

Διδακτική των Μαθηματικών και Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο: Καθοδόν προς εναρμόνιση;

Έλενα Ναρδή
University of East Anglia, UK
e.nardi@uea.ac.uk

Περίληψη

Σε αυτό το άρθρο εξετάζουμε σύντομα μερικές πτυχές μιας εύθραυστης αλλά σημαντικής σχέσης, αυτής ανάμεσα στις ερευνητικές κοινότητες των Μαθηματικών και της Διδακτικής των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα διερευνούμε ερωτήματα όπως: εξελίσσονται οι διδακτικές πρακτικές στα Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο ανάλογα με την εξέλιξη της έρευνας πάνω σε αυτές; Εξελίσσεται η έρευνα πάνω στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο σε κατευθύνσεις επείγουσες για τη διδακτική πράξη; Σε τρεις ενότητες σκιαγραφούμε τρεις τάσεις στην έρευνα που τα τελευταία χρόνια απολαμβάνουν ιδιαίτερης εξέλιξης: βελτίωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο σε 'παραδοσιακές' μορφές διδασκαλίας όπως η διάλεξη· σύγχρονες, διαδραστικές μορφές διδασκαλίας· στήριξη για τους εισερχόμενους και τις εισερχόμενες σε διδακτικό έργο, νέους και νέες μαθηματικούς.

Λέξεις κλειδιά: Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών και Μαθηματικά στο πανεπιστήμιο· εναλλακτικές ή συμπληρωματικές προσεγγίσεις στη διάλεξη· προετοιμασία νέων διδασκόντων/ουσών των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο

Όταν πρωτοδιορίστηκα ως λέκτορας στο Μαθηματικό Τμήμα, προσέγγισα τον Πρόεδρο του Τμήματος και ρώτησα ποιες ευκαιρίες για εκπαίδευση και επιμόρφωση σχετικές με τη διδασκαλία μου θα έχω ως νεοδιόριστη. Η απάντηση τότε με σόκαρε. Σήμερα με λυπεί και με θυμώνει: «Γιατί τα χρειάζεσαι όλα αυτά; Διδάξου όπως διδάχθηκες! Μια χαρά δεν τα πήγες;!». Για αυτό το λόγο, κάθε πρωτοβουλία σε αυτό το θέμα με έχει θερμό οπαδό!

Λέκτορας σε Μαθηματικό Τμήμα Βρετανικού Πανεπιστημίου που συμμετείχε στη σειρά εργαστηρίων Augmenting Chalk and Talk¹ για νέους λέκτορες των Μαθηματικών (Άνοιξη 2024).

Με αφορμή τον εορτασμό του 100^{ου} τεύχους του *Ευκλείδη γ'* (θερμά συγχαρητήρια) –οι εορτασμοί είναι και μια καλή ευκαιρία για στοχασμό πάνω στο παρελθόν αλλά και για ένα βλέμμα πάνω στο παρόν και σχεδιασμό/στοχοθέτηση για το μέλλον– ας εξετάσουμε σύντομα μερικές πτυχές μιας εύθραυστης αλλά σημαντικής σχέσης, αυτής ανάμεσα στις ερευνητικές κοινότητες των Μαθηματικών και της Διδακτικής των Μαθηματικών (Durand-Guerrier κ.ά., 2021· Nardi, 2008, 2016). Επειδή η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο φτιάχνει (και) παιδαγωγικές ταυτότητες που φιλτράρονται, μέσω των διορισμένων αποφοίτων σε όλες τις βαθμίδες της Εκπαίδευσης και σε πολλούς εργασιακούς χώρους, η σχέση ανάμεσα στις δύο κοινότητες είναι σημαντική για όλους όσους εμπλέκονται με τη μαθηματική εκπαίδευση: εξελίσσονται οι διδακτικές πρακτικές στα Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο ανάλογα με την εξέλιξη της έρευνας πάνω σε αυτές; Εξελίσσεται η έρευνα πάνω στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο σε κατευθύνσεις επείγουσες για τη διδακτική πράξη;

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η μελέτη των διδακτικών πρακτικών των μαθηματικών σε πανεπιστημιακό επίπεδο είναι ένας ταχέως αναπτυσσόμενος τομέας έρευνας της πανεπιστημιακής μαθηματικής εκπαίδευσης –ένας τομέας που κυριαρχούταν σε μεγάλο βαθμό από μελέτες της μαθηματικής σκέψης και της μάθησης κυρίως των μαθητ(ρι)ών/φοιτητ(ρι)ών τη δεκαετία του 1980 και 1990 (Tall, 1991) και ο οποίος σταδιακά άρχισε να υιοθετεί μια πιο ισορροπημένη

¹ <https://ima.org.uk/23689/higher-education-teaching-and-learning-workshop-series-2023-24-successful-proposals/>

εστίαση στον διδάσκοντα και τη διδάσκουσα, στο μαθητή και τη μαθήτριά, στους διδακτικούς πόρους και προγράμματα, στο θεσμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο τα Μαθηματικά διδάσκονται (πανεπιστημιακά και άλλα ιδρύματα) (Artigue, 2016). Αυτή η ανανεωμένη εστίαση και ανάπτυξη προέκυψε εν μέρει καθώς τα πανεπιστήμια και συγκεκριμένα τα τμήματα Μαθηματικών, και όποια άλλα Τμήματα παρέχουν μαθηματική εκπαίδευση, άρχισαν να ανταποκρίνονται στο μεταβαλλόμενο δημογραφικό προφίλ των φοιτητών/φοιτητριών, το αυξανόμενο χάσμα μεταξύ σχολικών και πανεπιστημιακών μαθηματικών όσον αφορά το αναλυτικό πρόγραμμα και τους τρόπους διδασκαλίας των Μαθηματικών, και φυσικά το ραγδαία μεταβαλλόμενο τοπίο των διαθέσιμων πόρων, ψηφιακών και άλλων, για τον πανεπιστημιακό διδάσκοντα και την πανεπιστημιακή διδάσκουσα των μαθηματικών (και όχι μόνο). Τέλος, εξαιρετικά σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει αυτή την αξιοσημείωτη στροφή είναι η ολοένα και πιο εκτεταμένη λογοδοσία, και αξιολόγηση, των ιδρυμάτων τριτοβάθμιας εκπαίδευσης τα τελευταία 20 και πλέον χρόνια σε θέματα όχι μόνο ποιότητας του ερευνητικού αλλά και του διδακτικού τους έργου (Holton, 2001).

Η ώθηση προς τη βελτίωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο έχει επικεντρωθεί τόσο στις ούτως καλούμενες ‘παραδοσιακές’ μορφές διδασκαλίας (διάλεξη), όσο και σε πιο σύγχρονες, διαδραστικές μορφές διδασκαλίας που βασίζονται στην έννοια της μάθησης ως ανακάλυψης μέσω διερεύνησης (όχι μέσω εκπομπής από τον έμπειρο ειδικό στον αρχάριο), καθώς και σε έρευνα που ενθαρρύνει τους διδάσκοντες και τις διδάσκουσες να στοχάζονται πάνω στις διδακτικές τους πρακτικές και να βελτιώνουν έτσι την παιδαγωγική τους ενσυναίσθηση. Όπως παρατηρήσαμε με τον Chris Rasmussen (Nardi & Rasmussen, 2020), συχνά αυτός ο στοχασμός και η βελτιωμένη ενσυναίσθηση καταλήγει σε κινητοποίηση υπέρ παιδαγωγικών/διδακτικών μεταρρυθμίσεων. Φυσικά, το κατά πόσο (αν)επαρκής είναι αυτή η συνειδητοποίηση όταν συμβαίνει σε ατομικό και όχι σε συλλογικό και ακόμα περισσότερο όχι σε θεσμικό επίπεδο είναι μία από τις πιο επαναλαμβανόμενες και αιθιαλείς συζητήσεις στον χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Οι τρεις ενότητες που ακολουθούν αντικατοπτρίζουν τρεις τάσεις στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών —ειδικά για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο— που τα τελευταία χρόνια απολαμβάνουν ιδιαίτερης εξέλιξης: βελτίωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο σε ‘παραδοσιακές’ μορφές διδασκαλίας

όπως η διάλεξη· σύγχρονες, διαδραστικές μορφές διδασκαλίας· στήριξη για τους εισερχόμενους (και) σε διδακτικό έργο, νέους και νέες μαθηματικούς.

ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ‘ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΕΣ’ ΜΟΡΦΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ (ΔΙΑΛΕΞΗ)

Ο Pritchard (2010) ορίζει τη διάλεξη ως μια διδακτική προσέγγιση «στην οποία η κύρια κατεύθυνση της επικοινωνίας είναι από τον διδάσκοντα προς τους μαθητές. Αυτό δεν αποκλείει την ανατροφοδότηση από τους μαθητές ή σύντομες δραστηριότητες στην τάξη, αλλά σε μια διάλεξη αυτά τα στοιχεία είναι δευτερεύοντα» (σελ. 10). Τέτοιες προσεγγίσεις κυριαρχούν στη διδασκαλία μαθηματικών σε πανεπιστημιακό επίπεδο, ωστόσο η έρευνα σχετικά με το τι περιλαμβάνει τέτοια διδασκαλία και τι αποκομίζουν οι φοιτητές από τις διαλέξεις βρίσκεται ακόμη σε αρχικό στάδιο. Μία από τις πιο ολοκληρωμένες μελέτες της τέχνης της διάλεξης είναι η μελέτη των Artemeva και Fox (2011), οι οποίες ανέλυσαν διαλέξεις από 50 διδάσκοντες/ουσες με διαφορετικό γλωσσικό, πολιτισμικό και εκπαιδευτικό υπόβαθρο. Κοινή πρακτική σε όλα αυτά τα διαφορετικά περιβάλλοντα ήταν αυτό που αναφέρουν ως «chalk talk». Αυτή η πρακτική περιλαμβάνει τη λεκτική απόδοση όλων όσων γράφονται στον πίνακα, τη μετασχολιαστική περιγραφή αυτών που γράφονται, τη χορογραφία εν όσω ο διδάσκων ή η διδάσκουσα χρησιμοποιεί τον πίνακα με χειρονομίες που υπογραμμίζουν βασικές ιδέες και τη χρήση ρητορικών ερωτήσεων για να σηματοδοτούνται μεταβάσεις από ένα σημείο ενός μαθηματικού επιχειρήματος στο επόμενο ή να ελέγχεται η κατανόηση. Οι συνεντεύξεις αποκάλυψαν ότι αυτές οι πρακτικές θεωρούνταν πολύτιμες, επειδή μοντελοποιούν τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Η μοντελοποίηση της μαθηματικής σκέψης των ειδικών και των τρόπων επίλυσης προβλημάτων –και τα αντίστοιχα οφέλη για τους φοιτητές και τις φοιτήτριες– αποτελεί κεντρικό θέμα στη βιβλιογραφία (Rasmussen & Wawro, 2017). Άλλες μελέτες που εξετάζουν τη μοντελοποίηση της σκέψης των ειδικών έχουν επικεντρωθεί στις αποδείξεις. Για παράδειγμα, ο Fukawa-Connolly (2012) μελέτησε τις διαλέξεις καθηγήτριας (αποδείξεις στη Θεωρία Ομάδων και Ομομορφισμών) για να επισημάνει χαρακτηριστικά της μαθηματικής γραφής της. Η ιεραρχική δομή των αποδείξεων, οι τυπικές-ρητορικές δεξιότητες και οι διαφορετικοί τρόποι σκέψης, όπως η χρήση τυπικών ορισμών και γνωστών αποτελεσμάτων, ήταν μερικά από τα χαρακτηριστικά που εντόπισε. Σε ποιο βαθμό άραγε αυτά τα χαρακτηριστικά ανταποκρίνονται στις ανάγκες των φοιτητών/φοιτητριών που βλέπουν για πρώτη φορά μια τέτοια απόδειξη;

Αυτό είναι ένα ερώτημα που διερεύνησαν και οι Lew κ.ά. (2016) σε μια πανεπιστημιακή τάξη στην οποία δίδασκε έμπειρος καθηγητής Ανάλυσης. Διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές και οι φοιτήτριες δεν αποκόμιζαν τις κεντρικές ιδέες και τρόπους σκέψης που θεωρούσε ο καθηγητής ως κεντρικούς στη διάλεξη. Ένας πρωταρχικός λόγος για αυτό ήταν ότι ο καθηγητής μετέδιδε τα περισσότερα από τα σημαντικά σημεία προφορικά, αλλά οι φοιτητές και οι φοιτήτριες επικεντρώνονταν σε αυτά που ήταν γραμμένα στον πίνακα. Δηλαδή, το προφορικό μετασχολιαστικό σχόλιο, τυπικό του chalk talk, δεν γίνεται σαφώς αντιληπτό από τους φοιτητές και τις φοιτήτριες —δεν ελκύει καν την προσοχή τους.

Με αυτά τα παραδείγματα μελετών πάνω σε ‘παραδοσιακές’ μορφές διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο, όπως η διάλεξη, σημειώνω πως, όπως συχνά ακούμε στους διαδρόμους των Πανεπιστημιακών Τμημάτων, η διάλεξη είναι εδώ και θα μείνει τουλάχιστον στο προσεχές μέλλον: θεωρείται ο οικονομικότερος –αν όχι ο πιο παιδαγωγικά αποτελεσματικός– τρόπος διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο. Αυτό είναι κατανοητό. Ο όγκος όμως της παιδαγωγικής έρευνας –και ο μεγαλύτερος ενθουσιασμός– τα τελευταία χρόνια αφορά μελέτες πάνω σε εναλλακτικές ή συμπληρωματικές της διάλεξης προσεγγίσεις.

ΜΕΛΕΤΕΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ Η΄ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Το αυξανόμενο ενδιαφέρον και χρήση διδακτικών προσεγγίσεων πέρα από τη διάλεξη κυμαίνεται από μικρά, ομαδικά, διαδραστικά σεμινάρια μέχρι διδασκαλία ολόκληρης της τάξης, όπου οι φοιτητές και οι φοιτήτριες εμπλέκονται ενεργά και ομαδικά στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με συζήτηση στην ολομέλεια να ακολουθεί. Ενώ οι επικλήσεις για ανάπτυξη προς τέτοιες διαδραστικές τάξεις βρίθουν στη βιβλιογραφία της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για σχεδόν έναν αιώνα (π.χ. Dewey, 1938), μόλις πρόσφατα τέτοιες προσεγγίσεις έχουν αρχίσει να βρίσκουν τον δρόμο τους προς την πανεπιστημιακή τάξη των Μαθηματικών (Rasmussen & Kwon, 2007). Οι σχετικές μελέτες εστιάζουν πάνω στην αποτελεσματικότητα αυτών των προσεγγίσεων καθώς και βελτιώσεις της θεωρίας και των μεθόδων που χρειάζεται η έρευνα για να μελετήσει αυτές τις προσεγγίσεις (π.χ., Biza κ.ά. 2017· Rasmussen & Wawro, 2017· Winslow κ.ά., 2018). Μία από τις πιο συναρπαστικές μελέτες είναι η μετα-ανάλυση των Freeman κ.ά. (2014) πάνω σε 225 μελέτες που συνέκριναν την επιτυχία

των φοιτητών και των φοιτητριών σε παραδοσιακή διάλεξη σε σχέση με την ενεργή μάθηση σε μεταδευτεροβάθμια μαθήματα Φυσικών Επιστημών, Τεχνολογίας, Πολυτεχνειακών Σπουδών και Μαθηματικών (STEM). Οι προσεγγίσεις στις αναλυόμενες μελέτες καλύπτουν ευρύ φάσμα: ομαδική επίλυση προβλημάτων, φύλλα εργασίας, διαδραστικά σεμινάρια, χρήση προσωπικών συστημάτων ανταπόκρισης και σχεδιασμούς εργαστηριακών μαθημάτων. Οι Freeman κ.ά. (2014) διαπίστωσαν ότι οι βαθμοί στις εξετάσεις βελτιώθηκαν κατά περίπου 6% στις εναλλακτικές τάξεις και ότι οι φοιτητές και οι φοιτήτριες στις τάξεις με παραδοσιακή διδασκαλία είχαν 1,5 φορές περισσότερες πιθανότητες να αποτύχουν από ότι οι φοιτητές και οι φοιτήτριες στις τάξεις με ενεργή μάθηση. Η αποτελεσματικότητα των μεθόδων ενεργούς μάθησης εντοπίστηκε στις τάξεις όλων των μεγεθών με τα πιο εντυπωσιακά αποτελέσματα να αφορούν σε τάξεις μεγέθους 50 ή λιγότερων φοιτητών/φοιτητριών.

Άλλες μελέτες έχουν δείξει τη διαφορά ιδιαίτερα υπέρ των ούτως καλούμενων λιγότερο προετοιμασμένων φοιτητών και ιδιαίτερα υπέρ των γυναικών, ουσιαστικά κλείνοντας το χάσμα των φύλων που συχνά παρατηρείται στην απόδοση των φοιτητ(ρι)ών στα πανεπιστημιακά Μαθηματικά (Kogan & Laursen, 2014· Laursen κ.ά., 2014).

Εκτός από συγκριτικές μελέτες, η μάθηση των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο μέσω διερεύνησης, όπου οι φοιτητές και οι φοιτήτριες εμπλέκονται στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με τρόπους που αντικατοπτρίζουν την αυθεντική πρακτική των ερευνητών στα Μαθηματικά –συμπεριλαμβανομένης και της συνεργασίας μεταξύ των ομοτίμων τους– π.χ. διδασκαλία ως «επιστημονική συζήτηση» του Legrand (2001) γίνεται όλο και περισσότερο αντικείμενο αυτού που η Artigue (1994) αποκαλεί «διδασκτική μηχανική» (didactical engineering· εφαρμογή την επιστημολογικής αρχής σύμφωνα με την οποία γνωρίζω Μαθηματικά σημαίνει γνωρίζω την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με αυθεντικούς τρόπους, αλλά και της κοινωνικο-κονστροκτιβιστικής αρχής ότι οι τάξεις γίνονται μια επιστημονική κοινότητα όπου δημιουργούνται, εξετάζονται και εξηγούνται μαθηματικά επιχειρήματα από όλα τα μέλη της κοινότητας). Ο διδάσκων/η διδάσκουσα από την πλευρά του/της εμπλέκεται στη διερεύνηση δείχνοντας ενδιαφέρον για τη σκέψη των φοιτητών και των φοιτητριών και χρησιμοποιώντας αυτή τη σκέψη για να προωθήσει μια συγκεκριμένη παιδαγωγική ατζέντα: της εισόδου των νεοφερμένων μαθηματικών στην κοινότητα των ειδικών. Καθοδόν ο διδάσκων ή η διδάσκουσα στηρίζει αυτή την άφιξη στην κοινότητα δίνοντας έμφαση στις εγκαθιδρυμένες πρακτικές

της. Για παράδειγμα, οι Kwon κ.ά. (2008) περιγράφουν τέσσερις διαφορετικές λειτουργίες της μαθηματικής έκφρασης από τον διδάσκοντα (επανάληψη, επαναδιατύπωση, επέκταση, αναφορά). Σε μία επίσης σχετική εργασία, οι Rasmussen και Marrongelle (2006) διερεύνησαν τις παραγωγικές παιδαγωγικές κινήσεις που χρησιμοποίησαν δύο διδάσκοντες διαφορετικών εξισώσεων για να ενισχύσουν και να επεκτείνουν τη σκέψη των φοιτητών και των φοιτητριών. Θεωρητικά, αυτές οι παιδαγωγικές κινήσεις σχετίζονταν με τη θεωρία σχεδιασμού της διδασκαλίας των Ρεαλιστικών Μαθηματικών και της έννοιας του πολιτισμικού εργαλείου από τον Vygotsky (Kuster κ.ά., 2018· Rasmussen & Wawro, 2017).

Η μετάβαση από –ή η πλοήγηση ανάμεσα σε– ‘παραδοσιακές’ και εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο δεν είναι προφανής και σίγουρα δεν είναι μία δεξιότητα που μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη για ένα νεοδιόριστο διδάσκοντα και μια νεοδιόριστη διδάσκουσα (ή και για κάποιο έμπειρο διδάσκοντα ή κάποια έμπειρη διδάσκουσα με βαθιά εμπεδωμένες πρακτικές και παιδαγωγικές συνήθειες). Πώς αναπτύσσονται οι διδάσκοντες και οι διδάσκουσες των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο το είδος παιδαγωγικής εμπειρογνομosύνης που τους επιτρέπει και προτρέπει για αυτή τη μετάβαση/πλοήγηση; Κλείνω αυτή τη σύντομη χαρτογράφηση εξελίξεων στην έρευνα για τη Διδακτική των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο με μια σύντομη επισκόπηση μελετών και δράσεων που αφορούν ιδιαίτερα τους πρόσφατα αφιχθέντες διδάσκοντες και τις πρόσφατα αφιχθείσες διδάσκουσες των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο.

ΜΕ ΤΟ ΒΛΕΜΜΑ ΣΤΟ ΜΕΛΛΟΝ: ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΓΚΩΝ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ, ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Στις μελέτες που αναφέρθηκαν έως τώρα, οι διδάσκοντες και οι διδάσκουσες των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο υπό παρατήρηση ή που εκτελούν τις σχετικές παιδαγωγικές παρεμβάσεις έχουν διαφορετικούς (συχνά χαμηλούς) βαθμούς συμμετοχής στη διαδικασία έρευνας. Ωστόσο, μια μεταρρύθμιση είναι πιθανότερο να είναι πιο μακροχρόνια και πιο βιώσιμη αν ανήκει στους ίδιους τους διδάσκοντες και τις ίδιες τις διδάσκουσες (Biehler, 2022· Jaworski, 2003· Paterson κ.ά., 2011· Reinholz κ.ά., 2020). Η συνεργατική έρευνα που προωθεί την προσέγγιση ανάμεσα στις κοινότητες των Μαθηματικών και της Διδακτικής των Μαθηματικών μπορεί να βελτιώσει την παιδαγωγική ενσυναίσθηση των διδασκόντων και των διδασκουσών και

να τους εξοπλίσει με κίνητρα και εργαλεία για παιδαγωγική μεταρρύθμιση (Nardi, 2016). Οι συνεντεύξεις της Burton (2004) με 70 πανεπιστημιακούς από Μαθηματικά Τμήματα σχετικά με τις επιστημολογικές τους οπτικές για τα Μαθηματικά και τις εμπειρίες τους ως ερευνητές στα Μαθηματικά ήταν από τις πρώτες μελέτες που έθεσαν επί τάπητος τους όρους –και την αξία– της επικοινωνίας ανάμεσα στις δύο κοινότητες, ακόμα κι αν απέδειξαν μια ανησυχητικά περιορισμένη προσοχή σε παιδαγωγικά ζητήματα. Άλλες μελέτες παρουσίασαν μια κάπως λιγότερο ανησυχητική κατάσταση: για παράδειγμα, ένα ενθαρρυντικό τοπίο παιδαγωγικής ευαισθησίας μπορεί να ανιχνευτεί στο *Amongst Mathematicians* (Nardi, 2008), μια μελέτη βασισμένη σε εστιασμένες ομαδικές συνεντεύξεις με 21 μαθηματικούς, καθώς στοχάζονται πάνω σε επεισόδια από την πανεπιστημιακή τάξη των Μαθηματικών. Από τις εκτενείς και πολυσχιδείς συζητήσεις τους, αναδύονται τρεις κύριες ευθύνες του πανεπιστημιακού δασκάλου και της πανεπιστημιακής δασκάλας των Μαθηματικών: να εντοπίσει παραγωγικούς τρόπους να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες στην εκμάθηση των Μαθηματικών, να ενθαρρύνει τη διαδραστική και συμμετοχική προσέγγιση των φοιτητών και των φοιτητριών στη μάθησή τους και να διευκολύνει την εισαγωγή και εμπέδωση σημαντικών νέων ιδεών και τρόπων σκέψης στα Μαθηματικά.

Η συν-εργασία με τους διδάσκοντες και τις διδάσκουσες για την επίτευξη αυτών και άλλων κομβικών στόχων, και η διευκόλυνση της πορείας τους όσο πιο πέρα γίνεται στο φάσμα παιδαγωγικής ενσυναίσθησης (Nardi κ.ά., 2005), γίνεται σταδιακά το επίκεντρο των μελετών που αναλύουν παραδείγματα διδασκαλίας και εμπλέκουν τους πανεπιστημιακούς δασκάλους και τις πανεπιστημιακές δασκάλες μαθηματικών σε παιδαγωγικό στοχασμό (Jaworski κ.ά., 2017) ή αναζητούν τις απόψεις τους για μέχρι τώρα λιγότερο γνωστές μορφές διδασκαλίας όπως το μοντέλο της ανεστραμμένης τάξης (Rasmussen & Wawro, 2017). Όπως σημειώνουν οι Winsløw κ.ά. (2018), φαίνεται να αναδύεται μια ομάδα μελετών που εμπλέκουν τους πανεπιστημιακούς δασκάλους και τις πανεπιστημιακές δασκάλες μαθηματικών σε αυτό που πλέον θεωρείται ως ένας υποσχόμενος υβριδικός συνδυασμός: παιδαγωγικός στοχασμός και μεταρρύθμιση παιδαγωγικών πρακτικών.

ΜΕ ΤΟ ΒΛΕΜΜΑ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΕΛΛΟΝ

Η μελέτη των διδακτικών πρακτικών των μαθηματικών σε πανεπιστημιακό επίπεδο κινείται αργά αλλά σταθερά μακριά από στενόμυαλες απορρίψεις

‘παραδοσιακών’ μορφών διδασκαλίας: η διάλεξη, ειδικά η διαδραστική, μπορεί να είναι παραγωγικά προσαρμοσμένη στις μαθησιακές ανάγκες των φοιτητών, μπορεί να δώσει στους φοιτητές και τις φοιτήτριες την αίσθηση του ανήκειν και της οικοδόμησης κοινότητας –και μπορεί να συμπληρώσει με επιτυχία διαδραστικές ή διερευνητικές μορφές διδασκαλίας που έλκουν όλο και περισσότερο, και δίκαια, την προσοχή των ερευνητών και των ερευνητριών.

Η επέκταση των μελετών στη διδασκαλία των Μαθηματικών και σε άλλες επιστήμες (Biza κ.ά., 2017· Dreyfus κ.ά., 2023) και η ολοένα και πιο εκτεταμένη μελέτη θεμάτων συμπερίληψης, ποικιλότητας και ισότητας (Adiredja & Andrews-Larson, 2017) υποδεικνύει ένα επίσης πολύ ευπρόσδεκτο άνοιγμα του ερευνητικού ορίζοντα –και συνοδεύεται από ανάλογο εμπλουτισμό των μεθοδολογιών (π.χ., η εμπλοκή των εκπαιδευτικών) και θεωρητικών πλαισίων (π.χ., κοινωνικοπολιτισμικά και ανάλυση του λόγου) στα οποία βασίζονται αυτές οι μελέτες (Nardi κ.ά., 2014). Μαζί με την ευχή η αυξανόμενη παρουσία μελετών με καταβολές πέραν της Ευρώπης και της Βόρειας Αμερικής σε διεθνή συνέδρια και περιοδικά να επιταχυνθεί (η γεωγραφική μεροληψία στο ποιες περιοχές του πλανήτη αντιπροσωπεύονται στη βιβλιογραφία ακόμα και αυτού του σύντομου άρθρου δεν τιμά κανένα ερευνητικό πεδίο), κλείνω με μία σύντομη αναφορά σε τρεις θεσμικά σημαντικές εξελίξεις:

- η αυξημένη αποδοχή των προσεγγίσεων που προωθούν την ενεργή μάθηση και η σχετική θεσμοθέτηση δράσεων για την Επαγγελματική Ανάπτυξη προς αυτή την κατεύθυνση²,
- οι αυξημένες πρωτοβουλίες για την επαγγελματική ανάπτυξη των νεοεισερχόμενων στη διδασκαλία των πανεπιστημιακών Μαθηματικών³, και
- η θεσμοθέτηση (σε κάποια εκπαιδευτικά πλαίσια όπως το Βρετανικό μέσα στο οποίο εργάζομαι) νέων τύπων συμβάσεων που είναι προσανατολισμένες στη διδασκαλία και αναγνωρίζουν / ενθαρρύνουν την αυθεντική, σημαντική και αυστηρή παιδαγωγική έρευνα στα Μαθηματικά ως ισότιμη της έρευνας στα Μαθηματικά (π.χ. σε

2 Δες Σημείωση 1.

3 <https://www.sigma-network.ac.uk/>

θέματα επαγγελματικής εξέλιξης και ανόδου ακαδημαϊκής βαθμίδας)⁴.

Με τις θερμές ευχές μου στον *Ευκλείδη γ'* για το 100^ο του τεύχος, εύχομαι η συνάδελφος με της οποίας τη δήλωση ξεκίνησε αυτό το άρθρο να βρει τη στήριξη που το παιδαγωγικό της έργο στα Μαθηματικά σίγουρα αξίζει πολύ πριν ο *Ευκλείδης γ'* γιορτάσει το... 200^ο του τεύχος!

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Adiredja, A. P., & Andrews-Larson, C. (2017). Taking the sociopolitical turn in postsecondary mathematics education Research. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 3(3), 444–465. <https://doi.org/10.1007/s40753-017-0054-5>
- Artemeva, N., & Fox, J. (2011). The writing's on the board: The global and the local in teaching undergraduate mathematics through chalk talk. *Written Communication*, 28(4), 345–379. <https://doi.org/10.1177/0741088311419630>
- Artigue, M. (1994). Didactical engineering for the conception of teaching products. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Stralier, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp 27–39). Kluwer Academic Publishers.
- Artigue, M. (2016). Mathematics education research at university level: Achievements and challenges. In E. Nardi, & C. Winsløw (Eds.), *Proceedings of the First conference of INDRUM* (pp 11–27). Université de Montpellier and INDRUM.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), 797–810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Biehler, R., Gueudet, G., Liebendörfer, M., Rasmussen, C., & Winsløw, C. (Eds.). (2022). *Practice-oriented research in Tertiary Mathematics Education: New directions*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1>
- Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2017). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level:*

4 <https://advance-he.ac.uk/>

- State-of-the-art and looking ahead*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-41814-8>
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-7908-5>
- Dewey, J. (1938). *Experience and Education*. Macmillan.
- Dreyfus, T., González-Martín, A.S., Monaghan, J., Nardi, E., & Thompson, P.W. (Eds.) (2023). *The learning and teaching of calculus across disciplines – proceedings of the second calculus conference*. MatRIC. Available at https://matriccalconf2.sciencesconf.org/data/pages/CalcConf2023_Proceedings.pdf
- Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Nardi, E., & Winsløw, C. (Eds.) (2021). *Research and Development in University Mathematics Education: Overview Produced by the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429346859>
- Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., & Wenderoth M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *PNAS*, *111*(23), 8410–8415. <https://doi.org/10.1073/pnas.131903011>
- Fukawa-Connelly, T. (2012). A case study of one instructor’s lecture-based teaching of proof in abstract algebra: Making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 325–345. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9407-9>
- Holton, D. A. (Ed.) (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7>
- Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(2/3), 249–282. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.00000006160.91028.f0>
- Jaworski, B., Mali, A., & Petropoulou, G. (2017). Critical theorizing from studies of undergraduate mathematics teaching for students’ meaning making in mathematics. *International Journal of Research in*

- Undergraduate Mathematics Education*, 3(1), 168–197. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0044-z>
- Kogan, M., & Laursen, S. L. (2014). Assessing long-term effects of inquiry-based learning: A case study from college mathematics. *Innovative Higher Education*, 39(3), 183–199. <https://doi.org/10.1007/s10755-013-9269-9>
- Kuster, G., Johnson, E., Keene, K., & Andrews-Larson, C. (2018). Inquiry-oriented instruction: A conceptualization of the instructional principles. *PRIMUS* 28(1), 13–30. <https://doi.org/10.1080/10511970.2017.1338807>
- Kwon, O. N., Ju, M. K., Rasmussen, C., Marrongelle, K., Park, J. H., Cho, K. Y., & Park J. S. (2008). Utilization of revoicing based on learners' thinking in an inquiry-oriented differential equations class. *The Seoul National University Journal of Education Research*, 17, 111–134.
- Laursen, S. L., Hassi, M. L., Kogan, M., & Weston, T. J. (2014). Benefits for women and men of inquiry-based learning in college mathematics: A multi-institution study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(4), 406–418. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.4.0406>
- Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In D. Holton (Ed), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 127–135). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_12
- Lew, K., Fukawa-Connelly, T., Meija-Ramos, P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2), 162–198. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.2.0162>
- Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-37143-6>
- Nardi, E. (2016). Where form and substance meet: Using the narrative approach of re-storying to generate research findings and community rapprochement in (university) mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 92(3), 361–377. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9643-x>
- Nardi E., Biza, I., González-Martín, A., Gueudet, G., & Winsløw, C. (Eds.) (2014). Institutional, sociocultural and discursive approaches to research

- in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 16(2), (Special Issue).
- Nardi, E., Jaworski, B., & Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: From ‘tricks’ to ‘techniques’. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 284–316.
- Nardi, E., & Rasmussen, C. (2020). Teaching Practices at University Level. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 840–843). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100028
- Paterson, J., Thomas, M., & Taylor, S. (2011). Decisions, decisions, decisions: What determines the path taken in lectures? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(7), 985–996. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.611912>
- Pritchard, D. (2010). Where learning starts? A framework for thinking about lectures in university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(5), 609–623. <https://doi.org/10.1080/00207391003605254>
- Rasmussen C, & Kwon, O. (2007) An inquiry oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(3), 189–194. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.10.001>
- Rasmussen, C., & Marrongelle, K. (2006) Pedagogical content tools: Integrating student reasoning and mathematics in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(5), 388–420. <https://doi.org/10.2307/30034860>
- Rasmussen, C., & Wawro, M. (2017). Post-calculus research in undergraduate mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 551–581), National Council of Teachers of Mathematics.
- Reinholz, D. L., Rasmussen, C., & Nardi, E. (2020). Time for Change (Research) in Undergraduate Mathematics Education. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 6(2), 147-158. <https://doi.org/10.1007/s40753-020-00116-7>
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1>

Winsløw, C., Gueudet, G., Hochmuth, R., & Nardi, E. (2018). Research on university mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education—Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 60–74). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315113562>

*Η Έλενα Ναρδή είναι Καθηγήτρια Μαθηματικής Εκπαίδευσης στο University of East Anglia (UEA). Η έρευνά της αφορά κυρίως τη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών σε πανεπιστημιακό επίπεδο και τα αφηγήματα για τα μαθηματικά στο δημόσιο λόγο, τον τύπο και την ποπ κουλτούρα. Η μονογραφία της *Amongst Mathematicians: Teaching and Learning Mathematics at University Level* εκδόθηκε από την Springer το 2008. Ανάμεσα στα πρόσφατα ολοκληρωμένα έργα της είναι το *CAPTeaM (Challenging Ableist Perspectives in the Teaching of Mathematics)*. Είναι η επικεφαλής της ομάδας για την έρευνα στη Μαθηματική Εκπαίδευση στο UEA και συν-επικεφαλής του προγράμματος *MathTASK*. Έχει επιβλέψει 27 φοιτητές σε διδακτορικό επίπεδο και 48 σε επίπεδο Master. Είναι διευθύντρια του *Masters in Mathematics Education*, μέλος του *ESRC Peer Review College* και συν-συντονίστρια του Διεθνούς Δικτύου για Διδακτική Έρευνα στα Πανεπιστημιακά Μαθηματικά (*INDRUM*). Είναι συν-αρχισυντάκτρια του περιοδικού *IJRUME* και μέλος της συντακτικής ομάδας στα περιοδικά *ESM*, *MTL*, *JMTE* και *MTED*.*

Mathematics Education and Mathematics at the University: Towards Harmonization?

Elena Nardi

University of East Anglia, UK
e.nardi@uea.ac.uk

Abstract

In this article I briefly examine some aspects of a fragile but important relationship, that between the mathematics research and mathematics education communities. Specifically, I investigate questions such as: do teaching practices in Mathematics at the University evolve according to the development of research in Mathematics Education? Is the research on the teaching of Mathematics at university level developing in directions that address the urgent needs of teaching practice at this level? In the three parts of this article, I outline three trends in research that have enjoyed particular development in recent years: improvement of the teaching of Mathematics at university level in 'traditional' forms of teaching such as the lecture; contemporary, interactive forms of teaching; support for those entering the mathematics teaching profession at university level.

Keywords: research in Mathematics Education and university Mathematics; alternative or complementary approaches to the lecture format; preparation of new university mathematics teachers

*Elena Nardi is Professor of Mathematics Education at the University of East Anglia (Norwich, UK). Her research is mainly on: the teaching and learning of mathematics at university level and public discourses about mathematics. Her [monograph](#) *Amongst Mathematicians: Teaching and Learning Mathematics at University Level* was published by Springer in 2008. Her recently completed projects include [CAPTeaM](#) (Challenging Ableist Perspectives in the Teaching of Mathematics). She is the leader of EDU's [RME](#) (Research in Mathematics Education) Group and co-leader of [MathTASK](#). She has supervised 27 students at doctoral level and 48 at Masters level. She is the director of EDU's [MA Mathematics Education](#), member of the ESRC Peer Review College and Joint Co-ordinator of the International Network for Didactic Research in University Mathematics ([INDRUM](#)). She is Joint Editor in Chief of [IJRUME](#) and member of the Editorial Board [ESM](#), [MTL](#), [JMTE](#) and [MTED](#).*