Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς

Ασκήσεις σχολικού βιβλίου, ως πηγή επαναληπτικών θεμάτων

Γιάννης Σαράφης - Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί Θεσσαλονίκης

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ

Το σχολικό βιβλίο περιέχει ασκήσεις οι οποίες αν εμπλουτιστούν και με άλλα ερωτήματα αποτελούν σημαντικό εργαλείο για την επανάληψη. Οι ασκήσεις που ακολουθούν έχουν ως στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να επεξεργαστούν θέματα που συνδυάζουν τμήματα της ύλης αλλά να αποτελέσουν και για τους συναδέλφους υλικό για επανάληψη στην τάξη.

Άσκηση 1η: **Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , x<0\\ \etaμx+1 & , x\geq 0\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,1).

ii) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x΄x.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ασύμπτωτης όταν $x\to-\infty$.

iv) Να βρείτε τις πιθανές θέσεις των ακροτάτων της συνάρτησης f στο διάστημα [–1,π].

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=–2, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

vi) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση: i) Για να ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο Α, αρκεί η f να είναι παραγωγίσιμη στο x=0 (η κατακόρυφη εφαπτομένη είναι εκτός ύλης). Οπότε με x κοντά στο 0 και:

- $x<0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1-x}=1$

- $x>0$ έχουμε: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\etaμx+1-1}{x}=\dfrac{\etaμx}{x}$,

οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\etaμx}{x}=1$

Επομένως $f'(0)=1$ οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο Α.

ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι $\lambda=f'(0)=1$, οπότε εφω$=1$.

Άρα $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, αφού $0\leq\omega<\pi$

iii) Θα ελέγξουμε αν υπάρχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη. Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0$,

οπότε η ευθεία $y=0$ δηλ. ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

iv) Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων προκύπτουν από τα κρίσιμα σημεία και τα άκρα του πεδίου ορισμού αν είναι κλειστό διάστημα.

Για $x<0$, έχουμε: $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$

Για $x>0$, έχουμε: $f'(x)=$ συνx

Επομένως, $f'(x)=0\Leftrightarrow$ συνx $=0\Leftrightarrow$ συνx $=$ συν$\dfrac{\pi}{2}$,

οπότε $x=\dfrac{\pi}{2}$, αφού $0<x<\pi$

Άρα πιθανές θέσεις ακροτάτων έχουμε για x=–1, $x=\dfrac{\pi}{2}$, x=π.

v) Σε καθένα από τα διαστήματα [–1, 0] και $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $f(x)\geq0$ οπότε το εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=$$

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{1-x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\etaμx+1)dx=-\int_{-2}^{0}\frac{(1-x)'}{1-x}dx+\left[-συνx+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$-\left[\ln|1-x|\right]_{-2}^{0}+\frac{\pi}{2}+1=-\ln1+\ln3+\frac{\pi}{2}+1=\ln3+\frac{\pi}{2}+1.$$

vi) Για $x<0$ έχουμε $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}$, οπότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της υπερβολής $-\dfrac{1}{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά. Για $x>0$

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της ημx κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

Τελικά, η C_f φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

Άσκηση 2η: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους παράλληλες. Έστω σημείο $M(\alpha,\alpha^3)$, $\alpha\neq 0$ της γραφικής παράστασης C_f της f στο οποίο φέρουμε την εφαπτόμενη της.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη τέμνει τη γραφική παράσταση της f και σε άλλο σημείο N εκτός του M.

iii) Να αποδείξετε ότι η κλίση στο σημείο N της C_f είναι τετραπλάσια από την κλίση στο σημείο M.

iv) Η εφαπτομένη στο σημείο M τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Δ. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Δ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη –3.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f την εφαπτομένη στο σημείο M και τον άξονα x΄x.

Λύση: i) Έστω $M_1(x_1,x_1^3)$, $M_2(x_2,x_2^3)$ δύο τουλάχιστον σημεία της γραφικής παράστασης της f. Οι εφαπτόμενες στα M_1, M_2 είναι παράλληλες $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_1)=f'(x_2) \\ x_1\neq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^2=3x_2^2 \\ x_1\neq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=x_2^2 \\ x_1\neq x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1=-x_2\neq 0.$$

Άρα στα σημεία $M_1(x_1,x_1^3)$, $M_2(-x_1,-x_1^3)$ με $x_1\neq 0$ οι εφαπτομένες είναι παράλληλες.

ii) Έχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(\alpha)=3\alpha^2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M είναι $y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow y=3\alpha^2x-2\alpha^3$

Για να βρούμε το άλλο κοινό σημείο εκτός από το σημείο επαφής, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=3\alpha^2x-2\alpha^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ x(x^2-\alpha^2)-2\alpha^2(x-\alpha)x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=x^3 \\ (x-\alpha)(x^2+\alpha x-2\alpha^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ x=\alpha \text{ ή } x=-2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=\alpha^3 \\ x=\alpha \end{cases} \text{ή} \begin{cases} y=-\alpha^3 \\ x=-2\alpha \end{cases} \right)$$

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M έχει και άλλο κοινό σημείο με την C_f, το σημείο $N(-2\alpha,-8\alpha^3)$.

iii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(-2\alpha)=4f'(\alpha)$

Είναι: $f'(-2\alpha)=3(-2\alpha)^2=12\alpha^2=4\cdot 3\alpha^2=4f'(\alpha)$

iv) Η τετμημένη του σημείου Δ θα προκύψει από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=0 \\ 3\alpha^2x-2\alpha^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \alpha^2(3x-2\alpha)=0 \end{cases} \text{ με } \alpha\neq 0,$$

οπότε $x=\frac{2}{3}\alpha$. Άρα $\Delta\left(\frac{2}{3}\alpha,0\right)$.

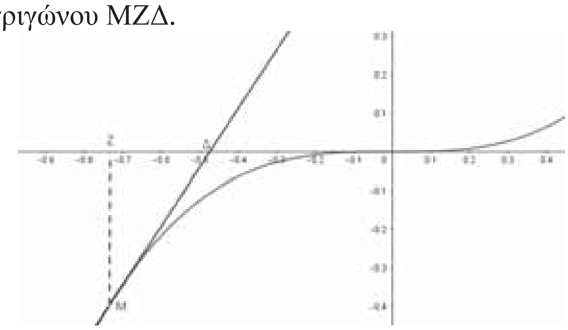
Η τετμημένη του σημείου Δ ως συνάρτηση του χρόνου είναι $x(t)=\frac{2}{3}\alpha(t)$ οπότε

$$x'(t)=\frac{2}{3}\alpha'(t)=-\frac{2}{3}\alpha(t).$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή όπου το σημείο M έχει τετμημένη –3 δηλ. $\alpha(t_0)=-3$

Για $t=t_0$: $x'(t_0)=-\frac{2}{3}\alpha(t_0)=-\frac{2}{3}(-3)=2$

v) Έστω α<0. Από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x θα αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΖΔ.

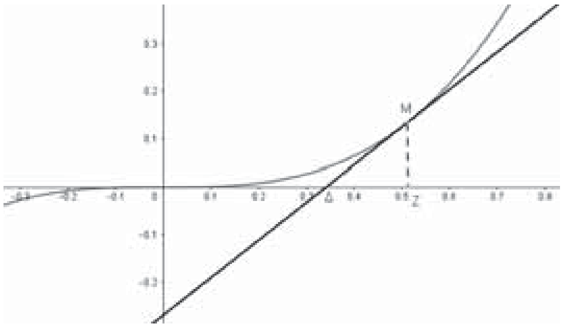


$$E=\int_\alpha^0 |f(x)|dx=-\int_\alpha^0 x^3dx=-\left[\frac{x^4}{4}\right]_\alpha^0=\frac{\alpha^4}{4}$$

$$(M Z\Delta)=\frac{1}{2}\cdot|\alpha^3|\cdot\left|\alpha-\frac{2}{3}\alpha\right|=\frac{1}{2}\cdot|\alpha^3|\cdot\frac{1}{3}|\alpha|=\frac{\alpha^4}{6}$$

$$E(\Omega)=E-(MZ\Delta)=\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4}{6}=\frac{1}{12}\alpha^4$$ Έστω α>0

$$E=\int_0^\alpha |f(x)|dx=\int_0^\alpha x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^\alpha=\frac{\alpha^4}{4}$$



$$(M Z \Delta)=\frac{1}{2}\cdot|\alpha^3|\cdot|\alpha-\frac{2}{3}\alpha|=\frac{1}{2}\cdot|\alpha^3|\cdot\frac{1}{3}|\alpha|=\frac{\alpha^4}{6}$$

$$E(\Omega)=E-(M Z \Delta)=\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4}{6}=\frac{1}{12}\alpha^4$$

Άσκηση 3η: Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=1$ ώστε να ισχύει $|e^x f(y)-e^y f(x)|\le(x-y)^2$, (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

iv) Να βρείτε,αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}-e^x$$

v) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2}-e\le\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\le\sqrt{2}-\frac{1}{e} \text{ για κάθε } x\in[-1,1].$$

Λύση: i) Έχουμε $g(x)=f(x)e^{-x}\Leftrightarrow f(x)=g(x)e^x$, οπότε: (1) $\Rightarrow$ $|e^x g(y)e^y-e^y g(x)e^x|\le(x-y)^2$

$$\Rightarrow|e^{x+y}g(y)-e^{x+y}g(x)|\le(x-y)^2$$

$$\Rightarrow|e^{x+y}(g(x)-g(y))|\le(x-y)^2.$$

Θέτουμε όπου y το τυχαίο x_0 και έχουμε

$$|e^{x+x_0}(g(x)-g(x_0))|\le(x-x_0)^2$$

$$\overset{|x-x_0|>0}{\Rightarrow}\frac{|e^{x+x_0}(g(x)-g(x_0))|}{|x-x_0|}\le\frac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|}$$

$$\Rightarrow\left|e^{x+x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right|\le\frac{|x-x_0|^2}{|x-x_0|}$$

$$\Rightarrow\left|e^{x+x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|$$

$$\Rightarrow-|x-x_0|\le e^{x+x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|$$

$$\Rightarrow-\frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}}\le\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\le\frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}}$$

και $-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}}=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{e^{x+x_0}}=0$

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=0\Rightarrow g'(x_0)=0$, για τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=0$, άρα $g(x)=c$, δηλαδή η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Έχουμε $g(x)=c\Leftrightarrow f(x)e^{-x}=c$ για x=0: $f(0)=c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $g(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.

$g(x)=1\Leftrightarrow f(x)e^{-x}=1\Leftrightarrow f(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) Η εξίσωση γράφεται $h(x)-f(x)=0$.

Έστω $\varphi(x)=h(x)-f(x)=\sqrt{x^2+1}-e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει το πολύ μια λύση βρίσκοντας την μονοτονία της συνάρτησης φ. Είναι: $\varphi'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Αν x<0, τότε $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<0$ και $-e^x<0$, οπότε $\varphi'(x)<0$ δηλαδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Αν x>0 έχουμε: $x^2+1>x^2\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>x\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-e^x<1-e^x\Rightarrow$$

$\Rightarrow\varphi'(x)<1-e^x$ (1) και $e^x>e^0\Rightarrow1-e^x<0$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει $\varphi'(x)<0$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Επειδή η φ είναι συνεχής στο x=0 η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει το πολύ μια λύση στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, ο αριθμός 0 είναι προφανής λύση, αφού $\varphi(0)=\sqrt{0+1}-e^0=0$. Άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μοναδική λύση την x=0.

iv) Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ελέγχουμε αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$ (1)

Για x κοντά στο $-\infty$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{x<0}{=}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x\frac{1}{x}=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=-1$, οπότε λ= –1

$$\lim_{x\to-\infty}(\varphi(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-e^x+x\right)\quad(2)$$

Για x κοντά στο $-\infty$

$$\sqrt{x^2+1}+x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

Από τη σχέση (2) έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\varphi(x)+x)=0$

Η πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ είναι η $y=-x$

Ελέγχουμε αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$

Για x κοντά στο $+\infty$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{x>0}{=}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=-\infty$, οπότε δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Ελέγχουμε αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-e^x\right)\quad(3)$$

Για x κοντά στο $+\infty$

$$\sqrt{x^2+1}-e^x=e^x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x}-1\right)$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x}\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\cdot\frac{x}{e^x}\right\}=0$

αφού, όπως εύκολα βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-e^x\right)=-\infty\ ,$$

Άρα, δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη και στο $+\infty$

v) Αποδείξαμε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και στο διάστημα [–1,1].

Έχουμε $-1\le x\le 1\overset{\varphi\searrow}{\Rightarrow}\varphi(1)\le\varphi(x)\le\varphi(-1)$, οπότε.

$$\int_{-1}^{1}\varphi(1)dx\le\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\le\int_{-1}^{1}\varphi(-1)dx\Rightarrow$$

$$\varphi(1)\int_{-1}^{1}dx\le\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\le\varphi(-1)\int_{-1}^{1}dx\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}-e\right)[x]_{-1}^{1}\le\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\le\left(\sqrt{2}-\frac{1}{e}\right)[x]_{-1}^{1}\Rightarrow$$

$$2\left(\sqrt{2}-e\right)\le\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\le 2\left(\sqrt{2}-\frac{1}{e}\right)\Rightarrow$$

$$\sqrt{2}-e\le\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\le\sqrt{2}-\frac{1}{e}$$

Άσκηση 4η: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2x^3+\alpha x^2+6x+5$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για α=–1

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^4-3x^3+7x^2-x-5=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_o στο διάστημα (–1,1).

iii) Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να βρείτε το σημείο καμπής.

iv) Να βρείτε την τιμή του β ώστε η ευθεία y=10x+β να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f'.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=–1, x=1 συναρτήσει της τιμής x_o του ερωτήματος (βi).

Λύση: i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $f'(x)=6x^2+2\alpha x+6=2(3x^2+\alpha x+3)$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f' είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο με $\Delta = \alpha^2 - 36$

- Αν Δ>0 δηλ. $\alpha^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \alpha < -6$ ή $\alpha > 6$, η f' έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες και άρα αλλάζει πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν Δ=0 δηλ. $\alpha^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$ ή $\alpha = 6$ για α=–6 η f' έχει διπλή ρίζα την τιμή 1.
  Επειδή η f είναι συνεχής για x=1 και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$, η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για α=6 η f' έχει διπλή ρίζα την τιμή –1. Επειδή η f είναι συνεχής για x=–1 και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq -1$, η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν Δ<0 δηλ. $\alpha^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6$, η f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός θα ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως για $-6 < \alpha < 6$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha \in [-6, 6]$.

ii) Έστω $g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - x - 5$ Από το σχήμα Horner έχουμε:

2	–3	7	–1	–5	1
	2	–1	6	5	
2	–1	6	5	0	

οπότε $g(x) = (x-1)(2x^3 - x^2 + 6x + 5)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $2x^3 - x^2 + 6x + 5 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (–1,1). Η εξίσωση είναι η $f(x) = 0$ για α=–1. Από το ερώτημα i) η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο διάστημα (–1,1).

Η f ως πολυωνυμική στο [–1,1] είναι συνεχής και $f(-1) = -4$, $f(1) = 12$ οπότε $f(-1) \cdot f(1) = -48$.

Από το θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Άρα η εξίσωση εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση x_0 στο διάστημα (–1,1).

iii) Έχουμε $f''(x) = 12x - 2$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{6}$$

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right]$, κυρτή στο $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει καμπή για $x = \frac{1}{6}$.

x	$-\infty$	1/6	$+\infty$
f''	–	0	+
f	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$

Το σημείο καμπής της είναι το $\left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right)$.

iv) Έστω ότι η ευθεία εφάπτεται στη $C_{f'}$ στο σημείο $\Delta(x_0, f'(x_0))$, τότε θα ισχύει $f''(x_0) = 10$ δηλ. $12x_0 - 2 = 10 \Leftrightarrow x_0 = 1$ οπότε $\Delta(1, 10)$. Το σημείο Δ θα επαληθεύει την ευθεία, άρα $10 = 10 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$

v) Στο διάστημα (–1,1) η συνάρτηση f μηδενίζεται στην τιμή x_0 την οποία βρήκαμε στο ερώτημα (ii).

Οπότε για $-1 < x < x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0)$ άρα $f(x) < 0$. Οπότε για $x_0 < x < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0)$ άρα $f(x) > 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=–1, x=1 δίνεται από τον τύπο $E(\Omega) = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx =$

$$E(\Omega) = -\int_{-1}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{1} f(x)\,dx =$$

$$-\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x\right]_{-1}^{x_0} +$$

$$\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x\right]_{x_0}^{1} =$$

$$-x_0^4 + \frac{2}{3}x_0^3 - 6x_0^2 - 10x_0 + \frac{19}{3} \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 5η: Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

i) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $(g \circ f)(x) = |\text{συν}x|$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Αν $f(x) = \text{ημ}x$, $x \geq 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x) + \text{ημ}\alpha + \alpha}{x} = -\dfrac{\alpha - f(x)}{x - \pi}$ με α>0 έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, \pi)$.

iii) Αν ισχύει $(g \circ f)(x) = |\text{συν}x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

,να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(g\circ f)(x)-x}{\eta\mu x+2}$

iv) α)Να βρείτε τον τύπο της απόστασης d(x) του σημείο $M(x,g(x))$ από την εξίσωση της ευθείας ε: x+y+2=0 για κάθε $x\in[-1,1]$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα,τουλάχιστον, σημείο της γραφικής παράστασης της g που απέχει λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία από την ευθεία και ένα,τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της g που απέχει περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία από την ευθεία

v) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα.

vi) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1}{f'(x)}dx$, όπου $f(x)=\eta\mu x$.

Λύση

i) Από τη σχέση $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$ έχουμε $g(f(x))=|\sigma\upsilon\nu x|$ οπότε

$$\sqrt{1-f^2(x)}=|\sigma\upsilon\nu x|\Leftrightarrow 1-f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2x$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow f^2(x)=\eta\mu^2x\Leftrightarrow|f(x)|=|\eta\mu x|$$

Έστω $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=0$, στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ και $f(x)\neq0$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$. Από τη σχέση

$|f(x)|=|\eta\mu x|\Rightarrow|f(x)|=-\eta\mu x$ οπότε:

αν $f(x)<0$ τότε $-f(x)=-\eta\mu x\Rightarrow f(x)=\eta\mu x$

αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=-\eta\mu x$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f(x)\neq0$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Από τη σχέση

$|f(x)|=|\eta\mu x|\Rightarrow|f(x)|=\eta\mu x$ οπότε:

αν $f(x)<0$ τότε $-f(x)=\eta\mu x\Rightarrow f(x)=-\eta\mu x$

αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=\eta\mu x$

Άρα ο τύπος της f στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$f(x)=\begin{cases}-\eta\mu x & -\dfrac{\pi}{2}<x\le0\\ \eta\mu x & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad ή\ f(x)=-\eta\mu x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$$

$$ή\ f(x)=\begin{cases}\eta\mu x & -\dfrac{\pi}{2}<x\le0\\ -\eta\mu x & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad ή\ f(x)=\eta\mu x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$$

ii) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$(x-\pi)(f(x)+\eta\mu\alpha+\alpha)+x(\alpha-f(x))=0$ ή

$(x-\pi)(\eta\mu x+\eta\mu\alpha+\alpha)+x(\alpha-\eta\mu x)=0$.

Έστω $h(x)=(x-\pi)(\eta\mu x+\eta\mu\alpha+\alpha)+x(\alpha-\eta\mu x)$ $x\in[0,\pi]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και $h(0)=-\pi(\eta\mu\alpha+\alpha)<0$ διότι $|\eta\mu\alpha|<\alpha$ με $\alpha>0$ οπότε $-\alpha<\eta\mu\alpha<\alpha$, άρα $\eta\mu\alpha+\alpha>0$, $h(\pi)=\pi\cdot\alpha>0$, οπότε $h(0)\cdot h(\pi)<0$

Από το θ. Bolzano η εξίσωση h(x)=0 έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,\pi)$ οπότε ισοδύναμα και η εξίσωση $\dfrac{f(x)+\eta\mu\alpha+\alpha}{x}=-\dfrac{\alpha-f(x)}{x-\pi}$.

ii) Για x κοντά στο $+\infty$

$$\frac{(g\circ f)(x)-x}{\eta\mu x+2}=\frac{|\sigma\upsilon\nu x|-x}{\eta\mu x+2}=\frac{\dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x}-1}{\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{2}{x}}$$

- $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|=\dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{x}$ διότι $x\to+\infty$ οπότε

$-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

• $-1\le \eta\mu x\le 1 \overset{x>0}{=} -\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

Οπότε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x}-1\right)=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x}-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{2}{x}\right)=0$$

Επειδή $\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2+\eta\mu x}{x}>0$ κοντά στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{2}{x}}=+\infty$ Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(g\circ f)(x)-x}{\eta\mu x+2}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{2}{x}}\cdot\left(\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x}-1\right)=-\infty$$

iv) α) $d(x)=d(M,\varepsilon)=\frac{|x+g(x)+2|}{\sqrt{2}}$

β) Η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων. Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, θα υπάρχει κάποιο $x_1\in[-1,1]$ για το οποίο η d θα πάρει τη μέγιστη τιμή της και κάποιο $x_2\in[-1,1]$ για το οποίο η d θα πάρει την ελάχιστη τιμή της.

v) Έχουμε $D_g=[-1,1]$ στο οποίο η g είναι συνεχής.

Για $x\in(-1,1)$ $g'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$g''(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}-x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$-\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}<0$$

Άρα η g είναι κοίλη στο $[-1,1]$.

vi) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}dx$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$, οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$

$$u_1=\eta\mu 0=0,\ u_2=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Επομένως $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du$

Αναζητούμε α,β τέτοια ώστε $\frac{1}{u^2-1}=\frac{\alpha}{u-1}+\frac{\beta}{u+1}$

ή $1=(\alpha+\beta)x+\alpha-\beta$, για κάθε $u\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Η σχέση ισχύει για κάθε $u\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, αν και μόνο αν $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ και $\beta=-\frac{1}{2}$

Επομένως, $I=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u-1}du+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u+1}du$

$$=-\frac{1}{2}[\ln|u-1|]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}[\ln|u+1|]_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3-\frac{3}{2}\ln 2=$$

$$=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2$$

Ένα ενδιαφέρον θέμα Ανάλυσης

Από τον εκλεκτό συνάδελφο και τακτικό συνεργάτη του περιοδικού **Γιώργο Τσιώλη.**

Αν για την συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο: f(x)=αεφx + βεφ2x + γεφ3x ισχύει: |f(x)|≤|εφx| (1) για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, να αποδειχθεί ότι |α+2β+3γ|≤1.

Λύση: Προφανώς f(0)=0 και η f παραγωγίζεται με $f'(x)=\alpha(1+\varepsilon\varphi^2 x)+2\beta(1+\varepsilon\varphi^2 2x)+3\gamma(1+\varepsilon\varphi^2 3x)$, οπότε: $\alpha+2\beta+3\gamma=f'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\lambda(x)$, όπου

$\lambda(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$, με $x\neq0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: $|f'(0)|\le1$, δηλαδή $-1\le f'(0)\le1$.

Παρατηρούμε ότι αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε

$(1)\Rightarrow -\varepsilon\varphi x\le f(x)\le\varepsilon\varphi x\Rightarrow -\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\le\lambda(x)\le\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$.

Αλλά: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=1\Rightarrow -1\le\lim\limits_{x\to0^+}\lambda(x)\le1\Rightarrow -1\le f'(0)\le1$.

• Ομοίως: $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\Rightarrow \varepsilon\varphi x\le f(x)\le-\varepsilon\varphi x\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\Rightarrow -\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\le\lambda(x)\le\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow -1\le\lim\limits_{x\to0^-}\lambda(x)\le1\Rightarrow -1\le f'(0)\le1$. Αυτό όμως είναι προφανώς πλεονασμός.