Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς

Τάξη: Γ΄

Θέματα Επανάληψης

Παναγιώτης Μπρίνος

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- **$f(0)=1$, $f(1)=1$ και $f(x)>0$, για κάθε $x>0$.**
- **f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x+1$, για κάθε $x>0$.**

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^x$, για κάθε $x>0$.

Β. Να εξετάσετε την f ως προς την συνέχεια στο $x_0=0$.

Γ. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f με θετική τετμημένη στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Α. Στο $(0,+\infty)$ έχουμε $f(x)>0$, οπότε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x+1 \Rightarrow (\ln f(x))' = x'\ln x+x(\ln x)' \Rightarrow$$

$$(\ln f(x))' = (x\ln x)' \quad (1).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και συνεχής. Οι συναρτήσεις $\ln f(x)$, $x\ln x$ είναι συνεχείς στο $(0,+\infty)$, επομένως υπάρχει $c\in R$ με $\ln f(x) = x\ln x + c$, για κάθε $x>0$. Από την τελευταία ισότητα, για $x=1$, έχουμε: $\ln f(1) = 1\ln 1 + c \Rightarrow \ln 1= c \Rightarrow c=0$. Επομένως $\ln f(x) = x\ln x \Rightarrow \ln f(x) = \ln x^x \Rightarrow f(x)= x^x$, για κάθε $x>0$.

Β. Για $x>0$ έχουμε: $f(x)=x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$. Επειδή $x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x= -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} =+\infty$ και $\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$, με $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, θα έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$, επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=e^0=1=f(0)$. Έτσι, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα και στο $[0,+\infty)$.

Γ. $f'(x) = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x+1)$. Η εξίσωση $f'(x) =0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0=e^{-1}$. Για $0<x<e^{-1}$ έχουμε: $\ln x< -1 \Leftrightarrow \ln x+1<0 \Leftrightarrow f'(x)<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, e^{-1}]$ (ως συνεχής σ' αυτό με παράγωγο αρνητική στο εσωτερικό του). Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1}, +\infty)$. Επομένως η f παρουσιάζει στο $x_1=0$ τοπικό μέγιστο το $f(0)=1$ και στο $x_0= e^{-1}$, ολικό ελάχιστο το $f(e^{-1})=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Δ. Θεωρούμε σημείο $A(\alpha,\alpha^\alpha)$ της γραφικής παράστασης της f, με $\alpha>0$. Η εφαπτομένη της στο σημείο Α έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - \alpha^\alpha = \alpha^\alpha(\ln\alpha+1)(x-\alpha) \quad (1).$$

Η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $0 - \alpha^\alpha = \alpha^\alpha(\ln\alpha+1)(0-\alpha)$. Επειδή $\alpha^\alpha>0$, η τελευταία γράφεται:

$$\alpha(\ln\alpha+1)=1 \Leftrightarrow \alpha(\ln\alpha+1) - 1 =0 \quad (2).$$

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $x(\ln x+1) - 1=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Θέτουμε $g(x)=x(\ln x+1) - 1$, $x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\ln x+2$, $x>0$.

Η εξίσωση $g'(x) =0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x=e^{-2}$.

Εξάλλου $0<x<e^{-2} \Rightarrow \ln x< -2 \Rightarrow \ln x+2<0 \Rightarrow g'(x)<0$, επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-2}]$ (ως συνεχής σ' αυτό με παράγωγο αρνητική στο εσωτερικό του). Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{-2}, +\infty)$.

Η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0,e^{-2}]$ επομένως

$g((0, e^{-2}]) =[g(e^{-2}), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x))=[-e^{-2}-1,-1)$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)= \lim\limits_{x\to 0^+} [x(\ln x+1)-1]= \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x+x-1)=-1$

από Β ερώτημα.

Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(0, e^{-2}]$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[e^{-2},+\infty)$ επομένως

$g([e^{-2},+\infty))=[g(e^{-2}), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x))=[-e^{-2}-1,+\infty)$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)= \lim\limits_{x\to+\infty} [x(\ln x+1) - 1]= +\infty$.

Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, e^{-2}]$, άρα και η (2).

Παρατήρηση:

Επειδή $g(1)=0$ και η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[e^{-2}, +\infty)$ το $x_0=1$ αποτελεί μοναδική ρίζα.

Έτσι, το σημείο A(1,1) της γραφικής παράστασης της f αποτελεί το μοναδικό σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από το O(0,0).

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2,2]$ τέτοια ώστε:

- **f συνεχής στο $[-2,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και**
- **$f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$, για κάθε $x\in[-2,2]$ (1).**

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται, έχει ακρότατα ενώ δεν έχει σημεία καμπής.

B. Αν $f(0) = 3$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 1+\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2].$$

Για την συνάρτηση f του B2 ερωτήματος:

i) Ένα σημείο M(x,y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\in(-2,2)$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)\neq 0$ για κάθε $t\geq 0$.

ii) Να βρείτε τα ακρότατα της f και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: f(x) = συνx.

Λύση:

A. Έχουμε: $f^2(2) - 2f(2) + 2^2 - 3 = 0 \Rightarrow (f(2)-1)^2 = 1 \Rightarrow f(2) = 1$. Ομοίως

$f^2(-2) - 2f(-2) + (-2)^2 - 3 = 0 \Rightarrow f(-2) = 1$.

Επομένως $f(-2) = f(2)$ δηλαδή η f δεν είναι 1-1, άρα δεν αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$ επομένως παρουσιάζει ακρότατα.

Επειδή και τα δύο μέλη της δοθείσης σχέσης είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $(-2,2)$, έχουμε:

$2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0 \Rightarrow$

$f(x)f'(x) - f'(x) + x = 0$ (1), $x\in(-2,2)$.

Επίσης και τα δύο μέλη της (1) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $(-2,2)$, οπότε:

$(1)\Rightarrow 2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0 \Rightarrow$

$f(x)f'(x) - f'(x) + x = 0 \Rightarrow$

$(f'(x))^2 + f(x)f''(x) - f''(x) + 1 = 0$, για κάθε $x\in(-2,2)$.

Αν η f παρουσίαζε στο x_0 σημείο καμπής τότε $f''(x_0)=0$, οπότε $(2) \Rightarrow (f'(x_0))^2 = -1$, άτοπο. Επομένως η f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

B. Για κάθε $x\in[-2,2]$ έχουμε $4-x^2\geq 0$ και $(1)\Rightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = -x^2 + 4 \Rightarrow (f(x)-1)^2 = 4 - x^2 \Rightarrow f(x) - 1 = \pm\sqrt{4-x^2}$ (3).

Θέτω $g(x) = f(x) - 1$, $x\in[-2,2]$. Τότε από την σχέση (3) έχουμε: $g(x) = \pm\sqrt{4-x^2}$, για κάθε $x\in[-2,2]$. Έχουμε διαδοχικά:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=2$.

Επομένως $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-2,2)$ και g συνεχής στο $(-2,2)$, οπότε η g διατηρεί πρόσημο στο $(-2,2)$, δηλαδή $g(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-2,2)$.

Επειδή $g(0)=f(0)-1=2>0$, έχουμε $g(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$.

Άρα $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ για κάθε $x\in[-2,2]$, δηλαδή $f(x) = 1+\sqrt{4-x^2}$, για κάθε $x\in[-2,2]$.

i) $y(t) = 1+\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y'(t) = \dfrac{-x'(t)\cdot x(t)}{\sqrt{4-x^2(t)}}$.

Ζητάμε $t=t_0$, ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$ (1). Αλλά:

(1) $\Rightarrow x'(t_0)\cdot y'(t_0)\neq 0$ και $y'(t_0) = \dfrac{-x'(t_0)\cdot x(t_0)}{\sqrt{4-x^2(t_0)}}$

$\Rightarrow \sqrt{4-x^2(t_0)} = -x(t_0) \Rightarrow x(t_0)\leq 0$

$x^2(t_0) = 2 \Rightarrow x(t_0) = -\sqrt{2}$.

Πράγματι τότε έχουμε:

$$y'(t_0) = \frac{-x'(t_0)\cdot(-\sqrt{2})}{\sqrt{4-(-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot x'(t_0)}{\sqrt{2}} = x'(t_0).$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το

$$M(-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}).$$

ii) Παρατηρούμε ότι: $0\leq\sqrt{4-x^2}\leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\leq 1+\sqrt{4-x^2}\leq 3 \Rightarrow 1\leq f(x)\leq 3$ για κάθε $x\in[-2,2]$. Επειδή $f(2)=1$, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1=2$ το 1 (προφανώς και για $x_2=-2$).

Επειδή $f(0)=3$, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_3=0$, το 3. Έχουμε $f(x)\geq 1$ και συνx≤1 για κάθε $x\in[-2,2]$. Το ίσον στη δεύτερη ισχύει μόνο για x=0. Όμως $f(0)=3>1$, άρα f(x)>συνx για κάθε $x\in[-2,2]$. Επομένως η εξίσωση f(x) = συνx είναι αδύνατη στο $[-2,2]$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω συνάρτηση f που είναι 1–1, παραγωγίσιμη στο R και δύο φορές

παραγωγίσιμη στο R* για την οποία ισχύουν:

- **$f'(-1)+f(-1)=e^{-1}$.**
- **$f^{-1}(x)=e^x-1$ όταν και μόνο $x\geq 0$.**
- **$f''(x)=f(x)$ για κάθε $x<0$.**

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, & x<0\\ \ln(x+1), & x\geq 0\end{cases}$.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

- **$\beta>0$**
- **το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, τον άξονα x΄x, τον άξονα y΄y και την ευθεία x=β να είναι ίσο με 1.**
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$

Δ. Αν F μια αρχική της f στο [α,β], όπου α,β οι αριθμοί του Γ ερωτήματος με α<β, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f^2(x_0)+(F(x_0)-F(\alpha))f'(x_0)=0.$$

Λύση:

Α. Ζητάμε αρχικά τα $x\in A_f=R$ και τον τύπο της f(x) όταν f(x)=y με $f^{-1}(y)=e^y-1$, δηλαδή όταν και μόνο $y\geq 0$. Με $x\in A_f$ έχουμε:
$f(x)=y \Rightarrow x=f^{-1}(y)\Rightarrow x=e^y-1\Rightarrow e^y=x+1\Rightarrow x+1>0$ και $y=\ln(x+1)$.
Αλλά $y\geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x+1\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$.
Άρα $f(x)=\ln(x+1)$ για κάθε $x\geq 0$. Παρατηρούμε ότι f(0)=0.
Για x<0 έχουμε: $f''(x)=f(x)\Rightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)$ (1). Θέτουμε $g(x)=f'(x)+f(x)$, x<0, οπότε (1)$\Rightarrow g'(x)=g(x)\Rightarrow g(x)=ce^x$. Για x=–1, $g(-1)=ce^{-1}\Rightarrow e^{-1}=ce^{-1}\Rightarrow c=1$. Επομένως $g(x)=e^x\Rightarrow f'(x)+f(x)=e^x\Rightarrow e^xf'(x)+(e^x)'f(x)=e^{2x}\Rightarrow (e^xf(x))'=\left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)$ για κάθε x<0 επομένως

$e^xf(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}+\kappa$, $\kappa\in R\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{2}+\kappa e^{-x}$, x<0.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{e^x}{2}+\kappa e^{-x})=0\Rightarrow \kappa=\dfrac{1}{2}$.

Επομένως $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, για κάθε x<0.

Τελικά $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, & x<0\\ \ln(x+1), & x\geq 0\end{cases}$.

Β. Για x<0 έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ επομένως f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.
Για x>0 έχουμε $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>0$ επομένως f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.
Για το σύνολο τιμών της έχουμε:
$f((-\infty,+\infty))=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$.

Για x<0, $f''(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Έχουμε: $x<0\Rightarrow x<-x \Rightarrow e^x<e^{-x}\Rightarrow e^x-e^{-x}<0\Rightarrow \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}<0\Rightarrow f''(x)<0$, επομένως η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$. Για x>0, $f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0$, επομένως η f είναι κοίλη και στο $[0,+\infty)$.

Γ. Για $x\geq 0$, $f(x)\geq 0$, επομένως $E(\Omega)=1\Leftrightarrow$
$\int_0^\beta f(x)dx=1\Leftrightarrow \int_0^\beta x'\cdot\ln(x+1)dx=1\Leftrightarrow$
$[x\cdot\ln(x+1)]_0^\beta-\int_0^\beta \dfrac{x}{x+1}dx=1\Leftrightarrow$
$\beta\ln(\beta+1)-\int_0^\beta \dfrac{x+1-1}{x+1}dx=1$ω $\Leftrightarrow$
$\beta\ln(\beta+1)-\int_0^\beta (1-\dfrac{1}{x+1})dx=1\Leftrightarrow$
$\beta\ln(\beta+1)-\beta+\ln(\beta+1)=1\Leftrightarrow(\beta+1)(\ln(\beta+1)-1)=0$
$\Leftrightarrow\ln(\beta+1)-1=0\Leftrightarrow\beta+1=e\Leftrightarrow\beta=e-1$.

Για τη σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ (i) διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ως προς α:

- Αν α=β = e –1 τότε η (i) ισχύει.
- Αν α≠β τότε α<0 (Διαφορετικά αν 0≤α<β τότε f(x) ≥0 για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0, επομένως $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, άτοπο από υπόθεση. Ομοίως αν β<α, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx<0$, άτοπο από υπόθεση).

Τότε έχουμε: (i)$\Leftrightarrow \int_\alpha^0 f(x)dx+\int_0^\beta f(x)dx=0\Leftrightarrow$
$\int_\alpha^0 f(x)dx=-\int_0^\beta f(x)dx \Leftrightarrow \int_\alpha^0 f(x)dx=-1\Leftrightarrow$

$\left[\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_a^0=-1 \Leftrightarrow 1-\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}=-1 \Leftrightarrow$

$e^{\alpha}+e^{-\alpha}=4 \Leftrightarrow e^{2\alpha}-4e^{\alpha}+1=0$ (1). Θέτουμε $e^{\alpha}=x$ και η επιλύουσα της (1) είναι η $x^2-4x+1=0$ (2) με ρίζες $x_1=2+\sqrt{3}$ και $x_2=2-\sqrt{3}$.

Επομένως (1)$\Leftrightarrow$ $e^{\alpha}=2+\sqrt{3}$ ή $e^{\alpha}=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow$ $\alpha=\ln(2+\sqrt{3})$ ή $\alpha=\ln(2-\sqrt{3}) \Leftrightarrow \alpha=\ln(2-\sqrt{3})$, αφού $2+\sqrt{3}>1 \Rightarrow \ln(2+\sqrt{3})>0$, ενώ $0<2-\sqrt{3}<1 \Rightarrow \ln(2-\sqrt{3})<0$.

Τελικά (i)$\Leftrightarrow$ $\alpha=\beta=e-1$ ή $\alpha=\ln(2-\sqrt{3})$.

Δ. Επειδή $\alpha<\beta$, έχουμε $\alpha=\ln(2-\sqrt{3})$ και $\beta=e-1$. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f^2(x)+(F(x)-F(\alpha))f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β). Επειδή η F είναι αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$, έχουμε $F'(x)=f(x)$, επομένως

$f^2(x)+(F(x)-F(\alpha))f'(x)=f(x)f(x)+(F(x)-F(\alpha))f'(x)=$
$(F(x)-F(\alpha))'f(x)+(F(x)-F(\alpha))f'(x)=$
$[(F(x)-F(\alpha))f(x)]'$.

Θέτουμε $g(x)=(F(x)-F(\alpha))f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $g(\beta)=(F(\beta)-F(\alpha))f(\beta)=0$, διότι:

$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta F'(x)dx=0 \Rightarrow F(\beta)-F(\alpha)=0$
$\Rightarrow F(\beta)=F(\alpha)$.

Έτσι $g(\alpha)=0=g(\beta)$, οπότε από Θ. Rolle, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$ άρα $f^2(x_0)+(F(x_0)-F(\alpha))f'(x_0)=0$.

Σημείωση: Το θέμα αυτό θα γινόταν πολύ πιο ενδιαφέρον αν απαιτούσαμε η συνάρτηση να έχει αυτές τις ιδιότητες, αντί να τις θεωρήσουμε δεδομένες, όπως εδώ.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 f^2(\sqrt{x})dx-4\int_0^1 xf(x)\cdot e^{-x^2}dx=\frac{e^{-2}-1}{2} \quad (1).$$

Α. Να δειχθεί ότι:

$$4\int_0^1 xf(x)\cdot e^{-x^2}dx=2\int_0^1 f(\sqrt{x})\cdot e^{-x}dx.$$

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in[0,1]$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1] και στην συνέχεια, με την βοήθεια της ανισότητας $e^y\ge y+1$, $y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu^2 x\le f(\eta\mu x)\le 1$, για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

ii) $\dfrac{\pi}{4}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx\le\dfrac{\pi}{2}$

(Δίνεται ο τύπος $\sigma\upsilon\nu^2 x=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$).

Δ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την ευθεία y = x στο (0,1).

Λύση:

Α. Για το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 xf(x)\cdot e^{-x^2}dx$ παρατηρούμε ότι $I=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(\sqrt{x^2})\cdot e^{-x^2}\cdot(x^2)'dx$.

Αν λοιπόν $g(x)=x^2=u$, τότε:

$I=\dfrac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(1)} f(\sqrt{u})\cdot e^{-u}du=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(\sqrt{x})\cdot e^{-x}dx$.

Άρα $4I=2\int_0^1 f(\sqrt{x})\cdot e^{-x}dx$.

Β. Εξάλλου:

$\dfrac{e^{-2}-1}{2}=\left[\dfrac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1=-\left[\dfrac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1=-\int_0^1\left(\dfrac{e^{-2x}}{-2}\right)'dx=$

$=-\int_0^1 e^{-2x}dx$. Άρα: (1) $\Rightarrow$

$\int_0^1 f^2(\sqrt{x})dx-2\int_0^1 f(\sqrt{x})\cdot e^{-x}dx=-\int_0^1 e^{-2x}dx \Rightarrow$

$\int_0^1 f^2(\sqrt{x})dx-2\int_0^1 f(\sqrt{x})\cdot e^{-x}dx+\int_0^1 e^{-2x}dx=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 (f^2(\sqrt{x})-2f(\sqrt{x})+e^{-2x})dx=0 \Rightarrow$

$\int_0^1 (f^2(\sqrt{x})-2f(\sqrt{x})+e^{-2x})dx=0 \quad (1)$

Επειδή $(f(\sqrt{x})-e^{-x})^2\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, αν υπήρχε x_1 τέτοιο ώστε $(f(\sqrt{x_1})-e^{-x_1})^2>0$, τότε

$\int_0^1 (f^2(\sqrt{x})-2f(\sqrt{x})+e^{-2x})dx>0$, άτοπο από (1).

Επομένως $(f(\sqrt{x})-e^{-x})^2=0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $f(\sqrt{x})=e^{-x}$.

Αλλά για κάθε $x\in[0,1]$, υπάρχει μοναδικό $u\in[0,1]$ ώστε $x=u^2$, οπότε $f(\sqrt{u^2})=e^{-u^2} \Rightarrow f(u)=e^{-u^2}$, $u\in[0,1]$, δηλαδή $\mathbf{f(x)}=e^{-x^2}$, $x\in[0,1]$.

Γ. $f'(x)=-2xe^{-x^2}<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1].

i) Με $y=-\eta\mu^2 x$, έχουμε: $1\ge e^{-\eta\mu^2 x}\ge 1-\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow 1\ge f(\eta\mu x)\ge\sigma\upsilon\nu^2 x$, για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

ii) Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση, έχουμε: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx$, όπου $\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+συνx}{2} dx =$

$\left[\frac{x}{2}+\frac{ημx}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$, επομένως προκύπτει η

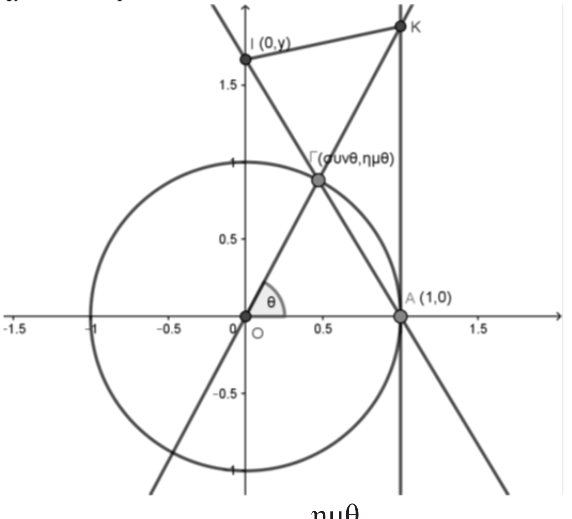
$\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(ημx)dx \le \frac{\pi}{2}$.

Δ. Αρκεί το σύστημα $\left.\begin{matrix} y=f(x) \\ y=x \end{matrix}\right\}$, δηλαδή η εξίσωση f(x)=x να έχει λύση στο (0,1).

Θέτουμε g(x) = f(x) – x, x∈[0,1]. Η g συνεχής στο [0,1] και $g(0)=e^0 - 0=1>0$, $g(1)= e^{-1}-1 = \frac{1-e}{e}<0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$. Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $g΄(x) = -2x e^{-x^2} -1<0$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1. Επομένως η ρίζα της x_0 στο (0,1) είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 5ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος ακτίνας 1, το σημείο Α(1,0) και το τόξο ΑΓ ίσο με θ rad, με 0<θ <2π. Αν η ευθεία Γ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Ι(0,y), τότε:



Α. Να αποδείξετε ότι $y=\frac{ημθ}{1-συνθ}=f(θ)$.

Β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρούμε $0<θ<\frac{\pi}{2}$, **οπότε η ευθεία ΟΓ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Α, τέμνονται στο σημείο Κ :**

Γ. Αν την χρονική στιγμή $t=t_0$ το τετράπλευρο ΟΑΚΙ είναι ορθογώνιο και η γωνία θ μεταβάλλεται με ρυθμό 1rad/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του σημείου Ι.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει γωνία θ για την οποία το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΑΚΙ λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Λύση:

Α. Από τον ορισμό τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας έχουμε Γ(συνθ, ημθ) και Κ(1,εφθ). Η ευθεία ΔΓ έχει εξίσωση

$y-0=\frac{ημθ-0}{συνθ-1}(x-1) \Rightarrow y=\frac{ημθ}{συνθ-1}(x-1)$.

Το σημείο Ι αποτελεί το σημείο τομής της με τον y΄y, Δηλαδή, έχει τετμημένη x=0 και τεταγμένη $y=\frac{ημθ}{1-συνθ}=f(θ)$.

Β΄ τρόπος: Έχουμε: $\vec{ΑΓ}=(συνθ-1, ημθ - 0)=(συνθ - 1, ημθ)$, $\vec{ΑΙ}=(0 - 1, y - 0)=(-1,0)$.

Οπότε:

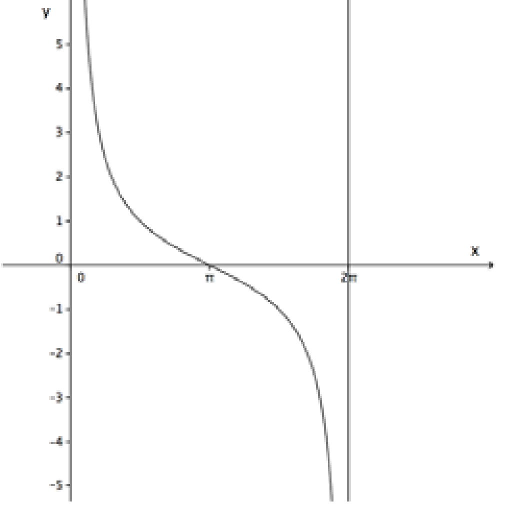
$\vec{ΑΓ} // \vec{ΑΙ} \Rightarrow \det(\vec{ΑΓ}, \vec{ΑΙ})=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} συνθ-1 & ημθ \\ -1 & y \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (συνθ - 1)y+ημθ=0 \Rightarrow$ **$y=\frac{ημθ}{1-συνθ}$**.

Β. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2π) με:

$f΄(θ)=\frac{συνθ(1-συνθ)-ημ^2θ}{(1-συνθ)^2}=\frac{συνθ-1}{(1-συνθ)^2}=\frac{1}{συνθ-1}<0$, για κάθε θ∈(0,2π), επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα. Η συνάρτηση f΄ είναι παραγωγίσιμη στο (0,2π) με $f΄΄(θ)=\frac{ημθ}{(συνθ-1)^2}$.

Έχουμε f΄΄(θ)= 0 ⇔ θ = π. Για θ∈(0,π), f΄΄(θ)> 0, οπότε η f είναι κυρτή στο (0,π].



Για $\theta\in(\pi,2\pi)$, $f''(\theta)<0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[\pi,2\pi]$. Το $A(\pi,0)$ αποτελεί το μοναδικό σημείο καμπής της f.

Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,2\pi)$ (ως παραγωγίσιμη), πιθανές ασύμπτωτες είναι μόνο οι x=0 και x=2π.Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \mathbf{f(\theta)}$ και $\lim\limits_{\theta\to 2\pi^-} \mathbf{f(\theta)}$ οδηγούν σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Αλλά $\frac{(\eta\mu\theta)'}{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)'}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta'}{\eta\mu\theta}$ με $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta'}{\eta\mu\theta}=+\infty$ και $\lim\limits_{\theta\to 2\pi^-}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta'}{\eta\mu\theta}=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{\theta\to 0^+} f(\theta)=+\infty$, $\lim\limits_{\theta\to 2\pi^-} f(\theta)=-\infty$

Επομένως οι x=0 και x=2π είναι οι μοναδικές ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και μάλιστα κατακόρυφες. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχέδιο.

Γ. Αν την χρονική στιγμή $t=t_0$ το τετράπλευρο ΟΑΚΙ είναι ορθογώνιο, τότε ΑΚ = ΟΙ $\Rightarrow y_K=y_I\Rightarrow$ $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow 1-\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\theta=\frac{\pi}{3}$, αφού $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Επομένως

$$y'(t_0)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)-1}\theta'(t_0)=\frac{1}{\frac{1}{2}-1}\cdot 1=-2 .$$

Δ. Για $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ και $\theta\neq\frac{\pi}{3}$ το τετράπλευρο ΟΑΚΙ είναι τραπέζιο. Επομένως:

$$(OAKI)=\frac{(OI+KA)OA}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}+\varepsilon\varphi\theta\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)=\frac{\eta\mu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)} .$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta=\frac{\pi}{3}$, το τετράπλευρο ΟΑΚΙ είναι ορθογώνιο με εμβαδόν

$(OAKI)=OI\cdot OA=\frac{(OI+KA)OA}{2}$, αφού ΟΙ=ΚΑ.

Επομένως σε κάθε περίπτωση το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι:

$$E(\theta)=\frac{\eta\mu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} .$$

Έχουμε $E'(\theta)=$

$$=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)+2\eta\mu^2\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)-2\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}=$$

$$=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)-\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}=$$

$$\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)-(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}=$$

$$=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)(1-\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{2\sigma\upsilon\nu^2\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)} .$$

Επειδή συνθ > 0 για κάθε γωνία θ με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, οι ρίζες και το πρόσημο του $E'(\theta)$ εξαρτώνται από τον αριθμητή. Θέτουμε y=συνθ και εξετάζουμε την τριωνυμική συνάρτηση $g(y)=-y^2-y+1$, με $0<y<1$.

Έχουμε Δ = 5 και ρίζες $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Επειδή

$y\in(0,1)$, δεκτή είναι η $y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Έχουμε:

$0<y<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow g(y)<0$ και $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<y<1\Rightarrow g(y)>0$.

Θέτουμε $\theta_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ τη γωνία με $\sigma\upsilon\nu\theta_0=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Επειδή η συνάρτηση y= συνθ= y(θ) είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{\pi}{2})$, έχουμε:

$0<\theta<\theta_0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu 0>\sigma\upsilon\nu\theta>\sigma\upsilon\nu\theta_0\Rightarrow 1>\sigma\upsilon\nu\theta>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow g(\sigma\upsilon\nu\theta)>0\Rightarrow -\sigma\upsilon\nu^2\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+1>0\Rightarrow E'(\theta)>0$, δηλαδή $E(\theta)$ γνησίως αύξουσα στο $(0,\theta_0)$

$\theta_0<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\,\theta_0>\sigma\upsilon\nu\theta>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>\sigma\upsilon\nu\theta>0\Rightarrow g(\sigma\upsilon\nu\theta)<0\Rightarrow$

$\Rightarrow -\sigma\upsilon\nu^2\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+1<0\Rightarrow E'(\theta)<0$, δηλαδή $E(\theta)$ γνησίως φθίνουσα στο $(\theta_0,\frac{\pi}{2})$.

Τελικά η συνάρτηση $E(\theta)$ παρουσιάζει μόνο στο $\theta=\theta_0$ ολικό μέγιστο.

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου
Ασκήσεις Ανάλυσης

Κουστέρης Νίκος

Άσκηση 1η

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x-1}{x^2+2x-3}, \alpha\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f παρουσιάζει δυο, ένα ή κανένα ακρότατο.

Έστω $\alpha=2$

β. Να βρείτε την τιμή $x=x_o$ όπου η f παρουσιάζει ακρότατο.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x=x_o$

Λύση

α. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{-3,1\}$, αφού

$x^2+3x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$ και $x\neq 1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α με

$$f'(x)=\frac{(2x+\alpha)(x^2+2x-3)-(2x+2)(x^2+\alpha x-1)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$=\frac{(2-\alpha)x^2-4x-3\alpha+2}{(x^2+2x-3)^2}$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ είναι ίσο με το πρόσημο των τιμών του πολυωνύμου

$$P(x)=(2-\alpha)x^2-4x-3\alpha+2$$

- Αν το $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού, η $f'(x)$ έχει δυο άνισες ρίζες, εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο, άρα η f έχει δυο ακρότατα. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν

$$(\alpha\neq 2 \text{ και } \Delta>0)\Leftrightarrow(\alpha\neq 2 \text{ και } -3\alpha^2+8\alpha>0)$$

$$\Leftrightarrow(\alpha\neq 2 \text{ και } \alpha(-3\alpha+8)>0)\Leftrightarrow\left(\alpha\neq 2 \text{ και } 0<\alpha<\frac{8}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\in(0,2)\cup\left(2,\frac{8}{3}\right)$$

- Αν το $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού, η $f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο, άρα η f έχει ένα ακρότατο. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\alpha=2$.
- Αν το $P(x)$ έχει διπλή ρίζα ή δεν έχει πραγματική ρίζα, τότε η $f'(x)$ μηδενίζεται στη διπλή ρίζα, χωρίς να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής, η δεν μηδενίζεται, οπότε η f δεν έχει ακρότατο. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν

$$(\alpha\neq 2 \text{ και } \Delta\leq 0)\Leftrightarrow(\alpha\neq 2 \text{ και } -3\alpha^2+8\alpha\leq 0)$$

$$\Leftrightarrow\left(\alpha\leq 0 \text{ ή } \alpha\geq\frac{8}{3}\right)$$

Συμπερασματικά λοιπόν η f:

- ☞ Έχει δυο ακρότατα, όταν $\alpha\in(0,2)\cup\left(2,\frac{8}{3}\right)$
- ☞ Έχει ένα ακρότατο, όταν $\alpha=2$
- ☞ Δεν έχει ακρότατα, όταν $\alpha\in(-\infty,0]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$

Με $\alpha=2$, έχουμε:

β. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+2x-3}$ και $f'(x)=\dfrac{-4x-4}{(x^2+2x-3)^2}$

οπότε εύκολα έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων της f.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$. Άρα, $x_o=-1$

γ. Με $x\in A$ είναι:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=-1-\sqrt{2} \text{ ή } x=-1+\sqrt{2}$$

και $f(x)>0\Leftrightarrow(x^2+2x-1)(x^2+2x-3)>0$

Το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον επόμενο άξονα

$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
	+		−		+		−		+	

Ζητάμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1, x=0$. Επειδή $[-1,0]\subseteq(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ για κάθε $x\in[-1,0]$ έχουμε $f(x)>0$. Άρα,

$$E=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x-3}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2+2x-3+4}{x^2+2x-3}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{2}{x^2+2x-3}\right)dx,\ (1)$$

Αναζητούμε αριθμούς κ, λ ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει

$$\frac{2}{x^2+2x-3}=\frac{2}{(x-1)(x+3)}=\frac{\kappa}{x-1}+\frac{\lambda}{x-3}$$

Με απαλοιφή παρονομαστών, έχουμε τελικά

$$(\kappa+\lambda)x+3\kappa-\lambda=2$$

που ισχύει για κάθε $x\in A$ μόνο όταν

$$\begin{cases}\kappa+\lambda=0\\ 3\kappa-\lambda=2\end{cases}\ \text{ή ισοδύναμα}\ \begin{cases}\kappa=\dfrac{1}{2}\\ \lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Από την (1), έχουμε λοιπόν,

$$E=\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\left[x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+3|\right]_{-1}^{0}=...=1-\ln\sqrt{3}$$

Άσκηση 2$^{\eta}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-2x)-2x$

α. Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_o=0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(1-2x)+2x=0$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1-16x^4)<16x^4$

ε. Αν θ είναι μια από τις οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου και ισχύει $\ln(\varepsilon\varphi^2\theta)=\sigma\upsilon\nu 2\theta$, να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται αν και μόνο αν:

$$1-2x>0\Leftrightarrow -2x>-1\Leftrightarrow 2x<1\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$

Άρα, $A=(-\infty,1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με

$$f'(x)=\frac{1}{1-2x}(-2)-2=-2\left(\frac{1}{1-2x}+1\right)<0$$

για κάθε $x\in A$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A. Η f έχει σύνολο τιμών

$$f(A)=\left(\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

αφού $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\ln(1-2x)=-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-2x)=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

β. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο A με

$$f''(x)=-2\left(-\frac{1}{(1-2x)^2}(-2)\right)=-\frac{4}{(1-2x)^2}<0$$

οπότε η f είναι κοίλη στο A.

Στο $x_o=0$ έχουμε: $f(0)=0$ και $f'(0)=-4$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $x_o=0$ είναι η $y=-4x$

γ. Στο A έχουμε:

$$\ln(1-2x)+2x=0\Leftrightarrow\ln(1-2x)-2x=-4x$$

$$\Leftrightarrow f(x)=y\ \text{με}\ y=-4x$$

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα τον αριθμό 0 και λόγω της κυρτότητάς της, η εφαπτομένη $y=-4x$ είναι πάνω από την C_f εκτός του σημείου επαφής. Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.

Σημείωση:

Εδώ, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln(1-2x)+2x$ και να διαπιστώσουμε ότι έχει ολικό μέγιστο το $g(0)=0$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=0$

δ. Από τον προφανή περιορισμό $1-16x^4>0$ εύκολα συμπεραίνουμε ότι το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $B=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Γι' αυτές τις τιμές του x έχουμε:

$$\ln(1-16x^4)<16x^4\Leftrightarrow\ln[1-2(8x^4)]<2(8x^4)$$

$$\Leftrightarrow\ln[1-2(8x^4)]-2(8x^4)<0\Leftrightarrow f(8x^4)<f(0)$$

$$\overset{f>}{\Leftrightarrow}8x^4>0\Leftrightarrow x\neq 0$$

Επομένως, λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x με $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

ε. Η δοσμένη ισότητα ορίζεται για κάθε $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει:

$$\ln(\varepsilon\varphi^2\theta) = \sigma\upsilon\nu 2\theta \Leftrightarrow \ln\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln(\eta\mu^2\theta) - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta) - \eta\mu^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta) - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \ln(1-\eta\mu^2\theta) - \eta\mu^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-2\cdot\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\theta) - 2\cdot\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\theta = \ln(1-2\cdot\frac{1}{2}\eta\mu^2\theta) - 2\cdot\frac{1}{2}\eta\mu^2\theta$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\theta\right) = f\left(\frac{1}{2}\eta\mu^2\theta\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1}{2}\eta\mu^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu^2\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\theta = 1 \overset{0<\theta<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\theta = 1 \overset{0<\theta<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \theta = 45^\circ$$

οπότε μια οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου είναι 45°. Άρα, το ορθογώνιο τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άσκηση 3η

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός α ώστε $\ln\alpha + \alpha - 3 = 0$

Β. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2), x > 0$$

α. Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Για τον αριθμό α του ερωτήματος (Α) να αποδείξετε ότι

i. $f(x) + \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha} \geq 0$ **για κάθε** $x > 0$

ii. Υπάρχει $x_o > \alpha$ **ώστε** $f(x_o) + f'(x_o) = 0$

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 3,\ x > 0$ Η g είναι παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$$

για κάθε $x > 0$. Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο Α. Επιπλέον, $g(1) = -2 < 0$ και $g(3) = \ln 3 > 0$ οπότε εφαρμόζεται για την g το Θ. Bolzano στο διάστημα $[1, 3]$.

Συνεπώς, υπάρχει $\alpha \in (1, 3) \subseteq (0, +\infty)$ (μοναδικό, λόγω μονοτονίας της g) ώστε $g(\alpha) = 0$ δηλαδή $\ln\alpha + \alpha - 3 = 0$.

Β) α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α με

$$f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Οι ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$ ταυτίζεται με τις ρίζες και το πρόσημο της $g(x)$. Έτσι, έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \ \text{ και}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$$

αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \alpha]$, γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \alpha$, το $f(\alpha)$.

β. i. Είναι: $f(\alpha) = \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha - 2) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}(\ln\alpha - 2)$

με $\ln\alpha + \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \ln\alpha = 3 - \alpha$ οπότε

$$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha}(3-\alpha-2) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < 0, \text{ αφού } \alpha \neq 1$$

Επομένως, για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) \geq f(\alpha) \Rightarrow f(x) + \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} \geq 0$$

ii. Θεωρούμε τα διαστήματα

$$A_1 = (0, \alpha) \text{ και } A_2 = (\alpha, +\infty)$$

Από την μελέτη της f συμπεραίνουμε ότι

$$f(A_1) = \left(f(\alpha), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = \left(-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}, +\infty\right)$$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$ και

$$f(A_2) = \left(f(\alpha), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = \left(-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}, +\infty\right)$$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$

Ο αριθμός 0 περιέχεται σε καθένα από τα σύνολα $f(A_1), f(A_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα A_1, A_2 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ ώστε

$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x f(x), x\in[x_1, x_2]$
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με

$$h'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$$

και $h(x_1)=h(x_2)=0$, οπότε απ' το Θ. Rolle υπάρχει $x_o\in(x_1, x_2)$ ώστε $h'(x_o)=0$ και

$$h'(x)=0\Rightarrow e^{x_o}\left(f'(x_o)+f(x_o)\right)=0\Rightarrow f'(x_o)+f(x_o)=0$$

Απομένει να δείξουμε ότι ο αριθμός x_o δεν περιέχεται στο διάστημα $(x_1, \alpha]$.

- Αν $x_o=\alpha$ τότε έχουμε το άτοπο
$$f(x_o)+f'(x_o)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}+0=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<0$$
- Αν $x_1<x_o<\alpha$, τότε λόγω της μονοτονίας της f

έχουμε $f(\alpha)<f(x_o)<f(x_1)\Rightarrow -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<f(x_o)<0$
δηλαδή $f(x_o)<0$ και δεδομένου ότι $f'(x)<0$ στο $(0, \alpha)$ καταλήγουμε στο άτοπο $f(x_o)+f'(x_o)<0$
Επομένως, υπάρχει $x_o\in(\alpha, x_2)$ με

$$f(x_o)+f'(x_o)=0$$

γ. Με $x\in A$ είναι:
$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}(\ln x-2)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=e^2$$

x	0	1		e^2		$+\infty$
$x-1$		−	0	+		+
$\ln x-2$		−		−	0	+
f(x)		+	0	−	0	+

Η γραφική παράσταση της f σχηματίζει κλειστή περιοχή με τον άξονα x′x στο διάστημα $[1, e^2]$ όπου για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει $f(x)\le 0$.
Άρα,

$$E=-\int_1^{e^2} f(x)dx=-\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)(\ln x-2)dx=$$

$$\int_1^{e^2}\left(\frac{\ln x}{x}-\ln x-\frac{2}{x}+2\right)dx=\frac{1}{2}[\ln^2 x]_1^{e^2}-[x\ln x-x]_1^{e^2}-2[\ln x]_1^{e^2}$$

$$=\dots=e^2-5$$

Άσκηση 4

Έστω f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)=\ln(g(x)+x), x\in\mathbb{R}$
- $f'(x)=\dfrac{1}{g(x)}, x\in\mathbb{R}$
- $g(x)>0, g(x)+x>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **και** $g(0)=1$

α. Να βρείτε τους τύπους των f, g

Έστω $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ **και** $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

β. Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την ανίσωση

$$f(x^2+2)+f(2x)>f(x^2)+f(2x+2)$$

γ. i. Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt$

ii. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\varphi(x)=\frac{2x}{\ln^2(\sqrt{2}+1)}\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}dt+2\int_0^1 \varphi(x)dx$$

Λύση

α. Είναι:

$$f'(x)=\frac{g'(x)+1}{g(x)+x}\Rightarrow \frac{1}{g(x)}=\frac{g'(x)+1}{g(x)+x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)+x=g(x)g'(x)+g(x)$$

$$\Rightarrow g(x)g'(x)=x\Rightarrow\left(\frac{1}{2}g^2(x)\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}g^2(x)=\frac{x^2}{2}+c,\ (1)$$

και $g(0)=1$, οπότε $c=\frac{1}{2}$. Έτσι, από την (1) έχουμε

$$\frac{1}{2}g^2(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow g^2(x)=x^2+1\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1},$$

αφού $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right), x\in\mathbb{R}$

β. Με $x>0$ η ανίσωση γράφεται

$$f(x^2+2)-f(x^2)>f(2x+2)-f(2x),\ (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=f(x+2)-f(x),\ x>0$$

Επειδή με $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1\right)=...=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

και $f''(x)=-\frac{1}{x^2+1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<0$

η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε στο διάστημα αυτό έχουμε

$$h'(x)=f'(x+2)-f'(x)<0$$

που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα.

Έτσι, έχουμε:

$$(2)\Leftrightarrow h(x^2)>h(2x)\Leftrightarrow x^2<2x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x<2$$

γ. i. Είναι:

$$I=\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}dt=\int_0^1 f(t)\cdot\frac{1}{g(t)}dt=\int_0^1 f(t)f'(t)dt=\frac{1}{2}\left[f^2(t)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(f^2(1)-f^2(0)\right)=\frac{1}{2}\ln^2\left(\sqrt{2}+1\right)$$

ii. Με τη βοήθεια του (γ. i.) έχουμε:

$$\varphi(x)=\frac{2x}{\ln^2(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{1}{2}\ln^2(\sqrt{2}+1)+2\int_0^1\varphi(x)dx=x+2\int_0^1\varphi(x)dx$$

όπου, αν θέσουμε $\int_0^1\varphi(x)dx=c$ παίρνουμε

$$\varphi(x)=x+2c \text{ με } \int_0^1(x+2c)dx=c\Leftrightarrow\frac{1}{2}+2c=c\Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$$

Άρα, $\varphi(x)=x-1,\ x\in\mathbb{R}$

Άσκηση 5

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)e^{x+f(x)}=2x-x^2,\ x>0$
- **Η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$**

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\ln x-x,\ x>0$

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$

δ. Να λύσετε την εξίσωση

$$2\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-2x+3}\right)=2x-1\ ,\ (1)$$

ε. Να βρείτε το σημείο της C_f το πλησιέστερο στην ευθεία $(\varepsilon): y=x$

στ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y=-1$ είναι $E=\frac{1}{2}(\rho^2-4\rho+3)$ όπου ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=-1$ με $\rho\neq 1$

Λύση

α. Είναι:

$$f'(x)e^{x+f(x)}=2x-x^2\Rightarrow f'(x)e^xe^{f(x)}=2x-x^2$$

$$\Rightarrow f'(x)e^{f(x)}=e^{-x}(2x-x^2)\Rightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(x^2e^{-x}\right)'$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}=x^2e^{-x}+c$$

και $f(1)=-1$ οπότε $e^{-1}=e^{-1}+c\Rightarrow c=0$

Έτσι, έχουμε:

$$e^{f(x)}=x^2e^{-x}\Rightarrow f(x)=\ln\left(x^2e^{-x}\right)\Rightarrow f(x)=2\ln x-x,\ x>0$$

β. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=2$ το $f(x)=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)=2\ln\frac{2}{e}<0$

Επιπλέον, $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2\ln x-x)=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\frac{\ln x}{x}-1\right)\right]=-\infty$$

διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1=(0,2)$ και $A_2=[2,+\infty)$. Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα στο A_1 και γνησίως φθίνουσα στο A_2 οπότε:

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\ \lim_{x\to 2^-}f(x)\right)=(-\infty,\ 2\ln 2-2) \text{ και}$$

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\ f(2)\right]=(-\infty,\ 2\ln 2-2)$$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(A_1)\cup f(A_1)=(-\infty,\,2\ln 2-2]$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

Επίσης, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x}-1\right)=-1=\lambda \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}(2\ln x-x+x)=+\infty$$

οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

γ. Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\kappa<2\ln 2-2$ τότε $\kappa\in f(A_1),\ \kappa\in f(A_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$, λόγω της μονοτονίας της, έχει από μια ρίζα στα A_1, A_2 οπότε έχει δυο ρίζες.

- Αν $\kappa=2\ln 2-2$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μοναδική ρίζα την $x=2$.

- Αν $\kappa>2\ln 2-2$ τότε $\kappa\notin f(A_1),\ \kappa\notin f(A_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ είναι αδύνατη.

δ. Επειδή $x^2+2>0$ και

$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$ είναι $\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}>0$,

οπότε

$$(1)\Leftrightarrow 2\ln(x^2+2)-2\ln(x^2-2x+3)=2x-1$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x^2+2)-(x^2+2)-2\ln(x^2-2x+3)+(x^2-2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x^2+2)-(x^2+2)-[2\ln(x^2-2x+3)-(x^2-2x+3)]=0$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+2)-f(x^2-2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+2)=f(x^2-2x+3)\Leftrightarrow x^2+2=x^2-2x+3\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

αφού $(x^2+2)\in A_2$ και $(x^2-2x+3)\in A_2$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα.

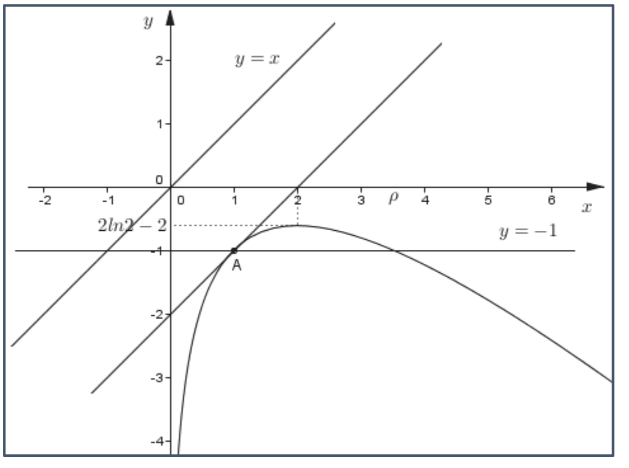
ε. Έστω $M(x,\,2\ln x-x)$ σημείο της C_f. Τότε

$$d(M,(\varepsilon))=\frac{|x-2\ln x+x|}{\sqrt{2}}=\frac{|2x-2\ln x|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,|x-\ln x|$$

Αλλά για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\le x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε $x-\ln x\ge 1$.

Άρα, $d(M,(\varepsilon))\ge\sqrt{2}$ με την ισότητα να επιτυγχάνεται για $x=1$, οπότε το πλησιέστερο στην ευθεία σημείο της C_f είναι το $M(1,f(1))$ δηλαδή το $M(1,-1)$.

στ. Η εξίσωση $f(x)=-1$ που είναι της μορφής $f(x)=\kappa$ με $\kappa=-1$ έχει δυο ακριβώς ρίζες, την προφανή $x=1\in(0,2)$ και την $x=\rho,\ \rho\in(2,+\infty)$ όπως έχουμε προαναφέρει.



Άρα, ισχύει

$$2\ln\rho-\rho=-1\Leftrightarrow 2\ln\rho=\rho-1,\quad (2)$$

και είναι προφανές ότι στο διάστημα $(1,\rho)$ ισχύει $f(x)>0$

Έτσι, έχουμε:

$$E=\int_1^\rho (f(x)-y)dx=\int_1^\rho(2\ln x-x+1)dx=\left[2(x\ln x-x)-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^\rho$$

$$=2\rho\ln\rho-\rho-\frac{\rho^2}{2}-\left(0-1-\frac{1}{2}\right)=2\rho\ln\rho-\rho-\frac{\rho^2}{2}+\frac{3}{2}$$

$$\overset{(2)}{=}\rho(\rho-1)-\rho-\frac{\rho^2}{2}+\frac{3}{2}=\rho^2-\rho-\rho-\frac{\rho^2}{2}+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{\rho^2}{2}-2\rho+\frac{3}{2}=\frac{\rho^2-4\rho+3}{2}$$

που είναι το ζητούμενο.

Μαθηματική Ανάλυση και Γεωμετρία

Μανόλης Μαραγκάκης – Μιχάλης Μεταξάς[1]

Άσκηση 1. **Πόσες λύσεις στο $\mathbb{R}$, έχει η εξίσωση $x^2+2x\sin x-3\cos x=0$;**

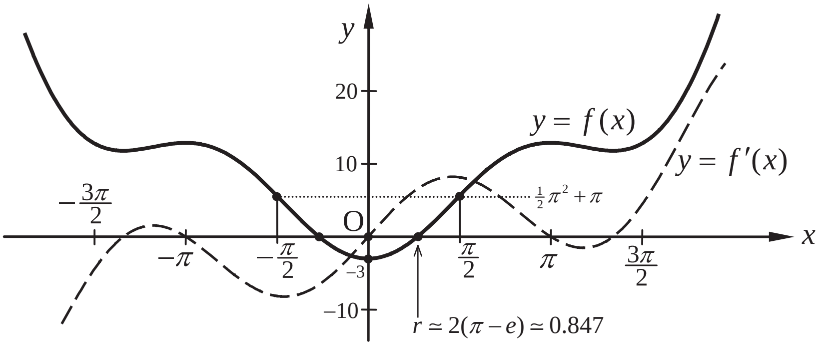
Λύση. Έχουμε, $f(x)=(x^2+2x\sin x+\sin^2 x)+(\cos^2 x-3\cos x-1)=(x+\sin x)^2+\left(\cos x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$

και για $|x|\ge\pi$, δηλαδή $x\in(-\infty,-\pi]\cup[\pi,+\infty)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{cases}(x+\sin x)^2=|x+\sin x|^2\ge(|x|-|\sin x|)^2\ge(\pi-1)^2>(3-1)^2=4\\ \left(\cos x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}=\left|\frac{3}{2}-\cos x\right|^2-\frac{13}{4}\ge\left(\frac{3}{2}-|\cos x|\right)^2-\frac{13}{4}\ge\left(\frac{3}{2}-1\right)^2-\frac{13}{4}=-3\end{cases}.$$

Άρα $f(x)=\underbrace{(x+\sin x)^2}_{>4}+\underbrace{(\tfrac{3}{2}-\cos x)^2-\tfrac{13}{4}}_{\ge-3}>0$ και συνεπώς δεν υπάρχει ρίζα στο $(-\infty,-\pi]\cup[\pi,+\infty)$. Περιορίζομε την αναζήτηση στο $(-\pi,\pi)$. Είναι $f'(x)=2x+2\sin x+2x\cos x+3\sin x=2x(1+\cos x)+5\sin x$.

Ισχύουν:
- $f'(0)=0$
- Για $x\in(-\pi,0)$, $f'(x)=2\underbrace{x(1+\cos x)}_{<0}+5\underbrace{\sin x}_{<0}<0$.
- Για $x\in(0,\pi)$, $f'(x)=2\underbrace{x(1+\cos x)}_{>0}+5\underbrace{\sin x}_{>0}>0$.



Άρα η f' έχει ως μοναδικό σημείο μηδενισμού το $x_0=0$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι η f έχει το πολύ δύο λύσεις, διότι αν είχε λύσεις, τις τρείς διακεκριμένες τιμές r_1,r_2,r_3 ($r_1<r_2<r_3$) τότε, με βάση το θεώρημα του ***Rolle***, η f' θα είχε δύο τουλάχιστον σημεία μηδενισμού, στα διαστήματα (r_1,r_2) και (r_2,r_3) αντιστοίχως. Έχομε $f(0)=-3<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi^2+\pi>0$, και f συνεχής στα διαστήματα $[-\pi/2,0],[0,\pi/2]$.

Επομένως λόγω του θεωρήματος των ***Bolzano-Weierstrass***, υπάρχουν 2 τουλάχιστον ρίζες της $f(x)=0$ στα παραπάνω διαστήματα.

Έχομε αποδείξει ότι υπάρχουν το πολύ δύο λύσεις, συνεπώς η δεδομένη εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Άσκηση 2. **a)** Αν ο k είναι θετικός και σταθερός, να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως f με τύπο $f(x)=e^x x^{-k}$, στο $(0,+\infty)$.

b) Αν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n>0$ και $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\ge\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n.$$

Λύση. a) Η $f'(x)=e^x(x-k)/x^{k+1}$ μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$, μόνο για $x=k$.

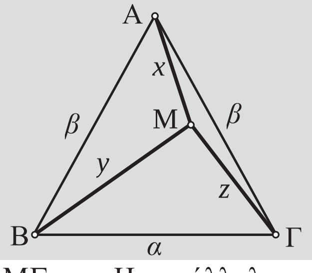
[1] Από το βιβλίο τους Ουσιώδη Μαθηματικά

Εξάλλου $x \in (0,k] \Rightarrow f'(x)<0$ και $x \geq k \Rightarrow f'(x)>0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,k]$ και γνησίως αύξουσα στο $[k,+\infty)$. Άρα για $x=k$ έχουμε ολικό ελάχιστο το $f(k)=e^k \cdot k^{-k}=\left(\frac{e}{k}\right)^k$.

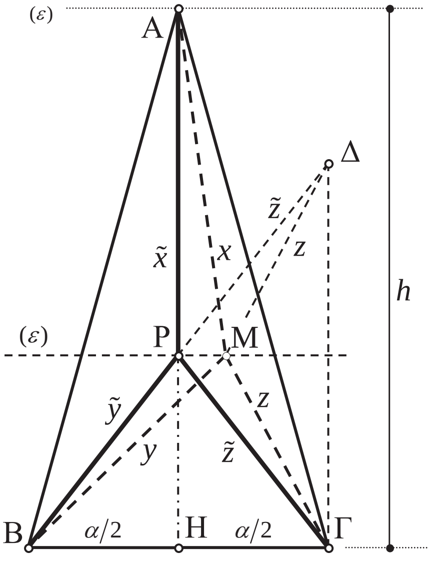
b) Αφού $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n=1$, αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2 \geq \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ln(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)$, ή ότι $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\ln\alpha_i$, ή τελικά ότι $\alpha_i^2 \geq \alpha_i+\ln\alpha_i$ για κάθε $i=1,2,\ldots,n$. Προς τούτο αρκεί για τη συνάρτηση $f(x)=x^2-x-\ln x$ με $x \in (0,+\infty)$ να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Πράγματι έχουμε $f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}$, οπότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty)$, και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$, Στη θέση $x=1$ λοιπόν, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ίσο με $f(1)=0$. Επομένως $f(x) \geq f(1)=0 \Rightarrow x^2-x-\ln x \geq 0$.

Άσκηση 3. Δίνεται ισοσκελές $\triangle AB\Gamma$ με $\beta=\gamma>\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ και σημείο Μ μεταξύ της ΒΓ και της παραλλήλου της (ε) από το Α. Να βρεθεί για ποια θέση του σημείου Μ, η τιμή του αθροίσματος $MA+MB+M\Gamma$ καθίσταται ελαχίστη.



Λύση. Θέτουμε $MA=x$, $MB=y$, $M\Gamma=z$. Η παράλληλος προς την ΒΓ από το Μ και το ύψος ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου έχουν κοινό σημείο το Ρ.



Αν θέσομε $PA=\tilde{x}$, $PB=\tilde{y}$ και $P\Gamma=\tilde{z}$ θα αποδείξομε ότι ισχύει: $\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z} \leq x+y+z$. Είναι απευθείας ορατό ότι, στο ορθογώνιο $\triangle PAM$ ισχύει η σχέση $\tilde{x} \leq x$ (1)

Στην προέκταση της ΒΡ και προς το μέρος του Ρ επιλέγομε σημείο Δ έτσι, ώστε $P\Delta=P\Gamma$. Από το ισοσκελές $\triangle P\Gamma\Delta$ έπεται ότι: $P\Gamma=P\Delta=\tilde{z}$ και $M\Gamma=M\Delta=z$.

Στο $\triangle B\Delta M$ ισχύει ότι $B\Delta \leq BM+M\Delta$ απ' όπου $\tilde{y}+\tilde{z} \leq y+z$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έπεται ότι: $\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}\le x+y+z$ δηλαδή $\tilde{x}+2\tilde{y}\le x+y+z$ (3)

Από την σχέση (3) είναι φανερό ότι προκειμένου να βρούμε το $\min[x+y+z]$ αρκεί να βρούμε, το $F=\min[\tilde{x}+2\tilde{y}]$ και επειδή $\tilde{x}=h-\sqrt{\tilde{y}^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\Rightarrow F=\tilde{x}+2\tilde{y}=h+2\tilde{y}-\sqrt{\tilde{y}^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=F(\tilde{y})$ με $\tilde{y}\in\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$, αρκεί να βρούμε το $\min F(\tilde{y})$.

Έχουμε $F'(\tilde{y})=2\cdot\frac{-\tilde{y}+\sqrt{4\tilde{y}^2-\alpha^2}}{\sqrt{4\tilde{y}^2-\alpha^2}}$, οπότε $F'(\tilde{y})=0\Leftrightarrow -\tilde{y}+\sqrt{4\tilde{y}^2-\alpha^2}=0\Leftrightarrow \tilde{y}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, $F'(\tilde{y})>0\Leftrightarrow \tilde{y}\in\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3},\beta\right)$ και $F'(\tilde{y})<0\Leftrightarrow \tilde{y}\in\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)$.

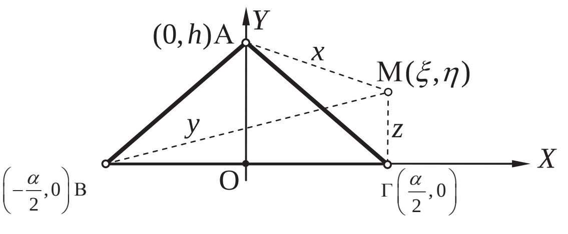
Άρα η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\tilde{y}_0=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, που αντιστοιχεί στο σημείο P_0 του ύψους ΑΗ με $P_0H=\sqrt{\tilde{y}_0^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{3}-\frac{\alpha^2}{4}}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{12}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.

Επομένως το άθροισμα $MA+MB+M\Gamma$ καθίσταται ελάχιστο όταν και μόνο $M\equiv P_0$.

- **Παρατήρηση:** Επειδή το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι $\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3}$ και ισχύει $P_0H=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, συνάγεται ότι το ζητούμενο σημείο P_0 είναι το βαρύκεντρο του ισοπλεύρου τριγώνου Α΄ΒΓ με το Α΄ επί του ημιεπιπέδου (ΒΓ,Α). Η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $MA+MB+M\Gamma$ θα είναι: $F_{\min}=F(\tilde{y}_0)=h+2\tilde{y}_0-\sqrt{\tilde{y}_0^{\,2}-\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2}=h+\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}-\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}=h+\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3}$.

  Σημείωση: *Από το γεγονός ότι* $F'(\tilde{y})=0\Leftrightarrow\tilde{y}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ *και* $F''\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)>0$ *(καθ' όσον* $F''(\tilde{y})=\frac{2\alpha^2}{(4\tilde{y}^2-\alpha^2)^{3/2}}>0$ *με* $\tilde{y}\in\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$*) έπεται ότι το* $F\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)$ *είναι το* ***μοναδικό*** *τοπικό ελάχιστο της F, κατά συνέπεια και ολικό ελάχιστο αυτής.*

  Σχόλιο. *Είναι απ' ευθείας ορατό ότι η γεωμετρική λύση, υπερτερεί της αλγεβρικής!*



$$\begin{cases} x=\sqrt{\xi^2+(\eta-h)^2}\\ y=\sqrt{(\xi+\frac{1}{2}\alpha)^2+\eta^2}\\ z=\sqrt{(\xi-\frac{1}{2}\alpha)^2+\eta^2}\end{cases}$$

$$x+y+z=\sqrt{\xi^2+(\eta-h)^2}+\sqrt{\left(\xi+\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\eta^2}+\sqrt{\left(\xi-\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\eta^2}=f(\xi,\eta).$$

αφού για την ελαχιστοποίηση της f απαιτούνται οι υπολογισμοί των $\frac{\partial f}{\partial\xi},\frac{\partial f}{\partial\eta},\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2},\ldots$ που εκφεύγουν του σχολικού βιβλίου

- Ενδιαφέρον θέμα αποτελεί πλέον ο έλεγχος της ύπαρξης ελαχίστου, όταν το Μ δεν βρίσκεται μεταξύ των παραλλήλων ΒΓ, (ε) καθώς και όταν $\beta=\gamma\le\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ (Ανοικτό πρόβλημα).