt[4]{\left(2-|x-1|\right)^3}$ και

$g(x)=\left[(x-1)^2\right]^{-\frac{3}{8}}=\left[|x-1|^2\right]^{-\frac{3}{8}}=|x-1|^{-\frac{3}{4}} \Leftrightarrow$.

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{|x-1|^3}}$.

Για $x\in D$, $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt[4]{\left(2-|x-1|\right)^3}=$

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{|x-1|^3}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{\left(2-|x-1|\right)^3}\sqrt[4]{|x-1|^3}=1 \Leftrightarrow$

$\sqrt[4]{\left[\left(2-|x-1|\right)|x-1|\right]^3}=1 \Leftrightarrow$

$\left[\left(2-|x-1|\right)|x-1|\right]^3=1 \Leftrightarrow$

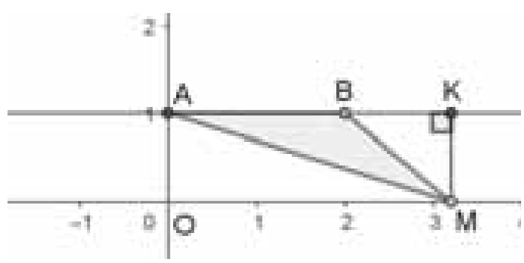
$\left(2-|x-1|\right)|x-1|=1 \Leftrightarrow 2|x-1|-|x-1|^2=1 \Leftrightarrow$

$|x-1|^2-2|x-1|+1=0 \Leftrightarrow \left(|x-1|-1\right)^2=0 \Leftrightarrow$.

$$|x-1|-1=0 \Leftrightarrow |x-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-1 \Leftrightarrow x=0 \\ \text{ή} \\ x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$$

Οι τιμές του x που βρήκαμε ανήκουν στο D, οπότε είναι δεκτές. Άρα οι C_f, C_g έχουν δύο κοινά σημεία το $A(0,1)$ και το $B(2,1)$.

ii. Τα σημεία A, B έχουν ίδια τεταγμένη, οπότε η ευθεία AB είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ με εξίσωση $AB: y=1$ Τα σημεία M είναι σημεία του άξονα $x'x$.



Το ύψος MK των τριγώνων MAB έχει μήκος 1

Άρα το εμβαδόν των τριγώνων MAB είναι

$$E=\frac{1}{2}(AB)(MK)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1 \text{ τετρ. μονάδα.}$$

Θέμα 8ο

Δίνονται οι εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) και $\alpha x^2+\gamma x+\beta=0$ (2) με πραγματικούς μη μηδενικούς συντελεστές διαφορετικούς ανά δύο και πραγματικές ρίζες.

i. Αν οι εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα το ρ δείξτε ότι οι αριθμοί $\beta-\alpha, \beta, -\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (u_ν) με $u_1=\alpha$ και διαφορά $\omega\neq 0$. Έστω S_ν το άθροισμα των πρώτων ν όρων της αριθμητικής προόδου και S το άθροισμα των επόμενων $\kappa\nu$ όρων της με $\kappa>1$. Να βρείτε την τιμή της διαφοράς ω ώστε ο λόγος $\frac{S_\nu}{S}$ να είναι σταθερός,

iii. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της (1), τότε να δείξετε ότι η (2) δεν μπορεί να έχει ρίζες τις ρ_1^2, ρ_2^2

Λύση:

i. Αφού ο ρ είναι κοινή ρίζα των εξισώσεων πρέπει $\begin{cases}\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0\\ \alpha\rho^2+\gamma\rho+\beta=0\end{cases}\overset{(-)}{\Rightarrow}(\beta-\gamma)\rho+\gamma-\beta=0\Leftrightarrow$

$(\beta-\gamma)\rho-(\beta-\gamma)=0\Leftrightarrow(\beta-\gamma)(\rho-1)=0\overset{\beta\neq\gamma}{\Leftrightarrow}$

$\rho-1=0\Leftrightarrow\rho=1$.

Άρα $\alpha+\beta+\gamma=0$ (3).

Οι αριθμοί $\beta-\alpha, \beta, -\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$2\beta=(\beta-\alpha)+(-\gamma)$

$\Leftrightarrow 2\beta=\beta-\alpha-\gamma\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=0$ που ισχύει λόγω της (3).

ii. Έχουμε $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2u_1+(\nu-1)\omega\right]\Leftrightarrow$

$S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]=\frac{\nu}{2}\left[\omega\nu+(2\alpha-\omega)\right]$.

$S=S_{\kappa\nu}-S_\nu=\frac{\kappa\nu}{2}\left[2\alpha+(\kappa\nu-1)\omega\right]-$

$\frac{\nu}{2}\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha\kappa+\kappa(\kappa\nu-1)\omega-\right.$

$\left.2\alpha-(\nu-1)\omega\right]=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha\kappa+\kappa^2\omega\nu-\kappa\omega-2\alpha-\right.$

$\left.\nu\omega+\omega\right]=\frac{\nu}{2}\left[(\kappa^2-1)\omega\nu+(\kappa-1)(2\alpha-\omega)\right]$.

$$\frac{S_\nu}{S}=\frac{\omega\nu+(2\alpha-\omega)}{(\kappa^2-1)\omega\nu+(\kappa-1)(2\alpha-\omega)}.$$

Θέλουμε εκείνο το ω που για κάθε θετικό ακέραιο ν να είναι $\frac{S_\nu}{S}=c$ (4), όπου c σταθερός αριθμός.

$(4)\Leftrightarrow\omega\nu+(2\alpha-\omega)=c(\kappa^2-1)\omega\nu+$

$c(\kappa-1)(2\alpha-\omega)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\omega=c(\kappa^2-1)\omega\overset{\omega\neq 0}{\Leftrightarrow}c(\kappa-1)=\dfrac{1}{\kappa+1}\ (5)\\ \text{και}\\ 2\alpha-\omega=c(\kappa-1)(2\alpha-\omega)\ (6)\end{cases}.$$

Αν $\omega\neq 2\alpha$, $(6)\Leftrightarrow c(\kappa-1)=1\overset{(5)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{\kappa+1}=1\Leftrightarrow$

$\kappa=0$. Άτοπο.

Αν $\omega=2\alpha$ είναι $\frac{S_\nu}{S}=\frac{1}{\kappa^2-1}$, δηλαδή όταν

$\omega=2\alpha$ ο λόγος $\frac{S_\nu}{S}$ είναι σταθερός.

Άρα $\omega=2\alpha$.

iii. Υποθέτουμε ότι οι ρ_1^2, ρ_2^2 είναι ρίζες της (2),

τότε έχουμε: $\begin{cases}\rho_1+\rho_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}\\ \rho_1\rho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}\end{cases}$ και $\begin{cases}\rho_1^2+\rho_2^2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}\\ \rho_1^2\rho_2^2=\dfrac{\beta}{\alpha}\end{cases}$

$\rho_1^2+\rho_2^2=-\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2=-\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow$

$\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\beta^2=\alpha\gamma$ (7).

$\rho_1^2\rho_2^2=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow(\rho_1\rho_2)^2=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow$

$\frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\gamma^2=\alpha\beta$ (8). Από τις (7), (8) έχουμε

$\frac{\beta^2}{\gamma^2}=\frac{\gamma}{\beta}\Leftrightarrow\beta^3=\gamma^3\Leftrightarrow\beta=\gamma$. Άτοπο.

Άρα όταν η (1) έχει ρίζες τις ρ_1,ρ_2 η (2) δεν μπορεί να έχει ρίζες τις ρ_1^2,ρ_2^2.

Τάξη: Α΄ Γεωμετρία « ΚΑΝΟΝΙΚΗ» και «ΣΤΡΙΜΜΕΝΗ»

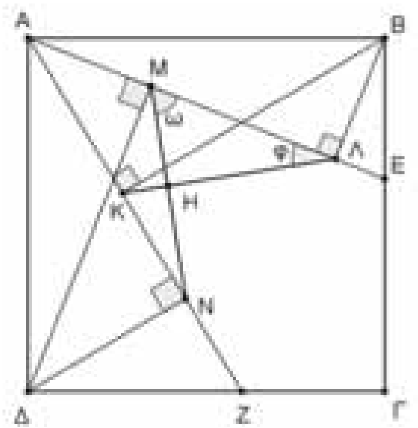
Σωτήρης Γκουντουβάς

Στο παρακάτω άρθρο θα δούμε μερικές ασκήσεις γεωμετρίας τις οποίες θα λύσουμε "**κανονικά**" και "**στριμμένα**", δηλαδή θα δώσουμε λύση με τα **συνήθη θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας** και με **στροφή**. Και οι δύο λύσεις είναι ευκλείδειες με την έννοια ότι δεν χρησιμοποιούμε συντεταγμένες και εξισώσεις... Ξεκινάμε λοιπόν!

Άσκηση 1η: **Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ. Φέρουμε τις $B\Lambda \perp AE$, $BK \perp AZ$, $\Delta N \perp AZ$ και $\Delta M \perp AE$. Να αποδείξετε ότι $K\Lambda \perp MN$.**

Λύση: Κανονική

Το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι εγγράψιμο, γιατί η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Κ και Λ υπό ορθές γωνίες, άρα $A\hat{\Lambda}K = A\hat{B}K = \varphi$.



Οι γωνίες $A\hat{B}K = \Delta\hat{A}N = \varphi$ είναι ίσες, γιατί είναι οξείες με κάθετες πλευρές.

Το τετράπλευρο ΑΔΝΜ είναι εγγράψιμο, γιατί η πλευρά ΑΔ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Μ και Ν υπό ορθές γωνίες, άρα $\Delta\hat{A}N = \Delta\hat{M}N = \varphi$.

Έστω ότι $N\hat{M}\Lambda = \omega = 90° - \varphi$.

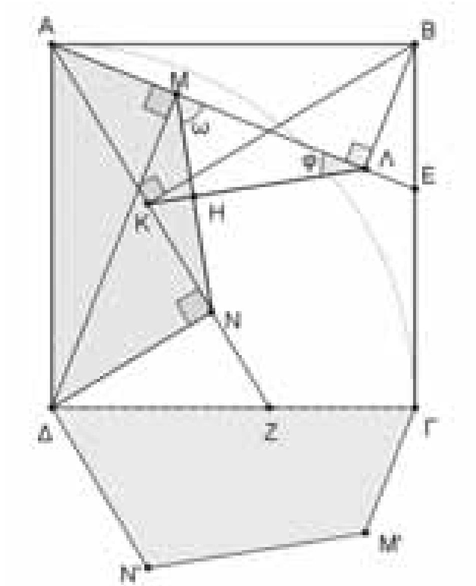
Στο τρίγωνο ΜΗΛ έχουμε ότι:

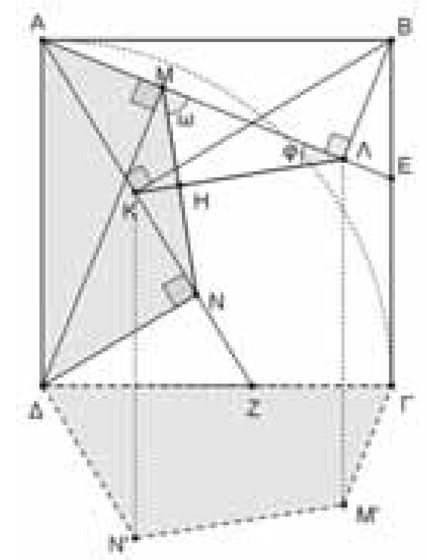
$$A\hat{\Lambda}K + N\hat{M}\Lambda = \varphi + \omega = 90°.$$

Άρα $K\Lambda \perp MN$ **ο.ε.δ.**

Λύση Στριμμένη

Τα τετράπλευρα ΑΒΛΚ και ΑΔΝΜ είναι ίσα και συμπίπτουν αν στρέψουμε το ένα από αυτά κατά 90º και μετά το μεταφέρουμε παράλληλα κατά απόσταση α, όπου α η πλευρά του τετραγώνου. Για παράδειγμα αν στρίψουμε το ΑΔΝΜ κατά 90º δεξιόστροφα γύρω από το Δ, τότε το Α θα ταυτιστεί με το Γ και το τετράπλευρο θα πάρει τη θέση ΔΓΜ΄Ν΄. Στη συνέχεια αυτό το μεταφέρουμε κατά α μονάδες προς τα πάνω και ταυτίζεται με το ΑΒΛΚ. Οι πλευρές ΚΛ και ΜΝ είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τετράπλευρων (απέναντι από τις ίσες γωνίες), άρα $K\Lambda \perp MN$, λόγω της στροφής κατά 90º.

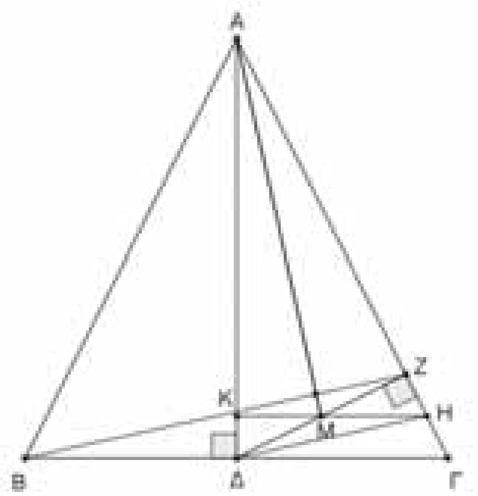




Άσκηση 2η: **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της βάσης ΒΓ. Από το Δ φέρουμε $ΔΖ \perp ΑΓ$. Αν Μ μέσο του ΔΖ, τότε να αποδείξετε ότι $ΑΜ \perp ΒΖ$.**
(Μαθηματική Ολυμπιάδα ΕΣΣΔ 1962, Μόσχα)

Λύση: Κανονική

Η διάμεσος ΑΔ είναι και ύψος στο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε το ΒΖ και το $ΔΗ//ΒΖ$.



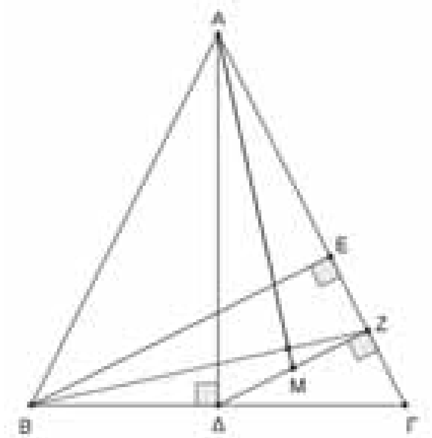
Στο τρίγωνο ΒΓΖ το Δ είναι το μέσο της ΒΓ, $ΔΗ//ΒΖ$, άρα το Η είναι το μέσο ΖΓ.

Από το Η φέρουμε την ΗΜ που τέμνει την ΑΔ στο Κ. Τότε $ΗΜ//ΓΔ$ διότι τα σημεία Η, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΖ, ΔΖ του τριγώνου ΓΔΖ.

Έχουμε λοιπόν $ΗΚ \perp ΑΔ$, αφού $ΗΜΚ//ΓΔ$ και $ΓΔ \perp ΑΔ$.

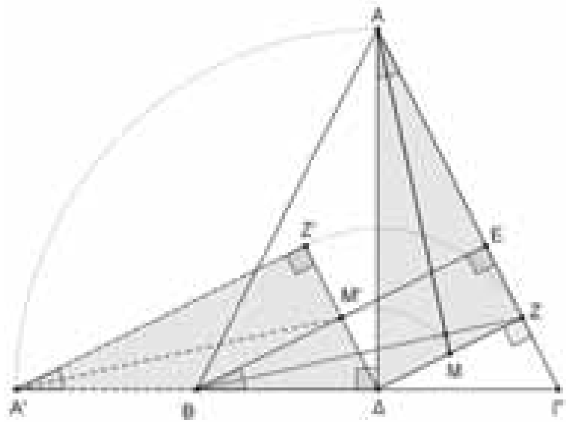
Στο τρίγωνο ΑΔΗ έχουμε ότι $ΔΖ \perp ΑΗ$ και $ΗΚ \perp ΑΔ$, άρα το σημείο Μ είναι το ορθόκεντρο, οπότε $ΑΜ \perp ΔΗ$, συνεπώς $ΑΜ \perp ΒΖ$, **ο.ε.δ.**

Λύση Στριμμένη



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΔ είναι και ύψος. Φέρουμε το ύψος ΒΕ, οπότε $ΔΖ//ΒΕ$. Στο τρίγωνο ΒΓΕ, από το μέσο Δ έχουμε φέρει $ΔΖ//ΒΕ$, άρα το σημείο Ζ είναι το μέσο του ΕΓ, οπότε η ΒΖ είναι διάμεσος.

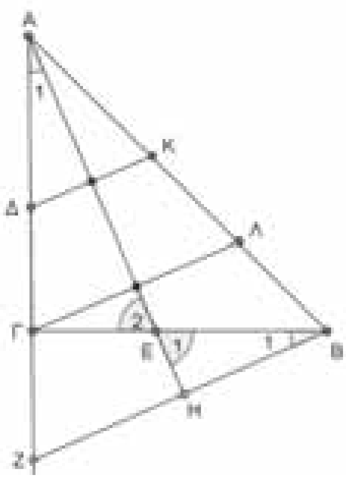
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΓΕ είναι όμοια, γιατί $\hat{ΔΑΓ} = 90° - \hat{Γ} = \hat{ΕΒΓ}$.



Αν στρέψουμε το ΑΔΖ γύρω από το Δ κατά $90°$ αριστερόστροφα, τότε η κορυφή Α θα βρεθεί στο σημείο Α΄ πάνω στην ευθεία ΓΒ. Η πλευρά ΑΖ θα στραφεί στην Α΄Ζ΄ και θα είναι παράλληλη στην ΒΕ γιατί οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες $\hat{ΓΒΕ} = \hat{ΔΑ'Ζ'}$ είναι ίσες. Έτσι οι αντίστοιχες πλευρές των τριγώνων ΒΓΕ και Α΄ΔΖ΄ θα γίνουν παράλληλες, οπότε οι αντίστοιχες διάμεσοι Α΄Μ΄ και ΒΖ θα γίνουν παράλληλες που σημαίνει ότι πριν τη στροφή $ΑΜ \perp ΒΖ$ **ο.ε.δ.**

Άσκηση 3η: **Δίνεται ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ = ΒΓ$ και $\hat{Γ} = 90°$. Στις πλευρές ΑΓ, ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $ΓΔ = ΓΕ$. Από τα Δ και Γ φέρνουμε κάθετες ευθείες στην ΑΕ που τέμνουν την ΑΒ στα Κ, Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΚΛ = ΛΒ$.**
(Μαθηματική Ολυμπιάδα ΕΣΣΔ 1974, Ερεβάν)

Λύση: Κανονική 1η



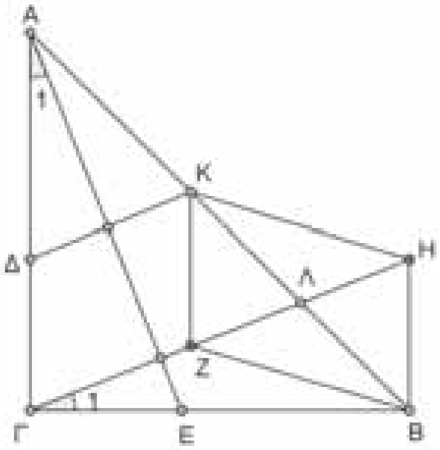
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Προεκτείνουμε το ΔΓ κατά ίσο τμήμα $ΓΖ=ΔΓ$ και φέρουμε το ΖΒ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΓΖ είναι ίσα, οπότε $\hat{B}_1=\hat{A}_1$. Στο τρίγωνο ΒΕΗ έχουμε: $\hat{B}_1+\hat{E}_1=\hat{A}_1+\hat{E}_2=90°$,

άρα $\hat{H}=90°$, οπότε $ZB//ΓΛ//ΔK$.

Έχουμε λοιπόν $ZB//ΓΛ//ΔK$ και $ΔΓ=ΓΖ$, συνεπώς $ΚΛ=ΛΒ$. **ο.ε.δ**

Λύση: Κανονική 2η



Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{Γ}_1$ είναι ίσες γιατί είναι οξείες με τις πλευρές κάθετες. Από το Β φέρουμε κάθετη στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΓΛ στο Η.

Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΓΗ είναι ίσα, άρα $BH=ΓΕ=ΓΔ$. Επίσης $BH//ΓΔ$, άρα $BH//=ΓΔ$ (1).

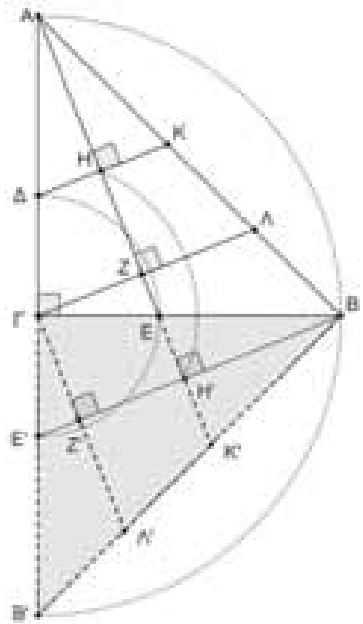
Από το Κ φέρουμε $KZ//ΓΔ$. Τότε το τετράπλευρο ΓΔΚΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, άρα $KZ//=ΓΔ$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $KZ//=BH$, άρα το τετράπλευρο ΒΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του ΒΚ, ΖΗ διχοτομούνται, άρα $ΚΛ=ΛΒ$ **ο.ε.δ.**

Λύση Στριμμένη

Στρέφουμε το τρίγωνο ΑΒΓ κατά 90° δεξιόστροφα, γύρω από το σημείο Γ. Τότε το σημείο Α θα μεταβεί στο Β, το σημείο Β στο Β′ πάνω στην ημιευθεία ΑΓ, ώστε $ΓΒ'=ΑΓ$ και το σημείο Ε στο Ε′, ώστε $ΓΕ'=ΓΕ$, οπότε το τμήμα ΑΕ θα στραφεί στο ΒΕ′. Τότε θα έχουμε ότι $E'B//ΓΛ$, αφού το Ε′Β είναι κάθετο στην ΑΕ αφού στρέφεται κατά 90°.

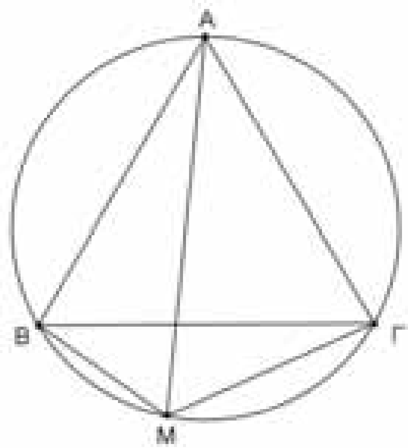
Τώρα, αφού $E'B//ΓΛ//ΔK$ και $ΔΓ=ΓΕ'$, θα έχουμε ότι $ΚΛ=ΛΒ$ **ο.ε.δ.**

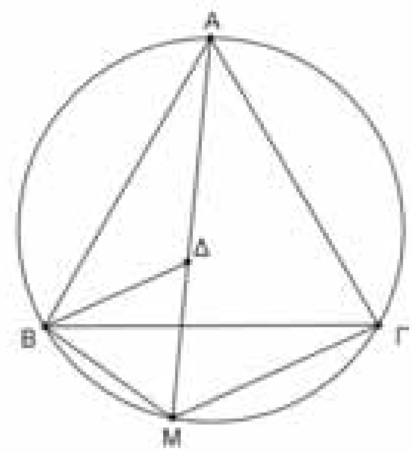


Άσκηση 4η: Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος. Αν Μ τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ που δεν περιέχει το Α, τότε $MA=MB+MΓ$

(Θεώρημα Van Schooten)

Λύση: Κανονική 1η





Στην ΑΜ παίρνουμε τμήμα $ΜΔ = ΜΒ$. Τότε το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ισοσκελές και $Β\hat{Μ}Α = Β\hat{Γ}Α = 60°$. Άρα το ΒΔΜ είναι ισόπλευρο, συνεπώς $ΒΔ = ΒΜ = ΜΔ$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΜ είναι ίσα γιατί έχουν $ΑΒ = ΒΓ$, $ΒΔ = ΒΜ$ και οι γωνίες $Α\hat{Β}Δ = Γ\hat{Β}Μ = 60° - Γ\hat{Β}Δ$, άρα $ΜΓ = ΔΑ$. Οπότε $ΜΒ + ΜΓ = ΜΔ + ΔΑ = ΜΑ$ **ο.ε.δ.**

Σχόλιο

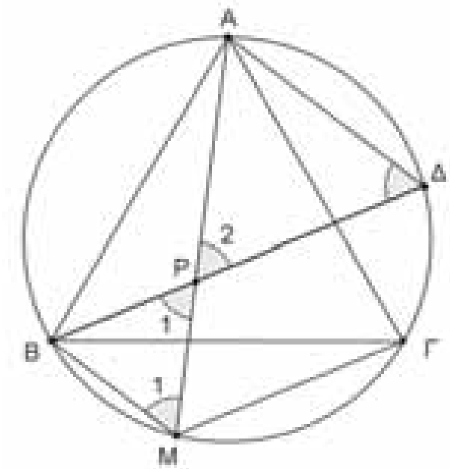
Εφαρμόζοντας το 1ο Θεώρημα Πτολεμαίου προκύπτει αμέσως η απόδειξη.

Το ΑΒΜΓ εγγεγραμμένο τετράπλευρο, οπότε:

$ΜΒ \cdot ΑΓ + ΜΓ \cdot ΑΒ = ΜΑ \cdot ΒΓ \Rightarrow$

$α \cdot ΜΒ + α \cdot ΜΓ = α \cdot ΜΑ \Rightarrow ΜΒ + ΜΓ = ΜΑ$. **ο.ε.δ.**

Λύση: Κανονική 2η



Θεωρούμε σημείο Δ στο τόξο ΑΓ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΓΜ}$, οπότε $ΑΔ = ΓΜ$. Φέρουμε την ΒΔ που τέμνει την ΑΜ στο Ρ. Έχουμε ότι $\hat{Μ}_1 = 60°$ και

$$\hat{Ρ}_1 = \hat{Ρ}_2 = \frac{\overset{\frown}{ΒΜ} + \overset{\frown}{ΑΔ}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ΒΜ} + \overset{\frown}{ΓΜ}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°,$$

άρα το τρίγωνο ΡΒΜ είναι ισόπλευρο, συνεπώς $ΜΒ = ΜΡ$.

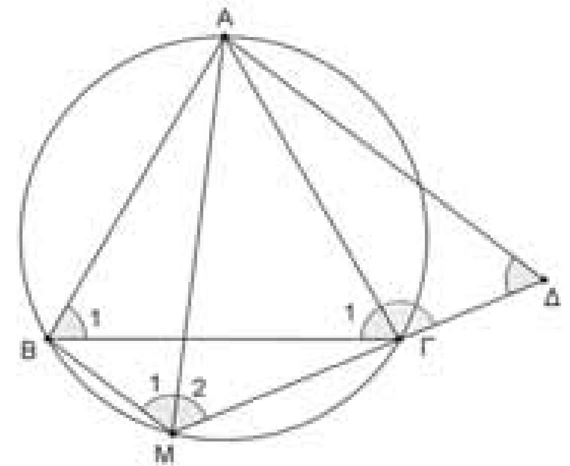
Επίσης $\hat{Δ} = 60° = \hat{Ρ}_2$, άρα το τρίγωνο ΡΑΔ είναι ισόπλευρο, συνεπώς $ΑΔ = ΡΑ$. Οπότε $ΜΒ + ΜΓ = ΜΡ + ΑΔ = ΜΡ + ΡΑ = ΜΑ$ **ο.ε.δ.**

Λύση: Κανονική 3η

Έχουμε ότι: $\hat{Μ}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{Β}_1 = \hat{Μ}_2 = φ = 60°$.

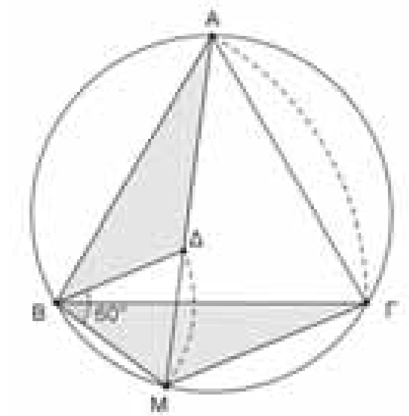
Προεκτείνουμε την ΜΓ κατά τμήμα $ΓΔ = ΜΒ$. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΔ είναι ίσα γιατί $ΑΒ = ΑΓ$, $ΒΜ = ΓΔ$ και $Α\hat{Β}Μ = Α\hat{Γ}Δ$ (εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΜΓ). Άρα $\hat{Μ}_1 = \hat{Δ} = φ = 60°$ και $ΑΜ = ΑΔ$.

Συνεπώς το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισόπλευρο.



Άρα: $ΜΑ = ΜΔ = ΜΓ + ΓΔ = ΜΓ + ΜΒ$. **ο.ε.δ.**

Λύση: Στριμμένη



Στην ΜΑ παίρνουμε τμήμα $ΜΔ = ΜΒ$. Περιστρέφουμε το τμήμα ΒΜ κατά 60ο γύρω από το Β αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, οπότε το Μ θα ταυτιστεί με το Δ, αφού το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισόπλευρο.

Αν περιστρέψουμε το τρίγωνο ΒΜΓ κατά 60ο γύρω από το Β αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, τότε το Μ θα ταυτιστεί με το Δ, αφού $Μ\hat{Β}Δ = 60°$ και το Γ με το Α, αφού $Γ\hat{Β}Α = 60°$, συνεπώς $ΜΓ = ΔΑ$. Οπότε

$ΜΒ + ΜΓ = ΜΔ + ΔΑ = ΜΑ$ **ο.ε.δ**

Ο **Frans Van Schooten** (1615-1660) ήταν σημαντικός Ολλανδός μαθηματικός. Υπήρξε καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Leiden. Μετέφρασε στα λατινικά και εξέδωσε την *La Geometrie* του Καρτέσιου το 1649 και έκανε εκτεταμένα σχόλια συμβάλλοντας σημαντικά στη διάδοση και καθιέρωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Για το παρόν άρθρο βιβλίο αναφοράς ήταν το:

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ, 100+1 ασκήσεις Γεωμετρίας, Σωτήρης Γκουντουβάς, [εκδόσεις Κορφιάτης, Αθήνα 2023].

Επαναληπτικές Ασκήσεις στην Άλγεβρα

Θανάσης Ξένος – Χρήστος Λαζαρίδης

Άσκηση 1η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)$.

α) Να βρεθούν οι τιμές $f(π)$, $f(-π)$, $f(4π)$.

β) Να βρεθούν τα ακρότατα της f καθώς και οι τιμές του x για τις οποίες λαμβάνει τα ακρότατα.

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημείατης γραφικής παράστασης C_f, της f, με τους άξονες συντεταγμένων στο διάστημα $[0,2π]$.

Λύση:

α) $f(π)=1+2ημ\left(π-\frac{π}{4}\right)=1+2ημ\frac{π}{4}=1+\sqrt{2}$

$f(-π)=1+2ημ\left(-π-\frac{π}{4}\right)=1-2ημ\left(π+\frac{π}{4}\right)=$

$1+2ημ\left(\frac{π}{4}\right)=1+\sqrt{2}$

$f(4π)=1+2ημ\left(4π-\frac{π}{4}\right)=1+2ημ\left(-\frac{π}{4}\right)=$

$1-2ημ\left(\frac{π}{4}\right)=1-\sqrt{2}$.

β) $-1\le ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)\le 2 \Leftrightarrow$

$-1\le 1+2ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)\le 3 \Leftrightarrow -1\le f(x)\le 3$.

Η f έχει μέγιστο το 3, όταν:

$1+2ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=3 \Leftrightarrow ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=1 \Leftrightarrow$

$x-\frac{π}{4}=κ\cdot 2π+\frac{π}{2} \Leftrightarrow x=κ\cdot 2π+\frac{3π}{4}, κ\in Z$

Η f έχει ελάχιστο το -1, όταν:

$1+2ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=-1$. Όμως:

$1+2ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow$

$x-\frac{π}{4}=κ\cdot 2π-\frac{π}{2} \Leftrightarrow x=κ\cdot 2π-\frac{π}{4}, κ\in \mathbb{Z}$.

γ) Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1+2ημ\left(-\frac{π}{4}\right)=1-\sqrt{2}$

άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\left(0,1-\sqrt{2}\right)$.

Για τα σημεία τομής με τον $x'x$ έχουμε:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+2ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$

$ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=ημ\left(-\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow$

$x-\frac{π}{4}=κ\cdot 2π-\frac{π}{6}$ ή $x-\frac{π}{4}=κ\cdot 2π+\frac{7π}{6} \Leftrightarrow$

$x=κ\cdot 2π+\frac{π}{12}$ ή $x=κ\cdot 2π+\frac{17π}{12}, κ\in Z$.

Μας ενδιαφέρουν οι τιμές του x στο διάστημα $[0,2π]$. Έτσι έχουμε:

$0\le x\le 2π \Rightarrow 0\le κ\cdot 2π+\frac{π}{12}\le 2π \Rightarrow$

$-\frac{π}{12}\le κ\cdot 2π\le 2π-\frac{π}{12} \Rightarrow -\frac{π}{12}\le κ\cdot 2π\le \frac{23π}{12} \Rightarrow$

$-\frac{1}{12}\le 2κ\le \frac{23}{12} \Rightarrow -\frac{1}{24}\le κ\le \frac{23}{24} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} κ=0$

και τότε $x=\frac{π}{12}$, άρα στο σημείο $\left(\frac{π}{12},0\right)$

Όμοια $0\le x\le 2π \Rightarrow 0\le 2κπ+\frac{17π}{12}\le 2π \Rightarrow$

$\ldots -\frac{17}{12}\le 2κ\le \frac{7}{12} \Rightarrow -\frac{17}{24}\le κ\le \frac{7}{24} \overset{κ\in Z}{\Rightarrow} κ=0$

και τότε $x=\frac{17π}{12}$, άρα στο σημείο $\left(\frac{17π}{12},0\right)$.

Άσκηση2η:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=α|x-2|+β$ διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1.

i) Να αποδειχθεί ότι $α=1$ και $β=-1$.

ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα κοινά της σημεία με τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=x$.

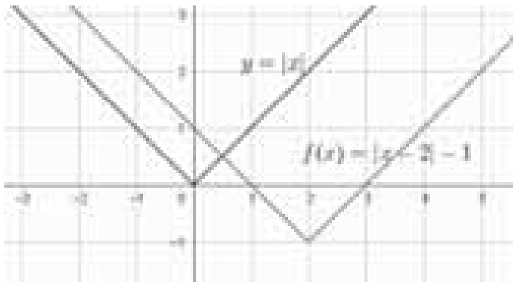
Λύση:

i) Αφού τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(0,1)$ ανήκουν στη C_f, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} f(-1)=2 \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3α+β=2 \\ 2α+β=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} α=1 \\ β=-1 \end{array}\right\}.$$

ii) Έχουμε $f(x)=|x-2|-1$, $x\in R$.

Η C_f προκύπτει από την μετατόπιση της $y=|x|$ κατά 2 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα κάτω.



Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$.

Όμως:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow |x-2|-1=0 \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow$$
$$x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=1.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι $(1,0)$ και $(3,0)$.

iii) Θα λύσουμε την εξίσωση:

$f(x)=x \Leftrightarrow |x-2|-1=x \Leftrightarrow |x-2|=x+1$.

Για να έχει λύση, πρέπει $x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$. Τότε,

$x-2=x+1$ ή $x-2=-x-1 \Leftrightarrow$

$-2=1$ (Αδύνατη) ή $x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Άρα το κοινό σημείο τους είναι το $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Άσκηση3η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

α) Να αποδειχθεί ότι έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,1)$.

β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες συντεταγμένων.

γ) Να επιλυθεί η εξίσωση $f(x)=y$ με άγνωστο το x.

δ) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Λύση:

α) Πρέπει και αρκεί: $\dfrac{1-x}{1+x}>0$ και $x\ne -1$. Όμως:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1-x}{1+x}>0\\ x\ne -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(1+x)(1-x)>0\\ x\ne -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}1-x^2>0\\ x\ne -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x^2<1\\ x\ne -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}|x|<1\\ x\ne -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -1<x<1.$$

Άρα $D_f=(-1,1)$.

β) Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\ln 1=0$, άρα η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$.

Για $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x}=1 \Leftrightarrow$

$1-x=1+x \Leftrightarrow x=0$.

Άρα μοναδικό κοινό σημείο της C_f με τους άξονες είναι το $O(0,0)$.

γ) $f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=y \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x}=e^y \Leftrightarrow$

$1-x=e^y+xe^y \Leftrightarrow (1+e^y)x=1-e^y \Leftrightarrow x=\dfrac{1-e^y}{1+e^y}$

δ) Για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει:

$f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\ln\left(\dfrac{2-1-x}{1+x}\right)=$

$\ln\left(\dfrac{2-(1+x)}{1+x}\right)=\ln\left(\dfrac{2}{1+x}-1\right)$

Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $x_1<x_2$, ισχύει:

$x_1<x_2 \Rightarrow 1+x_1<1+x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x_1}>\dfrac{1}{1+x_2} \Rightarrow$

$\dfrac{2}{1+x_1}>\dfrac{2}{1+x_2} \Rightarrow \dfrac{2}{1+x_1}-1>\dfrac{2}{1+x_2}-1 \Rightarrow$

$\ln\left(\dfrac{2}{1+x_1}-1\right)>\ln\left(\dfrac{2}{1+x_2}-1\right) \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$.

Άσκηση4η:

Το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x+\gamma$ έχει παράγοντα το $x-1$ και η διαίρεσή του με το x^2-2x δίνει υπόλοιπο $3x+1$.

α) Να αποδειχθεί ότι $P(0)=1$ και $P(2)=7$

β) Να αποδειχθεί ότι $\alpha=-1$, $\beta=-1$, $\gamma=1$

γ) i) Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες η καμπύλη $y=P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.

ii) Ποια σημεία της καμπύλης $y=P(x)$ βρίσκονται στο δεύτερο τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων;

Λύση:

α) Αν $Q(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-2x)$ τότε ισχύει

$P(x)=(x^2-2x)\cdot Q(x)+3x+1$

Επομένως $P(0)=1$ και $P(2)=7$.

β) Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, ισχύει $P(1)=0$. Άρα έχουμε

$P(0)=1 \Leftrightarrow \gamma=1$

$P(1)=0 \Leftrightarrow 1+\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-2$

$P(2)=7 \Leftrightarrow 16+8\alpha+2\beta+\gamma=7 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=-5$

Τελικά βρίσκουμε $\alpha=-1, \beta=-1, \gamma=1$.

γ) i) Η καμπύλη $y=f(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν ισχύει $P(x)<0$.

Έχουμε

$P(x)=x^4-x^3-x+1=(x-1)x^3-(x-1)=$

$(x-1)\cdot(x^3-1)=(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)\geq 0$

διότι $(x-1)^2\geq 0$ για κάθε $x\in R$ και το x^2+x+1 έχει $\Delta=-3<0$, οπότε είναι $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης κάτω από τον άξονα των x.

ii) Για τα σημεία της καμπύλης που βρίσκονται στο 2ο τεταρτημόριο, θα ισχύει: $\left.\begin{matrix} P(x)>0 \\ x<0 \end{matrix}\right\}$

Αφού όμως ισχύει $P(x)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$, προκύπτει ότι όλα τα σημεία της καμπύλης με $x<0$ βρίσκονται στο 2ο τεταρτημόριο.

Άσκηση 5η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι οι τιμές της ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο R.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(\ln x)\leq \dfrac{1}{2}$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x.

Λύση:

α) Αφού $e^x>0$ και $e^x+1>0$ για κάθε $x\in R$ έχουμε ότι $D_f=R$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in R$, ισχύει: $-1<f(x)<1$, αρκεί $-1<\dfrac{e^x-1}{e^x+1}<1$, αρκεί $-e^x-1<e^x-1<e^x+1$, αρκεί $-e^x-1<e^x-1$ και $e^x-1<e^x+1$, αρκεί $2e^x>0$ και $-1<1$ που ισχύουν.

β) Έχουμε ότι

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$$

Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow 1+e^{x_1}<1+e^{x_2} \Rightarrow$

$\dfrac{2}{1+e^{x_1}}>\dfrac{2}{1+e^{x_2}} \Rightarrow -\dfrac{2}{1+e^{x_1}}<-\dfrac{2}{1+e^{x_2}} \Rightarrow$

$1-\dfrac{2}{1+e^{x_1}}<1-\dfrac{2}{1+e^{x_2}} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$\dfrac{e^{\ln x}-1}{e^{\ln x}+1}\leq\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1}\leq\dfrac{1}{2} \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} 2x-2\leq x+1 \Leftrightarrow x\leq 3$.

Άρα τελικά $x\in(0,3]$.

δ) $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x-1=ye^x+y \Leftrightarrow$

$(1-y)e^x=1+y \underset{\text{από α) ερώτημα}}{\overset{-1<y<1}{\Leftrightarrow}} e^x=\dfrac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow$

$x=\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$, με $y\in(-1,1)$.

Άσκηση 6η:

Το πολυώνυμο

$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+1$, έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=-1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ να βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x=0$.

Λύση:

α) Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης

$P(x):(x^2-2x+1)$ να ισούται με 0.

$$\begin{array}{l|l} x^3+\alpha x^2+\beta x+1 & x^2-2x+1 \\ -x^3+2x^2-x & \overline{x+(\alpha+2)} \\ \hline (\alpha+2)x^2+(\beta-1)x+1 & \\ -(\alpha+2)x^2+(2\alpha+4)x-\alpha-2 & \\ \hline \qquad (2\alpha+\beta+3)x-\alpha-1 & \end{array}$$

Άρα πρέπει $2\alpha+\beta+3=0$ και $-\alpha-1=0$ δηλαδή $\alpha=\beta=-1$.
(Μπορείτε να βρείτε άλλο τρόπο λύσης του ερωτήματος α;)

β) Για $\alpha=\beta=-1$ το πολυώνυμο γράφεται $P(x)=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$
Άρα η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ρίζες τις $x=1$ (διπλή) και $x=-1$.

γ) Για να βρίσκεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ πάνω από τον άξονα x΄x πρέπει να λύσουμε την ανίσωση $P(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)>0 \Leftrightarrow$
$x\in(-1,+\infty)-\{1\}$.

δ) Η εξίσωση γίνεται:
$\eta\mu^3x+\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^3x+1-\eta\mu^2x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow P(\eta\mu x)=0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$

$\eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=\kappa\cdot\pi+\dfrac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$.

Άσκηση 7η:

Για τη γωνία α ισχύει ότι:
$5\cdot\eta\mu^2\alpha+7\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+1=0$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $\pi\le\alpha\le\dfrac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\alpha$, $\varepsilon\varphi\alpha$ και $\sigma\varphi\alpha$.

Λύση:

α) Η εξίσωση γίνεται:
$5\cdot\eta\mu^2\alpha+7\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+1=0 \Leftrightarrow$
$5\cdot(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)+7\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+1=0 \Leftrightarrow$
$5\sigma\upsilon\nu^2\alpha-7\sigma\upsilon\nu\alpha-6=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha=-\dfrac{3}{5}$ ή

$\sigma\upsilon\nu\alpha=2$ (απορρίπτεται). Άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

β) Έχουμε ότι
$5\cdot\eta\mu^2\alpha+7\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)+1=0 \Leftrightarrow 5\cdot\eta\mu^2\alpha=\dfrac{16}{5} \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\alpha=\dfrac{16}{25} \overset{\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \eta\mu\alpha=-\dfrac{4}{5}$ και τότε

$\varepsilon\varphi\alpha=\dfrac{4}{3}$ και $\sigma\varphi\alpha=\dfrac{3}{4}$.

Άσκηση 8η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=2\ln 2$

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)<0$.

Λύση:

α) Πρέπει και αρκεί: $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}>0$ και $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}>0$.
Όμως:
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}>0\\ e^x+5\neq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow e^{2x}>1 \Leftrightarrow x>0.$$
Άρα $A=(0,+\infty)$.

β) Για $x>0$ έχουμε
$\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)=\ln 4 \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}=4 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-21=0 \Leftrightarrow$
$e^x=7$ ή $e^x=-3$ (απορρίπτεται)
$\Leftrightarrow e^x=7 \Leftrightarrow x=\ln 7$, δεκτή (γιατί;)

γ) Για $x>0$ έχουμε
$\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)<0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)<\ln 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}<1 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x-6<0 \Leftrightarrow$
$-2<e^x<3 \Leftrightarrow e^x<3 \Leftrightarrow x<\ln 3$.
Άρα τελικά $x\in(0,\ln 3)$.

Ασκήσεις Επανάληψης Γεωμετρίας

Στάμου Γ. – Τσακιρτζής Σ. – Λυκούδη Σ. – Λιβανός Α.

Άσκηση 1η: **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $ΒΔ=\frac{2}{5}ΒΓ$. Απ' το σημείο Δ φέρνουμε τα τμήματα ΔΕ και ΔΖ κάθετα στις πλευρές ΑΒ κι ΑΓ αντίστοιχα.**

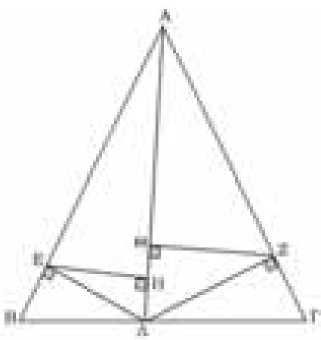
i. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΒΕΔ}$ και $\overset{\Delta}{ΓΖΔ}$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

ii. Αν $(ΒΕΔ)=16\ cm^2$, να υπολογίσετε το $(ΔΓΖ)$.

Αν επιπλέον τα τμήματα ΕΗ και ΖΘ είναι κάθετα στην ΑΔ, τότε:

iii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΔΗ}{ΔΘ}$.

Λύση: **i.** Τα ορθογώνιο τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΒΕΔ}$ και $\overset{\Delta}{ΓΖΔ}$ έχουν επιπλέον τις οξείες γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ ίσες, άρα είναι όμοια. Οπότε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΔΕ}{ΔΖ}=\frac{ΒΕ}{ΓΖ}$.



Όμως $ΔΒ=\frac{2}{5}ΒΓ$, άρα $ΔΓ=\frac{3}{5}ΒΓ$, συνεπώς

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{\frac{2}{5}\cancel{ΒΓ}}{\frac{3}{5}\cancel{ΒΓ}}\Leftrightarrow\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{2\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}\Leftrightarrow\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{2}{3}.$$

ii. Αν $(ΒΕΔ)=16\ cm^2$, τότε:

$$\frac{(ΒΕΔ)}{(ΓΖΔ)}=\lambda^2\Leftrightarrow\frac{16}{(ΓΖΔ)}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\Leftrightarrow\frac{16}{(ΓΖΔ)}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow$$

$$4(ΓΖΔ)=144\Leftrightarrow(ΓΖΔ)=36\ cm^2$$

iii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΕΔ}$ έχουμε $ΔΕ^2=ΑΔ\cdot ΔΗ\Leftrightarrow ΔΗ=\frac{ΔΕ^2}{ΑΔ}$ (1), ενώ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΖΔ}$ έχουμε

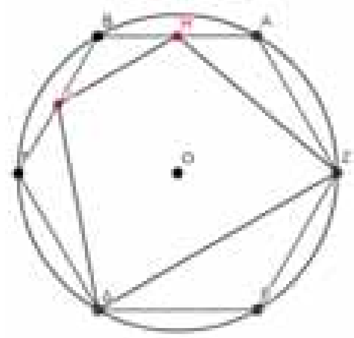
$$ΔΖ^2=ΑΔ\cdot ΔΘ\Leftrightarrow ΔΘ=\frac{ΔΖ^2}{ΑΔ}\ (2).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{ΔΗ}{ΔΘ}=\frac{\frac{ΔΕ^2}{ΑΔ}}{\frac{ΔΖ^2}{ΑΔ}}\Leftrightarrow\frac{ΔΗ}{ΔΘ}=\frac{ΔΕ^2\cdot\cancel{ΑΔ}}{ΔΖ^2\cdot\cancel{ΑΔ}}\Leftrightarrow\frac{ΔΗ}{ΔΘ}=\left(\frac{ΔΕ}{ΔΖ}\right)^2$$

Από (i) $\frac{ΔΕ}{ΔΖ}=\lambda=\frac{2}{3}$, οπότε $\frac{ΔΗ}{ΔΘ}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

Άσκηση2η: **Δίνεται κανονικό 6-γωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο κι ακτίνας R και Η, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του κανονικού 6-γώνου.**



i. Να δείξετε ότι $ΗΛ=\alpha_6$, όπου α_6 το απόστημα του κανονικού 6-γώνου.

ii. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΖΗΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πενταγώνου ΒΛΔΖΗ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Λύση: **i.** Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ το ευθύγραμμο τμήμα συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών, άρα $ΗΛ=\frac{ΑΓ}{2}$ και $ΗΛ//ΑΓ$. Όμως $ΑΓ=\lambda_3=R\sqrt{3}$, συνεπώς $ΗΛ=\frac{R\sqrt{3}}{2}=\alpha_6$.

ii. Οι γωνίες $Α\hat{Γ}Ζ$ και $Γ\hat{Ζ}Δ$ είναι ίσες διότι είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα $ΑΓ//ΖΔ$, οπότε και $ΗΛ//ΖΔ$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΔΖΗΛ είναι τραπέζιο. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΖΗ}$ και $\overset{\Delta}{ΓΔΛ}$ είναι ίσα διότι έχουν:

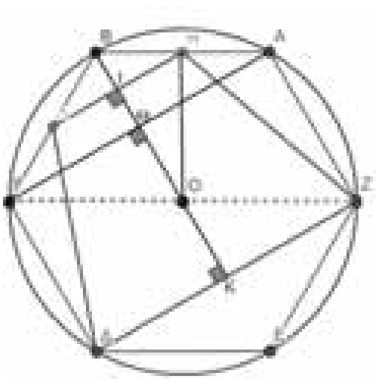
$ΑΖ=ΓΔ=\lambda_6$, $ΑΗ=ΛΓ=\frac{\alpha_6}{2}$ και $\hat{Α}=\hat{Γ}=\varphi_6$.

Οπότε $ΖΗ=ΔΛ$, άρα το ΔΖΗΛ είναι ισοσκελές.

iii. Το εμβαδόν του πενταγώνου ΒΛΔΖΗ προκύπτει απ' το άθροισμα των εμβαδών του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Lambda H}}$ και του τραπεζίου ΔΖΗΛ.

Είναι $(\mathrm{B\Lambda H})=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Lambda}\cdot \mathrm{BH}\cdot \etaμ\mathrm{B}=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot ημ120^\circ=\frac{R^2}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{16}$.



Απ' το ρόμβο ΟΑΒΓ (γιατί;) προκύπτει ότι $\mathrm{OB}\perp \mathrm{A\Gamma},\ \mathrm{H\Lambda}$, οπότε:

$\mathrm{O\Theta}=α_3=\frac{R}{2}$ και

$$\mathrm{OH}^2=\mathrm{OI}^2+\mathrm{HI}^2\Leftrightarrow\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2=\mathrm{OI}^2+\left(\frac{R\sqrt{3}}{4}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{3R^2}{4}=\mathrm{OI}^2+\frac{3R^2}{16}\Leftrightarrow \mathrm{OI}^2=\frac{9R^2}{16}\Leftrightarrow \mathrm{OI}=\frac{3R}{4}$$

Για το ύψος του τραπεζίου έχουμε:

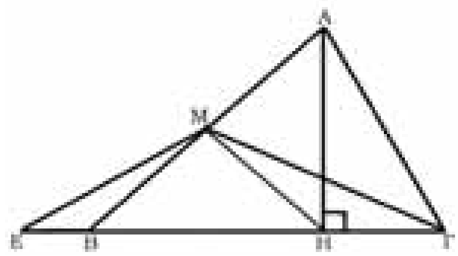
$$\mathrm{IK}=\mathrm{OI}+\mathrm{OK}=\frac{3R}{4}+\frac{R}{2}=\frac{5R}{4},$$

οπότε το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$(\mathrm{\Delta Z H\Lambda})=\frac{\mathrm{\Delta Z}+\mathrm{H\Lambda}}{2}\cdot \mathrm{IK}=$$

$$=\frac{R\sqrt{3}+\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2}\cdot\frac{5R}{4}=\frac{3R\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{5R}{4}=\frac{15R^2\sqrt{3}}{16}.$$

Άσκηση 3η: Δίνεται τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με πλευρές $\mathrm{A\Gamma}=12\text{ cm}$, $\mathrm{B\Gamma}=18\text{ cm}$ και γωνία $\hat{\Gamma}=60^\circ$. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ, ΑΗ το ύψος προς τη ΒΓ και σημείο Ε στην προέκταση της ΓΒ προς το Β τέτοιο, ώστε $\mathrm{BE}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{6}$.



i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ και του τμήματος ΒΗ.

ii. Να δείξετε ότι $(\mathrm{AB\Gamma})=12\cdot(\mathrm{BEM})$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{\mathrm{MEH}}$.

Λύση: **i.** Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{B\Gamma}^2-2\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot συν\Gamma\Leftrightarrow$

$\mathrm{AB}^2=12^2+18^2-2\cdot12\cdot18\cdot συν60^\circ\Leftrightarrow$

$\mathrm{AB}^2=252\Leftrightarrow \mathrm{AB}=\sqrt{252}\Leftrightarrow \mathrm{AB}=6\sqrt{7}\text{ cm}$

Από τη γενίκευση του Πυθ. θεωρήματος έχουμε:

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{B\Gamma}^2-2\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma H}\Leftrightarrow\ldots$

$\Leftrightarrow 252=468-36\cdot\mathrm{\Gamma H}\Leftrightarrow \mathrm{\Gamma H}=6\text{ cm}$

Άρα $\mathrm{BH}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{\Gamma H}=18-6=12\text{ cm}$.

ii. Οι γωνίες $\mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{M}$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι παραπληρωματικές, οπότε:

$$\frac{(\mathrm{BEM})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{BM}\cdot\mathrm{BE}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\mathrm{BA}}\cdot\frac{1}{6}\cdot\cancel{\mathrm{B\Gamma}}}{\cancel{\mathrm{BA}}\cdot\cancel{\mathrm{B\Gamma}}}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow$$

$(\mathrm{AB\Gamma})=12\cdot(\mathrm{BEM})$

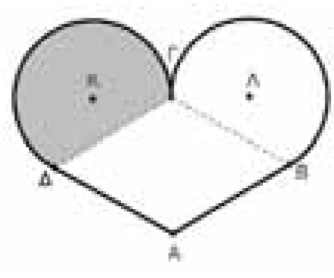
iii. $(\mathrm{MEH})=(\mathrm{BEM})+(\mathrm{MBH})=$

$\frac{1}{12}\cdot(\mathrm{AB\Gamma})+\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{ABH})\quad(1)$

$ημ\Gamma=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\mathrm{AH}}{12}\Leftrightarrow \mathrm{AH}=6\sqrt{3}\text{ cm}$, οπότε η $(1):(\mathrm{MEH})=\frac{1}{12}\cdot\frac{\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AH}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BH}\cdot\mathrm{AH}}{2}=$

$$\frac{18\cdot6\sqrt{3}}{24}+\frac{12\cdot6\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2}+18\sqrt{3}=\frac{45\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$$

Άσκηση 4η: Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος με γωνία $\hat{\mathrm{A}}=120^0$. Στο σχήμα φαίνονται επίσης τα τόξα $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{B}}$ των κύκλων (K,R) και (Λ,R) αντίστοιχα.



Δίνεται επίσης ότι η περίμετρος του ρόμβου είναι $4\sqrt{3}\cdot R$.

i. Να δείξετε ότι $B\Delta = 3\cdot R$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου κυκλικού τομέα $\left(K,\widehat{\Gamma\Delta}\right)$.

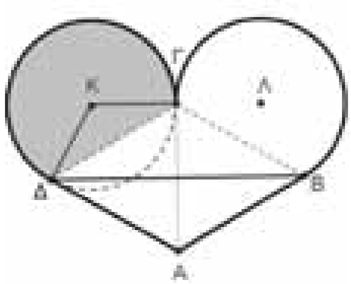
iii. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου Ω που περικλείεται από τα τόξα $\widehat{\Delta\Gamma}, \widehat{\Gamma B}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΑ, ΑΔ.

Λύση: **i.** Έστω α η πλευρά του ρόμβου. Τότε: $4\alpha = 4\sqrt{3}\cdot R \Leftrightarrow \alpha = R\sqrt{3}$ το $\overset{\Delta}{AB\Delta}$, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 - 2\cdot AB\cdot A\Delta\cdot \sigma\upsilon\nu 120^0 =$

$\left(R\sqrt{3}\right)^2 + \left(R\sqrt{3}\right)^2 - \cancel{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot R\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) =$

$3\cdot R^2 + 3\cdot R^2 + 3\cdot R^2 = 9\cdot R^2$. Άρα $B\Delta = 3\cdot R$



ii. Είναι $\Gamma\Delta = R\sqrt{3} = \lambda_3$, οπότε η κυρτή γωνία $K\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίση με 120°, συνεπώς η μη-κυρτή γωνία θα είναι ίση με 240°. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \frac{\pi\cdot R^2\cdot 240^0}{360^\circ} = \frac{2\pi\cdot R^2}{3}$.

iii. Λόγω συμμετρίας του σχήματος, το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει απ' το άθροισμα των εμβαδών του ρόμβου και του διπλασίου του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω.

Η γωνία $\hat{B}$ του ρόμβου είναι ίση με 60° κι επειδή $AB = B\Gamma = R\sqrt{3}$, το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο με εμβαδό $\frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\cdot\sqrt{3}}{4}$.

Άρα $(AB\Gamma\Delta) = 2\cdot(AB\Gamma) = 2\cdot\frac{3R^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\cdot\sqrt{3}}{2}$.

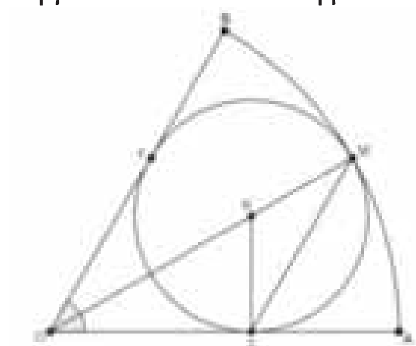
Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = (AB\Gamma\Delta) + 2\cdot E(\Omega) =$

$\frac{3R^2\cdot\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{2\pi\cdot R^2}{3} = \frac{R^2\left(9\sqrt{3}+8\pi\right)}{6}$

Το μήκος του μη-κυρτογώνιου τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι $S_{\widehat{\Gamma\Delta}} = \frac{\pi\cdot R\cdot 240^\circ}{180^\circ} = \frac{4\pi\cdot R}{3}$, οπότε η περίμετρος του χωρίου είναι $\Pi = 2\cdot AB + 2\cdot S_{\widehat{\Gamma\Delta}} =$

$2\cdot R\sqrt{3} + 2\cdot\frac{4\pi\cdot R}{3} = \frac{R\cdot\left(8\pi+6\sqrt{3}\right)}{3}$.

Άσκηση 5η: **Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος (K,ρ) εφάπτεται εσωτερικά του κυκλικού τομέα $\left(O,\widehat{AB}\right)$. Ο κυκλικός τομέας έχει ακτίνα $R = 6$ cm, το σημείο Μ είναι μέσο του τόξου $\widehat{AB}$ ενώ η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ίση με 60°.**



i. Να δείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι $\rho = 2$ cm.

ii. Να βρείτε το λόγο του εμβαδού του κύκλου προς το εμβαδόν του κυκλικού τομέα.

iii. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΜΣ.

iv. Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τετραπλεύρου ΑΜΚΣ.

Λύση: **i.** Είναι $\widehat{AM} = \frac{\widehat{B\Gamma}}{2} = 30^\circ$, οπότε $\hat{O}_1 = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{O\Sigma K}$ είναι $\hat{O}_1 = 30^\circ$, άρα

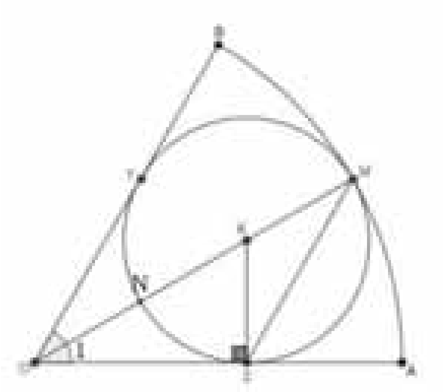
$K\Sigma = \frac{OK}{2} \Leftrightarrow OK = 2\cdot K\Sigma \Leftrightarrow$

$ON + NK = 2\cdot K\Sigma \Leftrightarrow ON + \rho = 2\rho \Leftrightarrow ON = \rho$

Συνεπώς $OM = 3\cdot\rho \Leftrightarrow 3\cdot\rho = 6 \Leftrightarrow \rho = 2$ cm

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_{(K,\rho)} = \pi\cdot\rho^2 = \pi\cdot 2^2 = 4\pi\ cm^2$, ενώ το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι $E_{\left(O,\widehat{AB}\right)} = \frac{\pi\cdot R^2\cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\cdot R^2}{6} = \frac{36\pi}{6} = 6\pi\ cm^2$.

Οπότε $\dfrac{E_{(K,\rho)}}{E_{(O,\widehat{AB})}}=\dfrac{4\pi}{6\pi}=\dfrac{2}{3}$.



iii. Είναι $O\hat{K}\Sigma=60^\circ$, οπότε $\Sigma\hat{K}M=120^\circ$, άρα $M\Sigma=\lambda_3=\rho\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ cm.

iv. $OK^2=K\Sigma^2+O\Sigma^2 \Leftrightarrow 4^2=2^2+O\Sigma^2 \Leftrightarrow$
$O\Sigma^2=12 \Leftrightarrow O\Sigma=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ cm

Άρα $\Sigma A=OA-O\Sigma=6-2\sqrt{3}$ cm.

Το τόξο $\widehat{AM}$ έχει μήκος $S_{\widehat{AM}}=\dfrac{\pi\cdot 6\cdot 30^\circ}{180^\circ}=\pi$ cm

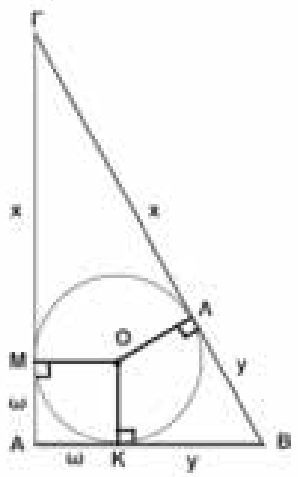
άρα το μεικτόγραμμο τετράπλευρο ΑΜΚΣ έχει περίμετρο $\Pi=2+2+6-2\sqrt{3}+\pi=10-2\sqrt{3}+\pi$ cm.

Άσκηση 6η: Δίνεται τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, με πλευρές $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{3}$ και $\gamma=1$ cm. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα.

i. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο,

ii. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

iii. Να υπολογίσετε το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{K\Lambda}$.



Λύση: **i.** Για τις πλευρές του τριγώνου έχουμε: $\alpha^2=2^2=4$ και $\beta^2+\gamma^2=\sqrt{3}^2+1^2=4$.

Άρα $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$.

ii. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου προς τον κύκλο είναι μεταξύ τους ίσα, οπότε: $\Gamma M=\Gamma\Lambda=x$, $B\Lambda=BK=y$ και $AK=AM=\omega$. Έχουμε τότε:

$$2x+2y+2\omega=3+\sqrt{3} \Leftrightarrow x+y+\omega=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\quad (1).$$

Όμως $x+y=2$, οπότε από την (1) έχουμε:

$$2+\omega=\frac{3+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \omega=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου και ισαπέχει απ' τις πλευρές του τριγώνου.

Το τετράπλευρο ΑΚΟΜ έχει 3 ορθές γωνίες, άρα είναι ορθογώνιο κι επιπλέον έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι και ρόμβος. Συνεπώς είναι τετράγωνο, οπότε $\rho=\omega=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

iii. Για την οξεία γωνία $\hat{B}$ του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχουμε: $\eta\mu B=\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε $\hat{B}=60^\circ$. Άρα στο τετράπλευρο ΟΚΒΛ η γωνία $K\hat{O}\Lambda$ είναι ίση με 120°, οπότε το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{K\Lambda}$ είναι:

$$S_{\widehat{K\Lambda}}=\frac{\pi\cdot\rho\cdot 120^\circ}{180^\circ}=\frac{\pi\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot 120^\circ}{180^\circ}=\pi\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{3}\text{ cm}$$

Άσκηση 7η: Ένας δήμαρχος αποφάσισε να κατασκευάσει, σε μια κυκλική πλατεία ακτίνας R, μια παιδική χαρά σε σχήμα τριγώνου ΑΒΓ με διαστάσεις $AB=R$ και $B\Gamma=R\cdot\sqrt{3}$.

α) Αν ο δήμαρχος θελήσει να περιφράξει την παιδική χαρά, να υπολογίσετε πόσα μέτρα περίφραξης θα χρειαστεί.

γ) Την προεκλογική περίοδο αποφάσισε να στρώσει την παιδική χαρά με πλαστικό τάπητα. Να υπολογίστε το συνολικό κόστος αν το 1τμ κοστίζει 5 ε.

γ) Για να στηρίξει επιπλέον την υποψηφιότητά του, προτείνει να κατασκευαστεί ένας χώρος σε σχήμα τετραγώνου με όργανα γυμναστικής. Αν η διαγώνιος χώρου είναι R, να εξετάσετε αν μπορεί να κατασκευαστεί στον ελεύθερο χώρο της πλατείας.

Λύση: α) Έχουμε ότι $AB=R=\lambda_6$ και

$B\Gamma = R\sqrt{3} = \lambda_3$ άρα $\widehat{AB}+\widehat{B\Gamma}=60^o+120^o=180^o$, δηλαδή η πλευρά ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε $\hat{B}=90^o$ και $A\Gamma = 2R$. Έτσι η περίμετρος του τριγώνου είναι:
$\Pi = R + 2R + R\sqrt{3} = \left(3+\sqrt{3}\right)R$ m.

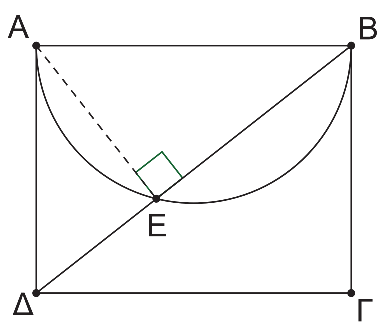
β) Το εμβαδόν της παιδικής χαράς είναι
$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB\cdot B\Gamma = \frac{1}{2}R\cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}\ \text{m}^2$$
Άρα το συνολικό κόστος είναι $\dfrac{5R^2\sqrt{3}}{2}$ ευρώ.

γ) Αφού η διαγώνιος του τετραγώνου είναι R, η πλευρά του α, θα είναι $2\alpha^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Το εμβαδόν που θα καταλαμβάνει πρέπει να είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ημικυκλίου που περισσεύει στην κυκλική πλατεία, δηλαδή $E = \alpha^2 = \dfrac{R^2}{2} < \dfrac{\pi R^2}{2}$ που ισχύει. Άρα μπορεί να κατασκευαστεί.

Άσκηση 8η:

Σε μία πλατεία του δήμου Κερατσινίου–Δραπετσώνας σχήματος ορθογωνίου (ΑΒΓΔ) διαστάσεων $AB = 4\alpha$ και $A\Delta = \pi\cdot\alpha$ έχουμε δύο (2) εισόδους στα σημεία Β και Δ οι οποίες ενώνονται με ένα μονοπάτι. Στο εσωτερικό της πλατείας σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ το οποίο δημιουργήθηκε μια σύνθεση με λουλούδια, ενώ το υπόλοιπο μέρος έμεινε πλακόστρωτο.



α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο με την σύνθεση των λουλουδιών χωρίζει την πλατεία σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Δύο δημότες που μπαίνουν από διαφορετικές εισόδους συναντιούνται ακριβώς στο σημείο που χωρίζεται το πλακόστρωτο με την σύνθεση των λουλουδιών. Να αποδείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων που διάνυσαν, είναι ανεξάρτητη των διαστάσεων της πλατείας.

Λύση:

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $(AB\Gamma\Delta) = AB\cdot A\Delta = 4\pi\alpha^2\ \text{m}^2$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου της σύνθεσης έχει ακτίνα $R = \dfrac{AB}{2} = 2\alpha$ δίνεται από τον τύπο
$$E_1 = \frac{\pi\cdot(2\alpha)^2}{2} = 2\pi\alpha^2 = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} \quad (1).$$
Άρα το εμβαδόν του πλακόστρωτου είναι το υπόλοιπο μισό, επομένως η σύνθεση χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Το μονοπάτι ΒΔ τέμνει το όριο της σύνθεση στο σημείο Ε. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Η γωνία $A\hat{E}B$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $A\hat{E}B = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $AB^2 = B\Delta\cdot BE$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $A\Delta^2 = B\Delta\cdot\Delta E$ (2).

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι $B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $AB = 4\alpha$, $A\Delta = \pi\cdot\alpha$, οπότε
$$B\Delta^2 = 16\alpha^2 + \pi^2\alpha^2 = \left(16+\pi^2\right)\alpha^2 \ \text{ή}$$
$$B\Delta = \alpha\sqrt{\pi^2+16}.$$
Επομένως η (1) γίνεται $BE = \dfrac{16\alpha}{\sqrt{\pi^2+16}}$ (3),

και η (2) $\Delta E = \dfrac{\alpha\pi^2}{\sqrt{\pi^2+16}}$ (4)

Συνεπώς από (3), (4) προκύπτει: $\dfrac{BE}{\Delta E} = \dfrac{16}{\pi^2}$.

Τάξη: Β΄ Επαναληπτικές Ασκήσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας

Θανάσης Ξένος

Άσκηση 1η: Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,2)$ και $\Gamma(0,4)$.

α) Να αποδειχθεί ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρεθεί το είδος του ως προς τις πλευρές.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ και του ύψους ΓΗ.
γ) Να βρεθεί το κοινό σημείο των ΑΜ και ΓΗ.
δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, καθώς και η απόσταση του Μ από την πλευρά ΑΓ.
ε) Να βρεθεί το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, καθώς και η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του.
στ) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που περνά από το σημείο $A(1,2)$ και έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$.

Λύση: α) Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(-2,0)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-1,2)$.

Αφού $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-4\neq 0$, είναι $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$ και άρα τα σημεία Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο. Τα μήκη των πλευρών του είναι: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ και $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, άρα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

β) Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι

$$M\left(\frac{-1+0}{2},\frac{2+4}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},3\right).$$

Η διάμεσος ΑΜ έχει κλίση

$$\lambda_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{3-2}{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{2}{3}$$

και η εξίσωσή της είναι:

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}.$$

Η πλευρά ΑΒ έχει κλίση $\lambda_{AB}=0$ και αφού το $\Gamma H\perp AB$, για το ύψος ΓΗ δεν ορίζεται κλίση και θα έχει εξίσωση $x=0$, αφού το $\Gamma\in y'y$.

γ) Το κοινό σημείο των ΑΜ και ΓΗ έχει συντεταγμένες, την λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\\ x&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow (x,y)=\left(0,\frac{8}{3}\right).$$

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}|-4|=2 \text{ τ.μ.}$$

Η ευθεία (ΑΓ) έχει $\lambda_{A\Gamma}=-2$ και εξίσωση

$$y-2=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+4\Leftrightarrow 2x+y-4=0.$$

Άρα η απόσταση του $M\left(-\frac{1}{2},3\right)$ από την (ΑΓ) είναι $d\left(M,(A\Gamma)\right)=\dfrac{\left|2\left(-\frac{1}{2}\right)+3-4\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

ε) Το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του και είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου. Έχουμε ότι: Αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ η μεσοκάθετος ταυτίζεται με το ύψος προς την πλευρά ΑΒ, άρα έχει εξίσωση $x=0$ (δηλαδή ο $y'y$). Επίσης $\lambda_{B\Gamma}=2$, οπότε $\lambda_{\mu\varepsilon\sigma}=-\frac{1}{2}$ και η εξίσωση της μεσοκάθετης της ΒΓ είναι $y-3=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}$.

Το περίκεντρο του ΑΒΓ είναι το σημείο τομής τους

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}\\ x&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow K\left(0,\frac{11}{4}\right)$$

και η ακτίνα του $\rho=\left|\overrightarrow{AK}\right|=\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{11}{4}-2\right)^2}=\frac{5}{4}$.

Άρα η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου είναι (C): $x^2+\left(y-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$.

στ) Έστω (C'): $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$, η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$, $E(2,0)$. Τότε $\gamma=2$ και

$$\gamma^2=\alpha^2-\beta^2\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2+4 \quad (1).$$

Αφού η (C) διέρχεται από το $A(1,2)$ έχουμε

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{4}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\beta^2+4\alpha^2=\alpha^2\beta^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\beta^4-\beta^2-16=0\Leftrightarrow\beta^2=\frac{1+\sqrt{65}}{2} \text{ και τότε}$$

$\alpha^2=\dfrac{9+\sqrt{65}}{2}$. Άρα (C'): $\dfrac{2x^2}{9+\sqrt{65}}+\dfrac{2y^2}{1+\sqrt{65}}=1$.

Άσκηση 2η: Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,-7)$, $\vec{\beta}=(-1,2)$ και $\vec{\gamma}=(3,-2)$.

α) Να αποδειχθεί ότι ανά δύο δεν είναι συγγραμμικά.

β) Να εκφράσετε το καθένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο.

γ) Να αναλυθεί το $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες, ώστε η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\gamma}$.

ΛΥΣΗ: α) $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}4 & -7\\ -1 & 2\end{vmatrix}=8-7=1\neq 0$, άρα $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\beta}$

$\det(\vec{\beta},\vec{\gamma})=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=2-6=-4\neq 0$, $\vec{\gamma}\not\parallel\vec{\beta}$ και

$\det(\vec{\alpha},\vec{\gamma})=\begin{vmatrix}4 & -7\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-8+21=13\neq 0$, άρα $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\gamma}$

β) Πρέπει να υπάρχουν $\lambda,\mu\in R$ ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}+\mu\cdot\vec{\gamma}$, δηλαδή

$$(4,-7)=\lambda(-1,2)+\mu(3,-2)\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-\lambda+3\mu=4\\ 2\lambda-2\mu=-7\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\lambda=-\frac{13}{4}\ \text{ και }\ \mu=\frac{1}{4}.$$

Άρα $\vec{\alpha}=-\frac{13}{4}\cdot\vec{\beta}+\frac{1}{4}\cdot\vec{\gamma}$ και από αυτή προκύπτουν

$$\vec{\beta}=-\frac{4}{13}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{13}\cdot\vec{\gamma}\ \text{ και }\ \vec{\gamma}=4\cdot\vec{\alpha}+13\cdot\vec{\beta}.$$

γ) Αν $\vec{x}$, $\vec{y}$ είναι οι ζητούμενες συνιστώσες, τότε έχουμε: $\vec{\alpha}=\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}/\!/\vec{\beta}$ και $\vec{y}\perp\vec{\gamma}$.

$\vec{x}/\!/\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{x}=\lambda\cdot\vec{\beta}$ με $\lambda\in R$, άρα $\vec{x}=(-\lambda,2\lambda)$.

$$\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{x}=(4+\lambda,-7-2\lambda)$$

Αφού $\vec{y}\perp\vec{\gamma}\Leftrightarrow\vec{y}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow 3(4+\lambda)-2(-7-2\lambda)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lambda=-\frac{26}{7}$. Άρα $\vec{x}=\left(\frac{26}{7},-\frac{52}{7}\right)$ και $\vec{y}=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$.

Β΄ τρόπος

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{\gamma}=\vec{x}\cdot\vec{\gamma}+\vec{y}\cdot\vec{\gamma}=(\lambda\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\lambda(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}),$$

άρα $26=\lambda\cdot(-7)\Leftrightarrow\lambda=-\frac{26}{7}$ και συνεχίζουμε όμοια.

Άσκηση 3η: Δίνεται η εξίσωση:

$(\alpha^2+\alpha-2)x+(\alpha^2-1)y-2\alpha^2-\alpha+3=0$, (1) με $\alpha\in R$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του α, ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία (ε).

β) Να βρεθεί το α στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Η ευθεία (ε), να είναι οριζόντια.

ii) Η ευθεία (ε), να είναι κατακόρυφη.

iii) Η ευθεία (ε), να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) Η ευθεία (ε), να σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του α, η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο.

δ) Να βρεθεί ο α, ώστε η ευθεία (ε) να διέρχεται από την εστία της παραβολής (C): $x^2=8y$.

Λύση: α) Η (1) έχει τη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$ και παριστάνει ευθεία όταν οι συντελεστές Α και Β δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα. Ο συντελεστής $A=\alpha^2+\alpha-2$ μηδενίζεται για $\alpha=1$ ή $\alpha=-2$ και ο $B=\alpha^2-1$ για $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$. Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\neq 1$ και η εξίσωσή της είναι:

$$(\varepsilon):\ (\alpha+2)x+(\alpha+1)y-(2\alpha+3)=0,\ \alpha\neq 1.$$

β) i) Η (ε) είναι οριζόντια όταν $A=0$, δηλαδή για $\alpha=-2$.

ii) Η (ε) είναι κατακόρυφη όταν $B=0$, δηλαδή για $\alpha=-1$.

iii) Η (ε) διέρχεται από το $O(0,0)$ όταν $\Gamma=0$, δηλαδή για $-2\alpha^2-\alpha+3=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{3}{2}$.

iv) Η (ε) σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον $x'x$, όταν έχει κλίση $\lambda=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$, δηλαδή $-\frac{A}{B}=1$ με $B\neq 0$, οπότε για $\alpha\neq\pm 1$ προκύπτει

$$\alpha+2=-\alpha-1\Leftrightarrow\alpha=-\frac{3}{2}.$$

γ) Η εξίσωση (1) παριστάνει άπειρες ευθείες, για κάθε μία τιμή του $\alpha\in R-\{1\}$. Βρίσκουμε δύο από αυτές τις ευθείες. Για $\alpha=0$ έχουμε (ε_1): $2x+y-3=0$ Για $\alpha=-1$ έχουμε (ε_2): $x-1=0$. Το κοινό τους σημείο είναι το $K(1,1)$ και οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (ε), διότι $(\alpha+2)\cdot 1+(\alpha+1)\cdot 1-(2\alpha+3)=$ $\alpha+2+\alpha+1-2\alpha-3=0$. Άρα οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση διέρχονται από το σταθερό σημείο $K(1,1)$.

Β τρόπος: Η εξίσωση γίνεται:

$$\alpha x+2x+\alpha y+y-2\alpha-3=0\Leftrightarrow$$
$$(x+y-2)\cdot\alpha+(2x+y-3)=0$$

Πρέπει $\left.\begin{array}{r} x+y-2=0 \\ 2x+y-3=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=(1,1)$.

Άρα οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση διέρχονται από το σταθερό σημείο $K(1,1)$.

δ) Η Εστία της παραβολής $(C): x^2=8y$ είναι το σημείο $E(0,2)$ αφού το $p=4$. Η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το $K(1,1)$ και το $E(0,2)$, έχει κλίση $\lambda=\frac{2-1}{0-1}=-1$ και εξίσωση $y-2=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2$.

Άσκηση 4η: Δίνονται οι παράλληλες ευθείες

$$(\varepsilon_1): (\lambda+1)x+2\lambda y=5 \text{ και}$$
$$(\varepsilon_2): (2\lambda-1)x+(2+\lambda)y-\lambda+1=0,$$

όπου λ ακέραιος.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

β) Να βρεθεί η απόσταση των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των (ε_1) και (ε_2).

δ) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που είναι ομόκεντρος με τον $(C): x^2+y^2-\frac{2}{3}x-y=0$ και εφάπτεται στις (ε_1) και (ε_2).

Λύση: α) Τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(2\lambda,-\lambda-1)$ και $\vec{\delta}_2=(\lambda+2,-2\lambda+1)$ είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα. Ισχύει ότι

$$(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)\Leftrightarrow\vec{\delta}_1//\vec{\delta}_2\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2\lambda & -\lambda-1\\ \lambda+2 & -2\lambda+1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$
$$3\lambda^2-5\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2\in\mathbb{Z},$$

αφού η τιμή $\lambda=-\frac{1}{3}$ απορρίπτεται.

β) Οι ευθείες είναι:

$$(\varepsilon_1):\ 3x+4y-5=0 \text{ και } (\varepsilon_2):\ 3x+4y-1=0$$

Η απόστασή τους ισούται με την απόσταση ενός σημείου της (ε_1), έστω το $A\left(0,\frac{5}{4}\right)$, από την (ε_2). Έτσι έχουμε:

$$d((\varepsilon_1),(\varepsilon_2))=d(A,(\varepsilon_2))=\frac{\left|3\cdot0+4\cdot\frac{5}{4}-1\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$$

γ) Η μεσοπαράλληλη των (ε_1), (ε_2) θα έχει εξίσωση (ε): $3x+4y+k=0$ και θα διέρχεται από το μέσο οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος με το ένα άκρο στην (ε_1) και το άλλο στην (ε_2). Έτσι έχουμε:

Αν $A\left(0,\frac{5}{4}\right)\in(\varepsilon_1)$ και $B\left(0,\frac{1}{4}\right)\in(\varepsilon_2)$, το μέσο τους $M\left(0,\frac{3}{4}\right)$ και τότε: $3\cdot0+4\cdot\frac{3}{4}+k=0\Leftrightarrow k=-3$.

Άρα η μεσοπαράλληλη έχει εξίσωση

$$(\varepsilon):\ 3x+4y-3=0.$$

δ) Το κέντρο του κύκλου (C) είναι $K\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ και ανήκει στην μεσοπαράλληλη ευθεία (ε). Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου θα είναι το μισό της απόστασης $d((\varepsilon_1),(\varepsilon_2))$, δηλαδή $R=\frac{2}{5}$.

Άρα η εξίσωση του ζητουμένου κύκλου είναι

$$(C'):\ \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{25}.$$

Άσκηση 5η: Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2+y^2=4$.

α) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου που είναι κάθετες στην διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

β) Από το σημείο $A\left(-2\sqrt{2},0\right)$ άγονται εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) προς τον κύκλο (C). Να βρεθούν οι εξισώσεις των (ε_1), (ε_2) και να υπολογιστεί η γωνία τους.

γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων του κύκλου (C) και της έλλειψης $(C'): x^2+9y^2=9$.

Λύση: α) Η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων έχει εξίσωση $y=x$ και κλίση $\lambda=1$.

Οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση -1.

Αν $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της μιας από αυτές με τον κύκλο (C), τότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot x_1+y\cdot y_1=4\\ x_1^2+y_1^2=4\\ y_1=x_1\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x_1,y_1)=\left\{\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}$$

και οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$$(\varepsilon_1):\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{2}\cdot y=4 \text{ και } (\varepsilon_2):-\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}\cdot y=4.$$

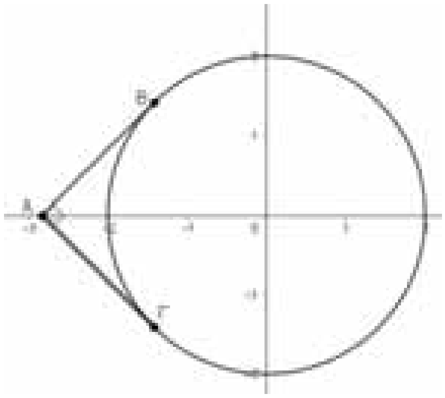
β) Αν $M(x_o,y_o)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με τον κύκλο (C), τότε έχουμε

$$x_o{}^2+y_o{}^2=4 \text{ και η εξίσωσή της είναι}$$

$$x\cdot x_o + y\cdot y_o = 4.$$

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(-2\sqrt{2},0\right)$ ισχύει $\left.\begin{array}{r}-2\sqrt{2}\cdot x_o+0\cdot y_o=4\\ x_o^{\ 2}+y_o^{\ 2}=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$$\left(x_o,y_o\right)=\left\{\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}$$



Άρα οι εξισώσεις τους είναι:

$$\left(\varepsilon_1\right): -\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{2}\cdot y=4 \text{ και}$$

$$\left(\varepsilon_2\right): -\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}\cdot y=4.$$

Αυτές έχουν κλίση $\lambda_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ και $\lambda_2=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$

οπότε $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Leftrightarrow\left(\varepsilon_1\right)\perp\left(\varepsilon_2\right)$.

Συνεπώς η γωνία τους είναι ίση με 90^o.

γ) Έστω $\left(\varepsilon\right)$: $y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow\lambda x-y+\beta=0$ μία κοινή εφαπτομένη των $\left(C\right)$ και $\left(C'\right)$. Η $\left(\varepsilon\right)$ θα εφάπτεται στον κύκλο $\left(C\right)$ όταν

$$d\left(O,\left(\varepsilon\right)\right)=\rho\Leftrightarrow\frac{\left|\lambda\cdot 0-0+\beta\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\Leftrightarrow$$

$$\left|\beta\right|=2\sqrt{\lambda^2+1}\qquad(1).$$

Η $\left(\varepsilon\right)$ είναι εφαπτομένη στην έλλειψη $\left(C'\right)$ όταν το σύστημα $\left.\begin{array}{r}y=\lambda x+\beta\\ x^2+9y^2=9\end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση. Δηλαδή η εξίσωση $x^2+9\left(\lambda x+\beta\right)^2=9\Leftrightarrow$

$$\left(9\lambda^2+1\right)x^2-18\lambda\beta x+9\left(\beta^2-1\right)=0$$

έχει μοναδική λύση.

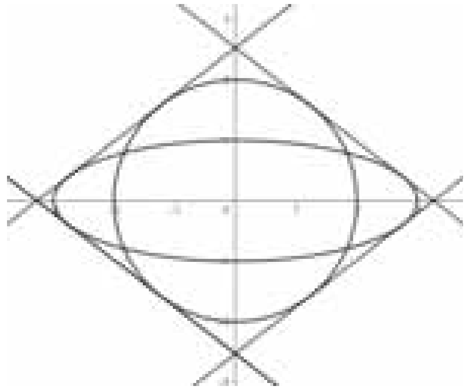
Αυτό συμβαίνει όταν

$$\Delta=0\Leftrightarrow 324\lambda^2\beta^2-36\left(9\lambda^2+1\right)\left(\beta^2-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\beta^2=9\lambda^2+1\qquad(2).$$

Από (1), (2) έχουμε $9\lambda^2+1=4\lambda^2+4\Leftrightarrow\lambda^2=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\lambda=\pm\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ και } \beta=\pm 4\sqrt{\frac{2}{5}}.$$



Άρα υπάρχουν 4 κοινές εφαπτόμενες, οι

$\left(\varepsilon_1\right): y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}x+4\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $\quad\left(\varepsilon_2\right): y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}x-4\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$\left(\varepsilon_3\right): y=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}x+4\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $\left(\varepsilon_4\right): y=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}x-4\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Άσκηση 6η: Δίνεται ο κύκλος

$$\left(C\right): x^2+y^2+\left(\lambda+1\right)x-\left(\mu+2\right)y-8=0$$

που έχει κέντρο το σημείο $K\left(-1,2\right)$ και η ευθεία $\left(\varepsilon\right)$: $x-\left(\kappa+1\right)y+4=0$ που έχει κλίση $\dfrac{1}{3}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\lambda=1$, $\mu=2$ και $\kappa=2$.

β) να αποδειχθεί ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία Α και Β.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\left(x^2+y^2+2x-4y-8\right)+\alpha\left(x-3y+4\right)=0$$

παριστάνει κύκλο (C′) για κάθε $\alpha\in R$, ο οποίος διέρχεται από τα παραπάνω σημεία Α και Β.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'\left(-2,0\right)$ και $E\left(2,0\right)$, η οποία διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου (C).

Λύση: α) Ο κύκλος $\left(C\right)$ έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\dfrac{\lambda+1}{2},\dfrac{\mu+2}{2}\right)$, άρα έχουμε $\dfrac{\lambda+1}{2}=1$ και $\dfrac{\mu+2}{2}=2$ δηλαδή $\lambda=1$ και $\mu=2$. Η ευθεία $\left(\varepsilon\right)$ έχει κλίση, με $\kappa\neq-1$, $\lambda_{(\varepsilon)}=\dfrac{1}{\kappa+1}=\dfrac{1}{3}$, οπότε $\kappa=2$.

β) Ο κύκλος $\left(C\right)$ έχει εξίσωση:

$$x^2+y^2+2x-4y-8=0$$

Η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία $\left(\varepsilon\right)$: $x-3y+4=0$ είναι

$$d(K,(\varepsilon))=\frac{|-1-3\cdot 2+4|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Η ακτίνα του κύκλου (C) είναι:

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{52}}{2}=\sqrt{13}$$

Αφού $\frac{3}{\sqrt{10}}<\sqrt{13}$, έχουμε $d(K,(\varepsilon))<\rho$ και άρα η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β.

γ) Η εξίσωση $(x^2+y^2+2x-4y-8)+\alpha(x-3y+4)=0$ γράφεται: $x^2+y^2+(\alpha+2)x-(3\alpha+4)y+4(\alpha-2)=0$ και παριστάνει κύκλο (C'), διότι

$$A^2+B^2-4\Gamma=(\alpha+2)^2+(3\alpha+4)^2-16(\alpha-2)=$$
$$10\alpha^2+12\alpha+52>0 \text{ (γιατί } \Delta<0\text{)}.$$

Οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε) και του κύκλου (C), άρα επαληθεύουν και την εξίσωση του κύκλου (C'). Αυτό σημαίνει ότι ο κύκλος (C') διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

δ) Η εξίσωση της υπερβολής είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ με $\alpha<\gamma$.

Άρα $\gamma=2$ και $\alpha^2+\beta^2=4$ (1).

Το κέντρο $K(-1,2)$ του κύκλου (C) ανήκει στην υπερβολή, άρα

$$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{4}{\beta^2}=1\Leftrightarrow \beta^2-4\alpha^2=\alpha^2\beta^2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\alpha^4-9\alpha^2+4=0\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{9-3\sqrt{5}}{2},$$

διότι η τιμή $\alpha^2=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}>4=\gamma^2$ απορρίπτεται.

Για την τιμή αυτή του α βρίσκουμε $\beta^2=\frac{3\sqrt{5}-1}{2}$.

Οπότε η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{2x^2}{9-3\sqrt{5}}-\frac{2y^2}{3\sqrt{5}-1}=1$.

Άσκηση 7η: **Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και εξωτερικά του τετραγώνου, τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου του. Από τις κορυφές Α, Β, Γ, και Δ φέρουμε τις κάθετες στις ευθείες ΒΜ, ΓΜ, ΔΜ και ΑΜ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

Λύση:

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή την κορυφή Α και θετικό οριζόντιο ημιάξονα Ax την ημιευθεία ΑΒ. Αν α είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, έχουμε τις κορυφές $A(0,0)$, $B(\alpha,0)$, $\Gamma(\alpha,\alpha)$ και $\Delta(0,\alpha)$.

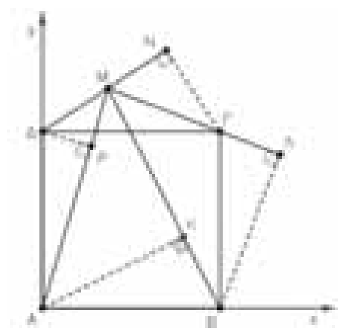
Επίσης, έστω $M(\beta,\gamma)$ τυχαίο σημείο, εκτός του τετραγώνου. Φέρνουμε τις ευθείες $AK\perp BM$, $B\Lambda\perp\Gamma M$, $\Gamma N\perp\Delta M$ και $\Delta P\perp AM$.

Για κάθε μια από αυτές γνωρίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου. Επίσης έχουμε τις κλίσεις: $\lambda_{BM}=\frac{\gamma}{\beta-\alpha}$, $\lambda_{\Gamma M}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$,

$$\lambda_{\Delta M}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta} \text{ και } \lambda_{AM}=\frac{\gamma}{\beta}.$$

Επομένως $\lambda_{AK}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$, $\lambda_{B\Lambda}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\alpha}$,

$$\lambda_{\Gamma N}=-\frac{\beta}{\gamma-\alpha} \text{ και } \lambda_{\Delta P}=-\frac{\beta}{\gamma}.$$



Άρα οι εξισώσεις τους αντίστοιχα είναι:

$$(AK): y=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\cdot x \qquad (1)$$
$$(B\Lambda): y=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot x-\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha} \qquad (2)$$
$$(\Gamma N): y-\alpha=-\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\cdot(x-\alpha) \qquad (3)$$
$$(\Delta P): y=-\frac{\beta}{\gamma}\cdot x+\alpha \qquad (4).$$

Κοινό σημείο των $(AK),(\Delta P)$ είναι το $Z(\gamma,\alpha-\beta)$. Οι συντεταγμένες του Ζ επαληθεύουν τις εξισώσεις (2) και (3).

Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες (AK), $(B\Lambda)$, (ΓN) και (ΔP) διέρχονται από το σημείο Ζ.

Επαναληπτικές Ασκήσεις Ανάλυσης

Θανάσης Ξένος

Άσκηση 1η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Να λυθεί στο R η ανίσωση

$$e^{x+1}>\frac{4x^2+1}{x^2-2x+2}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι: i) $1<\int_0^1 f(x)dx<\dfrac{3}{2}$

ii) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu(x+1)-\sigma\upsilon\nu(x-1)}{f(x)-1-\sqrt{x}}=-\infty$

Λύση: α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\ge0$$

Η f είναι συνεχής στο $x_o=1$ και για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει $f'(x)>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Η ανίσωση γράφεται:

$$e^x\cdot e>\frac{(2x)^2+1}{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow\frac{e^{2x}}{(2x)^2+1}>\frac{e^{x-1}}{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow$$

$$f(2x)>f(x-1)\overset{f\uparrow R}{\Leftrightarrow}2x>x-1\Leftrightarrow x>-1.$$

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=$

$$\frac{\left[e^x(x-1)^2+2(x-1)e^x\right]\left(x^2+1\right)-2\cdot2x\cdot e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$=\frac{e^x(x-1)\cdot\left(x^3-3x^2+5x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{e^x(x-1)\cdot P(x)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

όπου $P(x)=x^3-3x^2+5x+1$.

Επειδή $P'(x)=3x^2-6x+5>0$ για κάθε $x\in R$ (αφού έχει $\Delta=-24<0$) η $P\uparrow R$ και έχει το πολύ μία ρίζα. Αφού είναι $P(0)=1$ και $P(-1)=-8<0$ από Θ. Bolzano η $P(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_o\in(-1,0)$. Έτσι $P(x)<0$ για $x\in(-\infty,x_o)$ και $P(x)>0$ για $x\in(x_o,+\infty)$.

Η f'' έχει το πρόσημο του γινομένου $(x-1)\cdot P(x)$

x	$-\infty$		x_o		1		$+\infty$
x−1		−		−	0	+	
P(x)		−	0	+		+	
f΄΄		+	0	−	0	+	
f(x)		∪		∩		∪	

Άρα η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής, τα $(x_o,f(x_o))$ και $(1,f(1))$.

δ) i) Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f(x)\ge f(0)=1$ με την ισότητα να αληθεύει για $x=0$. Επομένως

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 1dx=1.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+1$.

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[x_o,1]$ και το $0\in(x_o,1)$ οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη $y=x+1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f(x)\le x+1$, με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

$$\text{Άρα }\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1(x+1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{3}{2}.$$

ii) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\eta\mu(x+1)-\sigma\upsilon\nu(x-1)\right]=$

$$\eta\mu 1-\sigma\upsilon\nu(-1)=\eta\mu 1-\sigma\upsilon\nu(1)>0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)-1-\sqrt{x}\right)=f(0)-1=0.$$

Έχουμε αποδείξει παραπάνω ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $f(x)<x+1$. Επίσης για $x\in(0,1)$ ισχύει $x<\sqrt{x}$, οπότε

$$f(x)-1<x<\sqrt{x}\Rightarrow f(x)-1-\sqrt{x}<0.$$

Έτσι έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu(x+1)-\sigma\upsilon\nu(x-1)}{f(x)-1-\sqrt{x}}=$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\eta\mu(x+1)-\sigma\upsilon\nu(x-1)\right)\frac{1}{f(x)-1-\sqrt{x}}\right]=$$

$$\left[\left(\eta\mu(1)-\sigma\upsilon\nu(1)\right)\cdot(-\infty)\right]=(-\infty).$$

Άσκηση 2η:

Δίνονται οι συναρτήσεις $g,h,f:(0,+\infty)\to R$ με

$$g(x)=(x+1)\ln x+1,\ h(x)=(x+2)\ln x+\frac{1}{x}+2$$

και $f(x)=xe^x\ln x$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση h είναι κυρτή.

γ) Η συνάρτηση f έχει αρνητικό ελάχιστο.

δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ε) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx>\frac{e}{2}$

ΛΥΣΗ: **α)** Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\ln x+1+\dfrac{1}{x}$ και

$$g''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}.$$

x	0	1	+∞
$g''(x)$	−	0	+
$g'(x)$	↘	2	↗

Για κάθε $x>0$ ισχύει $g'(x)\geq 2>0$, άρα $g1(0,+\infty)$.

β) Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\ln x+1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ και

$h''(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, άρα η h είναι κυρτή.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x\cdot g(x)$, οπότε η $f'(x)$ έχει το πρόσημο της g. Επειδή η $g1(0,+\infty)$ και συνεχής έχουμε:

$$g((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R.$$

Οπότε υπάρχει μοναδικός $x_o>0$ με $g(x_o)=0$.

Για $x>x_o$ ισχύει $g(x)>g(x_o)=0\Leftrightarrow g(x)>0$

Για $x<x_o$ ισχύει $g(x)<g(x_o)=0\Leftrightarrow g(x)<0$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(x_o)=x_o\cdot e^{x_o}\cdot\ln x_o$.

Από την ισότητα $f'(x_o)=0$ προκύπτει $g(x_o)=0$ οπότε $\ln x_o=-\dfrac{1}{x_o+1}$.

Επομένως

$$f(x_o)=x_o\cdot e^{x_o}\cdot\left(-\frac{1}{x_o+1}\right)<0.$$

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=e^x\cdot h(x)$.

Επειδή $h''(x)>0$ είναι $h'1(0,+\infty)$ και συνεχής επομένως $h'((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}h'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)\right)=R$,

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+\dfrac{1}{x^2}(x^2+2x-1)\right)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}h'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x+1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty.$$

Άρα υπάρχει μοναδικός $\xi>0$ με $h'(\xi)=0$.

Για $x>\xi$ ισχύει $h'(x)>h'(\xi)=0$, ενώ για $x<\xi$ ισχύει $h'(x)<h'(\xi)=0$.

x	0	ξ	+∞
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘		↗

Άρα η h έχει ελάχιστο το

$$h(\xi)=(\xi+2)\cdot\ln\xi+\frac{1}{\xi}+2=\frac{\xi^2\cdot\ln\xi+2\ln\xi+1+2\xi}{\xi}$$

Από την $h'(\xi)=0$ προκύπτει ότι

$$\xi^2\cdot\ln\xi+\xi^2+2\xi-1=0,$$

οπότε $h(\xi)=\dfrac{2-\xi^2+2\xi\cdot\ln\xi}{\xi}=\dfrac{\varphi(\xi)}{\xi}$,

όπου $\varphi(x)=2-x^2+2x\cdot\ln x$, $x>0$.

Ισχύει $\varphi'(x)=2(\ln x-x+1)\le 0$ διότι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$. Επομένως η φ 2 $(0,+\infty)$ και συνεχής $\varphi((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)\right)=(-\infty,2)$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\left(2\dfrac{\ln x}{x}-1\right)+2\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)=0$. Επειδή h' 1 $(0,+\infty)$, $h'(\xi)=0$ και $h'(1)=2$ ισχύει $\xi\in(0,1)$ και $\varphi(\xi)>\varphi(1)=1>0$. Άρα $h(\xi)>0$, $h(x)>0$ και $f''(x)>0$, που σημαίνει ότι η f είναι κυρτή.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(1,f(1))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=e\cdot x-e.$$

Επειδή η f είναι κυρτή, ισχύει ότι $f(x)\ge e\cdot x-e$ με την ισότητα να αληθεύει για $x=1$. Άρα έχουμε

$$\int_1^2 f(x)\,dx>\int_1^2(e\cdot x-e)\,dx=\left[\frac{1}{2}ex^2-ex\right]_1^2=\frac{e}{2}.$$

Άσκηση 3η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$,

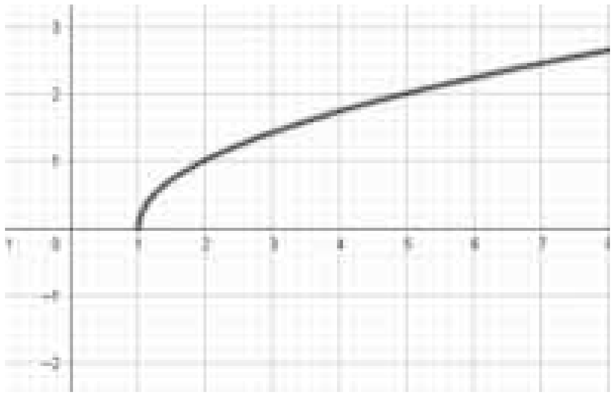
α) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x$ είναι εφαπτομένη της.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x$.

γ) Να βρεθεί η κατακόρυφη ευθεία που διαιρεί το χωρίο του ερωτήματος β) σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

δ) Ένα σημείο $M(x(t),y(t))$ κινείται στην C_f, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο Μ κατά την χρονική στιγμή που η γωνία αυτή ισούται με $\dfrac{\pi}{4}$.

Λύση: α) $D_f=[1,+\infty)$



Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την μετατόπιση της καμπύλης $y=\sqrt{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_o,f(x_o))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\Leftrightarrow$$

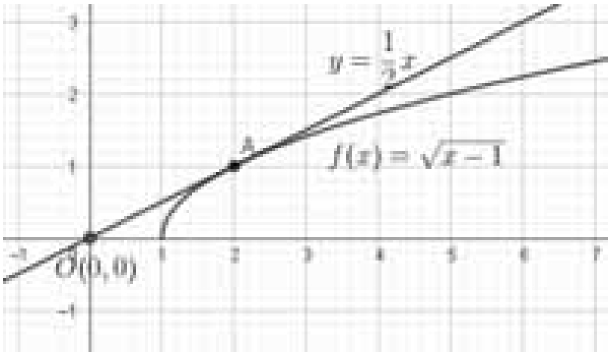
$$y=f'(x_o)x+f(x_o)-x_of'(x_o)$$

Για να ταυτίζεται με την $y=\dfrac{1}{2}x$ πρέπει και αρκεί:

$$\left.\begin{aligned}f'(x_o)=\frac{1}{2}\\ f(x_o)-x_of'(x_o)=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{x_o-1}}=\frac{1}{2}\\ \sqrt{x_o-1}=\frac{1}{2}x_o\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow x_o=2.$$

Άρα η ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ εφάπτεται στην C_f στο σημείο $M(2,1)$.

β)

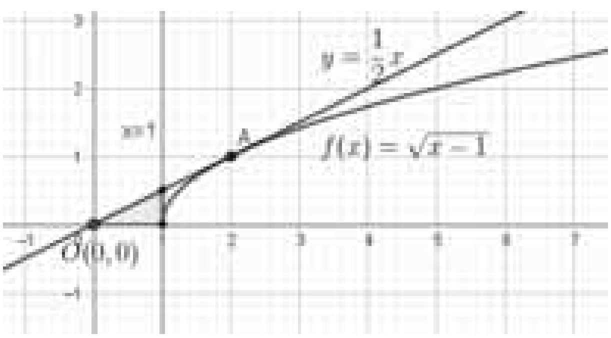


Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, την ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx-\int_1^2\sqrt{x-1}\,dx=$$

$$\frac{1}{4}\left[x^2\right]_0^2-\frac{2}{3}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\ \text{τ.μ.}$$

γ) Η ευθεία $x=1$ τέμνει την $y=\frac{1}{2}x$ στο σημείο $\left(1,\frac{1}{2}\right)$. Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραμμών $y=\frac{1}{2}x$, $y=0$, $x=0$ και $x=1$ είναι: $E_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>\frac{1}{6}=\frac{E(\Omega)}{2}$.



Αυτό σημαίνει ότι η ζητούμενη ευθεία $x=\alpha$, βρίσκεται αριστερά της ευθείας $x=1$, δηλαδή $0<\alpha<1$. Άρα ισχύει

$$\int_0^{\alpha}\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\alpha^2=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\alpha^2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

δ) Ισχύει ότι $x'(t)=2\frac{cm}{sec}$.

Έστω $\theta(t)$ η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και t_o η χρονική στιγμή που ισχύει $\theta(t_o)=\frac{\pi}{4}$. Ζητάμε τον αριθμό $\theta'(t_o)$.Η εφαπτομένη έχει κλίση

$$\varepsilon\varphi\theta(t)=f'(x(t))=\frac{1}{2\sqrt{x(t)-1}}.$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

$$\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=-\frac{x'(t)}{4(x(t)-1)\cdot\sqrt{x(t)-1}}\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{4(x(t)-1)\cdot\sqrt{x(t)-1}}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)$$

Για $t=t_o$ έχουμε $\theta(t_o)=\frac{\pi}{4}$ και $x'(t_o)=2\frac{cm}{sec}$

Οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta(t_o)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και

$$\frac{1}{2\sqrt{x(t_o)-1}}=1\Leftrightarrow x(t_o)=\frac{5}{4}cm$$

Τελικά προκύπτει $\theta'(t_o)=-2\frac{rad}{sec}$.

Άσκηση 4η:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ με

$$f(x)=x+1-x\ln x \text{ και } g(x)=\frac{\ln x}{x+1}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o και ισχύει $1<x_o<e^2$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση g ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(0,x_o]$

και $[x_o,+\infty)$

γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί 50^{50} και 49^{51}

δ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

ε) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_1^2 g(x)\,dx<1+2(\ln 2-\ln 3)$$

Λύση: α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-\ln x$ Είναι $f'(1)=0$, για $x<1$ είναι $f'(x)>0$ και για $x>1$ ισχύει $f'(x)<0$. Άρα η $f\nearrow(0,1]$ και $f\searrow[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=2$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$, διότι $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1-x\ln x)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(1+\frac{1}{x}-\ln x\right)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$

Άρα, για κάθε $x\in(0,1]$ έχουμε $f(x)\in(1,2]$ και για $x\in[1,+\infty)$ έχουμε $f(x)\in(-\infty,2]$. Η τιμή $y=0\in(-\infty,2]$, άρα από ΘΕΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in[1,+\infty)$ ώστε $f(x_o)=0$ και αφού η $f\searrow[1,+\infty)$ το x_o είναι μοναδικό. Επειδή ισχύει $f(1)\cdot f(e^2)=2\cdot(1-e^2)<0$, προκύπτει ότι το $x_o\in(1,e^2)$.

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{f(x)}{x(x+1)^2}.$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτώνται από τις ρίζες και το πρόσημο της f.
Άρα έχει μοναδική ρίζα το x_o και για κάθε $x\in(0,x_o)$ ισχύει $g'(x)>0$ οπότε η $g\nearrow(0,x_o]$ και για κάθε $x\in(x_o,+\infty)$ ισχύει $g'(x)<0$, οπότε η $g\searrow[x_o,+\infty)$.

γ) Αρκεί να συγκρίνουμε τους αριθμούς

$$\ln(50^{50})\ \text{και}\ \ln(49^{51}),$$

δηλαδή τους $50\cdot\ln(50)$ και $51\cdot\ln(49)$,

δηλαδή τους $\dfrac{\ln(50)}{51}$ και $\dfrac{\ln(49)}{50}$,

δηλαδή τους $g(50)$ και $g(49)$

Επειδή $x_o<e^2<49<50$ και η $g\searrow[x_o,+\infty)$ έχουμε ότι $g(49)>g(50)\Leftrightarrow 49^{51}>50^{50}$.

δ) Ισχύει $f(2)=3-2\ln 2=\ln e^3-\ln 4>0$

άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2(x+1-x\ln x)\,dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2+\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$\frac{5}{2}-2\ln2+\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx=\frac{5}{2}-2\ln2+\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2=\frac{13}{4}-2\ln2.$$

ε) Ισχύει ότι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει για $x=1$.
Άρα για κάθε $x\in[1,2]$ έχουμε

$$\int_1^2 g(x)dx<\int_1^2\frac{x-1}{x+1}dx=\int_1^2\frac{x+1-2}{x+1}dx=$$

$$\int_1^2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx=\left[x-2\ln(x+1)\right]_1^2=$$

$$(2-2\ln3)-(1-2\ln2)=1+2(\ln2-\ln3).$$

Άσκηση 5η:

Δίνεται ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+3}-\lambda x\ ,\ \lambda\in R$$

έχει στο $-\infty$ πεπερασμένο όριο.

α) Να αποδειχθεί ότι $\lambda=-1$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

γ) Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της f.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(f^{-1}(x)+x\right)<6$.

Λύση: α) Το τριώνυμο $x^2-x+3>0$ για κάθε $x\in R$, διότι έχει $\Delta=-11<0$, επομένως η f ορίζεται στο R. Για κάθε $x<0$, ισχύει:

$$f(x)=\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-\lambda x=-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda\right)$$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda\right)=1+\lambda$,

έχουμε:

- Αν $1+\lambda>0\Leftrightarrow\lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\notin R$, Άτοπο.
- Αν $1+\lambda<0\Leftrightarrow\lambda<-1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\notin R$, Άτοπο.
- Άρα πρέπει $\lambda=-1$, ώστε να έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+3}+x=\frac{x^2-x+3-x^2}{\sqrt{x^2-x+3}-x}=$$

$$\frac{-x+3}{\sqrt{x^2-x+3}-x}=\frac{\cancel{-x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{-x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=$$

$$\frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$

και τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{2}\in R$. Άρα $\lambda=-1$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}+1=\frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x+3}}{2\sqrt{x^2-x+3}}.$$

Ελέγχουμε αν μηδενίζεται η $f'(x)$ και έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{x^2-x+3}=0\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2-x+3}=1-2x.$$

Η εξίσωση έχει λύση όταν $1-2x\geq0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}$.

Έτσι έχουμε: $4x^2-4x+13=1-4x+4x^2\Leftrightarrow 12=0$, Αδύνατη. Επομένως για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)\neq0$ και αφού η f' είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων), διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Όμως,

$$f'(0)=\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}>0,$$

οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f 1 R.

γ) Η f ως γνησίως μονότονη, είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το διάστημα

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(\frac{1}{2},+\infty\right).$$

Η εξίσωση $f(x)=y$ με $y>\frac{1}{2}$ γράφεται:

$$\sqrt{x^2-x+3}+x=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+3}=y-x.$$

Για $y\geq x$ γράφεται:

$$x^2-x+3=y^2-2xy+x^2\Leftrightarrow x=\frac{y^2-3}{2y+1}\quad(1).$$

Αφού $y\geq x\Leftrightarrow y\geq\frac{y^2-3}{2y+1}\Leftrightarrow y^2+y+3\geq0$, που ισχύει. Άρα $f^{-1}(x)=\frac{x^2-3}{2x+1}$, $x>\frac{1}{2}$.

δ) Ελέγχουμε αν υπάρχει τιμή του x τέτοια ώστε $f(x)=6$.

$$f(x)=6\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+3}=6-x\overset{x\leq6}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2-x+3=36-12x+x^2\Leftrightarrow x=3.$$

Άρα η ανίσωση γράφεται:

$$f\left(f^{-1}(x)+x\right)<6\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)+x\right)<f(3)\overset{f\,1\,R}{\Leftrightarrow}$$

$$f^{-1}(x)+x<3\Leftrightarrow\frac{x^2-3}{2x+1}+x<3\overset{x>\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2-3+2x^2+x<6x+3\Leftrightarrow 3x^2-5x-6<0\Leftrightarrow$$

$$\frac{5-\sqrt{97}}{6}<x<\frac{5+\sqrt{97}}{6}.$$

Αφού έχουμε $x>\frac{1}{2}$, τελικά

$$x\in\left(\frac{1}{2},\frac{5+\sqrt{97}}{6}\right).$$

Γενικά Θέματα Ανάλυσης

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Η μαθηματική ανάλυση είναι ένας βασικός τομέας των Μαθηματικών που πρωταγωνιστικό ρόλο παίζουν οι έννοιες των πραγματικών αριθμών, της συνάρτησης, του ορίου, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Η μαθηματική ανάλυση αναπτύχθηκε επίσημα τον $17^{ο}$ αιώνα. Τον $18^{ο}$ αιώνα **ο Euler** εισήγαγε την έννοια της συνάρτησης. Στα μέσα του 19ου αιώνα **ο Riemann** εισήγαγε τη θεωρία του για την ολοκλήρωση. Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα αποτελούν τις δύο διαφορετικές όψεις του ίδιου νομίσματος. Η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι μεταξύ τους αντίστροφες διαδικασίες.
Η ανάγνωση του άρθρου αυτού απαιτεί σε βάθος γνώση της θεωρίας.

Θέμα 1ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,x\le 0 \\ \ln x+1 & ,x>0\end{cases}$

και $g(x)=\begin{cases} e^x-1, & x\le 1 \\ ex-1, & x>1\end{cases}$.

α. i. Δείξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτηση.

ii. Δείξτε ότι στο σημείο $A(1,g(1))\in C_g$ ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g η οποία είναι εφαπτομένη και της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

β. Θέτουμε

$$h(x)=(f+g)(x)=\begin{cases} e^x+x & ,x\le 0 \\ \ln x+e^x & ,0<x\le 1 \\ \ln x+ex & ,x>1\end{cases}.$$

i. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ στο οποίο η h παρουσιάζει καμπή.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Λύση

α. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $g'(x)=e^x>0$. Όμοια η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x)=e>0$.

$g(1)=e-1$, $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(e^x-1\right)=e-1=g(1)$, $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ex-1)=e-1=g(1)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$. Έτσι η g είναι συνεχής στο 1 με $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο R. Συνεπώς η g είναι "1-1", επομένως είναι αντιστρέψιμη.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(ex-1)=+\infty$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1],(1,+\infty)$ οπότε

$g((-\infty,1])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]=(-1,e-1]$ και

$g((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to1^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(e-1,+\infty)$.

Αν $x\le1$ και $y\in(-1,e-1]$, έχουμε $g(x)=y\Leftrightarrow e^x-1=y\Leftrightarrow e^x=y+1\Leftrightarrow x=\ln(y+1)$.

Αν $x>1$ και $y\in(e-1,+\infty)$, έχουμε $g(x)=y\Leftrightarrow ex-1=y\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{e}$.

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της g είναι η

$$g^{-1}(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & -1<x\le e-1 \\ \dfrac{x+1}{e}, & x>e-1\end{cases}.$$

ii. Αρχικά θα δείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^x-e}{x-1}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{\left(e^x-e\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^-}e^x=e.$$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ex-e}{x-1}=e$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=e$. Συνεπώς στο σημείο $A(1,e-1)\in C_g$ ορίζεται εφαπτομένη ε της C_g με εξίσωση $y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-(e-1)=e(x-1)\Leftrightarrow y=ex-1$.

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση του δεύτερου κλάδου της g βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη ε.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $R-\{0\}$ με

$f'(x)=\begin{cases}1, & x<0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=$

$\lim_{x\to 0^+}(\ln x+1)=-\infty$ η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο 0, οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Έστω σημείο $B(x_0, f(x_0))\in C_f$ με $x_0\neq 0$ και ε_1 η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο B. Η εξίσωση της ε_1 είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$

Απαιτούμε οι $\varepsilon,\varepsilon_1$ να συμπίπτουν, οπότε για κάθε $x\in R$ πρέπει:

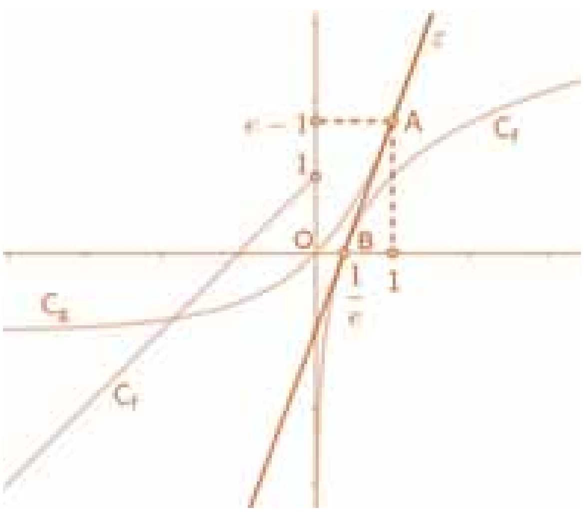
$ex-1=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} e=f'(x_0) \\ \text{και} \\ f(x_0)-x_0f'(x_0)=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e=f'(x_0) & (1) \\ \text{και} & \\ f(x_0)-ex_0=-1 & (2) \end{cases}$$

Η (1) δεν ισχύει όταν $x_0<0$. Αν $x_0>0$ τότε

$(1)\Leftrightarrow e=\dfrac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{e}$.

$(2)\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{e}\right)=0\Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{e}+1=0\Leftrightarrow -1+1=0$ που ισχύει. Άρα η ε είναι εφαπτομένη και της C_f στο σημείο της $B\left(\dfrac{1}{e}, f\left(\dfrac{1}{e}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{e},0\right)$.



iii. $D_f=R$, $D_g=R$ και $D_f\cap D_g=R$. Ορίζεται η συνάρτηση $f+g$ με πεδίο ορισμού το R.

- Αν $x\le 0$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+1+e^x-1=e^x+x$.
- Αν $0<x\le 1$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\ln x+1+e^x-1=\ln x+e^x$.
- Αν $x>1$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\ln x+1+ex-1=\ln x+ex$.

Άρα $(f+g)(x)=\begin{cases} e^x+x &, x\le 0 \\ \ln x+e^x &, 0<x\le 1 \\ \ln x+ex &, x>1 \end{cases}$.

β. i. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x)=\dfrac{1}{x}+e^x$.

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h''(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$. Η h'' είναι συνεχής στο $(0,1)$.

$\lim_{x\to 0^+}h''(x)=-\infty$, οπότε υπάρχει $0<\kappa<1$ τέτοιο ώστε $h''(\kappa)<0$ και $\lim_{x\to 1^-}h''(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^x-\dfrac{1}{x^2}\right)=e-1>0$, οπότε υπάρχει λ με $\kappa<\lambda<1$ τέτοιο ώστε $h''(\lambda)>0$. Άρα έχουμε $h''(\kappa)h''(\lambda)<0$. Εφαρμόζεται για την h'' στο $[\kappa,\lambda]$ το θεώρημα του Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,\lambda)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $h''(x_0)=0$. Η h'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h^{(3)}(x)=e^x+\dfrac{2}{x^3}>0$. Άρα η h'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$. 11111

Έτσι έχουμε $0<x<x_0\Rightarrow h''(x)<h''(x_0)\Rightarrow h''(x)<0$ και $x_0<x<1\Rightarrow h''(x)>h''(x_0)\Rightarrow h''(x)>0$. Άρα στο $x_0\in(0,1)$ ή h παρουσιάζει καμπή.

ii. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η h είναι συνεχής στο $R-\{0\}$ και $\lim_{x\to 0^-}h(x)=\lim_{x\to 0^-}(e^x+x)=1$, $\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x+e^x)=-\infty$.

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

Αναζητούμε τώρα ασύμπτωτες της C_h στο $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{x}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(e^x+x)'}{(x)'}=$$

$\lim_{x\to-\infty}(e^x+1)=1$ και $\lim_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$. Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+ex}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+ex)'}{(x)'}=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+e\right)=e$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-ex\right)=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Άρα η C_h στο $+\infty$ δεν έχει ασύμπτωτη.

Τελικά η C_h έχει μία κατακόρυφη ασύμπτωτη με εξίσωση $x=0$ και μία πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ με εξίσωση $y=x$.

Θέμα 2°

Θεωρούμε την αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)+f(1)=2\kappa$ (1), $\kappa\in\mathbb{R}-\{0\}$ καθώς και τη συνάρτηση $g(x)=x(f(x)-\kappa)$.

Δείξτε ότι:

α. $0<f^{-1}(\kappa)<1$.

β. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi\in(0,1)$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{2}{f'(\xi)}.$$

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho)=\dfrac{\kappa-f(\rho)}{\rho}$.

Λύση

α. Επειδή η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, είναι "1-1", οπότε $f(0)\neq f(1)$. Η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής και το κλάσμα $\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$ είναι το μέσο του διαστήματος που ορίζουν οι τιμές $f(0),f(1)$. Άρα εφαρμόζεται για την f στο $[0,1]$ το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, αφού η f είναι "1-1", τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$f(x_0)=\kappa\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(\kappa)$ και αφού

$0<x_0<1\Leftrightarrow 0<f^{-1}(\kappa)<1$.

β. Για το x_0 του ερωτήματος α, εφαρμόζεται για την f στα διαστήματα $[0,x_0],[x_0,1]$ το θεώρημα της μέσης τιμής, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(0,x_0)\subseteq(0,1)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x_0,1)\subseteq(0,1)$ τέτοια ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{\kappa-f(0)}{x_0}$ και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-\kappa}{1-x_0}$.

Λόγω της (1) είναι $f(1)-\kappa=\kappa-f(0)$. Επιπλέον $f(1)-\kappa\neq0$, $\kappa-f(0)\neq0$ γιατί αν ήταν $f(1)=\kappa$ θα είναι και $f(0)=\kappa$, δηλαδή $f(0)=f(1)$ άτοπο αφού η f είναι "1-1".

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{x_0}{\kappa-f(0)}+\frac{1-x_0}{\kappa-f(0)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{1}{\kappa-f(0)}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{1}{\dfrac{f(0)+f(1)}{2}-f(0)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{2}{f(1)-f(0)}\quad(2).$$

Εφαρμόζεται για την f στο διάστημα $[0,1]$ το θεώρημα της μέσης τιμής, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=f(1)-f(0)$. Έτσι η (2) γράφεται $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_1)}=\dfrac{2}{f'(\xi)}$.

γ. Τι πεδίο ορισμού της g είναι $D_g=\mathbb{R}$. Από το ερώτημα α έχουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\kappa$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,x_0]$, παραγωγίσιμη στο $(0,x_0)$ με $g'(x)=f(x)-\kappa+xf'(x)$ και $g(0)=g(x_0)=0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,x_0)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\rho)=0\Leftrightarrow$

$$f(\rho)-\kappa+\rho f'(\rho)=0\Leftrightarrow f'(\rho)=\frac{\kappa-f(\rho)}{\rho}.$$

Θέμα 3°

Η συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,2)$. Αν η f' είναι συνεχής στο 1 και ισχύει $\dfrac{2\ln x}{x}f'(x)+f''(x)\ln^2x<0$ (1) για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$, τότε:

i. Δείξτε ότι στο σημείο $A(1,f(1))$ ορίζεται στη C_f οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Αν η f'' είναι συνεχής στο $(1,2)$ με $f''(x)\neq0$ για κάθε $x\in(1,2)$, να δείξετε ότι για οποιοδήποτε $\kappa\in(1,2)$ είναι $f(x)+(\kappa-x)f'(x)\leq f(\kappa)$ για κάθε $x\in(1,2)$.

Λύση

i. Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,2)$ από την (1) έχουμε $\left(f'(x)\ln^2 x\right)' < 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f'(x)\ln^2 x, x \in (0,2)$.

Είναι $\begin{cases} g'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1) \cup (1,2) \\ \text{και} \\ g \text{ συνεχής στο } 1 \end{cases} \Rightarrow$

g γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$.

- $0 < x < 1 \Rightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow$
  $f'(x)\ln^2 x > 0 \overset{\ln^2 x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0$.
- $1 < x < 2 \Rightarrow g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow$
  $f'(x)\ln^2 x < 0 \overset{\ln^2 x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) < 0$.

Η f είναι συνεχής, οπότε στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι $f'(1) = 0$, που σημαίνει ότι στο σημείο $A(1, f(1))$ η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Σύμφωνα με την υπόθεση η f'' διατηρεί στο $(1,2)$ σταθερό πρόσημο. Έστω $\rho \in (1,2)$. Η f' είναι συνεχής στο $[1,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\rho)$. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,\rho)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(\rho) - f'(1)}{\rho - 1} \overset{(i)}{=} \frac{f'(\rho)}{\rho - 1} \overset{f'(\rho)<0}{\Rightarrow} f''(\xi) < 0.$$

Άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$. Συνεπώς η συνάρτηση f στο διάστημα $(1,2)$ είναι κοίλη.

Έστω $\kappa \in (1,2)$ και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$. Η εξίσωση της ε είναι

$y - f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa) \Leftrightarrow y = f'(\kappa)(x-\kappa) + f(\kappa)$

Αφού η f είναι κοίλη στο $(1,2)$, τότε για κάθε $x \in (1,2)$ ισχύει $f(x) \le y \Leftrightarrow$

$f(x) \le f'(\kappa)(x-\kappa) + f(\kappa) \Leftrightarrow$

$f(x) - f'(\kappa)(x-\kappa) \le f(\kappa) \Leftrightarrow$

$f(x) + f'(\kappa)(\kappa - x) \le f(\kappa)$.

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & , x \le -1 \\ x^2 - 1 & , -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 - 2 & , x \ge 1 \end{cases}.$$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Έστω g η συνάρτηση που ορίζεται από την ευθεία AB των σημείων $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση του πρώτου κλάδου της f και της ευθείας AB.

Λύση

α. • Για $x < -1$, $f'(x) = 2(x+2)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$.

Για $-1 < x < 1$, $f'(x) = 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Για $x > 1$, $f'(x) = 2(x-2)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

• — $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x+2)^2 = 1 = f(1)$.

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^2 - 1) = 0 \ne f(-1)$. Η f δεν είναι συνεχής στο -1.

— $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 \ne f(1)$ και

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[(x-2)^2 - 2\right] = -1 = f(1)$. Η f δεν είναι συνεχής στο 1.

Η f στα σημεία $-1, 1$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού στα σημεία αυτά δεν είναι συνεχής.

Τα σημεία $-2, -1, 0, 1, 2$ είναι κρίσιμα σημεία της f.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μονοτονία της f.

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1$	$0 \quad 1$	$2 \quad +\infty$
$f'(x)$	$-\ 0\ +$	$-\ 0\ +$	$-\ 0\ +$
$f(x)$	$>\ 0\ <\ 1$ (τ. ελ.)	$>\ -1\ <\ -1$	$>\ -2\ <$ (τ. μέγ.)

— Για $x = -2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-2) = 0$.

— Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-2,-1]$, οπότε $f([-2,-1]) = [f(-2), f(-1)] = [0, f(-1)]$ με $f(-1) = 1$.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 < f(-1)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-1,0]$, οπότε

$f((-1,0]) = \left[f(0), \lim_{x\to -1^+} f(x)\right) = [-1,0)$.

Άρα $f([-2,0]) = f([-2,-1]) \cup f((-1,0]) = \left[-1, f(-1)\right]$. Συνεπώς στο -1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=1$.

— Για $x=0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=-1$.

— $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 > f(1) = -1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,1)$, οπότε

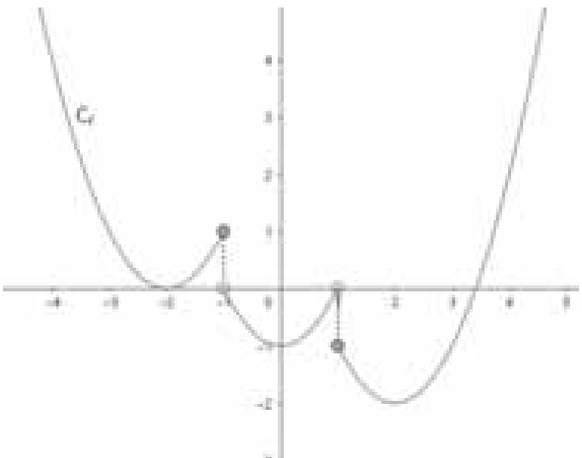
$f([0,1)) = \left[f(0), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = [-1,0)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1,2]$, οπότε $f([1,2]) = [f(2), f(1)] = [-2, f(1)]$

Άρα $f([0,2]) = f([0,1)) \cup f([1,2]) = [-2,0)$.

Συνεπώς στο 1 η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

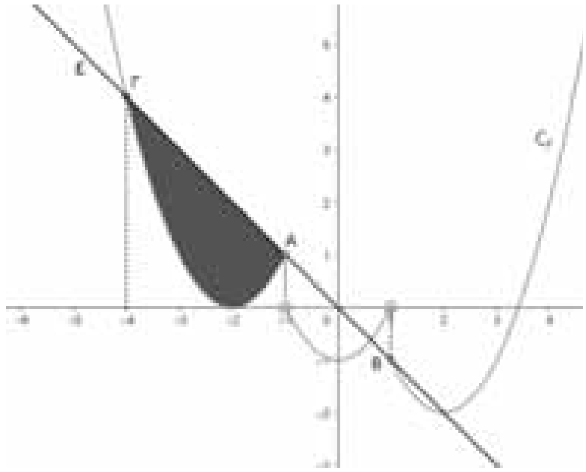
— Για $x=2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-2$.



Το -2 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 2.

β. Είναι $A(-1,1)$ και $B(1,-1)$ (τα σημεία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων). Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{-1-1}{1+1} = -1$. Άρα $AB: y-1 = -(x+1) \Leftrightarrow$ $y=-x$, οπότε $g(x) = -x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x\le -1$, $f(x) = g(x) = (x+2)^2 = -x \Leftrightarrow$ $x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=-1$. Άρα τα κοινά σημεία της γραφικής παράσταση του $1^{ου}$ κλάδου της f με την C_g είναι $A(-1,1)$ και $\Gamma(-4,4)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τη γραφική παράσταση του $1^{ου}$ κλάδου της f και του τμήματος ΑΓ.



Η συνάρτηση $g-f$ είναι συνεχής στο $[-4,-1]$ με $g(x)\ge f(x)$ για κάθε $x\in[-4,-1]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) =$

$$\int_{-4}^{-1}(g(x)-f(x))dx = \int_{-4}^{-1}\left(-x-(x+2)^2\right)dx =$$

$$\left[-\frac{x^2}{2} - \frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-4}^{-1} = \cdots = \frac{9}{2}$$ τετρ. μον.

Σχόλιο: Για να ελέγξουμε ένα κρίσιμο σημείο x_0 που σε αυτό η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, δεν μπορούμε να εργαστούμε με το θεώρημα τοπικών ακροτάτων της 1ης παραγώγου γιατί το θεώρημα αυτό προϋποθέτει τη συνέχεια στα κρίσιμα σημεία.

Θέμα 5ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = (\alpha x - 1)\sqrt{x^2+2}\,,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha \ge \frac{1}{4}}.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ρίζα στο $(0,\sqrt{2})$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \alpha\sqrt{x^2+2} + (\alpha x-1)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \cdots =$$

$$\frac{2\alpha x^2 - x + 2\alpha}{\sqrt{x^2+2}}$$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2\alpha x^2 - x + 2\alpha$ είναι $\Delta = 1-16\alpha^2$.

• Αν $\alpha=\frac{1}{4}$ είναι $\Delta=0$ και $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x^2+2}}$.

Έχουμε

$$\left.\begin{cases} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty) \\ \text{και} \\ f \text{ συνεχής στο } 1 \end{cases}\right\}\Rightarrow$$

f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

• Αν $\alpha>\frac{1}{4}$ είναι $\Delta<0$, οπότε $2\alpha x^2-x+2\alpha>0$ για κάθε $x\in R$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Συνεπώς για κάθε $\alpha\geq\frac{1}{4}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R που σημαίνει ότι είναι "1-1", επομένως είναι αντιστρέψιμη.

Για κάθε $x\neq 0$, $f(x)=x|x|\left(\alpha-\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^2\left(\alpha-\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right]=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\alpha-\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right]=+\infty.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(R)=R$.

ii. Έχουμε $f\left(\left(0,\sqrt{2}\right)\right)=\left(f(0),f\left(\sqrt{2}\right)\right)=\left(-\sqrt{2},2\left(\alpha\sqrt{2}-1\right)\right)$.

Η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ρίζα στο $\left(0,\sqrt{2}\right)$ αν και μόνο αν $2\in\left(-\sqrt{2},2\left(\alpha\sqrt{2}-1\right)\right)\Rightarrow$

$$2<2\left(\alpha\sqrt{2}-1\right)\Leftrightarrow\alpha\sqrt{2}-1>1\Leftrightarrow\alpha>\frac{2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$\alpha>\sqrt{2}$.

Θέμα 6ο

Η συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to R$, $\alpha>0$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και έχουμε $f'(\alpha)\neq 0$. Η f στο $x_0\in(-\alpha,\alpha)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δεχόμαστε ότι $f''(-x)+f''(x)=0$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$.

α. Να δείξετε ότι:

i. Η αρχή των αξόνων είναι κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

ii. Για κάποιο $\kappa>0$ υπάρχει $\theta\in(0,1)$ ώστε να ισχύει $\kappa f''(x_0+\kappa\theta)=f'(\alpha)$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(\alpha)\eta\mu^3x+f'(\alpha)x+\kappa\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx+f''(x_0+\kappa\theta)\right)$, για το κ και το θ του ερωτήματος α ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει με τον άξονα $x'x$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Λύση

α. i. Για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$, $-f''(-x)=f''(x)\Leftrightarrow$

$\left(f'(-x)\right)'=\left(f'(x)\right)'\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)+c_1$ (1),

όπου $c_1\in R$ σταθερά. Για $x=0$ $(1)\Rightarrow c_1=0$.

Άρα για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ είναι $f'(-x)=f'(x)\Leftrightarrow$

$-f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow\left(f(-x)\right)'=\left(-f(x)\right)'\Leftrightarrow$

$f(-x)=-f(x)+c_2$ (2), όπου $c_2\in R$ σταθερά.

Έχουμε $f(0)=0$, οπότε για $x=0$ από την (2) παίρνουμε $c_2=0$. Συνεπώς $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιττή. Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ii. Η f' ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $[x_0,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,α). Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_0,\alpha)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi)=\frac{f'(\alpha)-f'(x_0)}{\alpha-x_0}\ (3).$$

Από το θεώρημα του Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$.

Θέτουμε $\alpha-x_0=\kappa$ και είναι $\kappa>0$. Από την (3) παίρνουμε $f''(\xi)=\frac{f'(\alpha)}{\kappa}\Leftrightarrow\kappa f''(\xi)=f'(\alpha)$ (4).

$x_0<\xi<\alpha\Leftrightarrow 0<\xi-x_0<\alpha-x_0\Leftrightarrow 0<\xi-x_0<\kappa$

$\Leftrightarrow 0<\frac{\xi-x_0}{\kappa}<1$. Θέτουμε $\frac{\xi-x_0}{\kappa}=\theta\Leftrightarrow$

$\xi=x_0+\kappa\theta$ και έχουμε $\theta\in(0,1)$ και $(4)\Rightarrow$

$\kappa f''(x_0+\kappa\theta)=f'(\alpha)$.

β. Θα βρούμε το ολοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\text{συν}x dx$.

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\text{συν}x dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\text{συν}x dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\text{συν}x dx$

(5). $I = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\text{συν}x dx = -\int_{-\alpha}^{0} f(-x)\text{συν}(-x) dx$, αφού η συνάρτηση f είναι περιττή.

Θέτουμε $-x = u \Rightarrow du = -dx \Leftrightarrow dx = -du$.

Για $x = -\alpha$ παίρνουμε $u = \alpha$ και για $x = 0$ παίρνουμε $u = 0$. Έτσι έχουμε $I = \int_{\alpha}^{0} f(u)\text{συν}u du =$

$-\int_{0}^{\alpha} f(u)\text{συν}u du \Leftrightarrow I = -\int_{0}^{\alpha} f(x)\text{συν}x dx$.

Άρα $(5) \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\text{συν}x dx = 0$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g = \mathbb{R}$. Ο τύπος της συνάρτησης g γράφεται

$$g(x) = f'(\alpha)\text{ημ}^3 x + f'(\alpha)x + \kappa f''(x_0 + \kappa\theta) \overset{\alpha\ ii}{\Leftrightarrow}$$
$$g(x) = f'(\alpha)\text{ημ}^3 x + f'(\alpha)x + f'(\alpha).$$

• Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

• $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} f'(\alpha)$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) f'(\alpha)$.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\left(f'(\alpha)\right)^2 < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $m \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$g(m) = 0$.

$g'(x) = 3f'(\alpha)\text{ημ}^2 x\text{συν}x + f'(\alpha) \Leftrightarrow g'(x) =$
$f'(\alpha)\left(3\text{ημ}^2 x\text{συν}x + 1\right)$.

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $3\text{ημ}^2 x\text{συν}x + 1 > 0$.

Άρα το πρόσημο της g' στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $f'(\alpha)$, αφού $f'(\alpha) \neq 0$, συνεπώς η g είναι γνησίως μονότονη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε το m είναι μοναδικό. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g έχει με τον άξονα $x'x$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Θέμα 7ο

Η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή με $f(0) = 0$. Έστω F μία παράγουσα της f στο $[0,+\infty)$ με $F(0) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2F(x) - xf(x)$, $x \in [0,+\infty)$. Δείξτε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. $\int_0^1 xf(x)dx > \frac{2}{3}F(1)$.

Λύση

i. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x) =$

$2F'(x) - f(x) - xf'(x) = 2f(x) - f(x) - xf'(x) \Leftrightarrow$
$g'(x) = f(x) - xf'(x)$.

Για $x > 0$ εφαρμόζεται για την f στο $[0,x]$ το θεώρημα της μέσης τιμής, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) =$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}.$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $0 < \xi < x \Rightarrow$

$$f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) < 0$$

$$\text{Άρα } \left\{ \begin{array}{c} g'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty) \\ \text{και} \\ g \text{ συνεχής στο } [0,+\infty) \end{array} \right. \Rightarrow$$

g γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

iii. Αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, έχουμε $x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$. Η g δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$. Άρα

$$\int_0^1 g(x)dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (x)' g(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[xg(x)\right]_0^1 - \int_0^1 xg'(x)dx < 0 \Leftrightarrow$$

$g(1)-\int_0^1 x\left(f(x)-xf'(x)\right)dx<0 \Leftrightarrow$

$g(1)-\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 x^2f'(x)dx<0 \Leftrightarrow 2F(1)-$

$f(1)-\int_0^1 xf(x)+\left[x^2f(x)\right]_0^1-\int_0^1 2xf(x)dx<0 \Leftrightarrow$

$2F(1)-3\int_0^1 xf(x)dx<0 \Leftrightarrow \int_0^1 xf(x)dx>\frac{2}{3}F(1)$.

Θέμα 8ο

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[0,4]\to R$ για την οποία έχουμε

$$\int_0^4 f^2(x)dx = 2\int_0^4 \sqrt{x}f(x)dx-8 \quad (1).$$

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$.

ii. Στο σημείο $A(-2,0)$ βρίσκεται ένας παρατηρητής ο οποίος βλέπει ένα κινούμενο σημείο M πάνω στη γραφική παράσταση της f.
Να βρείτε τη θέση του σημείου M που θα είναι η τελευταία ορατή θέση του από τον παρατηρητή.

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία AM, όπου M το σημείο του ερωτήματος ii.

Λύση

i. $(1)\Leftrightarrow \int_0^4 f^2(x)dx=\int_0^4 2\sqrt{x}f(x)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \Leftrightarrow$

$\int_0^4 f^2(x)dx=\int_0^4 2\sqrt{x}f(x)dx-\int_0^4 xdx \Leftrightarrow$

$\int_0^4 f^2(x)dx-\int_0^4 2\sqrt{x}f(x)dx+\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx=0 \Leftrightarrow$

$\int_0^4\left(f^2(x)-2\sqrt{x}f(x)+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)dx=0 \Leftrightarrow$

$\int_0^4\left(f(x)-\sqrt{x}\right)^2dx=0 \quad (2).$

Για κάθε $x\in[0,4]$ έχουμε $\left(f(x)-\sqrt{x}\right)^2\geq 0$ (3)

Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $\kappa\in[0,4]$ είναι $f(\kappa)-\sqrt{\kappa}\neq 0$, τότε η $f(x)-\sqrt{x}$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,4]$, οπότε θα έχουμε

$(3)\Rightarrow \int_0^4\left(f(x)-\sqrt{x}\right)^2dx>0$. Άτοπο λόγω της (2).

Άρα $f(x)-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}$ για κάθε $x\in[0,4]$.

ii. Η τελευταία θέση του M που το σημείο είναι ορατό από τον παρατηρητή είναι όταν η AM είναι εφαπτομένη της C_f.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4]$ με

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Έστω $M(x_0,f(x_0))\in C_f$ έτσι ώστε η AM να είναι εφαπτομένη της C_f. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι

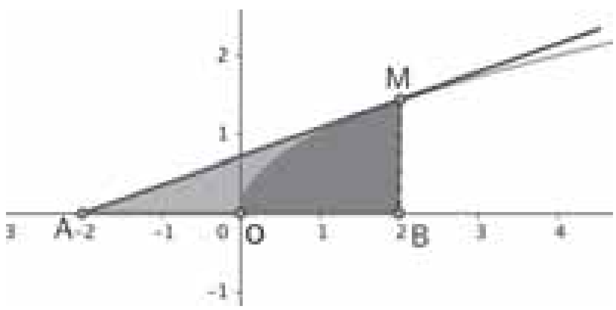
$\lambda_{AM}=\frac{f(x_0)}{x_0+2}=$

$f'(x_0)\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_0}}{x_0+2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Leftrightarrow 2x_0=x_0+2\Leftrightarrow$

$x_0=2$. Άρα η θέση του σημείου είναι $M\left(2,\sqrt{2}\right)$.

iii. $\lambda_{AM}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης AM είναι $y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x+2)\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Το χωρίο του οποίου ζητάμε το εμβαδόν φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



$(BMA)=\frac{1}{2}(AB)(MB)=2\sqrt{2}$ τετρ. μον.

Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

$E_1=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2\sqrt{x}dx=\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=$

$\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^2=\frac{4}{3}\sqrt{2}$ τετρ. μον.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=(BMA)-E_1=$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ τετρ. μον.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Ακρότατα Συναρτήσεων

Διονύσης Γιάνναρος

Η παρούσα συλλογή ασκήσεων αναφέρεται στα ακρότατα μιας κατηγορίας συναρτήσεων, που για την αντιμετώπισή τους, θα χρησιμοποιήσουμε τόσο τα **ακρότατα** της συνάρτησης

$$\mathbf{f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0}$$

όσο και την έννοια του **κρίσιμου σημείου** που περιέχονται στα σχολικά βιβλία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης**

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{2x+1}-x}$$

ΛΥΣΗ

Με $x\in\mathbb{D}_f=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ αν θέσουμε $\sqrt{2x+1}=t,\ t\geq 0$, έχουμε $x=\frac{t^2-1}{2}$ και ο τύπος της συνάρτησης γράφεται

$$f(t)=t-\frac{t^2-1}{2}=-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2},\ t\geq 0 \text{ ή}$$

$$f(t)=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1,\ t\geq 0$$

Είναι:

$$(t-1)^2\geq 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(t-1)^2+1\leq 1$$

για κάθε $t\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει για $t=1$. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 1 και προκύπτει για $t=1$. Αν λάβουμε υπόψη μας (χωρίς να είναι απαραίτητο) ότι $\sqrt{2x+1}=t$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχική συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή ίση με 1, για $x=0$.

2. **Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης**

$$\mathbf{f(x)=x+\sqrt{2x-3}}$$

ΛΥΣΗ

Με $x\in\mathbb{D}_f=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$, αν θέσουμε $\sqrt{2x-3}=t,\ t\geq 0$ έχουμε $x=\frac{t^2+3}{2}$ και ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(t)=\frac{t^2+3}{2}+t=\frac{1}{2}(t+1)^2+1,\ t\geq 0$$

Είναι:

$$\frac{1}{2}(t+1)^2+1\geq\frac{3}{2}$$

για κάθε $t\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $t=0$. Συνεπώς η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι ίση με $\frac{3}{2}$ και προκύπτει για $t=0$, δηλαδή όταν $x=\frac{3}{2}$.

3. **Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης**

$$\mathbf{f(x)=x-\sqrt{2x-3}}$$

ΛΥΣΗ

Με $x\in\mathbb{D}_f=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$, αν θέσουμε $\sqrt{2x-3}=t,\ t\geq 0$ έχουμε $x=\frac{t^2+3}{2}$ και ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{3}{2},\ t\geq 0$$

Η συνάρτηση είναι της μορφής $g(u)=\alpha u^2+\beta u+\gamma$ με $\alpha>0$, οπότε γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη τιμή της προκύπτει για $t_\kappa=1$, (t_κ : η τετμημένη της κορυφής της παραβολής

$$y=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{3}{2})$$

και είναι ίση με 1.

4. **Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης**

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{x+1}-x}$$

ΛΥΣΗ

Με $x \in \mathbb{D}_f = [-1, +\infty)$, αν θέσουμε $\sqrt{x+1} = t,\ t \geq 0$ έχουμε $x = t^2 - 1$ και ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(t) = -t^2 + t + 1,\ t \geq 0$$

Η συνάρτηση είναι της μορφής $g(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$ με $\alpha < 0$, οπότε παρουσιάζει μέγιστο για $t_\kappa = \frac{1}{2}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$.

Άρα, η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με $\frac{5}{4}$ και προκύπτει για $x = -\frac{3}{4} \in \mathbb{D}_f$.

5. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = |x-1| - \sqrt{x+2}$

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{D}_f = [-2, +\infty)$. Αν θέσουμε $\sqrt{x+2} = t,\ t \geq 0$, τότε $x = t^2 - 2$ και $f(t) = |t^2 - 3| - t,\ t \geq 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$t^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \sqrt{3}$ ή $t \leq -\sqrt{3}$ και επειδή $t \geq 0$ είναι $t \geq \sqrt{3}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$f(t) = t^2 - t - 3,\ t \geq \sqrt{3}$$

Η παραβολή $y = u^2 - u - 3,\ u \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\sqrt{3}, +\infty\right)$ με ελάχιστη τιμή για $t = \sqrt{3}$ την $f\left(\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$.

- $t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ και επειδή $t \geq 0$ είναι $0 \leq t \leq \sqrt{3}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$f(t) = -t^2 - t + 3,\ t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$$

Λόγω της μορφής της η f παρουσιάζει μέγιστο για

$t_\kappa = -\frac{1}{2} \notin \left[0, \sqrt{3}\right]$. Επειδή όμως είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0, \sqrt{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα σ' αυτό, θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $t = \sqrt{3}$ με $f\left(\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$

Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με $-\sqrt{3}$ και προκύπτει για $x = 1$.

6. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = |x^2 - 2| + 2x - 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Η f, που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2x - 2, & x \leq -\sqrt{2} \text{ ή } x \geq \sqrt{2} \\ -4x^2 + 2x + 2, & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Η παραβολή $y = -2x^2 + 2x - 2$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = \frac{1}{2}$ και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Έτσι, η μέγιστη τιμή της f στο σύνολο $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$ προκύπτει για $x = \sqrt{2}$ και είναι $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 6$, (1).

Ανάλογα συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ προκύπτει όταν $x = \frac{1}{4}$. Είναι: $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}$, (2).

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι ίση με $\frac{9}{4}$, για $x = \frac{1}{4}$.

7. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + |x-1|},\ x \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + |x-1| > 0$, η συνάρτηση f παίρνει την μέγιστη τιμή της όταν η $g(x) = x^2 + |x-1|$ λάβει την ελάχιστη τιμή της. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ και γράφεται

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & x \geq 1 \\ x^2 + 1 - x, & x \leq 1 \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση αποτελείται από τμήματα δυο παραβολών με κοινό σημείο τους το κρίσιμο σημείο $(1, g(1))$.

Η ελάχιστη τιμή της g προκύπτει για $x = -\frac{1}{2}$, ή

$x=\frac{1}{2}$, ή $x=1$. Είναι:

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4},\ g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\ g(1)=1$$

Επομένως $g(x)\geq\frac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με $\frac{4}{3}$ και προκύπτει για $x=\frac{1}{2}$.

8. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}$, $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $f(x)=y$ και θεωρούμε την ισότητα

$$y=\frac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}$$

ως εξίσωση με άγνωστο το x και παράμετρο το y. Μετά τις πράξεις η παραπάνω ισότητα γίνεται: $(2y-1)x^2-(y+1)x+3y+2=0$, (1)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $2y-1=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$.

Για $y=\frac{1}{2}$ η (1) γίνεται $\frac{3}{2}x=\frac{7}{2}\Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$

- $2y-1\neq 0\Leftrightarrow y\neq\frac{1}{2}$

Για $y\neq\frac{1}{2}$ η (1) έχει λύση αν και μόνο αν ισχύει

$$\Delta=(y+1)^2-4(3y+2)(2y-1)=-23y^2-2y+9\geq 0$$

απ' όπου λαμβάνουμε

$$\frac{-1-\sqrt{208}}{23}\leq y\leq\frac{-1+\sqrt{208}}{23}$$

με τον αριθμό αριστερά να δίνει την ελάχιστη τιμή της f και τον αριθμό δεξιά την μέγιστη τιμή της.

Σχόλιο: Σ' αυτό το παράδειγμα, για να βρούμε τη μέγιστη – ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $y=f(x)$, θεωρήσαμε τη δοσμένη ισότητα ως εξίσωση με άγνωστο το x και αναζητήσαμε για ποιες τιμές του y αυτή η εξίσωση έχει λύση. Η ίδια ιδέα λειτουργεί και κάπως διαφορετικά (παραδείγματα).

9. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $2x-3y$, όταν $3x^2-xy+2y^2=5$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $2x-3y=t$, οπότε $y=\frac{2x-t}{3}$. Γι' αυτή την έκφραση του y η δοθείσα σχέση μετά τις πράξεις γίνεται:

$$29x^2-5tx+2t^2-15=0.$$

Για να έχει αυτή η, ως προς x, εξίσωση λύση, πρέπει και αρκεί να ικανοποιείται η ανίσωση

$$\Delta=25t^2-4\cdot 29(2t^2-45)\geq 0$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$-\sqrt{\frac{580}{23}}\leq t\leq\sqrt{\frac{580}{23}}$$

Ο αριθμός αριστερά δίνει την ελάχιστη τιμή του $t=2x-3y$ και ο αριθμός δεξιά την μέγιστη τιμή του.

10. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $2x^2-xy-y^2$, όταν $x^2+2xy+3y^2=4$

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημά μας ανάγεται στον προσδιορισμό της μέγιστης και ελάχιστης τιμής του α, για τις οποίες το σύστημα $\begin{cases}2x^2-xy-y^2=\alpha\\ x^2+2xy+3y^2=4\end{cases}$ έχει λύση.

Τα πρώτα μέλη και των δυο εξισώσεων του συστήματος παριστάνουν ομογενή πολυώνυμα 2[ου] βαθμού ως προς x και y, οπότε έχουμε την επόμενη προσέγγιση. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με 4 και τη δεύτερη με $-\alpha$ και στη συνέχεια προσθέτουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν, οπότε έχουμε:

$$(8-\alpha)x^2-(4+2\alpha)xy-(4+3\alpha)y^2=0$$

Διαιρούμε τους όρους της εξίσωσης με y^2, $(y\neq 0)$ οπότε λαμβάνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $t=\frac{x}{y}$:

$$(8-\alpha)t^2-(4+2\alpha)t-(4+3\alpha)=0,\ (1)$$

της οποίας η διακρίνουσα πρέπει να είναι μη αρνητική. Είναι:

$$\frac{1}{4}\Delta=(2+\alpha)^2-(8-\alpha)(4+3\alpha)\geq 0$$

απ' όπου προκύπτει

$$6-3\sqrt{6}\leq\alpha\leq 6+3\sqrt{6}.$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι για κάθε α που ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα , το σύ-

στημα έχει λύση.
Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος $x=yt$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$y^2(t^2+2t+3)=4$$

η οποία για κάθε t έχει λύσεις. Επομένως, όταν ο α είναι τέτοιος ώστε η εξίσωση (1) να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, τότε το αρχικό σύστημα έχει λύση. Συνεπώς η ελάχιστη τιμή της $2x^2-xy-y^2$ με την συνθήκη $x^2+2xy+3y^2=4$ είναι ίση με $6-3\sqrt{6}$, ενώ η μέγιστη είναι ίση με $6+3\sqrt{6}$.

Σχόλιο: Με ανάλογη διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+2xy-y^2$ όταν $4x^2+2xy+y^2=3$ είναι ίση με -6 και η μέγιστη είναι ίση με 1.

11. Να βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου α, για τις οποίες η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=x^2+3x+|x-\alpha|$$

είναι μικρότεροι του αριθμού $-\dfrac{7}{4}$.

ΛΥΣΗ
Η δοσμένη συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}-\{\alpha\}$ και γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x-\alpha, & x\geq\alpha \\ x^2+2x+\alpha, & x<\alpha \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση αποτελείται από τμήματα δυο παραβολών με κοινό «κρίσιμο» σημείο το $(\alpha, f(\alpha))$. Η ελάχιστη τιμή της προκύπτει είτε για $x=-2$ (τετμημένη της κορυφής της πρώτης παραβολής) είτε για $x=-1$ (τετμημένη κορυφής της δεύτερης παραβολής) είτε για $x=\alpha$ (τετμημένη κρίσιμου σημείου).
Επομένως τις συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούν όλες αυτές οι τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες ικανοποιείται τουλάχιστον μια από τις τρεις ανισότητες

$$f(-2)<-\frac{7}{4} \text{ ή } f(-1)<-\frac{7}{4} \text{ ή } f(\alpha)<-\frac{7}{4}$$

Από αυτές λαμβάνουμε

$$-2+|\alpha+2|<-\frac{7}{4} \text{ ή } -2+|\alpha+1|<-\frac{7}{4} \text{ ή } \alpha^2+3\alpha<\frac{7}{4}$$

Οι λύσεις των παραπάνω ανισώσεων δίνουν:

$$-\frac{9}{4}<\alpha<-\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}<\alpha<-\frac{3}{4},\ \frac{-3-\sqrt{2}}{2}<\alpha<\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$$

Η ένωση αυτών των λύσεων δίνει τις ζητούμενες τιμές του α που είναι οι αριθμοί του διαστήματος $\left(-\dfrac{9}{4}, -\dfrac{3}{4}\right)$.

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η ανίσωση

$$x^2-|x-\alpha|-|x-1|+3\geq 0$$

ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ
Η συνάρτηση $f(x)=x^2-|x-\alpha|-|x-1|+3$ για τις διάφορες τιμές του x γράφεται

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-|x-\alpha|+4=\begin{cases} x^2-2x+\alpha+4 \\ x^2+4-\alpha \end{cases} \\ x^2+x-|x-\alpha|+2=\begin{cases} x^2+2x+2-\alpha \\ x^2+\alpha+2 \end{cases} \end{cases}$$

Οι τιμές του x που μας εξασφαλίζουν την ελάχιστη τιμή της κάθε παραβολής που έχει προκύψει είναι: $1,\ 0,\ -1$ και α (ως κρίσιμο σημείο).
Επομένως για να ισχύει η συνθήκη του προβλήματος πρέπει και αρκεί να έχει λύση το σύστημα $\{f(1)\geq 0,\ f(0)\geq 0,\ f(-1)\geq 0,\ f(\alpha)\geq 0\}$
Οι σχέσεις αυτές οδηγούν στο σύστημα:

$$\begin{cases} 4-|1-\alpha|\geq 0 \\ 2-|1+\alpha|\geq 0 \\ 2-|\alpha|\geq 0 \\ \alpha^2+3-|\alpha-1|\geq 0 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος αυτού δίνει $-2\leq\alpha\leq 1$ που είναι και οι ζητούμενες τιμές της παραμέτρου α.

13. Να βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου α, για τις οποίες η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=x^2+|x-\alpha|+|x-1|$$

είναι μεγαλύτερη από τον αριθμό 2.

ΛΥΣΗ
Η συνάρτηση για τις διάφορες τιμές του x γράφεται

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-1+|x-\alpha|=\begin{cases} x^2+2x-(\alpha+1), & x\geq\alpha \\ x^2+\alpha-1, & x<\alpha \end{cases} \\ x^2+1-x+|x-\alpha|=\begin{cases} x^2+1-\alpha, & x\geq\alpha \\ x^2-2x+(\alpha+1), & x<\alpha \end{cases} \end{cases}$$

Οι τιμές του x που εξασφαλίζουν ελάχιστη τιμή για τη συνάρτηση f είναι οι: $-1,\ 0,\ 1,\ \alpha$.
Οι ζητούμενες τιμές του α είναι αυτές για τις οποίες ισχύουν συγχρόνως οι παρακάτω ανι-

σώσεις: $\{f(-1)>2,\ f(0)>2,\ f(1)>2,\ f(\alpha)>2\}$

Είναι: $f(-1)=1+|\alpha+1|+2>2$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $f(0)=|\alpha|+1>2\Leftrightarrow \alpha<0$ ή $\alpha>1$

$f(1)=1+|\alpha-1|>2\Leftrightarrow \alpha<0$ ή $\alpha>2$

$f(\alpha)=\alpha^2+|\alpha-1|>2\Leftrightarrow \alpha<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ή $\alpha>\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

Η τομή των παραπάνω διαστημάτων δίνει τις ζητούμενες τιμές του α που είναι οι: $\alpha<-1$ ή $\alpha>2$.

14. Να βρείτε όλες τις τιμές του α για τις οποίες η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=3|x-\alpha|+|x^2+x-2|$$

είναι μικρότερη από τον αριθμό 2.

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο, αν και μόνο αν, $x\le -2$ ή $x\ge 1$.

Γι' αυτά τα x η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=3|x-\alpha|+x^2+x-2 \text{ ή}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x-2-3\alpha, & x\ge\alpha \\ x^2-2x+3\alpha-2, & x<\alpha \end{cases}$$

Επομένως η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο όταν: $x=-2$ ή $x=1$ ή $x=\alpha$ και είναι:

$f(-2)=3|\alpha+2|,\ f(1)=3|\alpha-1|,\ f(\alpha)=|\alpha^2+\alpha-2|$

Οι ζητούμενες τιμές του α, θα προκύψουν όταν ικανοποιείται τουλάχιστον μια από τις ανισώσεις $f(-2)<2,\ f(1)<2,\ f(\alpha)<2$

Είναι: $3|\alpha+1|<2\Leftrightarrow -\frac{8}{3}<\alpha<-\frac{4}{3}$

$$3|\alpha-1|<2\Leftrightarrow \frac{1}{3}<\alpha<\frac{5}{3}$$

$$|\alpha^2+\alpha-2|<2\Leftrightarrow\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<\alpha<1 \text{ ή } 0<\alpha<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

Η ένωση των παραπάνω διαστημάτων δίνει τελικά: $-\frac{8}{3}<\alpha<-1$ ή $0<\alpha<\frac{5}{3}$.

15. Να βρείτε όλες τις τιμές του α, για τις οποίες η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=\alpha x+|x^2-4x+3|$$

είναι μεγαλύτερη από τον αριθμό 1.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=|x-1||x-3|+\alpha x$$

και έχει ελάχιστο όταν: $x\le 1$ ή $x\ge 3$

Γι' αυτές τις τιμές του x είναι:

$$f(x)=x^2+(\alpha-4)x+3$$

Το ελάχιστο της f προκύπτει όταν

$$x=1 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=\frac{4-\alpha}{2}$$

Είναι:

$$f(1)=\alpha,\ f(3)=3\alpha,\ f\left(\frac{4-\alpha}{2}\right)=3-\frac{(4-\alpha)^2}{4}$$

Οι ζητούμενες τιμές του α, θα προκύψουν από τη λύση του συστήματος

$$f(1)>1 \text{ και } f(3)>1 \text{ και } f\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)>1$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha>1 \\ 3\alpha>1 \\ 3-\frac{(4-\alpha)^2}{4}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \alpha>\frac{1}{3} \\ |\alpha-4|<2\sqrt{2} \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος δίνει

$$1<\alpha<4+2\sqrt{2}$$

16. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η ανίσωση

$$x^2+x+|x-\alpha|+\frac{2}{9}\le 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+|x-\alpha|+\frac{2}{9}$ για τις διάφορες τιμές του x γράφεται

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+\frac{2}{9}-\alpha, & x\ge\alpha \\ x^2+\frac{2}{9}+\alpha, & x<\alpha \end{cases}$$

Το ελάχιστο της f προκύπτει όταν:

$$x=1,\ x=0, \text{ ή } x=\alpha$$

Συνεπώς η αρχική ανίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση όταν ισχύει τουλάχιστον μια από τις ανισώσεις

$$f(-1)=|\alpha+1|+\frac{2}{9}\le 0$$

$$f(0)=|\alpha|+\frac{2}{9}\le 0$$

$$f(\alpha)=\alpha^2+\alpha+\frac{2}{9}\le 0$$

Οι δυο πρώτες είναι αδύνατες, ενώ από την τρίτη απ' αυτές λαμβάνουμε: $-\frac{2}{3}\le\alpha\le-\frac{1}{3}$ η δε ένωση αυτών των συμπερασμάτων μας οδηγεί επίσης στο ότι: $-\frac{2}{3}\le\alpha\le-\frac{1}{3}$ που είναι και οι ζητούμενες τιμές του α.

Σχόλιο: Για $\alpha=-\frac{2}{3}$ και $\alpha=-\frac{1}{3}$, η ανίσωση έχει ακριβώς μια λύση.

17. Να βρείτε όλες τις τιμές του α, για τις οποίες η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=x^2+2|x+\alpha-1|+(\alpha+1)^2$$

είναι μικρότερη του 3.

ΛΥΣΗ

Για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=x^2\pm2(x+\alpha-1)+(\alpha+1)^2$$

η δε ελάχιστη τιμή της συμβαίνει όταν:

$x=1$ ή $x=-1$ ή $x=1-\alpha$ (κρίσιμα σημεία)

Είναι:

$$f(1)=1+2|\alpha|+(\alpha+1)^2<3$$

$$f(-1)=1+2|\alpha-2|+(\alpha+1)^2$$

$$f(1-\alpha)=2(\alpha^2+1)<3$$

Συνεπώς έχουμε:

- Αν $\alpha<0$, τότε οι παραπάνω ανισώσεις δίνουν αντίστοιχα

$$\alpha^2<1 \text{ ή } \alpha^2<-2 \text{ ή } 2\alpha^2<1.$$

Η ένωση των λύσεων δίνει $-1<\alpha<0$.

- Αν $0\le\alpha<2$, τότε ανάλογα έχουμε

$$\alpha^2+4\alpha-1<0 \text{ ή } \alpha^2<-2 \text{ ή } \alpha^2<1$$

απ' όπου παίρνουμε αντίστοιχα

$$0<\alpha<2-\sqrt{5} \text{ ή } \varnothing \text{ ή } 0\le\alpha<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Αν $\alpha\ge2$, τότε είναι:

$$\alpha^2+4\alpha-1<0\Leftrightarrow-2-\sqrt{5}<\alpha<-2+\sqrt{5}, \text{ ή}$$

$$\alpha^2+4\alpha-6<0\Leftrightarrow-2-\sqrt{10}<\alpha<-2+\sqrt{10}, \text{ ή}$$

$$\alpha^2<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{2}}<\alpha<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Στην περίπτωση αυτή, λόγω του $\alpha\ge2$ δεν έχουμε λύση. Η ένωση των συμπερασμάτων των παραπάνω περιπτώσεων δίνει τις τιμές του α:

$$(-1,0)\cup\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

18. Να βρείτε όλες τις τιμές του α για καθεμιά από τις οποίες ισχύει $x^2+2|x-\alpha|\ge\alpha^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ (Ι)

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=x^2+2x|x-\alpha|-\alpha^2=\begin{cases}x^2+2x-2\alpha-\alpha^2, x\ge\alpha\\ x^2-2x+2\alpha-\alpha^2, x<\alpha\end{cases}$$

Οι τιμές του x που εξασφαλίζουν την ελάχιστη τιμή της κάθε παραβολής που έχει προκύψει είναι:

$$x_\kappa=-1,\ x_\kappa=1,\ x=\alpha$$

Επομένως το πρόβλημα ικανοποιείται για εκείνες τις τιμές του α που προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases}f(-1)\ge0\\ f(1)\ge0\\ f(\alpha)\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2|1-\alpha|-\alpha^2\ge0\\ 1+2|\alpha+1|-\alpha^2\ge0\\ \alpha^2-\alpha^2\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\in[-3,1]\\ \alpha\in[-1,3]\\ \alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\alpha\in[-1,1]$$

ΛΥΣΗ (ΙΙ)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x\ge\alpha\Rightarrow(x^2-\alpha^2)+2(x-\alpha)\ge0\Rightarrow(x-\alpha)(x-\alpha+2)\ge0$

Η ανίσωση έχει λύση κάποιο από τα σύνολα

$$(-\infty,-\alpha-2]\cup[\alpha,+\infty),\quad(-\infty,\alpha]\cup[-\alpha-2,+\infty)$$

Επειδή η αρχική ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε $x\ge\alpha$, οπότε λύση είναι το σύνολο $(-\infty,-\alpha-2]\cup[\alpha,+\infty)$ που σημαίνει ότι: $-\alpha-2\le\alpha\Leftrightarrow\alpha\ge-1$

- $x<\alpha\Rightarrow(x^2-\alpha^2)-2(x-\alpha)\ge0\Rightarrow(x-\alpha)(x+\alpha-2)\ge0$

Η ανίσωση έχει λύση κάποιο από τα σύνολα

$$(-\infty,2-\alpha]\cup[\alpha,+\infty),\quad(-\infty,\alpha]\cup[2-\alpha,+\infty)$$

Επειδή η αρχική ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε $x<\alpha$, οπότε λύση είναι το σύνολο $(-\infty,2-\alpha]\cup[\alpha,+\infty)$ που σημαίνει ότι:

$$\alpha\le2-\alpha\Leftrightarrow\alpha\le1$$

Τελικά θα έχουμε $-1\le\alpha\le1$, όπως στην προηγούμενη λύση.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: **ΝΙΚΟΣ Θ. ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ Κ. ΛΟΥΡΙΔΑΣ**

ΑΣΚΗΣΗ 421 (ΤΕΥΧΟΣ 129)

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(0,0), B(1,0), \Gamma(3,0), \Delta(4,0), E(-2,5), F(-1,5), G(8,5), H(9,5)$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση β΄ βαθμού της οποίας η γραφική παράσταση να τέμνει και τα τέσσερα τμήματα $AB, \Gamma\Delta, EF$ και GH.

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

ΛΥΣΗ (Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια)

Έστω ότι η γραφική παράσταση της

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$$

τέμνει όλα τα τμήματα και έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τετμημένες των σημείων τομής της με τα EF, AB, ΓΔ, GH αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$f(x_1)=f(x_4)=5 \text{ και } f(x_2)=f(x_3)=0$$

Από την γνωστή ισότητα

$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$$

εύκολα συμπεραίνουμε ότι αν $f(\kappa)=f(\lambda)$ και $\kappa\neq\lambda$, τότε $\kappa+\lambda=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Επομένως έχουμε:

$$x_1+x_4=x_2+x_3=-\frac{\beta}{\alpha}$$

που είναι άτοπο αφού

$$-2<x_1<-1,\quad 0<x_2<1,\quad 1<x_3<3,\quad 8<x_4<9$$

οπότε $x_1+x_4>8-2=6$ και $x_2+x_3<1+3=4$.

Επομένως δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι και Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα

ΑΣΚΗΣΗ 422 (ΤΕΥΧΟΣ 130)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$
$$\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}+\frac{\gamma+\alpha}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}}\right)$$

Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Είναι:

$$1-\eta\mu^2\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\geq\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2}$$
$$=1-\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2}\Rightarrow 1-2\eta\mu^2\frac{A}{2}\geq 1-\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2}$$
$$\Rightarrow \eta\mu\frac{A}{2}\leq\frac{\alpha}{\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)}},\quad (1)$$

Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}=\frac{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

$$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}\overset{(1)}{\leq}\frac{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\alpha}{\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)}}=\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)}}$$

$$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\gamma+\alpha}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}} \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Με πρόσθεση των τριών ανισοτήτων, παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$
$$\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}+\frac{\gamma+\alpha}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}}\right)$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια και Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα.

ΑΣΚΗΣΗ 423 (ΤΕΥΧΟΣ 130)

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{8}} \ln\left(1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3\right)dx<\frac{3}{128}$$

Ντόρβας Νίκος – Άγιοι Ανάργυροι

ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός)

Αν θέσουμε $4x=u$, τότε έχουμε:

$$dx=\frac{1}{4}du,\ u_1=\frac{1}{4},\ u_2=\frac{1}{2}$$

οπότε η αποδεικτέα γίνεται:

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\right)du<\frac{3}{32}$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},\ x\geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6},\ x\geq 0$$

για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2},\ f''(x)=e^x-1-x>0$$

για κάθε $x>0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $f'(0)=0$, για $x>0$ έχουμε $f'(x)>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε για κάθε $x\geq 0$ έχουμε $f(x)\geq 0$.

Έχουμε λοιπόν, με $u>0$:

$$1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\leq e^u$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\right)\leq u$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\right)du<\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} u\,du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{32}$$

2η ΛΥΣΗ

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

Για κάθε $x\in\left[\frac{1}{16},\frac{1}{8}\right]$ έχουμε:

$$\ln\left(1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3\right)=\int_0^x f(t)dt\text{ , με}$$

$$f(t)=\frac{4+16t+32t^2}{1+4t+8t^2+\frac{32}{3}t^3}=4\frac{1+4t+8t^2}{1+4t+8t^2+\frac{32}{3}t^3}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $f(x)\leq 4$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Έτσι,

$$\ln\left(1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3\right)<4x$$

οπότε

$$\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{8}} \ln\left(1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3\right)dx<\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{8}} 4x\,dx=\frac{2}{2^6}-\frac{2}{2^8}=\frac{3}{128}$$

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια

ΑΣΚΗΣΗ 424 (ΤΕΥΧΟΣ 130)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ του τριγώνου επιλέγουμε τα εσωτερικά σημεία A_1, B_1, Γ_1 ώστε τα τμήματα AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ να διχοτομούν τις γωνίες Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{B_1\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_1A_1}\geq\frac{2\sqrt{3}}{R}$$

Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι

ΛΥΣΗ Καρτσακλής Δημήτριος – Αγρίνιο

Έστω α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου. Ισχύουν:

$$\Gamma A_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma+\alpha}\ (1)\ \text{και}\ \Gamma B_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma+\alpha},\ (2)$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο $A_1B_1\Gamma$ έχουμε:

$$A_1B_1^2=\Gamma A_1^2+\Gamma B_1^2-2\Gamma A_1\Gamma B_1\text{συν}\Gamma$$

και δεδομένου ότι

$$\text{συν}\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$$

παίρνουμε

$$A_1B_1=\sqrt{\left(\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma+\alpha}\right)^2-2\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}}$$

$$=\sqrt{(\alpha\beta)^2\left[\frac{1}{(\beta+\gamma)^2}+\frac{1}{(\alpha+\gamma)^2}\right]-\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)}}$$

$$=\sqrt{(\alpha\beta)^2\frac{\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2+2\beta\gamma+2\gamma\alpha}{(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2}-\frac{(\alpha\beta)^2(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{\alpha\beta(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2}}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}\right]^2\left[\alpha^2+\beta^2+2\gamma^2+2\beta\gamma+2\gamma\alpha-\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{\alpha\beta}\right]}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}\right]^2\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2)+\gamma^2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2)}{\alpha\beta}}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}\right]^2\frac{\gamma^2(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)-\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}}$$

$$\le\sqrt{\left[\frac{\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}\right]^2\frac{\gamma^2(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)}{\alpha\beta}}$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma^2}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}}\le\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma^2}{2\sqrt{\beta\gamma}2\sqrt{\gamma\alpha}}}=\sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\alpha\beta}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha\beta}\cdot\gamma}{4}}\le\sqrt{\frac{\left(\sqrt{\alpha\beta}+\gamma\right)^2}{16}}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}+\gamma}{4}\le\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma}{4}=\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{8}$$

δηλαδή

$$A_1B_1\le\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{8}$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι:

$$B_1\Gamma_1\le\frac{\beta+\gamma+2\alpha}{8}\ \text{ και }\ \Gamma_1A_1\le\frac{\gamma+\alpha+2\beta}{8}$$

Επομένως,

$$\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{B_1\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_1A_1}\ge 8\left(\frac{1}{\alpha+\beta+2\gamma}+\frac{1}{\beta+\gamma+2\alpha}+\frac{1}{\alpha+\gamma+2\beta}\right)$$

$$\ge 8\frac{(1+1+1)^2}{4(\alpha+\beta+\gamma)}=8\frac{9}{4(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{18}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Όμως, $\alpha+\beta+\gamma\le 3\sqrt{3}R$, οπότε

$$\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{B_1\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_1A_1}\ge\frac{2\sqrt{3}}{R}$$

Λύση έστειλε επίσης ο συνάδελφος Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός

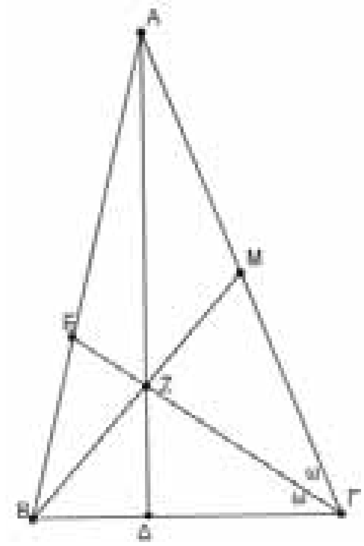
ΑΣΚΗΣΗ 425 (ΤΕΥΧΟΣ 131)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα υ_α, μ_β και δ_γ συντρέχουν, αν και μόνο αν είναι $\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}=\varepsilon\varphi\Gamma$.

Δεληστάθης Γιώργος – Κάτω Πατήσια

1η ΛΥΣΗ (Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο)

Ευθύ



Θεωρούμε, σύμφωνα με το σχήμα, τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος υ_α=ΑΔ, διάμεσο μ_β=ΒΜ και διχοτόμο δ_γ=ΓΕ, τα οποία συντρέχουν στο κοινό σημείο Ζ. Η διχοτόμος της χωρίζει τη γωνία Γ σε δύο γωνίες ίσες με ω. Έχουμε:

$$\frac{(\Gamma BZ)}{(\Gamma AZ)}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma Z\cdot B\Gamma\cdot\eta\mu\omega}{\frac{1}{2}\Gamma Z\cdot A\Gamma\cdot\eta\mu\omega}=\frac{\alpha}{\beta},\quad(1)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$\frac{(ABZ)}{(\Gamma AZ)}=\frac{\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma},\quad(2)$$

Το Ζ είναι σημείο της διαμέσου ΒΜ, οπότε

$$(ABZ)=(\Gamma BZ),\quad(3)$$

Έτσι, από τις (1) και (2) λόγω της (3) παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma\sigma\upsilon\nu B}{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}\Rightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\Gamma},\quad(4)$$

Επιπλέον, από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε: $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma}$, οπότε η (4) γίνεται:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma}\Rightarrow\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\Gamma$$

που είναι το ζητούμενο.

Αντίστροφο

Θεωρούμε όπως προηγουμένως το ύψος ΑΔ, την διχοτόμο ΓΕ και έστω Ζ το σημείο τομής τους.

Έστω ότι ισχύει

$$\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\Gamma$$

Με την ίδια διαδικασία αποδεικνύονται οι (1) και (2), από τις οποίες με διαίρεση παίρνουμε:

$$\frac{(AZB)}{(\Gamma BZ)}=\frac{\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B}{\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}\Rightarrow\frac{(AZB)}{(\Gamma BZ)}=\frac{\gamma\cdot\eta\mu A}{\alpha\cdot\eta\mu\Gamma}$$

Η τελευταία με τη βοήθεια του νόμου των ημιτόνων γράφεται

$$\frac{(AZB)}{(\Gamma BZ)}=1 \text{ δηλαδή } (AZB)=(\Gamma BZ)$$

που ισχύει μόνο όταν το Ζ είναι σημείο της διαμέσου ΒΜ.

2η ΛΥΣΗ (Ιωαννίδης Αντώνης – Χολαργός)

Από το θεώρημα Ceva οι ΑΔ, ΒΜ, ΓΕ συντρέχουν αν και μόνο αν

$$\frac{EA}{EB}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{M\Gamma}{MA}=1\Leftrightarrow\frac{EA}{EB}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=1\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=1,\ (1)$$

Όμως $\Delta B=\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B$ και $\Delta\Gamma=\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$, οπότε

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma\sigma\upsilon\nu B}{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}=1\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}=1\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}=1$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu B}$$

ΑΣΚΗΣΗ 426 (ΤΕΥΧΟΣ 131)

Να λύσετε την εξίσωση

$$\log_3\left(|x^2-3|^3+1\right)+\sqrt{4x^4-5x^2+11}=\sqrt{2x^4+7x^2-7}$$

ΛΥΣΗ (Από τον ίδιο)

Για την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης είναι ανάγκη να ισχύει η ανισότητα

$$4x^4-5x^2+11\le 2x^4+7x^2-7\Leftrightarrow\left(x^2-3\right)^2\le 0$$

δηλαδή $x^2=3$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι αριθμοί $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ είναι λύσεις της εξίσωσης, οπότε είναι οι μοναδικές.

2η ΛΥΣΗ(Λαγογιάννης Βασίλειος – Ν. Ηράκλειο)

Αν θέσουμε $x^2=y$, τότε η εξίσωση γράφεται

$$\log_3\left(|y-3|^3+1\right)+\sqrt{4y^2-5y+11}=\sqrt{2y^2+7y-7}$$

$$\Leftrightarrow|y-3|+1=3^{\sqrt{2y^2+7y-7}-\sqrt{4y^2-5y+11}}$$

Η ελάχιστη τιμή του πρώτου μέλους είναι ίση με 1 και προκύπτει όταν $y=3$.

Σε ότι αφορά στο δεύτερο μέλος, έχουμε:

$$\sqrt{2y^2+7y-7}-\sqrt{4y^2-5y+11}$$

$$=\frac{2y^2+7y-7-(4y^2-5y+11)}{\sqrt{2y^2+7y-7}-\sqrt{4y^2-5y+11}}$$

$$=\frac{-2(y-3)^2}{\sqrt{2y^2+7y-7}-\sqrt{4y^2-5y+11}}\le 0$$

οπότε η μέγιστη τιμή του δευτέρου μέλους της εξίσωσης είναι ίση με 1 και προκύπτει όταν $y=3$. Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό 3.

Έτσι, έχουμε: $x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Σημείωμα σύνταξης. Εκ παραδρομής αντί του ορθού $\log_3\left(|x^2-3|+1\right)$ στην εκφώνηση της εξίσωσης είχε γραφεί $\log_3\left(|x^2-1|+1\right)$.

Λύση έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γεώργιος – Κάτω Πατήσια, Αποστολόπουλος Γεώργιος – Μεσολόγγι, Κτενιαδάκης Μιχάλης – Αθήνα.

Προτεινόμενα Θέματα

429. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η ισότητα

$$(\alpha-\beta)\ln\gamma+(\beta-\gamma)\ln\alpha+(\gamma-\alpha)\ln\beta=0$$

Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0$.

Γιάνναρος Διονύσης – Πύργος

430. Να βρείτε όλους τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την ισότητα

$$x\cdot[x]+[x]\cdot\{x\}+\{x\}\cdot x=2000$$

όπου [x] το ακέραιο μέρος και {x} το κλασματικό μέρος του x.

Σ.Σ. Εκτενή αναφορά στο ακέραιο και το κλασματικό μέρος ενός αριθμού έχουμε παρουσιάσει στο τεύχος 115.

Καραβότας Δημήτριος – Κ. Αχαΐα

431. Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{Z}^*$ την εξίσωση

$$\frac{1}{x^2y}+\frac{4}{yz}-\frac{6}{zx^2}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{y}+\frac{12}{z}-\frac{64}{x^2yz}=6$$

Τσιλιακός Λευτέρης – Γαλάτσι

432. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $|\hat{\Gamma}-\hat{B}|=90^o$, να αποδείξετε ότι

$$\delta_\alpha=\Delta_\alpha=\upsilon_\alpha\sqrt{2}=\frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\beta^2+\gamma^2}$$

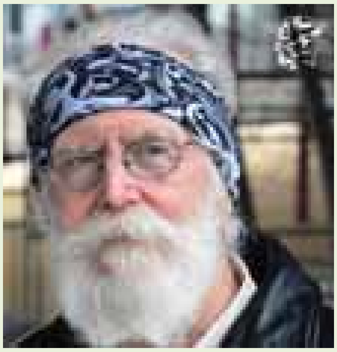
όπου Δ_α η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

Φρούντζος Βασίλης – Αγρίνιο.

αφορμές ... και στιγμιότυπα

Βραβείο Abel 2024

Στον Γάλλο μαθηματικό, **Michel Talagrand,** του Εθνικού Κέντρου Επιστημονικών Ερευνών της Γαλλίας (CNRS), το **φετινό** βραβείο Abel 2024, μιας σπουδαίας προσωπικότητας στο πεδίο της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της συναρτησιακής ανάλυσης. Η κορυφαία διάκριση, γνωστή και ως το «**Nobel** των Μαθηματικών», δίνεται κάθε χρόνο από τη Νορβηγική Ακαδημία σε αναγνωρισμένους μαθηματικούς, με σημαντική συνεισφορά στην επιστήμη τους. Ο Michel Talagrand γεννήθηκε το **1952** στη Γαλλία και έλαβε το διδακτορικό του στα Μαθηματικά το **1977** από το Πανεπιστήμιο **Paris VI**. Εργάστηκε επίσης για μερικά χρόνια στο **Οχάιο** στις ΗΠΑ. Ο Talagrand, με έδρα το **CNRS** έχει περάσει μεγάλο μέρος της καριέρας του, μελετώντας τα άκρα των τυχαίων ή **στοχαστικών συστημάτων**. Τέτοια τυχαία συστήματα μπορεί συχνά να είναι εξαιρετικά περίπλοκα και να περιέχουν πολλές **τυχαίες μεταβλητές**, αλλά οι **μέθοδοι** του Talagrand, οι οποίες μετατρέπουν αυτά τα **συστήματα,** σε γεωμετρικά **προβλήματα**, μπορούν να εξαγάγουν χρήσιμες τιμές. «Είναι **δεξιοτέχνης** στο να λαμβάνει ακριβείς εκτιμήσεις και να γνωρίζει ακριβώς τι να προσθέσει ή να αφαιρέσει για να πάρει ευκρινείς εκτιμήσεις», είπε **ο Helge Holden**, πρόεδρος της επιτροπής του βραβείου Abel. Ο Talagrand ανέπτυξε επίσης μαθηματικά εργαλεία και εξισώσεις για συστήματα που, ενώ είναι τυχαία, εμφανίζουν κάποια **προβλεψιμότητα** στην τυχαιότητά τους, μια στατιστική αρχή που ονομάζεται **συγκέντρωση μετρήσεων**. Οι εξισώσεις του, γνωστές ως **ανισότητες** Talagrand, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πολλά συστήματα, που δείχνουν συγκέντρωση μετρήσεων, όπως διάσημα αλγοριθμικά παζλ, όπως το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή.



Σε τι οφείλεται όμως η επιτυχία του Talagrand; Για τον ίδιο, **ένα** από τα κλειδιά της επιτυχίας του ήταν η **επιμονή**. «Δεν μπορώ να μάθω **εύκολα** τα Μαθηματικά, πρέπει **να δουλέψω**. Χρειάζεται πολύς χρόνος και έχω χάλια **μνήμη**. Ξεχνάω πράγματα. Έτσι προσπαθώ να δουλεύω, παρά αυτά τα μειονεκτήματα και ο τρόπος που δούλευα, ήταν να **καταλάβω** πολύ καλά, τα **απλά πράγματα**». Σε σχετικό video που κυκλοφορεί στο διαδίκτυο, φαίνεται η συγκινητική του αντίδραση, τη στιγμή που μαθαίνει τη βράβευσή του, λέγοντας "...Ένας Γάλλος μαθηματικός, που λέει, ότι τα Μαθηματικά «**δίνουν φτερά**», τιμήθηκε με το βραβείο Abel ...".

Πηγές: Θαλής και φίλοι, physicsgg, abelprize.no, cnrs.fr, Καθημερινή, apeiro.gr, BBC, AMS.org

Ελληνικές διακρίσεις στον SEEMOUS 2024

Ο διαγωνισμός SEEMOUS (South-Eastern European Mathematics Olympiad for University Students) είναι ένας μαθηματικός διαγωνισμός, που αφορά πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτητές. Ξεκίνησε το 2006-07 και αποκτά σιγά σιγά, **όλο** και **μεγαλύτερο κύρος** στους μαθηματικούς κύκλους. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε χρόνο παραδίδονται **μαθήματα προετοιμασίας**, στους ενδιαφερόμενους φοιτητές που συμμετέχουν, υπό την εποπτεία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας και των αντιστοίχων μαθηματικών τμημάτων των Πανεπιστημίων και των Πολυτεχνείων της χώρας μας. Έτσι είχαμε τις παρακάτω διακρίσεις.

18ος Seemous 2023-2024 **[Ιάσιο, Ρουμανίας 9 – 14 Απριλίου 2024]**

Αργυρά μετάλλια			Χάλκινα μετάλλια		
Μαυρίκος Ιωάννης,	Ηλεκτρολόγων	Ε.Μ.Π.	**Γεωργελές Γεώργιος,**	Μαθηματικό,	Ε.Κ.Π.Α.
Μαμουζέλος Θέμελης,	Μαθηματικό,	Ε.Κ.Π.Α.	**Πετράκης Εμμανουήλ,**	Μαθηματικό,	Ε.Κ.Π.Α.
Φωτιάδης Κωνσταντίνος,	Μαθηματικό,	Α.Π.Θ.	**Προυσαλίδης Μιχαήλ,**	Ηλεκτρολόγων	Ε.Μ.Π.

Τα θέματα του διαγωνισμού και οι λύσεις τους στην http://math.etti.tuiasi.ro/seemous2024/

Πολλά συγχαρητήρια στους **φοιτητές** μας και τους ευχόμαστε, πάντα τέτοιες διακρίσεις.