Μερικές εφαρμογές της τριγωνομετρίας

Κώστας Πιπερίγκος

Ένας από τους σκοπούς της τριγωνομετρίας είναι ο υπολογισμός των άγνωστων στοιχείων ενός τριγώνου, όταν έχουμε στη διάθεσή μας επαρκή στοιχεία. Επειδή κάθε ευθύγραμμο σχήμα μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα ο υπολογισμός των πλευρών και των γωνιών επεκτείνεται και σε άλλα γεωμετρικά σχήματα εκτός των τριγώνων.

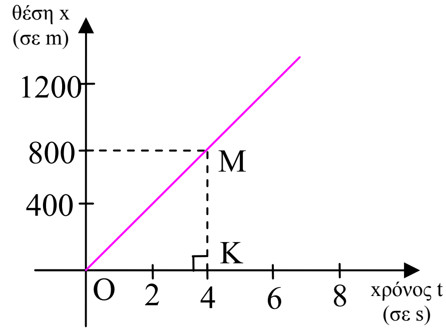
Η τριγωνομετρία είναι χρήσιμη σε πολλές επιστήμες: στη Μηχανική, την Τοπογραφία, την Αστρονομία, τη Γεωδαισία κ.ά.

Παρακάτω θα δούμε παραδείγματα, όπου από τη μελέτη κατάλληλων τριγώνων προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα.

1. Ταχύτητα κινητού

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι η εξίσωση με την οποία υπολογίζουμε την ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι $\upsilon = \frac{x}{t}$. Αν λύσουμε ως προς τη μετατόπιση έχουμε x= $\upsilon \cdot t$. Στην περίπτωση που η ταχύτητα μένει σταθερή βλέπουμε ότι σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η μετατόπιση είναι ανάλογη με το χρόνο. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης χ(t)= $\upsilon \cdot t$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0).

Παρακάτω βλέπουμε το διάγραμμα θέσης ενός αεροπλάνου σε συνάρτηση με το χρόνο.



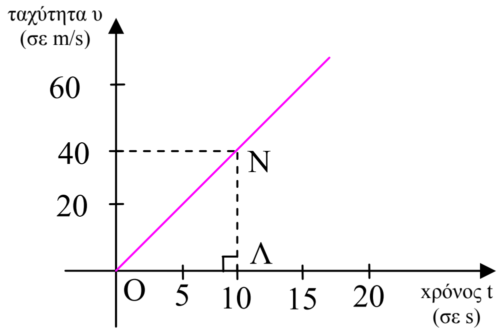
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΜ έχουμε $\varepsilon\varphi KOM = \frac{MK}{OK} = \frac{800}{4} = 200\left(\frac{m}{s}\right)$

Επειδή το σημείο Μ μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο της ημιευθείας του διαγράμματος και $\frac{MK}{OK} = \frac{x}{t}$, η εφαπτομένη της γωνίας της ευθείας του διαγράμματος θέσης με τον οριζόντιο άξονα δίνει την ταχύτητα του αεροπλάνου την χρονική στιγμή t=4s.

2. Επιτάχυνση κινητού

Η εξίσωση με την οποία υπολογίζουμε την επιτάχυνση α στην ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα υ, είναι $\alpha = \frac{\upsilon}{t}$ ή $\upsilon = \alpha \cdot t$.

Ας δούμε τι υπολογίζουμε με την εφαπτομένη της γωνίας του διαγράμματος ταχύτητας χρόνου στην ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, που αναφέρεται στο προηγούμενο αεροπλάνο



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΝ έχουμε $\varepsilon\varphi\Lambda O N=\frac{N\Lambda}{O\Lambda}=\frac{40}{10}=4\left(\frac{m/s}{s}=\frac{m}{s^2}\right)$

Εδώ η εφαπτομένη δίνει την επιτάχυνση του αεροπλάνου την χρονική στιγμή t=4s.

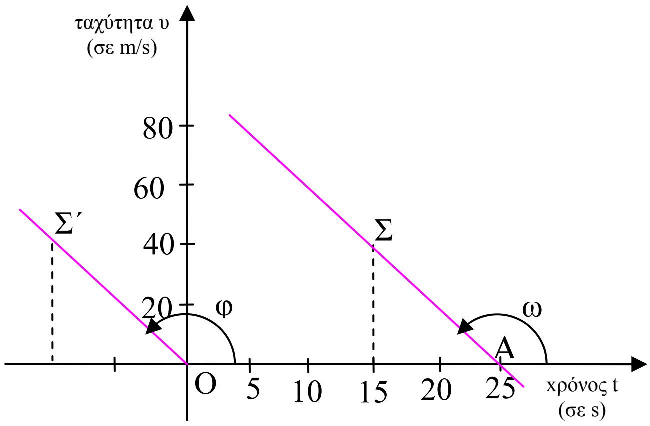
Άσκηση

Με το παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας χρόνου παριστάνεται μια ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα. Ποια είναι η αρχική ταχύτητα και ποια η επιβράδυνση του κινητού;

Υπόδειξη:

Η εξίσωση $\upsilon=\upsilon_0+\alpha t$ είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$.

Αν φέρετε την ΟΣ΄//ΑΣ, θα είναι φ =ω ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη…

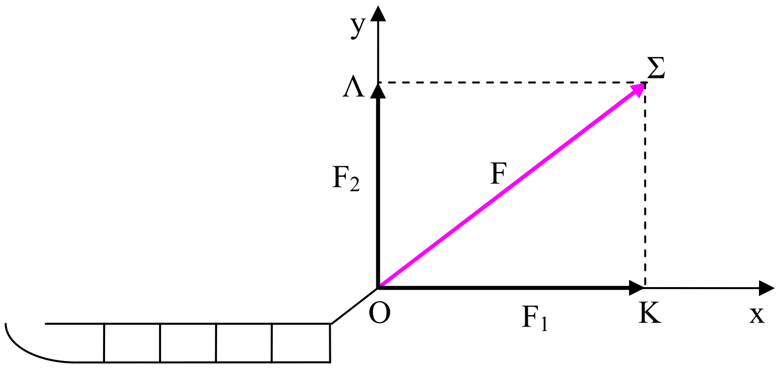


3. Ανάλυση δύναμης σε δύο συνιστώσες

Κάθε δύναμη μπορεί να αναλυθεί σε δύο επί μέρους δυνάμεις, που λέγονται συνιστώσες, και την έχουν συνισταμένη. Συνήθως η ανάλυση γίνεται σε δύο διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

Ένα έλκηθρο τραβιέται με ένα σκοινί που σχηματίζει γωνία 45^o με το οριζόντιο έδαφος. Μέσω του σκοινιού ασκείται δύναμη F = 50N που έχει αναλυθεί σε σύστημα οριζόντιου και κατακόρυφου άξονα στις F_1 και F_2, όπως φαίνεται στο σχήμα

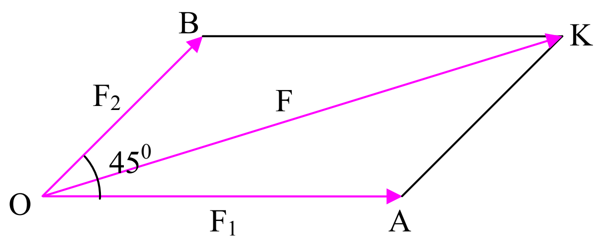
Πως θα υπολογίσουμε τα μέτρα των δύο συνιστωσών δυνάμεων;



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΣ γνωρίζουμε την υποτείνουσα και ψάχνουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά. Άρα $\sigma\upsilon\nu 45^0=\frac{F_1}{F}$ δηλαδή $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{F_1}{50}$ ή $F_1=50\sqrt{2}$, οπότε $F_1=\frac{50\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}N$.

Η γωνία ΛΟΣ είναι $90^o-45^o=45^o$ οπότε στο ορθογώνιο ΟΛΣ είναι $\sigma\upsilon\nu 45^0=\frac{F_2}{F}$ δηλαδή $F_2=25\sqrt{2}N$. (Τι σχήμα είναι το ΟΚΣΛ;)

- Δύο δυνάμεις F_1 και F_2 με μέτρα 5N και $2\sqrt{2}$ N ασκούνται σε ένα υλικό σημείο και οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνία 45^o. Η συνισταμένη τους παριστάνεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν. Πώς θα υπολογίσουμε το μέτρο της συνισταμένης τους;



Το ΟΑΚΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΚ=F_2 και $\widehat{OAK}$ =180^o–45^o=135^o. Στο τρίγωνο ΟΑΚ γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους. Οπότε από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$OK^2 = OA^2 + AK^2 + 2\cdot OA\cdot AK\sigma\upsilon\nu 135^0 \quad (\sigma\upsilon\nu 135^0 = \sigma\upsilon\nu(180^o - 45^o) = -\sigma\upsilon\nu 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

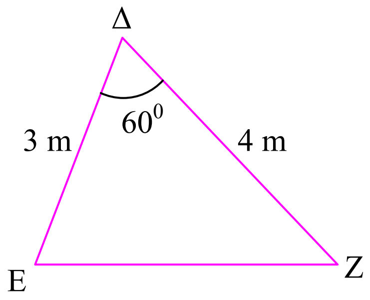
Άρα $OK^2 = 5^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot 5\cdot\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

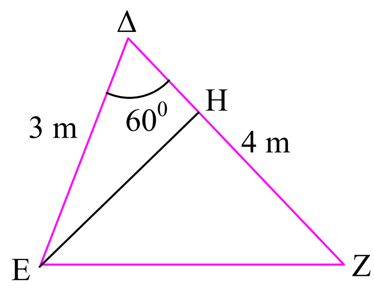
OK^2=25+4·2–10·2

OK^2=25+8–20=13 δηλαδή ΟΚ=$\sqrt{13}$. Άρα F=$\sqrt{13} \simeq 3{,}6$ N.

4. Εμβαδόν τριγώνου

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ;



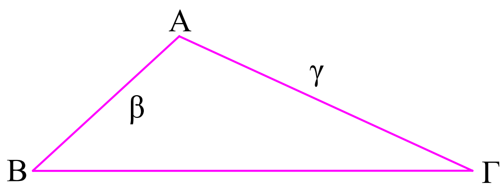


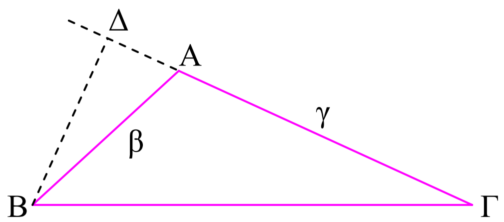
Σκεφτόμαστε να φέρουμε το ύψος που αντιστοιχεί σε γνωστή πλευρά, έστω το ΕΗ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε $\eta\mu 60^0 = \frac{EH}{\Delta E}$ ή

$EH = \Delta E\cdot \eta\mu 60^0$

Άρα το εμβαδόν είναι $E = \frac{1}{2}\Delta Z\cdot EH = \frac{1}{2}\Delta Z\cdot\Delta E\cdot\eta\mu 60^0$ δηλαδή $E = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 5{,}19 m^2$

- Πως θα δείξουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, με τη γωνία Α αμβλεία, είναι E=$\frac{1}{2}$ ΑΒ·ΑΓ·ημΑ ;





Το ύψος ΒΔ βρίσκεται έξω από το τρίγωνο. Θα είναι, γωνία ΒΑΔ=180^o–Α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\eta\mu BA\Delta = \frac{B\Delta}{AB}$, αλλά ημΒΑΔ=ημ(180^o – Α) = ημΑ

Άρα $\eta\mu A = \frac{B\Delta}{AB}$ ή ΒΔ = ΑΒ·ημΑ. Το εμβαδόν είναι $E = \frac{1}{2}$ ΑΒ·ΑΓ·ημΑ .

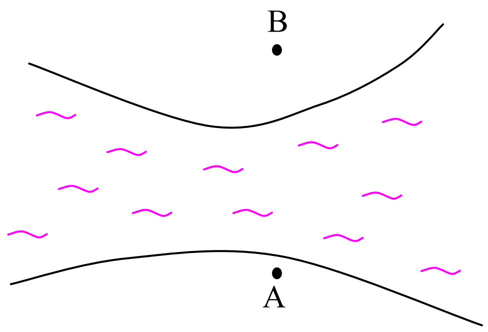
5.Απόσταση απρόσιτων σημείων

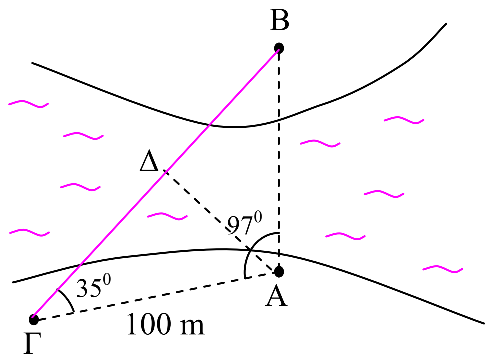
Βρισκόμαστε στην όχθη ενός ποταμού στη θέση Α. Διαθέτουμε ένα γωνιόμετρο (όργανο που μετρά γωνίες) και μια μετροταινία των 30 μέτρων. Πως θα μετρήσουμε την απόσταση ΑΒ ενός σημείου Β που βρίσκεται στην απέναντι όχθη;

Πηγαίνουμε στη θέση Γ και μετράμε την απόσταση ΑΓ=100m καθώς και τις γωνίες Γ=35^o και Α=97^o. Η τρίτη γωνία του τριγώνου είναι Β=180^o-35^o–97^o=48^o. Αν φέρουμε το ύψος ΑΔ μπορούμε να το υπολογίσουμε; (Χρειαζόμαστε από τους πίνακες το $ημ35^0$). Στο τρίγωνο ΑΒΔ μπορούμε να υπολογίσουμε την υποτείνουσα ΑΒ;

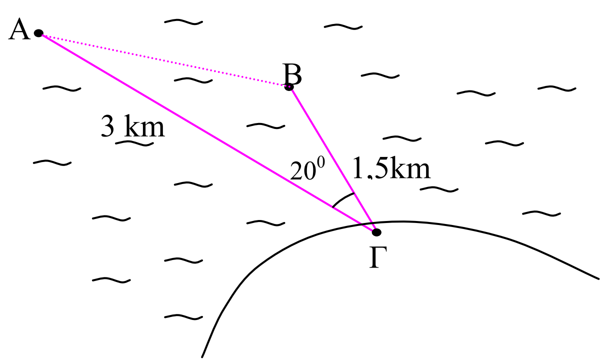
Το ίδιο πρόβλημα λύνεται, χωρίς τη χρήση βοηθητικής γραμμής, με το νόμο των ημιτόνων, ως εξής:

$$\frac{AB}{ημ35^0}=\frac{100}{ημ48^0} \;\; ή \;\; \frac{AB}{0,574}=\frac{100}{0,743} \;\; ή \;\; 0,743\cdot AB=100\cdot 0,574 \;\; ή \;\; AB=\frac{57,4}{0,743}=77,25\,m.$$





- Ο Άρης ο Βασίλης και ο Γιώργος έχουν τρία «γουόκι τόκυ» με εμβέλεια 2km το καθένα. Ο Άρης και ο Βασίλης ψαρεύουν κοντά σε δύο υφάλους που απέχουν από την ακτή 3km και 1,5km αντίστοιχα. Ο Γιώργος βρίσκεται στην ακτή. Επειδή το κινητό του Άρη δεν λειτουργεί, μπορεί ο Βασίλης να μεταφέρει ένα μήνυμα του Γιώργου στον Άρη;



Στο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε την Τρίτη πλευρά από το νόμο των συνημιτόνων. Πράγματι

$$AB^2=A\Gamma^2+B\Gamma^2-2A\Gamma\cdot B\Gamma\cdot συν\Gamma$$
$$AB^2=3^2+1,5^2-2\cdot 3\cdot 1,5\cdot συν20^0$$
$$AB^2=9+2,25-9\cdot 0,94$$
$$AB^2=11,25-8,46=2,79 \quad Άρα \;\; AB=\sqrt{2,79}=1,67\,km.$$

- Την απόσταση δύο απρόσιτων σημείων Α,Β μπορούμε να υπολογίσουμε και ως εξής: Ορίζουμε στην οριζόντια ακτή ένα σημείο Δ ώστε να είναι ΔΓ= 200μ. Μετράμε τις γωνίες ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΓΔ και ΑΓΒ. Στα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ από το νόμο των ημιτόνων υπολογίζουμε την ΑΔ και την ΒΔ. Στο τρίγωνο ΑΒΔ από το νόμο των συνημιτόνων τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την ΑΒ.