ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1
Αν οι a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε δύο από αυτούς να έχουν διαφορά μεγαλύτερη του $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός x, ώστε

$$x^2 - 4(a+b+c)x + 12(ab+bc+ca) < 0.$$

Λύση (1ος τρόπος) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 16(a+b+c)^2 - 48(ab+bc+ca) = 8((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)).$$

Αφού δύο από τους αριθμούς απέχουν τουλάχιστον $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, το τετράγωνο της διαφοράς τους θα είναι μεγαλύτερο του 1/8, άρα $\Delta > 1$. Αφού η διακρίνουσα είναι θετική, το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες, έστω $\rho_1 > \rho_2$ μεταξύ των οποίων το πρόσημο του τριωνύμου είναι αρνητικό. Επιπλέον, έχουμε:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{4(a+b+c)+\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{4(a+b+c)-\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\Delta} > 1,$$

οπότε μεταξύ των ρ_1, ρ_2 υπάρχει ακέραιος, έστω x, ο οποίος κάνει το δεδομένο τριώνυμο αρνητικό σύμφωνα με τα παραπάνω.

(2ος τρόπος) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4(a+b+c)x + 12(ab+bc+ca) = x(x - 4(a+b+c)) + 12(ab+bc+ca).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f\big(2(a+b+c)\big) &= -4(a+b+c)^2 + 12(ab+bc+ca) \\ &= -2((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) < 0. \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = 2(a+b+c)$. Έτσι, ισχύει

$$f(2(a+b+c) + \frac{1}{2}) = f(2(a+b+c) - \frac{1}{2}).$$

Κάνοντας πράξεις, έχουμε

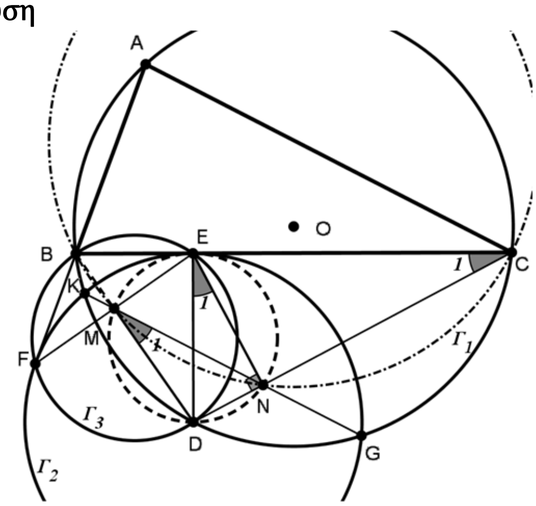
$$f(2(a+b+c)+\frac{1}{2}) = 2(a+b+c)+\frac{1}{2})(-2(a+b+c)+\frac{1}{2}) + 12(ab+bc+ca)$$
$$= \frac{1}{4} - 4(a+b+c)^2 + 12(ab+bc+ca)$$
$$= \frac{1}{4} - 2((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$$
$$= \frac{1 - 8((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)}{4} < 0,$$

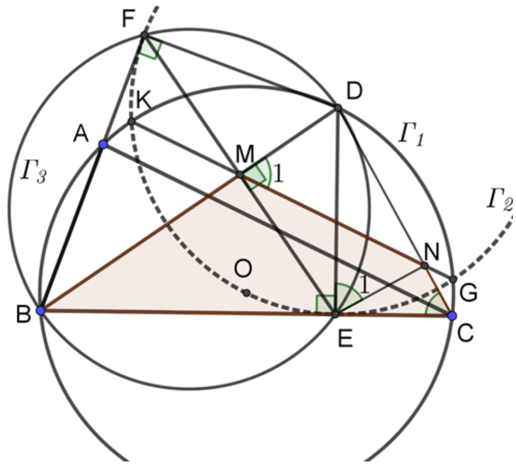
αφού $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}$, από την υπόθεση. Έτσι, το τριώνυμο διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο διάστημα $\left[2(a+b+c) - \frac{1}{2}, 2(a+b+c) + \frac{1}{2}\right]$, το οποίο έχει μήκος 1. Συνεπώς, υπάρχει κάποιος ακέραιος σε αυτό το διάστημα για τον οποίο ικανοποιείται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ_1 με κέντρο το σημείο O. Θεωρούμε το κύκλο Γ_2 που έχει κέντρο σημείο D, που ανήκει στον κύκλο Γ_1, και εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F. Οι κύκλοι Γ_1 και Γ_2 τέμνονται στα σημεία K και G (το σημείο K βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου BFE). Αν η ευθεία KG τέμνει τις ευθείες FE και CD στα σημεία M και N, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο BCNM είναι εγγράψιμο.

Λύση





Ισχύουν οι καθετότητες $DE \perp BC$ και $DF \perp AB$ (διότι ο κύκλος Γ_2 εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F).

Άρα το τετράπλευρο BEDF είναι εγγράψιμο (σε κύκλο έστω Γ_3) και ισχύουν οι ισότητες τμημάτων:

$$BE = BF \text{ και } DE = DF \qquad (1)$$

Η EF είναι η κοινή χορδη των κύκλων Γ_2 και Γ_3 και η KG είναι η κοινή χορδη των κύκλων Γ_1 και Γ_2. Οι δύο παραπάνω χορδές τέμνονται (σύμφωνα με την εκφώνηση) στο σημείο M και επειδή η BD είναι η κοινή χορδη των κύκλων Γ_1 και Γ_3, η BD θα διέρχεται από το σημείο M (ριζικό κέντρο των τριών κύκλων $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$).

1^{ος} τρόπος: Τα ορθογώνια τρίγωνα AFD, CED είναι ίσα καθώς έχουν $FD = ED$, και $F\hat{A}D = E\hat{C}D$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο), άρα DA=DC. Έπεται ότι η DO είσαι μεσοκάθετη της AC, και αφού $DO \perp KG$, έπεται ότι $AC \parallel KG$. (*) Αφού η BD διχοτομεί την $F\widehat{B}E$ και το BDCA είναι εγγεγραμμένο στον Γ_1 έχουμε $M\hat{B}C = F\hat{B}M = A\hat{C}D = M\hat{N}D$ (όπου η τελευταία προκύπτει από την(*)), οπότε BCNM εγγράψιμο.

2^{ος} τρόπος: Η BD είναι η μεσοκάθετος της EF (από τις σχέσεις (1)) και κατά συνέπεια:

$$D\hat{M}E = 90^\circ \qquad (2).$$

Από το κύκλο Γ_1 έχουμε:

$$NC \cdot ND = NG \cdot NK.$$

Το γινόμενο όμως $NG \cdot NK$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου N ως προς το κύκλο Γ_2, και άρα

$$NG \cdot NK = DE^2 - DN^2.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε:

$$NC \cdot ND = DE^2 - DN^2 \qquad (3).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο DCE (σε συνδυασμό με την σχέση (3)) συμπεραίνουμε ότι το NE είναι ύψος του τριγώνου **(*)** και κατά συνέπεια:

$$D\hat{N}E = 90^\circ \qquad (4).$$

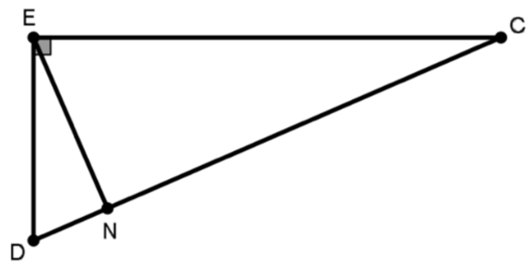
Από τις σχέσεις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο DMEN είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $\hat{M}_1 = \hat{E}_1$.

Από τα ορθογώνια τρίγωνα DNE και CDE έχουμε: $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητε γωνιών συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο BCNM είναι εγγράψιμο.

(*) $\qquad NC \cdot ND = DE^2 - DN^2 \qquad (3).$

$$NC \cdot ND = DE^2 - DN^2$$
$$\Leftrightarrow (CD - ND) \cdot ND = DE^2 - DN^2$$
$$\Leftrightarrow DC \cdot DN - DN^2 = DE^2 - DN^2$$
$$\Leftrightarrow DC \cdot DN = DE^2 \Leftrightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{DN}{DE}$$



Από την τελευταία αναλογία συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα DNE και DEC είναι όμοια.

3^{ος} τρόπος: Ισχύουν οι καθετότητες $DE \perp BC$ και $DF \perp AB$ (διότι ο κύκλος Γ_2 εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F). Άρα το τετράπλευρο BEDF είναι εγγράψιμο (σε κύκλο έστω Γ_3).

Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο Γ_2 (με κέντρο D). Εφόσον ο κύκλος Γ_3 περνά από το D, γίνεται ευθεία, η κοινή τους χορδή FE, επομένως η εικόνα του B ανήκει στην ευθεία FE. (5)

Εφόσον ο κύκλος Γ_1 περνά από γίνεται ευθεία, η κοινή τους χορδή KG, επομένως η εικόνα του B ανήκει και στην KG. (6)
Από τις (5), (6) συμπεραίνουμε ότι η εικόνα του B μέσω της αντιστροφής είναι το σημείο M. Τέλος, το σημείο C πηγαίνει στο σημείο N. Επομένως το τετράπλευρο BMNC είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Έστω $n \geq 2$ ένας ακέραιος. Θεωρούμε δύο πεπερασμένα υποσύνολα A, B των ακεραίων αριθμών, ώστε το σύνολο A να έχει το πολύ n στοιχεία και έστω Γ ένα υποσύνολο του συνόλου $\{(\alpha, \beta): a \in A, \beta \in B\}$. Ο Αχιλλέας γράφει σε ένα πίνακα όλες τις δυνατές διαφορές $\alpha - \beta$, με $(a, \beta) \in \Gamma$. Έστω d το πλήθος όλων αυτών των διαφορών. Στη συνέχεια ο Αχιλλέας καταγράφει σε ένα άλλο πίνακα όλες τις τριάδες (κ, λ, μ) με $(\kappa, \lambda) \in \Gamma, (\kappa, \mu) \in \Gamma$. Έστω p το πλήθος όλων αυτών των τριάδων. Να αποδείξετε ότι: $n \cdot p \geq d^2$.

Λύση

Για ένα σύνολο X, θα συμβολίζουμε με $|X|$, το πλήθος των στοιχείων του. Το πλήθος των δυνατών διαφορών $\alpha - \beta$, με $(a, \beta) \in \Gamma$, είναι το πολύ όσο το πλήθος των στοιχείων του Γ, δηλαδή

$$d \leq |\Gamma| \quad (*)$$

Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ και για κάθε i, υποθετούμε ότι υπάρχουν b_i ζεύγη $(a_i, b) \in \Gamma$. Τότε υπάρχουν b_i^2 τριάδες (a_i, λ, μ) με $(a_i, \lambda) \in \Gamma, (a_i, \mu) \in \Gamma$.

Συνεπώς, υπάρχουν συνολικά $p = b_1^2 + \cdots + b_m^2$ τριάδες (κ, λ, μ) με $(\kappa, \lambda) \in \Gamma, (\kappa, \mu) \in \Gamma$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$m(b_1^2 + \cdots + b_m^2) \geq (b_1 + \cdots + b_m)^2 \qquad (1)$$

Το αριστερό μέλος είναι ίσο με $|A| \cdot p$, ενώ το δεξί μέλος είναι ίσο με $|\Gamma|^2$. Όμως, από την εκφώνηση έχουμε $|A| \leq n$, επομένως η (1) δίνει:

$$n \cdot p \geq |\Gamma|^2 \geq d^2,$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την (*).

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$, τέτοιος ώστε το πλήθος όλων των ζευγών (a, b) θετικών ακέραιων αριθμών με

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$

να είναι μεγαλύτερο του 2024.

Λύση (1ος τρόπος) Αναζητούμε λύσεις (a, b) με $a - b = kb$, δηλ. $a = (k+1)b$ για κάποιο ακέραιο $k > 0$. Τότε η παράσταση στο αριστερό μέλος της δοθείσας εξίσωσης είναι ίση με

$$\frac{1}{kb}-\frac{1}{(k+1)b}+\frac{1}{b}=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+1\right)=\frac{1}{b}\cdot\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}$$

οπότε έχουμε

$$b=\frac{(k(k+1)+1)n}{k(k+1)}=n+\frac{n}{k(k+1)}$$

Αρκεί, λοιπόν, να επιλέξουμε ως n έναν θετικό ακέραιο ο οποίος έχει περισσότερους από 2024 διαιρέτες της μορφής $k(k+1)$. Πράγματι, για παράδειγμα, αν (p_n) είναι η ακολουθία των πρώτων με p_1=2, p_2=3, ..., τότε ο αριθμός

$$n=p_1(p_1+1)\,p_2\,(p_2+1)\cdots p_{2025}\,(p_{2025}+1),$$

ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

(2ος τρόπος) Η εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}=\frac{1}{n}$$

Θέτουμε $d=(a,b)$, οπότε $a=dx$, $b=dy$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{xy(x-y)}{x^2-xy+y^2}=\frac{n}{d}$$

Αν $(n,d)=S$, τότε $n=Su$ και $d=Sv$. Για να ισχύει η τελευταία είναι πρέπει να έχουμε

$xy(x-y)=u$ και $x^2-xy+y^2=v$. Αν θέσουμε $xy=s$ και $x-y=t$, τότε οι δύο σχέσεις γίνονται $st=u$ και $t^2-3s=v$. Τότε $x=\frac{s}{y}$ και $\frac{s}{y}-y=t \Leftrightarrow y^2+yt-s=0$.

Η διακρίνουσα της τελευταίας είναι $\Delta=t^2+4s$. Ένας τρόπος για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση είναι να πάρουμε $s=k(t+k)$ για κάποιον θετικό ακέραιο k και τότε η εξίσωση έχει λύση την $y=k$. Σε αυτή την περίπτωση $x=k+t$, οπότε

$$u=st=kt(k+t)$$

και $v=t^2-3k(t+k)$. Πρέπει $v>0$ (ένας τρόπος είναι να επιλέξουμε $k=1$ και $t\geq 4$).

Η κατασκευή τώρα γίνεται ως εξής: Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο n που έχει 2024 διαιρέτες u της μορφής $kt(k+t)$. Για κάθε έναν από αυτούς, σύμφωνα με τα παραπάνω, προσδιορίζεται μια τριάδα x,y,v ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση. Από αυτή την τριάδα προσδιορίζεται ένα ζεύγος (a,b) που ικανοποιεί την εξίσωση.