

## Εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά, παλιά και νέα πραγματικότητα

Μαριάννα Τζεκάκη

Ομ. Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και  
Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
tzekaki@auth.gr

### Περίληψη

Στο κείμενο αυτό παρουσιάζονται σύντομα τα βασικά στοιχεία που σχετίζονται με τη βασική και συνεχιζόμενη εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά, κυρίως του πρώτου ηλικιακού κύκλου, για την άσκηση του επαγγέλματος με τη χρήση σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών και πολλαπλών πόρων. Παρουσιάζονται επίσης προσεγγίσεις για μια πιθανή εκπαίδευση που μπορεί να στηρίξει αλλαγές στη διδασκαλία των Μαθηματικών προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης κριτικής μαθηματικής σκέψης, σύμφωνα με τη διεθνή εμπειρία.

**Λέξεις κλειδιά:** εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, μαθηματική γνώση περιεχομένου, γνώση των μαθητών/μαθητριών, γνώση διδακτικών προτάσεων

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια εντείνεται το ενδιαφέρον για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών, ώστε με τις σημαντικές αλλαγές που πραγματοποιούνται στα προγράμματα σπουδών και στο εκπαιδευτικό περιβάλλον, να προκύψουν βελτιώσεις στη διδασκαλία και τη μαθηματική μάθηση των μαθητών. Η σημασία και ο ρόλος των εκπαιδευτικών απέναντι σε αυτές τις αλλαγές κάνει απαραίτητη την ανάπτυξη συστηματικών εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που αρχικά να τους προετοιμάζουν και στη συνέχεια να βελτιώνουν διαρκώς τις γνώσεις και τις πρακτικές τους, συνδέοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με τη σχετική έρευνα στον τομέα αυτό (Potari, 2020).

Ωστόσο, αν και παρουσιάζονται συστηματικά ευρήματα στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών, αλλαγές στα προγράμματα σπουδών (ΙΕΠ, 2021), διεύρυνση των διδακτικών πόρων και εκρηκτική ανάπτυξη των τεχνολογικών πόρων (Niss, 2016), η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά, τουλάχιστον στην Ελλάδα, παραμένει σε χαμηλά και συχνά προβληματικά επίπεδα.

Όπως εντοπίζεται διεθνώς, η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών τόσο της προσχολικής και πρωτοβάθμιας, όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, απαιτεί την ανάπτυξη διαφορετικών τύπων γνώσεων: γνώση του περιεχομένου (content knowledge), δηλαδή των ίδιων των Μαθηματικών, μαθηματική γνώση περιεχομένου (mathematical content knowledge· Ball κ.ά., 2008), δηλαδή γνώση των τρόπων με τους οποίους μπορεί να παρουσιασθεί το μαθηματικό περιεχόμενο ώστε να γίνει προσεγγίσιμο από τους μαθητές και τις μαθήτριες, αλλά και κατανόηση του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών και των μαθητριών, των δυσκολιών ή των προηγούμενων γνώσεων (knowledge for content and students), παιδαγωγική γνώση (pedagogical knowledge), δηλαδή διαχείριση των μαθητών και της τάξης συνολικά, κ.ά. (Bognar κ.ά., 2024). Εξειδικευμένα προγράμματα σπουδών για την εκπαίδευση των δασκάλων των Μαθηματικών που προτείνονται τα τελευταία χρόνια σε άλλες χώρες (AMTE Standards, 2017), οργανώνουν το περιεχόμενό τους, ώστε η εκπαίδευση αυτή να στηρίζεται σε τέσσερις πυλώνες (αντίστοιχα με όσα προαναφέρθηκαν):

- τις μαθηματικές έννοιες και τα προγράμματα σπουδών,
- την παιδαγωγική γνώση και τις διδακτικές πρακτικές για τη διδασκαλία των Μαθηματικών,

- τη γνώση των μαθητών και των μαθητριών ως εκπαιδευομένων στα Μαθηματικά,
- τα κοινωνικά πλαίσια διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών.

Τα παραπάνω είναι απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε να μπορούν οι εκπαιδευτικοί, με βάση τους στόχους του προγράμματος σπουδών, να σχεδιάσουν και να εισάγουν στην τάξη μαθηματικές δραστηριότητες που να προσανατολίζονται σε βασικές μαθηματικές ιδέες, να αναπαριστούν κατάλληλα τις έννοιες αυτές, να εμπλέκουν τους μαθητές και τις μαθήτριες σε δημιουργικές δράσεις, να ενθαρρύνουν την ανάπτυξη συνεργασιών, συλλογισμών και ανταλλαγών και να καταλήγουν σε ουσιαστικές και γενικευμένες ιδέες (Clarke & Hollingsworth, 2002).

Πόσα όμως από τα παραπάνω αναπτύσσονται στις βασικές σπουδές των μελλοντικών εκπαιδευτικών ή τη συνεχιζόμενη επιμόρφωση; Πόσα είναι απαραίτητο να ενταχθούν σε μια μελλοντική οργάνωση της εκπαίδευσης τους; Τι πόρους διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί για την αντιμετώπιση των προκλήσεων; Σε ποιο βαθμό μπορεί να λειτουργήσει η νέα τεχνολογική πραγματικότητα; Και γιατί οι εκπαιδευτικοί παρά τις φιλόδοξες προτάσεις των Προγραμμάτων Σπουδών επιμένουν να αναζητούν μόνο μεθόδους, τεχνικές και έτοιμο υλικό για την καθημερινή δουλειά τους στην τάξη (Prediger, 2023); Ποια είναι τελικά τα βασικά στοιχεία για μια αποτελεσματική εκπαίδευση;

### **ΠΡΩΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ**

Η συζήτηση για τη μαθηματική γνώση περιεχομένου είναι παλιά (Brousseau, 1986· Davis & Simmt, 2006). Το κεντρικό ερώτημα που απασχολεί μια τέτοια συζήτηση είναι πώς μπορεί ένας/μία εκπαιδευτικός να προτείνει μια δραστηριότητα για μια μαθηματική έννοια και να μη γνωρίζει τη βασική μαθηματική ιδέα που τη χαρακτηρίζει, το απαιτούμενο εννοιολογικό πλαίσιο για την ανάδειξή της, τις κατάλληλες αναπαραστάσεις για την παρουσίαση της και τα απαραίτητα βήματα για τη γενίκευση ενός συλλογισμού που οδηγεί σε αυτήν;

Οι μαθητές και οι μαθήτριες, ειδικά στις μικρές ηλικίες, εμπλέκονται σε πολλές δράσεις: απαγγέλουν την αριθμητική ακολουθία, μετρούν ποσότητες αντικειμένων, αναγνωρίζουν σχήματα, συγκρίνουν μεγέθη ή συνεχίζουν μοτίβα. Πόσες όμως από αυτές τις δράσεις οδηγούν σε κάποιες μαθηματικές ιδέες, όπως το νόημα του αριθμού, τα χαρακτηριστικά των σχημάτων, τις έννοιες της μέτρησης μήκους ή επιφάνειας, ή την επαναλαμβανόμενη ή

εξελισσόμενη μονάδα σε μια κανονικότητα; Οι εκπαιδευτικοί μένουν ευχαριστημένοι ότι οι μαθητές και οι μαθήτριές τους «κάνουν μαθηματικά», ενώ τα παιδιά χρησιμοποιούν μια κοινή ή καθημερινή γνώση που δεν επεκτείνουν, ούτε γενικεύουν (Tzekaki, 2020).

Αντίστοιχη είναι η εικόνα και για τους μαθητές και τις μαθήτριες μεγαλύτερων τάξεων που καταναλώνονται σε διαδικασίες, απομνημόνευση τύπων και κανόνων, τυποποιημένες καταστάσεις και εφαρμογές με τρόπους ή σκέψεις που δεν κατανοούν και στη συνέχεια εγκαταλείπουν ή ξεχνούν.

Οι εκπαιδευτικοί των Μαθηματικών χρειάζονται μια στέρεη και συνεκτική μαθηματική γνώση περιεχομένου ώστε να μπορούν να αναπτύξουν και να διαχειριστούν κατάλληλες και γνήσιες μαθηματικές δραστηριότητες και να οδηγήσουν τους μαθητές σε γενικεύσεις αυτών των δραστηριοτήτων ως βασικό συστατικό της μαθηματικής ανάπτυξης.

Η μαθηματική γνώση θα έπρεπε να αποτελεί τμήμα των σπουδών των μελλοντικών εκπαιδευτικών ή βασικό στοιχείο της επιμόρφωσης τους, αλλά όχι ως μεμονωμένο στοιχείο όπως γίνεται στις μεγαλύτερες βαθμίδες. Πολλά προγράμματα σπουδών στην Ελλάδα και στην Ευρώπη διατηρούν μια διάκριση ανάμεσα σε μαθήματα για τα Μαθηματικά και μαθήματα για τη μαθηματική εκπαίδευση. Ωστόσο η διάκριση αυτή δεν εξυπηρετεί τη μαθηματική γνώση περιεχομένου που συχνά εισάγεται με τον όρο «μαθηματικά για διδασκαλία» (mathematics for teaching· Davis & Smitt, 2006), δηλαδή μια ιδιαίτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών για διδακτική χρήση. Για παράδειγμα, ποιο είναι το νόημα του αριθμού και πώς αναπτύσσεται, ποιες είναι και πώς προσεγγίζονται οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων, τι αποτελεί μια κανονικότητα και ποια δράση τη συνδέει με τα Μαθηματικά, ποια είναι η θεμελιακή ιδέα του κλάσματος και πώς προσεγγίζεται, κ.λπ. Αντίστοιχα στις μεγαλύτερες τάξεις με την ουσιαστική προσέγγιση της εξίσωσης ή της συνάρτησης, της γεωμετρικής απόδειξης κ.λπ. Συχνά οι ενεργοί/ές ή μελλοντικοί/ές εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν αυτή την ξεχωριστή από τη διδασκαλία μαθηματική γνώση που συνήθως αποκτούν στις βασικές τους σπουδές, ξεκομμένη από τις διδακτικές τους πρακτικές γιατί ακριβώς παρουσιάζεται χωρίς τις απαραίτητες συνδέσεις (Kaldrimidou & Tzekaki, 2007).

## **ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: Η ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΑΝΑΦΟΡΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ**

Πάνω στα περισσότερα αντικείμενα των Μαθηματικών έχει διεξαχθεί ένας τεράστιος αριθμός ερευνών (Ζαχαριάδης & Τζεκάκη, υπό έκδοση). Οι έρευνες αυτές, ανάμεσα στα άλλα, αναδεικνύουν τα επαναλαμβανόμενα λάθη των μαθητών και των μαθητριών, τις παρανοήσεις τους, τις αντιλήψεις τους, τα πιθανά εμπόδια, τεχνικές και στρατηγικές που χρησιμοποιούν, τρόπους με τους οποίους εμπλέκονται στη μάθηση των Μαθηματικών, συναισθήματα που αναπτύσσουν, αλλά και προηγούμενες γνώσεις που έχουν δημιουργηθεί σε διαφορετικά περιβάλλοντα οικογενειακά, κοινωνικά ή πολιτισμικά (Clements & Sarama, 2020· Hannula, 2012).

Οποιαδήποτε διδακτική προσέγγιση στο μαθηματικό περιεχόμενο χρειάζεται να συνυπολογίσει τα φαινόμενα αυτά, να τα εντάξει στο σχεδιασμό και να τα αντιμετωπίσει. Για παράδειγμα, πώς να προσεγγίσει κάποιος/κάποια τον πολλαπλασιασμό αν δεν γνωρίζει ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες διατηρούν μια αθροιστική αντίληψη, ή τα σχήματα αν δεν παρατηρεί ότι οι αναγνωρίσεις των παιδιών στηρίζονται σε πρωτοτυπικές μορφές ή τα κλάσματα αν δεν έχει ξεκαθαρίσει ότι το προηγούμενο των φυσικών αριθμών καθορίζει την αντίληψη τους ως δύο διακριτούς αριθμούς, κ.λπ. Αντίστοιχα με τις παρανοήσεις για το σύμβολο της ισότητας στις εξισώσεις, ή τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κ.ά.

Τα στοιχεία αυτά δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να αναπτύξουν ειδικές γνώσεις αναφορικά με τους μαθητές και τις μαθήτριές τους για κάθε μαθηματικό περιεχόμενο, ιδιαίτερα βέβαια για τις βασικές έννοιες του Προγράμματος Σπουδών. Χρειάζεται όμως επιπλέον να είναι σε θέση να βρουν άμεσα τα στοιχεία αυτά για να τα μελετήσουν πριν δοκιμάσουν να διδάξουν το σχετικό περιεχόμενο.

## **ΤΡΙΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: Η ΓΝΩΣΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ**

Η σύγχρονη διδασκαλία των Μαθηματικών χρειάζεται να οδηγεί τους μαθητές και τις μαθήτριες σε μία δημιουργική κατασκευαστική διαδικασία όπου, αντιμετωπίζοντας αυθεντικές καταστάσεις μέσα σε ένα κοινωνικό περιβάλλον, προσεγγίζουν μαθηματικές ιδέες, έννοιες και διαδικασίες. Η ευθύνη μάθησης μετατοπίζεται από τον/την εκπαιδευτικό στον ίδιο τον μαθητή και την ίδια τη μαθήτρια που αναζητά, λύνει, κατασκευάζει, ανταλλάσσει, συζητά και γενικεύει καταλήγοντας σε μαθηματικά

συμπεράσματα, στον γενικό προσανατολισμό ότι ‘μαθαίνω Μαθηματικά’ σημαίνει ‘κάνω Μαθηματικά’, κι όχι ακολουθώ κανόνες, διαδικασίες, απομνημονεύω και εφαρμόζω. Προς την κατεύθυνση αυτή ενθαρρύνει τους/τις εκπαιδευτικούς και το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά (ΙΕΠ, 2021).

Μια τέτοια λειτουργία όμως απαιτεί τη γνώση από τον/την εκπαιδευτικό του υλικού και των διδακτικών που μπορεί να στηρίξει μια τέτοια διδασκαλία. Ξεκινώντας από τα γενικά μιας παιδαγωγικής διαχείρισης και κατάλληλων διδακτικών πρακτικών (Clarke & Hollingsworth, 2002), ο/η εκπαιδευτικός καλείται να συντονίσει δράσεις και αλληλεπιδράσεις που ενισχύουν αυτόν τον προσανατολισμό. Χρειάζεται διδακτικές εμπειρίες με ανάλογη λειτουργία, στήριξη από μέντορες ή έμπειρους συναδέλφους και διαρκή ανατροφοδότηση ώστε να απεγκλωβιστεί από τη δασκαλοκεντρική διδασκαλία και να υποστηρίξει τη δημιουργική δραστηριοποίηση των μαθητών και των μαθητριών.

Οι μεγάλοι θεωρητικοί της Διδακτικής των Μαθηματικών (Freudenthal, Davidon, Brousseau, κ.ά.) συμφωνούν ότι για την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων απαιτούνται: (1) η εμπλοκή των μαθητών/μαθητριών σε καταστάσεις με νόημα και ενδιαφέρον για αυτούς, (2) η ατομική δραστηριοποίηση, δράση και σκέψη και (3) η συζήτηση και ο αναστοχασμός που δεν ενθαρρύνουν μόνο μια «τοπική» διαπραγμάτευση αλλά οδηγούν σε γενικεύσεις και τυποποιήσεις. Μια τέτοια στροφή οδηγεί στα ακόλουθα βήματα:

- Ο/Η εκπαιδευτικός θέτει ένα αυθεντικό μαθηματικό ερώτημα, ένα πρόβλημα, μια κατάσταση στο επίπεδο και τα ενδιαφέροντα των μαθητών και των μαθητριών.
- Ο/Η εκπαιδευτικός δίνει χρόνο στους μαθητές και τις μαθήτριες για σκέψη και δράση καθώς τα αυθεντικά ερωτήματα απαιτούν χρόνο για να αναδείξουν ιδιότητες, σχέσεις κ.λπ.
- Ο/Η εκπαιδευτικός κάνει ερωτήσεις και δεν δείχνει τις λύσεις ή δίνει απαντήσεις.
- Ο/Η εκπαιδευτικός αφήνει να αναπτυχθούν ιδέες και ενθαρρύνει τα λάθη να αντιμετωπιστούν από τους ίδιους τους μαθητές και τις ίδιες τις μαθήτριες.
- Ο/Η εκπαιδευτικός συζητά με τους μαθητές και τις μαθήτριες για να καταλήξουν σε πιο γενικευμένες ιδέες.

Πώς θα ασκηθεί όμως ο/η εκπαιδευτικός για να μετασχηματίσει με αυτό τον τρόπο τη διδασκαλία του/της; Έρευνες σε εκπαιδευτικές παρεμβάσεις για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών επιβεβαιώνουν ότι τα επιτυχή προγράμματα, δηλαδή αυτά που οδηγούν σε καλύτερη λειτουργία και μαθηματική μάθηση, περιλαμβάνουν σημαντικές λειτουργίες όπως συστηματική εκπαίδευση των εκπαιδευτικών σε όσα προαναφέρθηκαν, επιτόπου παρακολούθηση, πλούσιες πηγές και πόρους για εκπαιδευτικούς και μαθητές, εκπαιδευτικό υλικό όπως και διαρκή υποστήριξη, καθοδήγηση και ανατροφοδότηση (Bognar κ.ά., 2024).

### **ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΝΕΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ**

Για να ξεφύγει η διδασκαλία από τη μορφή όπου ο/η εκπαιδευτικός ακολουθεί ασκήσεις κι εφαρμογές από ένα σχολικό βιβλίο και να οδηγηθεί σε μια πλούσια κατασκευαστική δραστηριότητα που αναπτύσσεται στο κοινωνικό περιβάλλον της τάξης, όπου οι μαθητές αντιμετωπίζουν, μόνοι τους ή σε συνεργασία, κατάλληλες καταστάσεις που συνδέονται με την εμπειρία τους, αλληλοεπιδρούν και τεκμηριώνουν τη δράση τους, συζητούν για να εμβαθύνουν τη δράση αυτή για να οδηγηθούν σε υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης, γενίκευσης και να κατευθυνθούν προς τις μαθηματικές ιδέες που επιδιώκονται από τους στόχους του προγράμματος σπουδών απαιτείται μια στιβαρή μόρφωση και διαρκής επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Χρειάζεται ακόμα ο/η νηπιαγωγός, ο δάσκαλος και η δασκάλα, ο καθηγητής και η καθηγήτρια, πέρα από το πρόγραμμα σπουδών ή κάποια σχολικά βιβλία, να έχει ένα σαφή 'διδασκτικό χάρτη' που να στηρίζει τη διαδοχή της διδασκαλίας του με οριζόντιες και κατακόρυφες συνδέσεις, και πλούσιους και εύκολα προσβάσιμους διδακτικούς πόρους που να τον διαφωτίζουν στο μαθηματικό περιεχόμενο, τη γνώση των μαθητών και των μαθητριών και τις κατάλληλες διδακτικές πρακτικές.

Τα παραπάνω απαιτούν μια συστηματική και σοβαρή επένδυση στη βασική και διαρκή μόρφωση των εκπαιδευτικών με τους όρους που αναφέρθηκαν (επί τόπου παρακολούθηση, υποστήριξη, καθοδήγηση και ανατροφοδότηση), όπως και στην ανάπτυξη διδακτικών πόρων για τον δάσκαλο και τη δασκάλα, αλλά και τον μαθητή και τη μαθήτρια. Η συγκέντρωση του τεράστιου πλήθους των ερευνητικών αποτελεσμάτων της Διδακτικής με κατεύθυνση τη στήριξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες για το μαθηματικό περιεχόμενο, τη μάθηση και διδασκαλία των μαθητών και των μαθητριών και τις διδακτικές εφαρμογές απαιτεί μια μεγάλη και συνειδητή συγκέντρωση ανθρώπινου και ψηφιακού υλικού με αντίστοιχη επένδυση στη

δημιουργία ψηφιακών πόρων (κατά τα πρότυπα και άλλων χωρών), προσαρμοσμένα και προσβάσιμα για τις διδακτικές ανάγκες. Στην νέα ψηφιακή πραγματικότητα, εκτός από ένα σύγχρονο Πρόγραμμα Σπουδών ή κάποια σχολικά βιβλία, απαιτείται ένας κατάλληλος διδακτικός χάρτης με όσα στοιχεία προαναφέρθηκαν που να στηρίζει ουσιαστικά την ανάγκη για σοβαρή αλλαγή στη διδασκαλία των Μαθηματικών για όλους τους εκπαιδευτικούς και όλες τις εκπαιδευτικούς που θα ήθελαν, αλλά δεν ξέρουν πώς να την πραγματοποιήσουν. Τέτοιοι προβληματισμοί ακούγονται από χρόνια και η ανάγκη ενός νέου σχεδιασμού για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών είναι αναντίρρητη, αλλά η υλοποίησή τους δεν μοιάζει ακόμα ορατή.

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Association of Mathematics Teacher Educators (2017). *Standards for Preparing Teachers of Mathematics*. Official publication AMTE.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bognar, B., Matic, L. J., & Sablic, M. (2024). Professional Development Interventions for Mathematics Teachers: A Systematic Review. *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(6), 39–58.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 33–115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>
- Clarke, D. J., & Hollingsworth, H. (2002) Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18(8), 947–967. [https://doi.org/10.1016/S0742-051X\(02\)00053-7](https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00053-7)
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2020). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003083528>
- Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 293–319. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4>



- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137–161. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281>
- ΙΕΠ (2021). *Πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών, στο Δημοτικό*, Πρώτη έκδοση, Αθήνα. <https://www.iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli>
- Kaldrimidou, M., & Tzekaki, M. (2007). *Reforming Educational Programs for Future Kindergarten Teachers: Some Considerations*. In Woo, J.-H., Lew, H.-C., Park, K.-S., & Seo, D.-Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 1, pp.234. Seoul, Korea: PME
- Niss, M. (2016). Mathematical standards and curricula under the influence of digital affordances: Different notions, meanings and roles in different parts of the world. In M. Bates & Z. Usiskin (Eds.), *Digital curricula in school mathematics* (pp. 239–250). Information Age Publishing.
- Potari, D. (2020). Means for linking mathematics teaching to mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(3), 233–235. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09462-4>
- Prediger, S (2023). From task completion to learning progress: shifting mathematics teachers' conceptualisations of success as a key challenge in professional growth. In A. Twohill & S. Quirke (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference on Research in Mathematics Education in Ireland (MEI 9)* (pp. 7-27). Institute of Education, Dublin City University.
- Tzekaki, M. (2020). Mathematical activity in early childhood and the role of generalization. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland, (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM4 Conference, 2018* (pp. 301–313). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_18)
- Ζαχαριάδης, Θ., & Τζεκάκη, Μ. (υπό έκδοση). Κριτική αποτίμηση των εξελίξεων στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης σε εθνικό και διεθνές επίπεδο. *Συμπόσιο στα Πρακτικά του 10<sup>ου</sup> Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*.

*Η Μαριάννα Τζεκάκη είναι Ομότιμη Καθηγήτρια στο Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης, του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Είναι Μαθηματικός με μεταπτυχιακό και Διδακτορικό στη Διδακτική των Μαθηματικών. Έχει 13 χρόνια διδακτική εμπειρία στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (1980-1993) και 30 χρόνια στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση (προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο, όπως και μετεκπαιδεύσεις). Το ερευνητικό της έργο σχετίζεται με τη μαθηματική εκπαίδευση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την πρώιμη σχολική ηλικία. Το πεδίο εφαρμογής της σχετίζεται με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, τη μελέτη των διδακτικών φαινομένων, την ανάπτυξη δραστηριοτήτων και εκπαιδευτικού υλικού και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Είναι συγγραφέας τριών βιβλίων σχετικών με τη μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία και συγγραφέας ή συν-συγγραφέας καθώς και επιμελήτρια πολλών δημοσιεύσεων σε βιβλία, επιστημονικά περιοδικά και πρακτικά. Διετέλεσε Πρόεδρος στο Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης, Αντιπρόεδρος και στη συνέχεια Πρόεδρος της Ελληνικής Ένωσης Ερευνητών στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Προέδρευσε ή συνδιοργάνωσε σημαντικό αριθμό συνεδρίων ανάμεσα στα οποία το 33ο Διεθνές Συνέδριο του PME στη Θεσσαλονίκη.*

## **Teachers' education for mathematics, old and new reality**

**Marianna Tzekaki**

Em. Professor, School of Early Childhood Education, Aristotle University  
of Thessaloniki  
tzekaki@auth.gr

### **Abstract**

This paper briefly presents key elements related to the basic and continuing education of mathematics teachers, especially in the first age group, to practice their profession using curricula and multiple resources. Possible approaches to training that can support changes in mathematics teaching towards the development of critical mathematical thinking, in line with international experiences, are also presented.

**Keywords:** teacher's education, mathematical content knowledge, students' knowledge, knowledge for teaching

***Marianna Tzekaki** is Emeritus Professor in the School of Early Childhood Education of Aristotle University of Thessaloniki. She is Mathematician with post-graduate studies and Ph.D in Didactics of Mathematics. She has 13 years of teaching experience in Secondary Education (1980-1993) and 30 years in Higher Education (undergraduate and post graduate level, including teachers training). Her research work is related to mathematics education with special interest in preschool and early school age. The scope of field is associated to the teaching and learning of mathematics, the study of teaching phenomena, the development of activities and educational material and the teachers' training. She is author of three books about mathematics education for pre- and first school age and author or co-author as well as editor of many publications in books, scientific journals and proceedings. She was Chair of the School of Early Childhood Education, Vice President and then President of the Greek Association of the Researchers in Mathematics Education. She has chaired or co-organized a significant number of conferences, including the 33rd International Conference of PME in Thessaloniki.*