Η σημασία των δημοσίων αντιπαραθέσεων περί του τι είναι απαραίτητο να διδάσκεται στα Μαθηματικά επειδή είναι χρήσιμο για τη ζωή στην κοινωνία

Jean Dhombres
Directeur d'études, EHESS, Paris
jean.dhombres@ehess.fr

Απόδοση στα ελληνικά
Έλενα Μανδήλα[1] & Φραγκίσκος Καλαβάσης[2]
[1]Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης [2]Καθηγητής Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Περίληψη

Επιδιώκω να ανακαλύψω ξανά το πνεύμα των συζητήσεων σχετικά με τα μαθηματικά θέματα τα οποία προορίζονται για διδασκαλία, όταν ο μετασχηματισμός της κοινωνίας είναι ορατός. Επιδιώκω ρητά να μην σβήσω, με το πρόσχημα των λεγόμενων μαθηματικών αναγκών, οποιαδήποτε συζήτηση εκπαιδευτικών για τον ρόλο των μαθηματικών στη διαμόρφωση νόων που συνυπάρχουν. Επιλέγω μόνο δύο παραδείγματα, ένα για δεκαδικούς αριθμούς τους και ένα για την καρτεσιανή άλγεβρα, όταν αποκλείεται ο διαφορικός λογισμός.

Λέξεις κλειδιά: δημόσιες αντιπαραθέσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών, δεκαδικοί αριθμοί, Καρτεσιανή άλγεβρα.

ΣΤΟΧΟΙ

Οι αναζητήσεις γύρω από το περιεχόμενο των Μαθηματικών αναπτύχθηκαν, χωρίς να περιορίζονται αποκλειστικά σε οδηγίες διδασκαλίας, από τη στιγμή που η εκπαίδευση έγινε πολιτικό ζήτημα με την έννοια ότι ξεπέρασε το τοπικό πλαίσιο ενός και μόνο εκπαιδευτικού ιδρύματος σε μία μόνο πόλη. Αυτό συνέβη με τα κολλέγια των Ιησουϊτών στις αρχές του 17^{ου} αιώνα, η επιτυχία των οποίων ξεπέρασε τις προσδοκίες τους, που ωστόσο δεν ήταν επιθυμητές από τον ιδρυτή τους Ιγνάτιο Λογιόλα: επιδιώκοντας να διαμορφώνουν ένα πνεύμα κοινωνικό-χριστιανικό για τις ελίτ, τους είχε φανεί χρήσιμο να κατασκευάσουν την εικόνα μιας αυστηρά δομημένης επιστήμης για τα Μαθηματικά, τα οποία προόριζαν όμως μόνο για λίγους με σκοπό την αριστεία και τον ανταγωνισμό. Ανάλογες αναζητήσεις εμφανίζονται πιο καθαρά στη Γαλλία με τη δημιουργία των λυκείων το 1802, καθώς το κράτος έπρεπε να ορίσει ένα εθνικό πρόγραμμα για την οργανωμένη και επαρκή μόρφωση όλων των πολιτών. Οι αναζητήσεις βεβαίως αναπτύσσονταν μέσα στον εκπαιδευτικό κόσμο, έναν κόσμο απομονωμένο, σχολικό, αλλά που η ευρύτερη προβληματική για το τι θα έπρεπε να προσδοκούμε από τα Μαθηματικά, τον καθιστούσε ευαίσθητο στις τάσεις και τις ιδεολογίες. Το σκεπτικό των Ιησουιτών για τα προσδοκώμενα αποτελέσματα από τη διδασκαλία των μαθηματικών, αν και διαφορετικό από το κρατικό κατέληγε σε παρόμοιο αποτέλεσμα, εκτός από το γεγονός ότι στη Δημοκρατία αφορούσε τη μόρφωση όλων των πολιτών.

Αυτές οι αναζητήσεις και αντιπαραθέσεις αποτελούν ένα πλούτο, δυστυχώς όχι επαρκώς μελετημένο από την ιστορική ούτε από την μαθηματική κοινότητα, καθώς συνήθως τις ενσωματώνουν στο γενικότερο μεταρρυθμιστικό ρεύμα που εμφανίστηκε τον 16^{ο} αιώνα, ή αργότερα συνδέοντας την έννοια της «μεταρρύθμισης των Μαθηματικών» με την έννοια της προσαρμογής σε αυτό που από τον 18^{ο} αιώνα ονομάζουμε πρόοδο, ή ακόμη και σε αυτό που τη δεκαετία του 1960 αποκλήθηκε *Μοντέρνα Μαθηματικά*, ή αν προτιμάτε τον αμερικανικό όρο, Νέα Μαθηματικά (*New Math)*. Πράγματι, αν συνδεθεί η λέξη μεταρρύθμιση με τη Θρησκευτική Μεταρρύθμιση, πώς είναι δυνατό να μην συνδεθούν στη συνέχεια τα Μοντέρνα Μαθηματικά με την άνοδο της ψηφιακής εποχής;

Δεν υποτιμώ βεβαίως την ύπαρξη αξιόλογων έργων σχετικά με την ιστορία της διδασκαλίας των Μαθηματικών, έχοντας μάλιστα συμβάλει και προσωπικά σε μερικά, αλλά παρατηρώ ότι συχνά αποσιωπάται η ίδια η ύπαρξη τέτοιων αναζητήσεων και αντιπαραθέσεων, ειδικά όταν αναφέρονται στο εάν θα πρέπει να απαλειφθούν ορισμένες θεωρίες, που για πολύ καιρό ήταν κυρίαρχες, ή τουλάχιστον σημαντικές στη μαθηματική εκπαίδευση. Κι αυτό, όχι μόνο επειδή το απαιτεί η εποχή λόγω της εξέλιξης της αρχαίας επιστήμης του Ευκλείδη, που αδίκως θεωρείται αμετάβλητη, αλλά και λόγω της επιδιωκόμενης προσαρμογής της μαθηματικής εκπαίδευσης στις ανάγκες της κοινωνίας· ανάγκες τεχνικές, αλλά και ιδεολογικές ή πνευματικές, οι οποίες συχνά δεν είναι αυστηρά ορισμένες.

Θυμάμαι, όταν ήμουν Διευθυντής του Τμήματος Μαθηματικών τη δεκαετία του 1980, την παντελή έλλειψη απαντήσεων από βιομηχανίες της ψηφιακής τεχνολογίας σχετικά με το τι γνώσεις και ικανότητες θα προσδοκούσαν από τους απόφοιτους και τις απόφοιτες ενός Τμήματος Μαθηματικών, θεωρώντας, κατά κάποιον τρόπο, ότι δεν τους ενδιέφερε, από τη στιγμή που ανέπτυσσαν ένα νέο πεδίο υψηλού ανταγωνισμού. Αυτά ήταν διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης που είχαν σκεφτεί πολύ νωρίτερα οι Ιησουίτες. Δεν θα πρέπει ασφαλώς να υποβαθμίζουμε το ουσιώδες, το πλαίσιο.

Έτσι, ανάμεσα σε αυτά που παραλείφθηκαν τον 19^{ο} αιώνα, ή που μεταφέρθηκαν σε άλλες επιστήμες όπως στη φυσική, θα πρέπει να αναφερθεί η *θεωρία των αναλογιών*, την οποία εξήραν οι Ιησουίτες, όπως ο Clavius στα τέλη του 16^{ου} αιώνα, αλλά εξαφανίστηκε με την αλγεβρική προσέγγιση και την αριθμητικοποίηση των μεγεθών. Παρομοίως, η *θεωρία των κωνικών τομών* έχει εξαφανιστεί από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σήμερα στη Γαλλία. Ένα ζήτημα όπως αυτό της ομοιότητας όλων των παραβολών φαίνεται ξεπερασμένο, όπως και η έννοια της οικογένειας των καμπυλών. Αντίστροφα, δεν μπορεί κανείς να παραγνωρίσει τη διαρκή παρουσία –είναι άραγε αυτή η σωστή λέξη;– ενός θέματος όπως η αλγοριθμική πολυπλοκότητα της εύρεσης του ΜΚΔ δύο αριθμών, που υπάρχει στον Ευκλείδη. Εάν τέτοιου είδους ζητήματα έχουν αποτελέσει αντικείμενο αντιπαράθεσης, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι στις μαθηματικές αντιπαραθέσεις η φύση του διαλόγου δεν έχει πολλά κοινά με ένα καθεστώς κοινοβουλευτικών αντιπαραθέσεων.

Δεν έχω την πρόθεση, όπως αντιλαμβάνεται κανείς από το μέγεθος της παρέμβασής μου, να εστιάσω σε συγκεκριμένες μεταρρυθμίσεις ή να εκφράσω απογοήτευση για την εγκατάλειψη θεμάτων που κάποτε ήταν τα αγαπημένα των εκπαιδευτικών. Προσπαθώ να αναδείξω το πνεύμα των αντιπαραθέσεων γύρω από τα περιεχόμενα των Μαθηματικών για την εκπαίδευση όταν υπάρχει στον ορίζοντα μια κοινωνική μεταρρύθμιση. Συγκεκριμένα, προσπαθώ να μην χαθούν, υπό το πρόσχημα των προβαλλόμενων ως Μαθηματικών αναγκών, οι αναζητήσεις των εκπαιδευτικών για τον ρόλο των Μαθηματικών στην πνευματική διαμόρφωση των ανθρώπων, ώστε να συμβιώνουν αρμονικά στην κοινωνία. Καθώς δεν είναι εφικτό σε αυτό το κείμενο να δούμε αναλυτικά τα πειράματα και τις αναζητήσεις, θα επικεντρωθούμε στο γεγονός ότι, χωρίς να διεκδικούν να επιβάλουν ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα ή μια μεταρρύθμιση, οι μαθηματικοί συχνά διατύπωναν δημόσια ερωτήματα για τις μεταρρυθμίσεις, που πήγαιναν πέραν από τη γνώμη που ενδεχομένως να είχαν οι ίδιοι. Όσο σπουδαίοι κι αν θεωρούντο, οι δημόσιες τοποθετήσεις τους πήγαιναν πέρα από τη δογματική ρητορική των εγχειριδίων! Αν επομένως ο Henri Lebesgue υποστήριζε ότι ο μαθηματικός είναι άνθρωπος δράσης, δεν μπορεί όσοι και όσες διδάσκουν Μαθηματικά να θεωρούνται απλώς ως ουδέτερα πιόνια στην κοινωνία, και θα πρέπει να ακούμε σοβαρά τις δικές τους αμφιβολίες, τις οποίες ονόμασα αναζητήσεις και αντιπαραθέσεις.

Δίνοντας λοιπόν ξανά τον λόγο σε αυτούς-τες τους/τις παιδαγωγούς μαθηματικούς χωρίς να σας κουράσω με πολύ λεπτομερείς περιγραφές, επέλεξα να παρουσιάσω δυο σχετικά απλά και αρκούντως σαφή μαθηματικά παραδείγματα, για τα οποία είναι οι ίδιοι οι μαθηματικοί που έθεσαν και οργάνωσαν το πλαίσιο των αντιπαραθέσεων. Αυτά τα παραδείγματα είναι οι δεκαδικοί αριθμοί και η διατήρηση της καρτεσιανής άλγεβρας.

Αν και οι δεκαδικοί αριθμοί συνιστούν ένα τυπικό παράδειγμα αυτού που υπήρξε αντικειμενικά χρήσιμο για την κοινωνία, παρά τις αγγλικές αντιρρήσεις για περισσότερο από έναν αιώνα, το δεύτερο θέμα, αυτό της καρτεσιανής άλγεβρας, ενδεχομένως να μοιάζει λιγότερο προφανές. Ωστόσο, αυτό το παράδειγμα θα μου επιτρέψει να διευκρινίσω καλύτερα την έννοια αυτού που αποκαλώ μαθηματική δημόσια αντιπαράθεση επιχειρημάτων. Ξεκινώ, λοιπόν ένα ταξίδι, για το οποίο έχω επιλέξει να περιορίσω τις σημειώσεις μου, παραθέτοντας μόνο λίγες αναφορές, ώστε να τονίσω περισσότερο τα ερωτήματα και τις αμφιβολίες που εμφανίζονται εκεί, όπου συνήθως παρουσιάζονται δογματικές βεβαιότητες με την απουσία δημόσιας αντιπαράθεσης και επιχειρηματολογίας.

ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΟ ΠΝΕΥΜΑ ΤΗΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ

Είναι χαρακτηριστικό ότι αυτή η επίσημη δημόσια επιχειρηματολογία, οργανωμένη και καταγεγραμμένη σε πρακτικά, φέρνει αντιμέτωπους όχι μόνο τον Lagrange και τον Laplace στις 30 Ιανουαρίου 1795 –δύο αναγνωρισμένους επιστήμονες, με τον δεύτερο να μην έχει ακόμη φτάσει τα πενήντα και τον πρώτο να πλησιάζει τα εξήντα– αλλά και τους μαθητές. Οι τελευταίοι, περισσότεροι από χίλιοι, προορίζονται να γίνουν οι μελλοντικοί «δάσκαλοι» της Δημοκρατίας σε αυτό το «επαναστατικό» σχολείο του έτους III που ονομάστηκε École Normale, και που η διάρκειά του περιορίστηκε σε μερικούς μήνες.

Από την έναρξη των μαθημάτων, στις 20 Ιανουαρίου, ο Laplace αναφέρει «το πλεονέκτημα όλες οι διαιρέσεις της μονάδας να είναι δεκαδικές», και χωρίς δισταγμό δικαιολογεί την υιοθέτηση από το Σύνταγμα του «συστήματος διαίρεσης όλων των μονάδων σε δεκαδικά μέρη»[1]. Είναι η πρώτη φορά που ένα μάθημα γενικών Μαθηματικών επικαλείται με αυτόν τον τρόπο μια κυβερνητική απόφαση! Άλλωστε, στο τελευταίο μυθιστόρημα που δημοσίευσε πριν πεθάνει, το Quatre-vingt-treize (ενενήντα τρία), παρά την πτώση των Γιρονδίνων, την Τρομοκρατία και τους πολέμους της Βανδέας, ο Βίκτωρ Ουγκώ θα επαινέσει το Σύνταγμα για τη δημιουργία του «δημοκρατικού δεκαδικού μετρικού συστήματος». Το ενδιαφέρον μου εδώ δεν επικεντρώνεται στην οικουμενικότητα του συστήματος, βασισμένου στη Φύση –το μήκος της περιφέρειας της Γης– αλλά στην πραγματική συζήτηση που ξεκίνησε τότε.

Ως επιστημολόγος, ο Lagrange ανοίγει τον διάλογο των ιδεών και απευθύνεται στους μαθητές που ήρθαν να συζητήσουν, τους οποίους αποκαλεί πολίτες:

> Πολίτες, θα έπρεπε να έχετε δει ότι η ευκολία, η κανονικότητα και η ομοιομορφία των αριθμητικών πράξεων προέρχονται από την ευτυχή ιδέα να δώσουμε στα αριθμητικά ψηφία μια τοπική αξία, κάνοντας κάθε ψηφίο δέκα φορές αριθμητικά πιο σημαντικό καθώς μετατοπίζεται προς τα αριστερά.
>
> Αυτή η απλή ιδέα διέφευγε για μεγάλο χρονικό διάστημα όχι μόνο από τους ανθρώπους γενικά, αλλά και από τους επιστήμονες και τους γεωμέτρες. Στην Ευρώπη έγινε γνωστή μόνο από τον 10ο αιώνα· ο Γάλλος μοναχός Gerber φαίνεται να την έμαθε από τους Άραβες που τότε κυριαρχούσαν στην Ισπανία, και θεωρείται ο πρώτος που τη

[1] Première Leçon de Laplace, in Jean Dhombres (dir.), L'Ecole normale de l'an III. Leçons de mathématiques: Lagrange-Laplace-Monge, Dunod, 1992, p. 49. L'ouvrage est abrégé en: L'Ecole normale de l'an III.

> διέδωσε, μαζί με τους κανόνες της αριθμητικής που εξαρτώνται φυσικά από αυτήν[2].

Ένας μαθητής, του οποίου το όνομα δεν έχει καταγραφεί, παίρνει τον λόγο για να επικρίνει τους δύο διδάσκοντες μαθηματικούς , τον Lagrange και τον Laplace, για τις υπερβολικά θεωρητικές τους θέσεις, καθότι και οι δύο είχαν αναφερθεί και στο δυαδικό σύστημα, καθώς και στο δωδεκαδικό σύστημα, για το οποίο χρειάζεται να επινοηθούν δύο νέες ονομασίες για το 10 και το 11. Ο μαθητής δηλώνει:

> Ζυγίζοντας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του δεκαδικού υπολογισμού με εκείνα του δωδεκαδικού υπολογισμού, αναπτύξατε με κάποια συστολή τον δωδεκαδικό υπολογισμό και παρουσιάσατε όλα τα πλεονεκτήματά του.
>
> Ωστόσο, αφού εξισορροπήσατε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα, καταλήξατε στον δεκαδικό υπολογισμό, και αναρωτιέμαι πόσο θάρρος και τόλμη θα απαιτείται για να γίνετε νομοθέτες σε αυτό το ζήτημα, καθώς όλα τα έθνη θα σας ακολουθούσαν.
>
> Θα σας ρωτήσω, λοιπόν, πολίτη, αν είχατε στ'αλήθεια πιστέψει ότι ο δωδεκαδικός υπολογισμός ήταν πιο τέλειος[3].

Ο Lagrange, βεβαίως, επαινεί το σύστημα με βάση το 12 από θεωρητική άποψη, επειδή αυτός ο αριθμός έχει πολλούς διαιρέτες –2, 3, 4, 6– κάτι που επιτρέπει τις «φυσικές» κλασματικές διαιρέσεις, όπως το μισό, το τρίτο, το τέταρτο και το έκτο. Κάνει αναφορά στο εξηκονταδικό σύστημα, που χρησιμοποιείται ακόμη από τους αστρονόμους, αλλά δεν αναφέρει το επαναστατικό «γκραντ» (βαθμό), τους 100 γκραντ (βαθμούς) αντί για τις 90 μοίρες για την ορθή γωνία. Ο Laplace, από την πλευρά του, θα διατηρήσει το γκραντ σε όλη του τη ζωή στο έργο του Traité de mécanique céleste, που θα δημοσιευτεί από το 1799 και μετά. Η συζήτηση γίνεται πιο συγκεκριμένα κοινωνική, καθώς ο Lagrange εκτιμά ότι η «δεκαδική αριθμητική», αυτό που αποκαλεί «δεκαδικά κλάσματα», έχει την παιδαγωγική ικανότητα να αναγκάζει τα πνεύματα να επιδιώκουν την ακρίβεια:

---

[2] Premier débat, L'Ecole normale de l'an III, p. 193.

[3] Idem, p. 199.

> Για παράδειγμα, σας ζητούν να φτιάξετε ένα ένδυμα, χρησιμοποιώντας δύο πήχεις και ένα τρίτο του υφάσματος. Θα βρείτε ότι το ένα τρίτο είναι πολύ, και θα προτιμήσετε να πάρετε ένα τέταρτο. Όμως, δεν έχετε σαφή ιδέα για το πόσο μεγαλύτερο είναι το ένα τρίτο σε σχέση με το ένα τέταρτο. Αν σας ζητήσουν τρία μέτρα και τρία δεκατόμετρα από ένα ύφασμα, και αν διαπιστωθεί ότι δεν είναι αρκετό, θα πάρετε τέσσερα ή πέντε δεκατόμετρα αντί για τρία, και θα γνωρίζετε πάντα με ακρίβεια πόσο αυξάνετε την ποσότητα, κάτι που δεν συμβαίνει με τα συνηθισμένα κλάσματα[4].

Ο Lagrange εισάγει ξαφνικά το νέο λεξιλόγιο του μετρικού συστήματος, με το εκατοστό ως το εκατοστό μέρος του μέτρου, το οποίο δίνει το μέτρο της επιθυμητής προσέγγισης και ενισχύει την αίσθηση της ακρίβειας. Αν και αυτή είναι το κύριο θέμα αυτής της École normale, ακόμα και με την περιγραφική γεωμετρία του Monge που επιτρέπει στον εργάτη να μιλά την ίδια γλώσσα με τον μηχανικό, ο διάλογος δεν είναι ακόμη κλειστός. Ο Laplace υιοθετεί ένα επιχείρημα που οι Άγγλοι θα αναπτύξουν τον 20ο αιώνα: η συνήθεια να υπολογίζεις με βάση το έξι και το δώδεκα αναγκάζει το πνεύμα να βρίσκεται σε εγρήγορση, σε αντίθεση με την «άνεση» που προσφέρει το δεκαδικό σύστημα, το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε πνευματική τεμπελιά. Η πρακτική του διαλόγου εδώ δεν έχει κάποια επιφύλαξη στο να διατυπώνει και να διευκρινίζει διαφορετικές οπτικές, ακόμη και αντικρουόμενες, ακόμα και όταν έχει ήδη αποφασιστεί μια κατεύθυνση.

Το δεύτερο παράδειγμά μου επιδιώκει να επισημάνει αυτήν ακριβώς τη διαλεκτική προσέγγιση της επιλογής, που δεν αποκρύπτει ότι υπήρξε διαβούλευση και δεν παραλείπει να δώσει τους λόγους της εκάστοτε επιλογής.

Η ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Θα αναφερθώ τώρα ξανά σε έναν καθηγητή Μαθηματικών, έστω κι αν είναι περισσότερο γνωστός ως ο δημιουργός του φιλοσοφικού συστήματος που ονομάζουμε θετικισμό. Ο Auguste Comte δημοσίευσε το πρώτο μέρος του *Cours de philosophie positive* (μαθήματα θετικής φιλοσοφίας) το 1830, αλλά εδώ θα χρησιμοποιήσω τη διατύπωση από την πραγματεία του *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux ou trois dimensions* (στοιχειώδης πραγματεία της αναλυτικής γεωμετρίας σε δύο ή τρεις διαστάσεις), που

[4] Idem, p. 200.

εκδόθηκε το 1843, και της οποίας επιμελούμαι μια κριτική επανέκδοση που θα δημοσιευτεί το 2025 από τον εκδοτικό οίκο Hermann στη σειρά με τα άπαντα του Comte.

Θα περιμέναμε, από έναν τέτοιο συγγραφέα, μια έντονα δογματική παρουσίαση, αφού ο στόχος του είναι να ωθήσει φιλοσοφικά στα άκρα τη μέθοδο του Καρτέσιου, που είχε εκφραστεί το 1637 σε ένα συμπλήρωμα του διάσημου έργου του *Discours de la Méthode* (Λόγος περί της μεθόδου).

> Η αναλυτική γεωμετρία, όπως τη θεμελίωσε ο Καρτέσιος, έχει ουσιαστικά σκοπό να γενικεύσει όσο το δυνατόν περισσότερο τις διάφορες γεωμετρικές θεωρίες, σύμφωνα με την εσωτερική τους υπαγωγή σε αναλυτικές έννοιες, υποβάλλοντας τα διάφορα ερωτήματα σε ισάριθμες ομοιόμορφες μεθόδους, που είναι αναγκαστικά εφαρμόσιμες σε όλα τα κατάλληλα καθορισμένα σχήματα, είτε περιοριστούμε στην επίπεδη γεωμετρία, η οποία εδώ πρέπει να αποτελεί το πρώτο και κύριο αντικείμενο μελέτης μας, είτε επεκταθούμε, όπως θα κάνουμε αργότερα, στη μελέτη οποιασδήποτε επιφάνειας[5].

Ο Comte περιγράφει αυτή τη γεωμετρία για να ισχυριστεί ότι με τη χρήση της πολυωνυμικής άλγεβρας και των εξισώσεων των καμπυλών:

> η νέα γεωμετρική μέθοδος που καθιέρωσε ο Καρτέσιος έχει βασικό χαρακτηριστικό ότι απομονώνοντας την κάθε συνθήκη ενός προβλήματος, να το υποβάλλει σε μια πλήρως γενική λύση, πραγματοποιώντας μια κατάλληλη αναγωγή του συγκεκριμένου στο αφηρημένο[6].

Αυτή η αναγωγή είναι η έκφραση μιας συγκεκριμένης οπτικής για το τι πρέπει να είναι μια εκπαίδευση που να χαρακτηρίζεται ως στοιχειώδης, αλλά δεν θα επιχειρήσω να αναλύσω εδώ αυτό που ο Comte αναπτύσσει σε πάνω από πεντακόσιες σελίδες. Εκείνο όμως στο οποίο θα ήθελα να επιμείνω, είναι η ανάδειξη και ο ρόλος μιας δημόσιας επιχειρηματολογίας. Από τη μία πλευρά, ο Comte διευκρινίζει ότι το έργο του μπορεί να έχει νόημα μόνο για ανθρώπους που έχουν ήδη λάβει μια ορισμένη εκπαίδευση, που βρίσκονται

---

[5] Auguste Comte, Traité élémentaire de géométrie analytique à deux ou trois dimensions, contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire, Paris, Carilian-Goeury et Victor Dalmont, 1843 (n° 1).

[6] Idem, n° 2.

μακριά λοιπόν από μια πνευματική *tabula rasa*. Πρέπει να έχουν ήδη παρακολουθήσει:

> 1^{ον} περίπου δεκαπέντε μαθήματα αριθμητικής (θεωρίας αριθμών), 2^{ον} τριάντα μαθήματα του συνήθους μέρους της άλγεβρας, που περιλαμβάνει την πλήρη εξέταση των δύο πρώτων βαθμών, τον διωνυμικό τύπο, τον υπολογισμό των ριζών, τη θεωρία των δύο απλούστερων προόδων και τη θεωρία των λογαρίθμων συμπληρωμένη από την επίλυση των αντίστοιχων εκθετικών εξισώσεων, 3^{ον} τριάντα μαθήματα για τη στοιχειώδη γεωμετρία, προσεκτικά υποστηριζόμενη από αλγεβρικό λογισμό στις περιπτώσεις που αυτό απαιτείται φυσικά, 4^{ον} δεκαπέντε μαθήματα τριγωνομετρίας, χωρίς να εξαιρείται η επίλυση των σφαιρικών τριγώνων, 5^{ον} δέκα μαθήματα στοιχείων περιγραφικής γεωμετρίας, και, τέλος, 6^{ον} είκοσι μαθήματα στοιχειώδους στατιστικής[7].

Από την άλλη πλευρά, η προσέγγιση την οποία ο Comte υπαγορεύει για τη θεωρία των καμπυλών συνιστά μια σαφή άρνηση να χρησιμοποιήσει την έννοια της παραγώγισης, εκείνη του ορίου και συνεπώς του απειροστικού λογισμού. Διότι ο Καρτέσιος είχε αναπτύξει τη μέθοδο των ακαθόριστων συντελεστών για τον προσδιορισμό των επαφών τουλάχιστον δεύτερης τάξης, ώστε να κατανοήσει το γεγονός της εφαπτομενικότητας. Η επιχειρηματολογία που παραθέτει ο Comte αποσκοπεί στο να δείξει ότι οι μέθοδοι, ιδιαίτερα εκείνη του Roberval γύρω στο 1640 για την εύρεση των εφαπτομένων σε ορισμένες μη αλγεβρικές καμπύλες, όπως η κυκλοειδής, καταλήγουν να στηρίζονται στην παράγωγο. Είναι επομένως ακατάλληλες για τον στόχο που έχει θέσει ο Comte. Ο τόνος του είναι σκληρός, αλλά είναι σημαντικό ότι υπάρχει η περιγραφή μιας άλλης οδού.

> Πριν εγκαταλείψω τη μελέτη των εφαπτομένων, πιστεύω ότι πρέπει συνοπτικά να χαρακτηρίσω ιστορικά αξιοσημείωτη τη μέθοδο με την οποία ο Roberval, ενώ πολεμούσε με τυφλή εμμονή τη μεγάλη καρτεσιανή ανανέωση, έδωσε, με τον δικό του τρόπο, μια ακούσια μαρτυρία της ανάγκης για γενίκευση που απασχολούσε τότε το μαθηματικό πνεύμα, καταβάλλοντας μια προσπάθεια, πιο

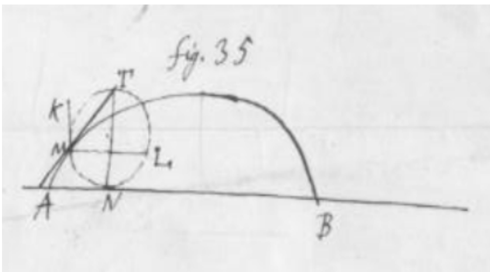
[7] Idem, Avertissement de l’auteur.

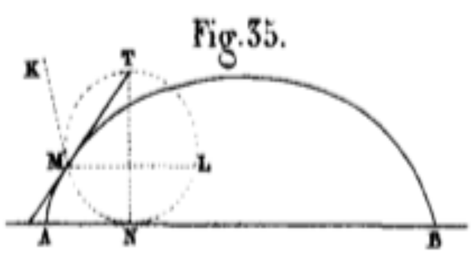
> αξιοθαύμαστη παρά επιτυχημένη, να συγκροτήσει χωρίς τη βοήθεια των αναλυτικών εννοιών μια γενική θεωρία των εφαπτομένων[8].

Η δημόσια αντιπαράθεση, και επιμένω σε αυτή τη λέξη, έγκειται στην απόδειξη ότι δεν υπάρχει εναλλακτική μέθοδος από του Leibniz, εάν θέλουμε να γενικεύσουμε. Δεν είναι δυνατόν να την αναπαράγω πλήρως εδώ, αλλά λίγα σχήματα –τέσσερα στην πραγματικότητα– είναι αρκετά.

Τα δύο πρώτα (Εικόνα 1 και Εικόνα 2) είναι, αφενός, το ατελές σχέδιο από το χειρόγραφο του Comte (Εικόνα 1), και δεξιά (Εικόνα 2) η καθαρή αναπαράστασή της από τον εκδότη του Comte το 1843 για την κατασκευή της εφαπτομένης ΜΤ, όπου το σημείο Τ βρίσκεται στο αντίθετο άκρο της διαμέτρου από το σημείο Ν, σημείο επαφής του κύκλου με την οριζόντια ΑΒ, όταν κυλά χωρίς να ολισθαίνει.

Αυτό που σημειώνει ο Comte είναι απλώς ότι η ΜΤ είναι η διχοτόμος της γωνίας KML, γνωρίζοντας ότι η ΜΚ είναι η εφαπτομένη στον κινητό κύκλο στο σημείο Μ. Ο Comte δεν θέλει να χρησιμοποιήσει το τέχνασμα του Roberval, ο οποίος κατασκευάζει ένα ρόμβο πάνω στην οριζόντια και την εφαπτομένη στον κύκλο (Εικόνα 3), ούτε εκείνο του Καρτέσιου, αλλά όχι στη Γεωμετρία του, όπου μια στιγμιαία περιστροφή βρίσκεται σε εξέλιξη (Εικόνα 4).

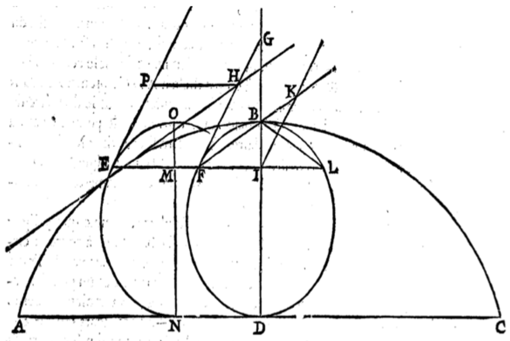




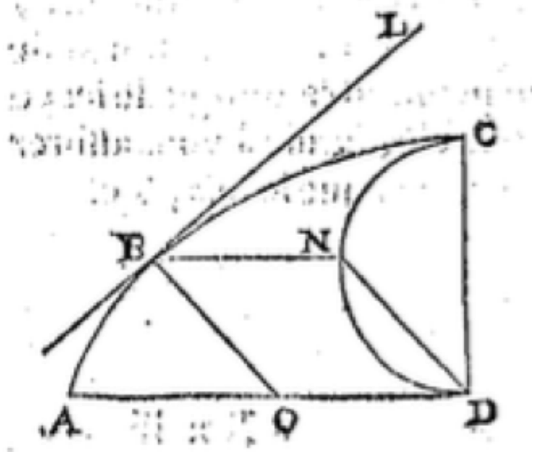
Εικόνα 1 και Εικόνα 2: Δύο σχέδια του Comte το 1843 για την κατασκευή της εφαπτομένης στην κυκλοειδή.

---

8 Idem, n° 47.



Εικόνα 3: Η εφαπτόμενη στον κυκλοειδή κατασκευασμένη από ένα ρόμβο EFHP κατά τον Roberval. Αυτό το σχέδιο έχει δημοσιευτεί το 1693, αλλά το χειρόγραφο είναι διαθέσιμο μέσα στην δεκαετία του 1640.



Εικόνα 4: Η ίδια ερώτηση απαντήθηκε από τον Καρτέσιο το 1638: το σημείο O της επαφής του ακίνητου κύκλου είναι στιγμιαίο κέντρο περιστροφής, και επομένως η εφαπτομένη BL είναι κάθετη στην BO, κάτι που στη συνέχεια οδηγεί στο γεγονός ότι η BL είναι παράλληλη με την NC.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Προφανώς, δεν υποστηρίζω μια διδασκαλία των Μαθηματικών όπου όλα θα τίθενται σε συζήτηση. Η παράδοση δεν σφάλλει επισημαίνοντας ότι με τη λέξη «μαθηματικά» αναδύεται ένα περιβάλλον κατοχύρωσης κανόνων που θα χρειαζόταν πολύς χρόνος για να συζητηθούν. Αλλά ο πληθυντικός της λέξης υποδεικνύει μια κάποια ευελιξία, την οποία η βία της λέξης «καθαρότητα» μερικές φορές έρχεται να αναιρέσει, έστω κι αν χρησιμοποιήθηκε στο τέλος του 19^{ου} αιώνα από τον David Hilbert, το κατ' εξοχήν πρότυπο της αξιωματικής μεθόδου. Ήθελα να δείξω ότι παραδείγματα επιτυχημένων δημόσιων αναζητήσεων και αντιπαραθέσεων έχουν υπάρξει, προς όφελος των μαθητών, και ότι μπορούν ακόμα να συμβούν στις τάξεις. Αυτό δεν είναι, παραδόξως το δίδαγμα των Στοιχείων του Ευκλείδη;

Μαθηματικός και ιστορικός των επιστημών, ο ***Jean Dhombres*** *είναι πρώην επικεφαλής του εργαστηρίου CNRS (UPR 21) και διευθυντής σπουδών στο EHESS. Ειδικός στις συναρτησιακές εξισώσεις και των χρήσεών τους στα μαθηματικά, έχει μελετήσει τις επιστημονικές κοινότητες και τη διάχυση επιστημονικών ιδεών από την Αρχαιότητα μέχρι σήμερα, χωρίς περιορισμό μόνο στην Ευρώπη και χωρίς να παραμελεί την ανάπτυξη της μαθηματικής διδασκαλίας, που είναι άμεση έμπνευση από τον Ευκλείδη.*

Δύο πρόσφατες δημοσιεύσεις

Pour le bicentenaire de la Théorie analytique de la chaleur. L'offre d'analyse de Fourier, La Gazette des mathématiciens, janvier 2023, n° 175, p. 9-24.

A new Cycloid Narrative centered on Torricelli and Roberval to Understand the Diverse Ways of the Mathematical Revolution, in Raffaele Pisano, … (ed.), Homage to Evangelista Torricelli's Opera, Geometrica, 1644-2024, Springer Verlag, 2024, p. 1-98.

L'intérêt de ne pas négliger de débattre sur ce qu'il est nécessaire d'enseigner en mathématiques parce qu'utile à la vie en société

Jean Dhombres
Directeur d'études, EHESS, Paris
jean.dhombres@ehess.fr

Abstract

Je cherche à retrouver l'esprit de débats à propos de sujets mathématiques destinés à l'enseignement lorsqu'est en vue une transformation de la société. Explicitement, je cherche à ne pas effacer, sous le prétexte des nécessités dites mathématiques, toute discussion des enseignants sur le rôle des mathématiques dans le façonnement des esprits à vivre ensemble. Je choisis deux exemples seulement, l'un sur les nombres décimaux, l'autre sur la limitation à l'‘algèbre cartésienne, lorsqu'est refusé le calcul différentiel à un certain niveau de l'enseignement élémentaire.

Mots clés: débats dans l'enseignement des mathématiques, des nombres décimaux, de l'algèbre cartésienne.

*Mathematician and historian of science, **Jean Dhombres** is former head of a CNRS laboratory (UPR 21), and director of studies at EHESS. A specialist in functional equations and their uses in mathematics, he has studied scientific communities and the diffusion of scholarly ideas from Antiquity to the present day, without restriction to Europe alone, without neglecting the development of mathematical teaching, that is a direct inspiration from Euclid.*

Two recent publications

Pour le bicentenaire de la Théorie analytique de la chaleur. L'offre d'analyse de Fourier, La Gazette des mathématiciens, janvier 2023, n° 175, p. 9-24.

A new Cycloid Narrative centered on Torricelli and Roberval to Understand the Diverse Ways of the Mathematical Revolution, in Raffaele Pisano, … (ed.), Homage to Evangelista Torricelli's Opera, Geometrica, 1644-2024, Springer Verlag, 2024, p. 1-98.