

Λύσε ένα πρόβλημα

γ) αρχίζοντας από το τέλος, από το αποτέλεσμα

Στάμη Τσικοπούλου

Σ, ορισμένες περιπτώσεις, όταν θέλουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα και είναι γνωστό το αποτέλεσμα, χρειάζεται να ξεκινήσουμε από το τέλος και εκτελώντας τις αντίθετες ενέργειες από αυτές που μας λέει το πρόβλημα, να φτάσουμε στην αρχή, στο ζητούμενο. Αντίθετες ενέργειες είναι για παράδειγμα προσθέτουμε - αφαιρούμε, διπλασιάζουμε - βρίσκουμε το μισό κ.τ.λ. Ξεκινώντας από το τέλος, ξεκινάμε από κάτι γνωστό. Συγκεντρώνουμε την προσοχή μας στο ζητούμενο και φέρνοντας στο νου μας την τελική κατάσταση στην οποία θέλουμε να βρεθούμε αναρωτιόμαστε κάθε φορά, ποια κατάσταση θα πρέπει να έχει προηγηθεί. Ακολουθούμε με άλλα λόγια την αντίστροφη πορεία από αυτή που περιγράφει το πρόβλημα.

Πρόβλημα 1^ο

Η γιαγιά μοίρασε τα χρήματα που είχε στο πορτοφόλι της στα τρία εγγόνια της, με τη σειρά από το μεγαλύτερο στο μικρότερο. Στο κάθε ένα έδωσε τα μισά ευρώ από όσα είχε εκείνη τη στιγμή στο πορτοφόλι της και μισό ευρώ ακόμη. Αν στο τέλος έμεινε με 9 ευρώ πόσα είχε στην αρχή;

Λύση

Από την αρχή στο τέλος	Από το τέλος στην αρχή	
Τα χρήματα που είχε αρχικά τα διαιρώ με 2 και απ' αυτά αφαιρώ 0,5 ευρώ για να βρω πόσα της έμειναν αφού έδωσε στον μεγαλύτερο όσα του αναλογούσαν. -----	Στα χρήματα που της έμειναν στο τέλος προσθέτω 0,5 ευρώ και πολλαπλασιάζω το άθροισμα με 2. $9 + 0,5 = 9,5$ $9,5 \cdot 2 = 19$ -----	Ο μικρότερος πήρε $9,5 + 0,5 = 10$ ευρώ
Τα χρήματα αυτά τα διαιρώ με 2 και αφαιρώ 0,5 ευρώ για να βρω πόσα χρήματα της έμειναν, αφού έδωσε και στον μεσαίο όσα του αναλογούσαν. -----	Στα χρήματα αυτά, προσθέτω 0,5 ευρώ και πολλαπλασιάζω το άθροισμα με 2. $19 + 0,5 = 19,5$ $19,5 \cdot 2 = 39$ -----	Ο μεσαίος πήρε $19,5 + 0,5 = 20$ ευρώ
Τα χρήματα αυτά τα διαιρώ με 2 και αφαιρώ 0,5 ευρώ για να βρω πόσα χρήματα της έμειναν, αφού έδωσε και στον μικρότερο όσα του αναλογούσαν. Στην γιαγιά έμειναν τελικά 9 ευρώ.	Στα χρήματα αυτά, προσθέτω 0,5 ευρώ και πολλαπλασιάζω το άθροισμα με 2. $39 + 0,5 = 39,5$ $39,5 \cdot 2 = 79$ 79 ευρώ είχε αρχικά η γιαγιά	Ο μεγαλύτερος πήρε $39,5 + 0,5 = 40$ ευρώ Επαλήθευση $10 + 20 + 40 + 9 = 79$

Πρόβλημα 2^ο

Στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέτω 2 και βρίσκω 12. Να βρείτε ποιος είναι ο αριθμός. (Σχολικό βιβλίο Α΄ Γυμνασίου σελ 33, πρόβλημα 3iii)

Λύση

Από την αρχή στο τέλος	Αντίθετες ενέργειες	Από το τέλος στην αρχή
Στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέτω 2 και βρίσκω 12 (αποτέλεσμα)		Από το αποτέλεσμα 12 αφαιρώ 2 $12 - 2 = 10$ και βρίσκω το μισό του αριθμού $10 : 2 = 5$ Ο ζητούμενος αριθμός είναι το 5

Την ίδια μέθοδο θα εφαρμόσουμε και αν λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα με τη βοήθεια μιας εξίσωσης. Θα ξεκινήσουμε από το τέλος, θεωρώντας ότι βρήκαμε τον αριθμό που ψάχνουμε και εκτελώντας τις αντίθετες ενέργειες (πράξεις) θα τον υπολογίσουμε.
(Δες και το εικονογραφημένο παράδειγμα της σελ 70 το Σχολικού βιβλίου της Β' Γυμνασίου)

Από την αρχή στο τέλος (Σχηματισμός της εξίσωσης)	
Παριστάνω τον αριθμό με	x
στο διπλάσιο του	$2x$
προσθέτω 2	$2x + 2$
και βρίσκω 12 (αποτέλεσμα)	$2x + 2 = 12$

Από το τέλος στην αρχή (Λύση της εξίσωσης)	
Ξεκινώ από το αποτέλεσμα	$2x + 2 = 12$
και από αυτό	
αφαιρώ 2	$2x = 12 - 2$
	$2x = 10$
και βρίσκω το μισό του	$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$
Ο ζητούμενος αριθμός είναι	$x = 5$

Πρόβλημα 3^ο

Να λύσετε τον τύπο $E = \frac{(B + \beta)\upsilon}{2}$ (τύπος εμβαδού του τραπεζίου) ως προς υ .

(Σχολικό βιβλίο Β Γυμνασίου σελ 76, άσκηση 6ι)

Λύση

Από την αρχή στο τέλος
Για να βρούμε τον τύπο που μας δίνει το εμβαδόν E του τραπεζίου.
<ul style="list-style-type: none"> Πολλαπλασιάζουμε το άθροισμα της μικρής και της μεγάλης βάσης του $(B + \beta)$ με το ύψος του υ. και το γινόμενο τους το διαιρούμε με 2 οπότε έχουμε $E = \frac{(B + \beta)\upsilon}{2}$

Από το τέλος στην αρχή	
Για να λύσουμε τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου ως προς υ , αρχίζουμε από το αποτέλεσμα	$E = \frac{(B + \beta)\upsilon}{2}$
<ul style="list-style-type: none"> Πολλαπλασιάζουμε (και τα δύο μέλη της ισότητας) με 2. 	$2E = 2 \frac{(B + \beta)\upsilon}{2}$
	$2E = (B + \beta)\upsilon$
	$\frac{2E}{B + \beta} = \frac{(B + \beta)\upsilon}{B + \beta}$
Διαιρούμε (και τα δύο μέλη της ισότητας) με $B + \beta$.	$\frac{2E}{B + \beta} = \upsilon$

Πρόβλημα 4^ο

Αν το καθένα από τα γράμματα A, B, Γ αντιπροσωπεύει ένα διαφορετικό ψηφίο από τα $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ με ποιο ψηφίο πρέπει να αντικαταστήσουμε κάθε γράμμα ώστε να είναι σωστή η διπλανή πρόσθεση;

$$\begin{array}{r} A A \\ + A B \\ \hline \Gamma B A \end{array}$$

Λύση

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε με ποια ψηφία θα πρέπει να αντικατασταθούν τα γράμματα εξετάζοντας το άθροισμα των μονάδων, των δεκάδων και των εκατοντάδων.

Ξεκινάμε από το τέλος, από το αποτέλεσμα.

- Αν προσθέσουμε δύο διψήφιους αριθμούς και το άθροισμά τους είναι ένας τριψήπιος αριθμός τότε, το πρώτο ψηφίο του τριψήπιου αριθμού είναι το 1. (Π.χ. οι δύο μεγαλύτεροι διψήφιοι έχουν άθροισμα $99 + 99 = 198$). Οπότε $\Gamma = 1$ και η πρόσθεση γράφεται όπως φαίνεται δίπλα.
- Αν προσθέσουμε τα ψηφία των μονάδων έχουμε $A + B = A$. Όταν όμως προσθέτουμε δύο αριθμούς και πάρουμε ως αποτέλεσμα τον έναν από αυτούς τότε ο άλλος αριθμός είναι το μηδέν, άρα $B = 0$ και η πρόσθεση γράφεται όπως φαίνεται δίπλα
- Αν τώρα προσθέσουμε τα ψηφία των δεκάδων έχουμε $A + A = 10$. Οπότε $A = 5$ και η πρόσθεση γράφεται όπως φαίνεται δίπλα.
Άρα $A = 5, B = 0, \Gamma = 1$

$$\begin{array}{r} A A \\ + A B \\ \hline 1 B A \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A A \\ + A 0 \\ \hline 1 0 A \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 5 \\ + 5 0 \\ \hline 1 0 5 \end{array}$$

Πρόβλημα 5^ο

Ο Μηνάς ξόδεψε 24 ευρώ για να αγοράσει δώρα στις δύο δίδυμες αδελφές του, για τα γενέθλιά τους. Έδωσε στην Άννα ένα CD και στην Βάσω 3 βιβλία. Ξέχασε όμως τις τιμές αλλά θυμάται ότι τα βιβλία τα πήρε από ένα καλάθι με προσφορές που έγραφε «Όλα τα βιβλία με 3 ή 4 ή 5 ευρώ». Πόσα έδωσε για το CD της Άννας;

Λύση

Αφού ξέρουμε το συνολικό ποσό που ξόδεψε ο Μηνάς για να αγοράσει τα δώρα και ψάχνουμε να βρούμε το κόστος του CD, θα ξεκινήσουμε από το τέλος, από το αποτέλεσμα.

Σύνολο	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
Βιβλίο	5	5	5	5	5	5	4	4	4	3
Βιβλίο	5	5	5	4	4	3	4	4	3	3
Βιβλίο	5	4	3	4	3	3	4	3	3	3
CD	9	10	11	11	12	13	12	13	14	15

Άρα το CD της Άννας κόστισε από 9 έως και 15 ευρώ.

Παρατήρηση Υπάρχουν προβλήματα όπως το παραπάνω, που η απάντηση δεν είναι μοναδική.

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ένα αστικό λεωφορείο ξεκινά από την αφετηρία. Στην πρώτη στάση κατέβηκαν 13 επιβάτες και ανέβηκαν 18. Στη δεύτερη στάση κατέβηκαν 15 επιβάτες και ανέβηκαν 17. Αν στο τέρμα που ήταν η επόμενη στάση κατέβηκαν 22 επιβάτες, με πόσους επιβάτες ξεκίνησε το λεωφορείο;
2. Σκέφτομαι έναν αριθμό. Τον διαιρώ με το 2 και προσθέτω 8. Πολλαπλασιάζω ότι βρήκα με το 3 και από το γινόμενο αφαιρώ 6 οπότε βρίσκω 24. Ποιόν αριθμό σκέφτηκα αρχικά;
3. Να συμπληρώσετε τα ψηφία που λείπουν ώστε να είναι σωστός ο πολλαπλασιασμός.

$$\begin{array}{r} 4 \square 3 \\ \times 1 \square \\ \hline 8 \square 1 4 \end{array}$$
4. Αν πολλαπλασιάσουμε το 4 με τον τετραψήφιο αριθμό 2178 βρίσκουμε τον καρκινικό του αριθμό 8712, δηλαδή τον αριθμό που προκύπτει αν γράψουμε τα ψηφία του από το τέλος προς την αρχή. Ποιον τετραψήφιο αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το 9 για να βρούμε τον καρκινικό του αριθμό;
5. Αν το καθένα από τα γράμματα A, B, Γ αντιπροσωπεύει ένα διαφορετικό ψηφίο από τα 0, 1, 2, 3, ..., 9 με ποιο ψηφίο πρέπει να αντικαταστήσουμε κάθε γράμμα ώστε να είναι σωστές οι προσθέσεις;

$$\begin{array}{r} A \Gamma \\ + \Gamma A \\ \hline \Delta A \Delta \end{array} \quad \begin{array}{r} A B B \\ + \Gamma B \Delta \\ \hline \Gamma \Delta \Delta B \end{array}$$