ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ *γ΄*, 100(1–2), 2024

Η υπολογιστική σκέψη στην υπηρεσία της καλλιέργειας μαθηματικής ικανότητας: Η περίπτωση μαστορέματος κινούμενων τρισδιάστατων γραμμικών μοντέλων

Καθ. Χρόνης Κυνηγός[1]
Διευθ. Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, http://etl.eds.uoa.gr
Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Φιλοσοφική Σχολή,
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών
kynigos@eds.uoa.gr

Περίληψη

Το άρθρο θέτει το ερώτημα ποια μαθηματικά είναι κατάλληλα στην ψηφιακή εποχή που ζούμε, ώστε οι πολλοί να εκτιμήσουν την πολιτισμική ισχύ που ενισχύεται από τον ορθολογισμό και τη μαθηματική σκέψη; Τι είδους δραστηριότητες μπορούν να εμπνεύσουν τις νέες γενιές, ώστε να αντλήσουν χαρά από τη νοητική πρόκληση που ενέχει η μαθηματική σκέψη; Αναλύεται η έννοια της μαθηματικής ικανότητας και της υπολογιστικής σκέψης στο πλαίσιο επιδιωκόμενου εκπαιδευτικού μετασχηματισμού. Περιγράφονται τέσσερα παραδείγματα μαθηματικής μοντελοποίησης με συγκεκριμένο ψηφιακό εκφραστικό εργαλείο, πρωτότυπης εξέλιξης από τη θεμελιώδη για τη Διδακτική των Μαθηματικών πάλαι ποτέ Logo του MIT Media Lab.

Λέξεις κλειδιά: Υπολογιστική σκέψη, μαθηματική νοηματοδότηση, μαθηματική ικανότητα, μαθηματική μοντελοποίηση, προγραμματιστικά μαθηματικά, χελωνόσφαιρα, MaLT2

[1] Εθνικός Εκπρόσωπος στην International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δεν υπάρχει ουδέτερη εκπαίδευση. Η εκπαίδευση λειτουργεί ως εργαλείο με σκοπό να επιφέρει είτε κονφορμισμό είτε ελευθερία ως στάση ζωής

P. Freire (στο Bolin, 2017, σελ.746)

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η χώρα μας έχει αναδείξει εξαίρετους και εξαίρετες μαθηματικούς με σημαντική συνεισφορά στην επιστήμη και τις εφαρμογές της από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Ούτε αμφισβητεί κανείς ότι στην εποχή μας πολύ συχνά λαμπρές περιπτώσεις μαθητών/τριών και νέοι/ες μαθηματικοί διακρίνονται στις Ολυμπιάδες και τους σχετικούς διαγωνισμούς. Ξέρουμε όμως επίσης, χάρη στην Επιστήμη της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΔτΜ), ότι οι πολλοί[2], από πολύ νωρίς ηλικιακά, αποστασιοποιούνται από τη συνειδητή εμπλοκή με τη μαθηματική σκέψη και αντιμετωπίζουν τη σχέση τους με τα συστημικά σχολικά μαθηματικά με μια αίσθηση αδυναμίας, στρες, αποστροφής, απογοήτευσης και αποτυχίας, πράγμα που και η κοινωνία μας δείχνει να αποδέχεται με αναφορές στις εξετάσεις των μαθηματικών στη σχολική ζωή. Αυτό μήπως σημαίνει ότι τα μαθηματικά είναι για τους λίγους; Και ότι ο στόχος είναι να εκθέτουμε τους πολλούς στα αφηρημένα παραδοσιακά μαθηματικά με βασικό σκοπό να αναδύονται οι λίγοι σε έναν στίβο επιστημονικής αριστείας; Είναι πράγματι μάταιη η προσπάθεια τα μαθηματικά, ο ορθολογισμός και η μαθηματική σκέψη να εισχωρήσουν λίγο περισσότερο στη σύγχρονη κοινωνία ως πολιτισμικό χαρακτηριστικό;

Στο άρθρο αυτό συζητείται το αντίστροφο. Θέτω το ερώτημα: ποια μαθηματικά είναι κατάλληλα στην ψηφιακή εποχή που ζούμε, ώστε να αποτελέσουν γόνιμο πεδίο με απώτερο στόχο οι πολλοί να εκτιμήσουν την πολιτισμική ισχύ που ενισχύεται από τον ορθολογισμό και τη μαθηματική σκέψη; Σε τι είδους δραστηριότητες μπορούμε να ελπίζουμε να εμπλακούν (οι πολλοί) ώστε να αντλήσουν χαρά, αντί για όλα τα αρνητικά που προαναφέρθηκαν, από τη διανοητική πρόκληση που ενέχει η μαθηματική σκέψη;

Την επί της ουσίας εφαρμογή της εξαιρετικής –από πλευράς θεμελίωσης– αναμόρφωσης των αναλυτικών προγραμμάτων τα τελευταία 15 χρόνια φαίνεται να την εμποδίζει η προτεραιοποίηση της αξιολόγησης και της

---

[2] Από αυτό το σημείο, στο άρθρο χρησιμοποιείται ένα γένος για λόγους οικονομίας χώρου και νοήματος και μόνο.

διαχειριστικού χαρακτήρα επιβολής της δομής των δραστηριοτήτων των μαθητών. Η κατάσταση, όπως την αποτυπώνουν τα εθνικά και διεθνή εργαλεία αξιολόγησης, παραμένει πολύ απογοητευτική. Το πρόβλημα δεν είναι το πώς θα έχουν όλοι πρόσβαση σε φροντιστήριο (ψηφιακό και μη) με μοναδικό σκοπό τη βελτίωση ενός βαθμού σε μια εξέταση. Αντίθετα το ζητούμενο είναι να μη χρειάζεται φροντιστήριο και να μην ταυτίζεται η ανάγκη μάθησης των μαθηματικών με την καλή επίδοση σε εξετάσεις.

Σε αυτό το άρθρο ο σκοπός δεν είναι φυσικά να προταθεί κάποια δραστηριότητα ή αλλαγή που θα δώσει εφ' άπαξ και τελεσίδικα τη λύση στο πρόβλημα. Είναι όμως να δημοσιοποιήσει μια πρόταση για ένα είδος εμπλοκής με τη μαθηματική σκέψη που μπορεί να αντιμετωπίσει μερικά από τα φαινομενικά ανυπέρβλητα εμπόδια στο να αγαπήσει ο μανθάνων την πρόκληση, τη χαρά της εμπλοκής με το δύσκολο, την πολιτισμική ισχύ που προσδίδει η μαθηματική ικανότητα όπως π.χ. η ικανότητα να σκεφτούμε γενικευμένα, να διακρίνουμε μοτίβα σε φαινόμενα και προβλήματα, ο κατακερματισμός ενός πολύπλοκου προβλήματος σε πιο απλά ως μέθοδος για τη λύση, κ.ά.

Η πρόταση αυτή έχει σημασία να συζητηθεί ως ενσωματωμένη σε ένα πλαίσιο επιστημολογίας της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τι σημαίνει πολιτισμική ενδυνάμωση του πολίτη στην ψηφιακή εποχή μέσω της καλλιέργειας της μαθηματικής σκέψης και του ορθολογισμού. Και ποια ζητήματα εγείρονται όταν εκλαμβάνεται η έννοια της εκπαίδευσης και το εκπαιδευτικό σύστημα ως μετασχηματιζόμενα (βλ. 'transformative vs reformative' education· Robinson, 2016). Στις δύο ενότητες που ακολουθούν αναλύονται δύο πτυχές αυτού του πλαισίου. Πρώτα η έννοια της μαθηματικής ικανότητας (mathematical competency· Niss & Højgaard, 2019) και μάλιστα η συγγένειά της με την υπολογιστική σκέψη (Papert, 1975· Wing, 2006). Δεύτερο, η έννοια του ψηφιακού εργαλείου μαθηματικής έκφρασης και μαστορέματος (Hoyles & Noss, 2003).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

Από τα τέλη του 19ου, αρχές του 20ου αιώνα διανοητές όπως ο Dewey και η Montessori ενέπνευσαν με την πρόταση ότι μαθαίνουμε περισσότερο και βαθύτερα μέσα από την εμπειρία και τη νοηματοδότηση παρά με οποιονδήποτε άλλο τρόπο (Kolb, 1984). Από τα μέσα του 20ου αναδύθηκε η μελέτη του πώς μαθαίνουμε ως ένα νέο επιστημονικό πεδίο με κεντρική αρχική διαπίστωση και θέση ότι η μάθηση είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την εμπειρία, και στα μαθηματικά με τη νοηματοδότηση και την προσωπική εμπλοκή, δηλαδή την κατάσταση όπου ο μανθάνων αισθάνεται ότι η αντίστοιχη δραστηριότητα έχει προσωπικό γι' αυτόν νόημα (Davis & Hersh, 1980· Noss & Hoyles, 1996· Papert, 1972· Piaget, 1954). Στόχος για την επιστήμη είναι η σε βάθος κατανόηση του τρόπου που μαθηματικοποιούν τον κόσμο οι μαθητές και όχι η 'θεραπεία' του σε τι υπολείπεται η ικανότητα ανταπόκρισής τους σε ερωτήματα που απαιτούν αφηρημένη επιστημονική σκέψη (Gravemeijer, 2002· Noss κ.ά., 1997). Στη συνέχεια η εστίαση και η διδακτική επιδίωξη συμπεριέλαβε την έννοια της δεξιότητας, δηλαδή της διαδικασίας της μαθηματικής σκέψης στην επίλυση ειδικά σχεδιασμένων προβλημάτων που τίθενται από το αναλυτικό πρόγραμμα και τον εκπαιδευτικό (Schoenfeld, 1992). Τα τελευταία χρόνια όμως δόθηκε μια άλλη χροιά στην εκπαιδευτική ατζέντα στο πλαίσιο της προσέγγισης της εκπαίδευσης ως ενός θεσμού και ενός συστήματος υπό μετασχηματισμό: από το *Σχολείο της Αριστείας* στο *Σχολείο της Πολιτειότητας* (Kynigos, 2024· Robinson, 2016). Στη Διδακτική των Μαθηματικών (ΔτΜ) κεντρικό στοιχείο είναι η κατανόηση και η καλλιέργεια αυτού που ονομάστηκε μαθηματική ικανότητα (competency) και που ορίστηκε ως εξής:

> Μαθηματική ικανότητα είναι η διορατική ετοιμότητα δράσης κατάλληλης για την αντιμετώπιση ή την ανταπόκριση σε όλων των ειδών τις μαθηματικές προκλήσεις τις σχετικές με μια δοσμένη κατάσταση.
>
> Niss και Højgaard (2019, σελ. 12)

Πρόκειται δηλαδή για την ετοιμότητα μαθηματικοποίησης του κόσμου μας, της καθημερινότητάς μας. Η θεώρηση αυτή προχώρησε σχετικά γρήγορα σε πρόταση εκπαιδευτικής πολιτικής και εφαρμόστηκε ευρέως αρχικά στα σκανδιναβικά κράτη, όπου το πλαίσιο σχεδιασμού των αναλυτικών προγραμμάτων ονομάστηκε «το άνθος της ικανότητας» (competence flower). Περιληπτικά αυτή αναλύεται στα εξής:

- θέση προβλημάτων παράλληλα με την επίλυση δοσμένων από κάποιον άλλο
  - μαθηματική σκέψη, επίλυση και θέση προβλήματος, μοντελοποίηση, συλλογισμός
- γλώσσα, σύστημα επικοινωνίας και έκφρασης, βοηθήματα και εργαλεία
  - αναπαραστάσεις, φορμαλισμός και συμβολισμός, επικοινωνία, βοηθήματα και εργαλεία.

Πολύ σύντομα εντάχθηκε στο σκεπτικό αυτό και η μαθηματική ικανότητα, όπως την εννοούμε στην ψηφιακή εποχή, στην οποία συγχωνεύονται με μύριους τρόπους και σε διάφορα επίπεδα η κατανόηση και χρήση μαθηματικών εννοιών και ο μαθηματικός συλλογισμός με την τεχνολογία ως μέσο αναπαράστασης και έκφρασης μαθηματικών (Geraniou & Jankvist, 2019). Σε αυτή την κατεύθυνση αναδύθηκε η σχέση και συγγένεια της μαθηματικής σκέψης με την υπολογιστική σκέψη, αρχικά με τη θεωρία του Papert στην οποία έδωσε τον όρο "Constructionism" (αντί για το "Constructivism"· Von Glasersfeld, 1989) και ανέλυσε τη μαθηματική δραστηριότητα στο πλαίσιο μαστορέματος ψηφιακών μοντέλων, δημοσιοποίησης, μοιράσματος και συζήτησης γύρω από αυτά (Papert, 1980). Στη συνέχεια επανήλθε η έννοια αυτή με έναν πιο γενικευμένο και ευρείας εφαρμογής όρο, αυτόν της «υπολογιστικής σκέψης» (Wing, 2006). Υπολογιστική σκέψη είναι η ικανότητα ανάλυσης και επίλυσης σύνθετων προβλημάτων εφαρμόζοντας ένα σύνολο εννοιών, πρακτικών και στάσεων που προέρχονται από την επιστήμη των υπολογιστών, αλλά μπορούν να εφαρμοστούν ευρύτερα για την επίλυση προβλημάτων με υπολογιστικό τρόπο και για την κατανόηση της ανθρώπινης συμπεριφοράς (Grover & Pea, 2018· Weintrop κ.ά., 2016). Αποτελεί το σύνολο εννοιών, πρακτικής αλλά και νοοτροπίας με βασικά χαρακτηριστικά τα εξής:

- Αποδόμηση ενός προβλήματος σε μικρότερα τμήματα που είναι ευκολότερο να επιλυθούν.
- Αναγνώριση ομοιοτήτων και μοτίβων μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων/αντικειμένων κ.λπ.
- Δημιουργία μιας γενικευμένης λύσης μέσα από τη διατήρηση μόνο των θεμελιωδών πληροφοριών.
- Περιγραφή μιας σαφούς και αποτελεσματικής σειράς βημάτων που μπορεί να εκτελεστεί από κάποιον τρίτο για να επιλύσει το πρόβλημα.

Τρίτο και τελευταίο στοιχείο που πλαισιώνει τη συζήτηση στο άρθρο: Το ρεύμα του Εκπαιδευτικού Μετασχηματισμού, τόσο του παγιωμένου θεσμού όσο και του μοντέλου της εκπαίδευσης γενικότερα, αλλά και ειδικά για τα μαθηματικά. Για το πρώτο αντλώ στοιχεία από δύο διανοητές διακριτής μεταξύ τους εποχής και προσέγγισης: τον Ivan Illich και τον Sir. Ken Robinson. Πολύ περιληπτικά, ο Ivan Illich μίλησε για τη σημασία και την ηθική και κοινωνική σκοπιμότητα της επιδίωξης το μέλλον μας να εξαρτάται περισσότερο από τη δράση παρά όπως τώρα από τον καταναλωτισμό, μια στάση ζωής που μας επιτρέπει να είμαστε αυθόρμητοι, ανεξάρτητοι, με ανθρώπινες σχέσεις μεταξύ μας, αντί για τη διατήρηση της αναδυόμενης συνεχούς παραγωγής, δημιουργίας σκουπιδιών, κατανάλωσης. Χαρακτηρίζει δε το τελευταίο ως μια πορεία που, εκτός των άλλων, θα καταστρέψει το φυσικό αλλά και το κοινωνικό περιβάλλον. Με αυτό το σκεπτικό στο "Deschooling Society" επικρίνει τη θεσμοθέτηση της εκπαίδευσης υποστηρίζοντας ότι τα σχολεία διαιωνίζουν την κοινωνική ανισότητα και εμποδίζουν την πραγματική μάθηση. Υποστηρίζει την αυτοκατευθυνόμενη εκπαίδευση μέσω άτυπων, κοινοτικών δικτύων μάθησης (Illich, 1971).

Ο Robinson (2016) περιέγραψε έναν κατά τον ίδιο επιδιωκόμενο μετασχηματισμό των εκπαιδευτικών συστημάτων ζητώντας σχολεία που καλλιεργούν την ποικιλομορφία έναντι της συμμόρφωσης-στοίχισης, τη δημιουργικότητα έναντι της τυποποίησης και την περιέργεια έναντι του συμβιβασμού. Ισχυρίστηκε δηλαδή ότι η εποχή της βιομηχανικής επανάστασης δημιούργησε ένα σχολείο ακαδημαϊκής αριστείας που σκοτώνει (αυτή τη λέξη χρησιμοποίησε) τη δημιουργικότητα και αγνοεί την ετερογένεια και την ποικιλομορφία του ανθρώπινου ταλέντου, ικανότητας και νοηματοδότησης της ζωής.

Στη ΔτΜ μέσα από το ίδιο πρίσμα παίρνω τη βασική ιδέα δύο πάλι διακεκριμένων επιστημόνων-ερευνητών. Ο Chevallard (2015) μίλησε για την ανάγκη μετάβασης από ένα ισχύον μοντέλο-προσέγγιση της ΔτΜ σε ένα άλλο διαφορετικό. Το πρώτο το περιέγραψε ως «η μνημειακή προσέγγιση» της εκπαίδευσης παρομοιάζοντας την ως την επίσκεψη του μαθητή σε εκθετήριο των απαυγασμάτων της μαθηματικής επιστήμης με σκοπό την έκθεσή του και την «ξενάγηση» του στη σημασία, την ομορφιά και την κομψότητά τους. Το δεύτερο το ονόμασε «συμμετοχή σε κοινότητα αέναης μάθησης» περιγράφοντας ως επιδιωκόμενη την εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική εμπειρία. Η δε Boaler μίλησε για την έννοια της αυτενέργειας (agency) και της δημιουργικότητας (Boaler, 2003· Boaler & Greeno, 2000) και ανέλυσε τις διαδικασίες με τις οποίες τα σχολεία στερούν από τους μαθητές τη δυνατότητα και τις ευκαιρίες να νοηματοδοτήσουν την εμπλοκή τους με τη μαθηματική δραστηριότητα και σκέψη. Οι δυο αυτές έννοιες, ως θεμελιώδεις μηχανισμοί για τη μαθηματική νοηματοδότηση με στόχο την 'διορατική ετοιμότητα δράσης', λίγο έχουν μελετηθεί (Κεΐσογλου & Κυνηγός, 2018· Kynigos & Diamantidis, 2021· Riling, 2020).

Η συζήτηση στο άρθρο αυτό εντάσσεται σε αυτή τη συλλογιστική: στην προσέγγιση δηλαδή της εκπαίδευσης ως ενός συστήματος υπό μετασχηματισμό, όπου ο βαθύς προβληματισμός και η συστημική προσέγγιση δεν πρέπει να μείνουν στο επίπεδο μόνο της διανόησης αλλά σταδιακά ‘να μπολιάσουν’ δραστηριότητες, προγράμματα και πόρους στην εκπαίδευση του σήμερα, αφού στην εκπαίδευση τουλάχιστον τίποτα δεν εξελίσσεται γραμμικά. Χρειάζεται να επινοηθούν επομένως για τα μαθηματικά δραστηριότητες για μαθητές με στόχο την καλλιέργεια της δημιουργικότητας, της εμπλοκής με προσωπικό νόημα, της χρήσης των εννοιών για την επίλυση αλλά και για την επινόηση και θέση προβλημάτων και τη συμμετοχή τους στη μοντελοποίηση. Τέτοιες δραστηριότητες είναι κατάλληλες για την καλλιέργεια της ετοιμότητας, της ενάργειας και της επινοητικότητας μαθηματικοποίησης του κόσμου μας. Στόχος η συνδυαστική ανάπτυξη της νοηματοδότησης εννοιών, της δεξιότητας και της ικανότητας, της άντλησης χαράς από την πρόκληση και το δύσκολο και της αντίληψης ότι τα μαθηματικά συνδέονται με άλλα αντικείμενα αλλά και αποτελούν εργαλεία αντιμετώπισης και διαχείρισης πολυποίκιλων ζητημάτων της καθημερινότητας. Στην επόμενη ενότητα συζητείται το θέμα και η σημασία των ψηφιακών εργαλείων ως νέων σημειωτικών αναπαραστασιακών συστημάτων (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) για τη μαθηματική έκφραση και δράση με βάση το σκεπτικό που αναπτύχθηκε εδώ.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΦΡΑΣΗΣ

Είδαμε ότι εκτός από το πώς εννοούμε τη μαθησιακή διαδικασία, η μαθηματική ικανότητα συνδέεται και με τη γλώσσα και τα σημειωτικά συστήματα που χρησιμοποιούμε για να εκφράζουμε τη σκέψη μας και να επικοινωνούμε (Ferrara & Ferrari, 2017· Mariotti, 2006). Το άρθρο αυτό θέτει τα ζητήματα μαθηματικής ικανότητας και υπολογιστικής σκέψης μέσα από την ανάλυση της δραστηριότητας μαθητών με ένα τέτοιο σημειωτικό σύστημα καθώς και μέσα από την περιγραφή της δραστηριότητας σχεδιασμού δραστηριοτήτων καθηγητών μαθηματικών για τους μαθητές τους (Latsi & Kynigos, 2021). Για χάρη της ευκρίνειας των στοιχείων και της σημασίας των ενεργειών μαθητών και καθηγητών τους, αναλύεται στην ενότητα αυτή το είδος και οι λειτουργικότητες ενός συγκεκριμένου τέτοιου εργαλείου. Σε επόμενες ενότητες αναλύονται αντίστοιχα ένα παράδειγμα δραστηριότητας σε σχολική τάξη και ένα άλλο που αφορά σε σχεδιασμό ψηφιακών εργαλείων και δραστηριότητας από πλευράς εκπαιδευτικών. Πριν όμως από αυτές, για να γίνει κατανοητή η μαθηματική υπόσταση των ανθρώπινων δραστηριοτήτων και αλληλεπιδράσεων με το εν λόγω εργαλείο, αναλύονται πρώτα ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώνονται μαθηματικές έννοιες και αναπαραστάσεις στην κατασκευή μοντέλων και στη συνέχεια η περιγραφή του τρόπου και της σκοπιμότητας συνύφανσης μαθηματικών και προγραμματισμού σε αυτή τη διαδικασία. Το εργαλείο που επιλέξαμε έχει ιδιαίτερη σημασία, πρώτα γιατί έχει πρωτότυπες λειτουργικότητες σχεδιασμένες ειδικά για τη Διδακτική των Μαθηματικών (ΔτΜ) και δεύτερο επειδή επινοήθηκε, αναπτύχθηκε και διατίθεται απρόσκοπτα ως αποτέλεσμα έρευνας και ανάπτυξης εδώ στην Ελλάδα, εξελισσόμενο διαρκώς από τα μέσα της δεκαετίας του ’90 (Kynigos κ.ά., 1997· Kynigos, 2007a· Kynigos & Grizioti, 2018).

Πρόκειται για ένα εργαλείο μοντελοποίησης ειδικά σχεδιασμένο ώστε να ενσωματώνει μαθηματικές έννοιες, να ενέχει μαθηματικά αναπαραστασιακά συστήματα αλληλεπίδρασης και να προτρέπει σε δραστηριότητες μαθηματικού ‘μαστορέματος’ με πρόσφατη δυνατότητα εκτύπωσης στιγμιότυπων κινούμενων τρισδιάστατων γραμμικών μοντέλων (Grizioti κ.ά., 2024· Karavakou κ.ά., 2024). Το ονομάσαμε MaLT2 ή Χελωνόσφαιρα Ελληνιστί, τιμής ένεκεν από την πάλαι ποτέ Logo του S. Papert και της ομάδας του στο MIT Media Lab (Papert κ.ά., 1979). Η Χελωνόσφαιρα αποτελεί μια πρωτότυπη εκδοχή-εξέλιξη της Logo και αξιοποιεί μεταγενέστερες και αναδυόμενες σήμερα τεχνολογίες με στόχο τη ΔτΜ. Η Χελωνόσφαιρα διατίθεται διαδικτυακά, ελεύθερα και δωρεάν, συνοδευόμενη από πόρους, όπως παραδείγματα μοντέλων, βίντεο, εγχειρίδια και επιστημονικές δημοσιεύσεις σχετικά με τη χρήση της[3].

Το κλειδί είναι βέβαια ο ανθρώπινος παράγοντας, όχι αυτό καθαυτό το εργαλείο: οι καταστάσεις, δηλαδή, στις οποίες ο καθηγητής μπορεί να εμπνεύσει τους μαθητές να βρεθούν χρησιμοποιώντας τέτοια εργαλεία. Η αξία βρίσκεται στο να εκτιμήσουν οι μαθητές την οικειοποίηση των μοντέλων και των νοηματοδοτήσεων που συνοδεύει η χρήση των εννοιών για το μαστόρεμά τους, να συζητήσουν και να συννενοηθούν με συμμαθητές τους χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γλώσσα της ακρίβειας, της διεξοδικότητας, της αλγοριθμικής σκέψης και της απόδειξης. Παίζει όμως σημαντικό ρόλο και το εργαλείο και οι ενσωματωμένες λειτουργικότητες, η αλληλεπίδραση και τα αναπαραστασιακά συστήματα (Morgan & Kynigos, 2014).

Τα συστήματα αναπαράστασης συγκεκριμένα στη Χελωνόσφαιρα είναι τρία, αλληλεξαρτώμενα μεταξύ τους:

[3] http://etl.eds.uoa.gr

- το πρώτο είναι μια γλώσσα προγραμματισμού σχεδιασμένη ώστε να προσεγγίζει τον μαθηματικό φορμαλισμό και τη σύνταξη μαθηματικών παραστάσεων,
- το δεύτερο είναι η γραφική γραμμική αποτύπωση σε τρισδιάστατο γεωμετρικό πεδίο των αλλαγών κατάστασης ενός ψηφιακού άβαταρ που προσομοιώνει ένα πετούμενο σε όλες τις κατευθύνσεις στον χώρο (όπως με ενημέρωσαν οι φοιτητές μου στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ), το 'κολίμπρι' και
- το τρίτο είναι ο 'μεταβολέας', εργαλείο που όταν ενεργοποιείται παρέχει τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού τιμών μεταβλητής παραμετρικών διαδικασιών και επομένως έναν φαινομενικά συνεχή μετασχηματισμό των γραμμικών μοντέλων που προκύπτουν από την εκτέλεση της διαδικασίας. Τη λειτουργικότητα αυτή ποτέ δεν την είχαν οι διάφορες εκδοχές αντίστοιχων προγραμματιστικών εργαλείων. Επινοήθηκε ακριβώς για την καλλιέργεια της έννοιας της γενίκευσης και της συναρτησιακής συμμεταβολής (Kynigos κ.ά., 1997). Δίνει την αίσθηση του κινούμενου μοντέλου με συχνά απρόσμενες και συναρπαστικές 'συμπεριφορές' που εξάπτουν τη φαντασία. Στιγμιότυπα που προκύπτουν από τον δυναμικό αυτό χειρισμό μπορούν να εκτυπωθούν σε τρισδιάστατο εκτυπωτή δίνοντας την αίσθηση παραγωγής πρωτότυπων μοντέλων.

Η γλώσσα προγραμματισμού στη Χελωνόσφαιρα είναι η Berkeley Logo (Harvey, 1997), γλώσσα μαθηματικά και προγραμματιστικά θεμελιωμένη, που σχεδιάστηκε εδώ και πολλά χρόνια, ώστε να πλησιάζει όσο το δυνατό περισσότερο τον μαθηματικό φορμαλισμό και ταυτόχρονα να αποτελεί μια κανονική συναρτησιακή, δομημένη γλώσσα βασισμένη στις λίστες ως δομή δεδομένων –κληρονομώντας την ιδιότητα αυτή από τη LiSP, μια από τις πρώτες, αν όχι την πρώτη, γλώσσα-εργαλείο για αλγόριθμους τεχνητής νοημοσύνης.

Γιατί όμως να θεωρήσουμε τον προγραμματισμό ως γόνιμο εκφραστικό εργαλείο για μαθηματική δραστηριότητα; Για τι είδους δραστηριότητα μιλάμε; Από πλευράς ΔτΜ οφείλουμε εδώ να πάρουμε μια θέση απέναντι στη σκοπιμότητα της χρήσης του μαθηματικού φορμαλισμού ως εκφραστικού εργαλείου για τη μάθηση των μαθηματικών. Είναι γνωστό στη ΔτΜ ότι υπάρχουν αντίθετες λογικές, καλά τεκμηριωμένες βέβαια, που κρίνουν τον φορμαλισμό ως εμπόδιο για τη νοηματοδότηση των μαθητών και θέτουν ως στόχο την παράκαμψη της χρήσης του, όπως τα συστήματα δυναμικού χειρισμού γραμμικών αναπαραστάσεων αλλά και άλλους προτεχνολογικούς πόρους (Artigue, 2002· Laborde κ.ά., 2006). Υπάρχουν όμως και αυτές υπέρ της άποψης ότι στόχος είναι εμείς οι παιδαγωγοί να επινοήσουμε δραστηριότητες μαθηματικοποίησης με μέσο τον φορμαλισμό, να νοηματοδοτηθεί ο φορμαλισμός, ο οποίος εξ άλλου δεν επινοήθηκε τυχαία ως το σημειωτικό σύστημα το πιο αποτελεσματικό για τη μαθηματική έκφραση (Dubinsky, 2000· Kynigos & Psycharis, 2003).

Σχετικά με τα διαθέσιμα προγραμματιστικά εργαλεία για τα μαθηματικά τώρα: Η ιστορία έχει δείξει ότι αναπτύσσονται συνεχώς νέες γλώσσες προγραμματισμού και εξελίσσεται παράλληλα η υπόσταση και το πεδίο εφαρμογής της κάθε γλώσσας που τυγχάνει αποδοχής από το αντίστοιχο κοινό. Είναι επομένως, θα έλεγα, ατυχές το ότι δεν επινοήθηκαν πολλές γλώσσες με αυτόν τον στόχο, δηλαδή την ανάδειξη της μαθηματικής τους υπόστασης ή συγγένειας, εκτός από ελάχιστες περιπτώσεις όπως αυτή του Mathematica-Wolfram Alpha (Bray & Tangney, 2017). Παράλληλα, η ίδια η Logo εξελίχθηκε με άλλη ατζέντα, σε εφαρμογές έξω από την εστίαση στη μαθηματική της υπόσταση, όπως παλιότερα στην LCSI Microworlds Pro και την Imagine Logo και σχετικά πρόσφατα στο Scratch (Armoni κ.ά., 2015) και στο NETLOGO, ενώ θεωρήθηκε συγγενής νέων γλωσσών, όπως της Python που αναπτύχθηκε όμως πάλι χωρίς εστίαση στη μαθηματική της υπόσταση ή ιδιότητα.

Βασικά χαρακτηριστικά της Logo που την καθιστούν μοναδική περίπτωση[4] είναι δύο: Πρώτα, η μαθηματική μορφή της σύνταξης, οι διαθέσιμες συναρτήσεις και η μείωση του 'θορύβου' από θέματα που αφορούν την πληροφορική π.χ. manifest data types, interpreted, wysiwyg (what you see is what you get) line editors (βλ. Sinclair & Moon, 1991). Δεύτερο, η προσθήκη ενός πεδίου προγραμματισμού που έχει γεωμετρική υπόσταση συνδυάζοντας Διαφορική, Ευκλείδεια και Καρτεσιανή γεωμετρία (Abelson & diSessa, 1981). Πώς γίνεται αυτό; Στις πρωτογενείς εντολές της συναρτησιακής αυτής γλώσσας έχουν προστεθεί εντολές που απευθύνονται σε ένα άβαταρ (τη 'Χελώνα'), μια οντότητα της οποίας η κατάσταση εξαρτάται από δύο επιμέρους στοιχεία, τη θέση και τη διεύθυνσή της σε κάθε χρονική στιγμή. Οι προστεθείσες εντολές αποτελούν οδηγίες αλλαγής ενός εκ των δυο αυτών στοιχείων. Αλλαγή θέσης προκαλεί μετακίνηση, αλλά και γραμμικό αποτύπωμα, με αποτέλεσμα με τον προγραμματισμό να μπορεί κανείς να

---

[4] Το ότι από μερικούς τοποθετείται ανάμεσα σε 'παλαιές' γλώσσες προγραμματισμού μαζί με τη LiSP, είναι άλλη συζήτηση που δεν την κάνω εδώ.

κατασκευάσει γραμμικά μοντέλα. Η αλλαγή διεύθυνσης φαίνεται οπτικά από την αλλαγή της ακίδας του άβαταρ.

Το εργαλείο που προτείνεται εδώ, η Χελωνόσφαιρα, χρησιμοποιείται ήδη από χιλιάδες χρήστες διεθνώς[5] και είναι η βάση με την οποία αναπτύχθηκαν από 35 έμπειρους μάχιμους καθηγητές μαθηματικών περίπου 200 μικροπειράματα στην υποδομή του Ψηφιακού Σχολείου από το 2010 (Kynigos, 2020). Έχει εξελιχθεί από την κλασική μορφή της Logo ως εξής: το άβαταρ έγινε ‘κολίμπρι’, δηλαδή κινείται σε τρισδιάστατο πεδίο, υπάρχει διαθέσιμη ‘κάμερα’ με την οποία περιηγείται ο χρήστης στον χώρο και επιπλέον, όταν εκτελεστεί μια παραμετρική διαδικασία με συγκεκριμένες τιμές ενεργοποιείται ο μεταβολέας με τον οποίο μετακινείται οποιοδήποτε μοντέλο δυναμικά, καθώς αλλάζει με συνεχή τρόπο η τιμή οποιασδήποτε από τις μεταβλητές της διαδικασίας.

Παράδειγμα: για την κατασκευή ενός μαθηματικού τετραγώνου με τη Χελωνόσφαιρα χρειάζεται ο ορισμός μιας διαδικασίας που περιγράφει την αντίστοιχη κλάση αντικείμενων με βάση τις ιδιότητές της, όχι κώδικα που φτιάχνει ένα στιγμιότυπο ή ένα αποτύπωμα τετραγώνου.

Γράφεται επομένως ως εξής:

```
Για τετράγωνο :α
επανάλαβε 4 [μ :α δ 90]
Τέλος
```

Δηλαδή ότι υπάρχει μια μεταβλητή ‘α’ για το μέτρο αλλαγής θέσης του άβαταρ (‘μ’ = ‘μπροστά’), επομένως είναι ίσες οι τιμές για τις τέσσερις φορές που εφαρμόζεται, υπάρχει συγκεκριμένη τιμή για τη στροφή (‘δ’ = ‘δεξιά’) που εξασφαλίζει εσωτερική γωνία 90 μοιρών και επιπλέον εκφράζεται ως μια επανάληψη μιας δυάδας αλλαγής κατάστασης επί τέσσερα.

Αντίθετα, το (μη μαθηματικό για τη συζήτηση αυτή) στιγμιότυπο θα κατασκευαζόταν από τον εξής κώδικα: επανάλαβε 4 [μ 50 δ 90].

Στη Χελωνόσφαιρα, το τετράγωνο χρησιμοποιείται εύκολα ως δομικό στοιχείο για την κατασκευή ενός κύβου και του αναπτύγματος όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.

[5] Φορτώσεις της σελίδας: 328K, Μεμονωμένες επισκέψεις: 101K, Πηγή: Google Analytics https://analytics.google.com/ 21.11.2024

Πίνακας 1. Κατασκευή κύβου και αναπτύγματος κύβου

Για κυβος :χ επαναλαβε 4[τετραγωνο :χ μ :χ κατω 90] Τελος	για αναπτυγμακυβου :α :β τετραγωνο :α δ 90 πάνω :β τετραγωνο :α μ :α πάνω :β τετραγωνο :α μ :α πάνω :β τετραγωνο :α δ 90 πάνω :β τετραγωνο :α δ 180 πάνω :β μ :α πάνω :β δ 90 μ :α α 90 τετραγωνο :α τελος

Ακολουθούν τέσσερις ενότητες στις οποίες αναλύονται αντίστοιχα στοιχεία αξιοποίησης του εργαλείου. Στην πρώτη αναλύεται το πώς για την κατασκευή ενός γενικευμένου μοντέλου χρειάζονται γνώσεις μαθηματικών εννοιών από την άλγεβρα και τη γεωμετρία παράλληλα, καθώς και γνώσεις μηχανικής-μοντελοποίησης. Αναλύεται επίσης η ελαφριά αλλοιωμένη υπόσταση του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι έννοιες σε σχέση με τον ορισμό ή τη χρήση τους σε κλασικά προβλήματα αναπαριστώμενα με στατικά προ-τεχνολογικά μέσα. Στην επόμενη ενότητα, το δεύτερο στοιχείο αφορά στην ιδιότητα του εργαλείου να μπορεί να συνυφάνει έννοιες προγραμματισμού και υπολογιστικής σκέψης με έννοιες μαθηματικών. Αυτό θα γίνει με την ανάλυση του τρόπου δημιουργίας μιας διαδικασίας που κατασκευάζει ένα γενικευμένο κανονικό πολύγωνο με όλες τις χορδές που ενώνουν τις κορυφές του. Το τρίτο στοιχείο στη συνέχεια είναι η περιγραφή μιας περίπτωσης χρήσης του εργαλείου από μαθητές γυμνασίου όπου η άσκηση που τους τέθηκε από τον καθηγητή τους προκάλεσε τη διατύπωση από τους ίδιους τους μαθητές ενός νέου προβλήματος με αφορμή μεν μια παρανόηση των μαθητών, αποτέλεσμα δε, μια ποικιλία από μαθηματικές δραστηριότητες και κυρίως τη βαθιά εμπλοκή και νοηματοδότηση από πλευράς τους. Τέλος, το τέταρτο αφορά τον καθηγητή των μαθηματικών και μάλιστα εστιάζει στη σημασία του σχεδιασμού και της ανάπτυξης ψηφιακών αντικειμένων για τον μαθητή από τον εκπαιδευτικό ως στοιχείο επαγγελματικής εξέλιξης αλλά και οργανικής εμπλοκής των τεχνολογιών στην εκπαιδευτική πράξη.

ΠΡΩΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Η καθεμιά από τις δύο διαδικασίες του Πίνακα 2 κατασκευάζει ένα μοντέλο γενικευμένου ισοσκελούς τριγώνου.

Πίνακας 2. Κατασκευές ισοσκελούς τριγώνου

Περίπτωση α	Περίπτωση β
Για ισοσκτριγενα :α :φ	Για ισοσκτριγδυο :β :χ
δ 90 μ :α α 180-:φ	α (:χ)/2
μ (:α)/(2*συν(:φ)) α 2*:φ	μ :β α 180-:χ
μ (:α)/(2*συν(:φ))	μ :β α (180+:χ)/2
α 270-:φ	μ 2*:β*ημ(:χ/2) α 90
τέλος	τέλος

Η πρώτη χρησιμοποιεί ως μεταβλητές εισόδου, βασικά δηλαδή στοιχεία κατασκευής, το μήκος της βάσης και την προσκείμενη εσωτερική γωνία δηλαδή της γωνία της βάσης του ισοσκελούς. Η δεύτερη χρησιμοποιεί μία από τις ίσες πλευρές και τη γωνία κορυφής του ισοσκελούς. Για την κάθε μια αρκεί ο κατάλληλος συνδυασμός ενός γραμμικού και ενός γωνιακού στοιχείου. Τα υπόλοιπα στοιχεία που χρειάζεται το κολίμπρι ως εντολές εξαρτώνται από τα δύο πρώτα, όταν χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες του ισοσκελούς.

Οι έννοιες επομένως που χρειάζονται για αυτή την κατασκευή με αυτό το εργαλείο μπορούν να περιγραφούν ως εξής :

Περίπτωση α)

Ισοσκελές τρίγωνο κατασκευάζεται όταν δίνονται δύο μεγέθη, ένα γραμμικό και ένα γωνιακό, τα οποία αντιστοιχούν στην κατασκευή της βάσης και της προσκείμενης στροφής της μαθηματικής οντότητας κολίμπρι. Το μέτρο μετακίνησης για την κατασκευή των δύο άλλων γραμμικών στοιχείων υπολογίζεται ως ο λόγος του μέτρου διά το διπλάσιο του συνημιτόνου του μέτρου της γωνίας της βάσης –που είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης στροφής, ενώ το μέτρο της στροφής (εξωτερική γωνία της κορυφής του τριγώνου) στην κορυφή του τριγώνου είναι το διπλάσιο του δοσμένου γωνιακού στοιχείου. Το μέτρο της στροφής που χρειάζεται ώστε η κατάσταση του κολιμπριού μετά το τέλος της κατασκευής να είναι ίδια με αυτή της έναρξης είναι η παραπληρωματική της εσωτερικής γωνίας.

Περίπτωση β)

Ισοσκελές τρίγωνο κατασκευάζεται όταν δίνονται δύο μεγέθη, ένα γραμμικό και ένα γωνιακό, τα οποία αντιστοιχούν στο μέτρο του μήκους της κάθε μιας από τις ίσες πλευρές και στο μέτρο της γωνίας κορυφής του τριγώνου. Το μέτρο μετακίνησης προκειμένου να κατασκευαστεί η βάση του τριγώνου είναι το διπλάσιο του μέτρου της ίσης πλευράς επί το ημίτονο του μισού της γωνίας κορυφής (βλ. Ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται αν φέρουμε το ύψος του τριγώνου), ενώ οι στροφές από την αρχική διεύθυνση, τη στροφή στην κορυφή και στη βάση του τριγώνου υπολογίζονται εύκολα χάρη στη γνώση του αθροίσματος γωνιών τριγώνου και της ισότητας των δύο γωνιών της βάσης.

Η σημασία των δύο αυτών εναλλακτικών τρόπων κατασκευής είναι πρώτα απ’ όλα ο τρόπος χρήσης των ιδιοτήτων αυτού του αντικειμένου, προκειμένω να κατασκευαστεί το αντίστοιχο μοντέλο με το συγκεκριμένο εργαλείο, το σημειωτικό σύστημα και τον αλγοριθμικό τρόπο κατασκευής. Οι ιδιότητες που προκύπτουν από την ‘Ευκλείδεια υπόσταση’ του αντικειμένου προς κατασκευή αφορούν στο ισοσκελές, το ορθογώνιο που δημιουργείται όταν υποθέσουμε ότι φέρουμε το ύψος και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ή σχέσεις που συνδέουν γραμμικά και γωνιακά στοιχεία. Αυτό προϋποθέτει δύο πράγματα. Πρώτα ότι μορφοποιείται το τι είναι σημαντικό στις ιδιότητες του τριγώνου και το πώς ακριβώς νοηματοδοτούνται οι ιδιότητες και οι σχέσεις οι απαραίτητες για την κατασκευή. Για παράδειγμα, μπαίνει σε προτεραιότητα η αναζήτηση σχέσης μεταξύ γωνιακών και γραμμικών μεγεθών του αντί για την κλασική εστίαση στο ένα ή το άλλο στοιχείο του σχήματος. Δεύτερο, το ότι, για να δημιουργηθεί το μοντέλο, χρειάζονται γνώσεις όχι μόνο των Ευκλείδειων ιδιοτήτων αλλά και μηχανικής: διαδικασίας κατασκευής δηλαδή, και προγραμματισμού, αλγοριθμικής σκέψης, χρήσης μεταβλητών για την ενσωμάτωση της έννοιας της ιδιότητας κλάσης αντικειμένων. Ειδική περίπτωση: όταν η τιμή της φ είναι 0° ή 180° έχουμε κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος. Όταν είναι 90° διακόπτεται η εκτέλεση της διαδικασίας για λόγους προγραμματισμού μιας και το συν90° είναι μηδέν.

Εάν επομένως δοθεί μια τέτοια άσκηση σε μαθητές, θα πρέπει και οι εκπαιδευτικοί να είναι έτοιμοι να αποστασιοποιηθούν προς στιγμή από τη ρουμπρίκα του αναλυτικού προγράμματος, την παγιωμένη δομή και αλληλουχία των εννοιών και των ασκήσεων, και να εστιάσουν στη διαδικασία μαθηματικοποίησης των μαθητών/τριών τους, καθώς οι έννοιες μπαίνουν σε χρήση προκειμένου να γίνει η κατασκευή. Τελικός στόχος η αποφυγή του εγκλωβισμού των μαθητών σε μάθηση μαθηματικών ρουτινών και η εμπλοκή τους με την ουσιαστική σημασία τους, όπως τι ακριβώς σημαίνει ‘ιδιότητα’ κλάσης αντικειμένων, πώς και πότε αναζητούμε σχέση μεταξύ γωνιακού και γραμμικού μεγέθους, πώς εκφράζουμε μια γενικευμένη έννοια με την έννοια του γενικευμένου αριθμού ή μεταβλητής κ.λπ.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: ΣΥΝΥΦΑΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Εδώ συζητάμε πάλι για τη χρήση της Χελωνόσφαιρας για κατασκευή και μαστόρεμα, εστιάζοντας όμως σε μια άλλη σημαντική κατά τη γνώμη μου πτυχή: την από κοινού συγχώνευση εννοιών αυτού που ονομάζεται υπολογιστική σκέψη με τη μαθηματική σκέψη και με έννοιες που χρειάζονται για μια κατασκευή.

Λίγα λόγια για την υπολογιστική σκέψη.

Ο όρος αυτός προσδιορίστηκε ως η ικανότητα να επινοούνται και να επιλύονται προβλήματα από τον άνθρωπο με τον τρόπο, τη λογική και τις μεθόδους του υπολογιστή. Προτάθηκε ως επιδιωκόμενη από την εκπαίδευση ανθρώπινη ικανότητα νοηματοδότησης αλλά και πρακτικής στον τρόπο που αντιμετωπίζονται προβλήματα και ζητήματα. Εκτός από έννοιες προγραμματισμού του υπολογιστή, όπως η εντολή, η μεταβλητή, η επανάληψη, η αναδρομή, η άλγεβρα Boole συνόδευσαν τα χαρακτηριστικά της υπολογιστικής σκέψης και πτυχές της επίλυσης προβλημάτων, όπως η γενίκευση, η παρατήρηση μοτίβων, η αποδόμηση προβλήματος σε επιμέρους απλούστερα, κ.ο.κ. Αν δούμε βέβαια αυτές τις έννοιες, αλλά κυρίως τις επιμέρους δεξιότητες της υπολογιστικής σκέψης ως μαθηματικοί θα αναγνωρίσουμε αμέσως τη μαθηματική τους υπόσταση και αυτό είναι ένα σημαντικό επιχείρημα για τη συνύφανση των μαθηματικών με την υπολογιστική σκέψη. Από ιστορικής πλευράς, η έννοια της υπολογιστικής σκέψης προτάθηκε πρώτα από τον Papert (1975) με τον όρο “constructionism” (Kynigos, 2015· Papert & Harel, 1991). Στη συνέχεια έπεσε σε σχετική αφάνεια λόγω της έμφασης που δόθηκε σε νέες τότε τεχνολογικές επαναστάσεις, όπως αυτή των πολυμέσων, του διαδικτύου, του παγκόσμιου ιστού. Επανήλθε στο προσκήνιο με την έλευση του ιστού ν. 2, δηλαδή της δυνατότητας δημιουργίας και δευτερογενούς ανάπτυξης για μη πληροφορικούς χρήστες διαδικτυακών εφαρμογών.

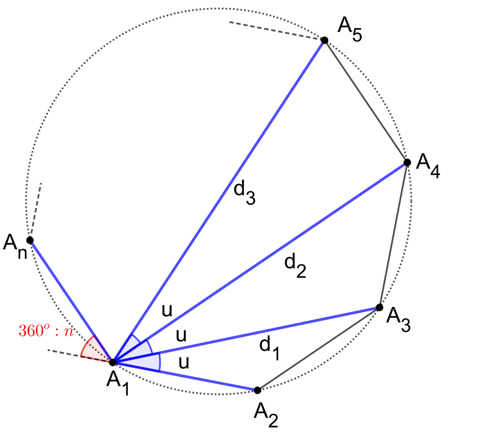
Στο προκείμενο έχει σημασία λοιπόν να δούμε το ερώτημα «πώς μπορεί η υπολογιστική σκέψη να υποστηρίξει τη μαθηματική σκέψη ή την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων». Παίρνω ένα πρόβλημα κατασκευής επιλεγμένο ώστε να αναδεικνύει αυτό το θέμα, το εξής:

> Να δημιουργηθεί μια διαδικασία που να κατασκευάζει ένα γενικευμένο κανονικό πολύγωνο με όλες τις διαγώνιες που ενώνουν τις κορυφές του.

Από πλευράς μαθηματικών εννοιών προκειμένου να δοθούν οδηγίες στο κολίμπρι να κατασκευάσει το αντικείμενο αυτό, χρειάζονται τα εξής: η έννοια φυσικά της διαδοχής μιας δυάδας αλλαγής κατάστασης (μ :β δ 360/:ν), με μέτρο στροφής 360/ν όπου ν το πλήθος πλευρών του ν-γώνου και με μέτρο μετακίνησης ίσο κάθε φορά για κάθε στιγμιότυπο του αντικειμένου. Για παράδειγμα:

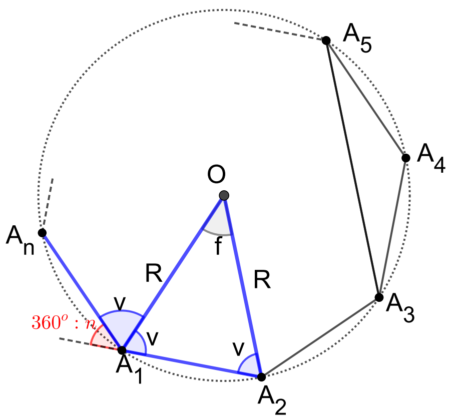
```
Για κανονικόπολύγωνο :α :ν
επανάλαβε :ν [μ :β δ 360/:ν]
τέλος
```

Το δεύτερο σκέλος κατασκευής, οι διαγώνιες δηλαδή που είναι και χορδές στον περιγεγραμμένο κύκλο, είναι λίγο πιο δύσκολο. Χρειάζεται να υπολογιστεί για κάθε κορυφή του πολυγώνου το μέτρο της στροφής, ώστε το κολίμπρι να κοιτάει στην εκάστοτε μη διαδοχική κορυφή, και το μέτρο της μετακίνησης, ώστε να βρεθεί το κολίμπρι στην εν λόγω κορυφή και να επιστρέψει με αντίθετη μετακίνηση, ώστε να συνεχίσει με την κατασκευή της επόμενης. Αυτά τα δύο μεγέθη υπολογίζονται σε συνάρτηση με τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου, τον νόμο των ημιτόνων.



Στο κανονικό πολύγωνο με n πλευρές μήκους s η γωνία u μεταξύ διαδοχικών χορδών του περιγεγραμμένου κύκλου και των πλευρών του είναι:

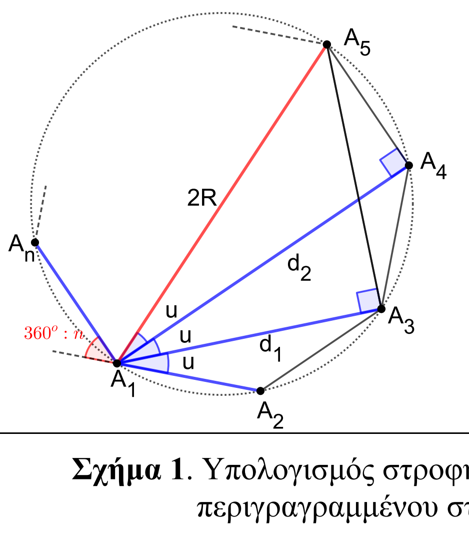
$$u = \left(180^o - \frac{360^o}{n}\right) : (n-2)$$



Για τη σχέση μεταξύ του μήκους της διαμέτρου του περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου, με την πλευρά του πολυγώνου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των ημιτόνων χρησιμοποιώντας τις γωνίες v και f, που είναι:

$v = \left(180^o - \frac{360^o}{n}\right) : 2$ και

$f = 180^o - 2v$ ή $f = \frac{360^o}{n}$



Για να βρούμε τον τύπο που συνδέει το μήκος της εκάστοτε χορδής και της διαμέτρου χρειάζεται να αξιοποιήσουμε τα ορθογώνια τρίγωνα. Π.χ. για n άρτιο μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα $A_1A_3A_5$ για την d_1 και $A_1A_4A_5$ για την d_2.

Σχήμα 1. Υπολογισμός στροφής και μήκους των χορδών του περιγραγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου

Η λύση με βάση αυτό το σκεπτικό:

Για διαγώνιες :ν :ς

επανάλαβε :ν [φέρε_διαγωνίους :ν :ς 2

α ((:ν-3)*(180/:ν))

μ :ς δ (360/:ν)]

τέλος

Και οι επιμέρους εμφωλευμένες διαδικασίες.

Για φέρε_διαγωνίους :ν :ς :κ αν :κ>(:ν-2) [σταμάτα] δ 180/:ν μ μήκος_διαγωνίου :ν :ς :κ π μήκος_διαγωνίου :ν :ς :κ φέρε_διαγωνίους :ν :ς :κ+1 τέλος	Για διάμετρο :ν :ς output 2*((:ς*ημ (180*(:ν-2)/(2*:ν)))/ημ (360/:ν)) τέλος για μήκος_διαγωνίου :ν :ς :κ output (διάμετρος :ν :ς)*ημ (180*:κ/:ν) τέλος

Πίνακας 3. Ο τελικός αλγόριθμος για το κανονικό έγχορδο πολύγωνο.

Ας δούμε τα στοιχεία αυτής της κατασκευής με βάση τον προβληματισμό αυτής της υποενότητας.

Ας πάρουμε πρώτα τις κλασικές μαθηματικές έννοιες. Η λύση ενέχει ενσωματωμένες έννοιες τριγωνομετρικών σχέσεων που συνδέουν γραμμικά και γωνιακά στοιχεία σε ορθογώνια τρίγωνα, όπως προηγουμένως και στα ισοσκελή. Επίσης, έχει τη σύνδεση του κανονικού πολυγώνου με τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου, μια και η στροφή και το μήκος της κάθε χορδής μπορεί να υπολογιστεί σε συνάρτηση με αυτή τη διάμετρο. Τέλος, έχει τις έννοιες του κανονικού πολυγώνου που ενεργοποιούνται για την κατασκευή του, δηλαδή ένα μεταβλητό μέτρο για κάθε γραμμική μετακίνηση (ίσες πλευρές) και ένα μεταβλητό μέτρο για τον αριθμό των στροφών (και άρα και των πλευρών) που χρησιμοποιείται για τη σχέση κάθε στροφής με αυτό, ώστε να ολοκληρώνεται μια ολόκληρη περιστροφή 360 μοιρών.

Από πλευράς εννοιών προγραμματισμού τώρα: υπάρχουν οι βασικές έννοιες ορισμού διαδικασίας, δομής εμφωλευμένων διαδικασιών, επανάληψης, συνάρτησης, αναδρομής και συνθήκης (conditionals).

Το σημαντικότερο όμως είναι το πώς αυτές οι δύο έννοιες συνδυάζονται με την πρακτική της υπολογιστικής σκέψης. Το πρόβλημα ζητά ένα γενικευμένο μαθηματικό σχήμα. Οπότε χρειάζεται η έννοια της μεταβλητής, αλλά και της αντίληψης γενικευμένου αντικειμένου. Η αποδόμηση του προβλήματος σε επιμέρους, το πολύγωνο, η κάθε στροφή στην κάθε κορυφή, το μήκος των χορδών, η σχέση αυτών των δύο με τη διάμετρο κ.λπ., είναι αυτή που δίνει μια εξαιρετικά κομψή με τη μαθηματική και την προγραμματιστική έννοια λύση σε κώδικα ελάχιστων γραμμών. Η παρατήρηση ότι το πρόβλημα λύνεται κομψά, εάν χρησιμοποιήσουμε το μοτίβο της δυάδας αλλαγής κατάστασης για το πολύγωνο ακολουθούμενη από την κατασκευή των χορδών.

Με το παράδειγμα αυτό φαίνεται το πώς η συγχώνευση μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης έχουν ως αποτέλεσμα αυτή την αποτελεσματικότητα-κομψότητα στη λύση και τη διατύπωση της κατασκευής ενός όχι και τόσο απλού αντικειμένου.

ΤΡΙΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ας δούμε τώρα την περίπτωση της δραστηριότητας μαθητών στο πλαίσιο σχολικής τάξης. Στο παράδειγμα που ακολουθεί το καίριο σημείο είναι η εμπειρία και η παιδαγωγική σοφία του καθηγητή. Δόθηκε από τον καθηγητή η άσκηση-project «κατασκευάστε ένα γενικευμένο παραλληλόγραμμο» σε μια τάξη 3ης Γυμνασίου που είχε ήδη εμπειρία από την 1η σε τέτοιες δραστηριότητες. Στη διάρκεια μιας άσκησης μια από τις ομάδες των μαθητών έδειξε αδυναμία κατανόησης της έννοιας της εμφώλευσης κλάσεων γεωμετρικών αντικειμένων (εύλογα, θα μας έλεγε η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών ΔτΜ). Οι μαθητές βασίστηκαν στην παρανόησή τους αυτή για να θέσουν ένα πρόβλημα στον εαυτό τους, πρόβλημα που θα προέκυπτε εάν ίσχυε η λανθασμένη τους αντίληψη για το θέμα. Τη στιγμή αυτή ο καθηγητής τους δεν βιάστηκε να τους ‘διορθώσει’ ή να τους ‘σπρώξει’ προς τη λύση. Θεώρησε ότι έχει προτεραιότητα το γεγονός ότι έθεσαν στον εαυτό τους ένα πρόβλημα δικής τους έμπνευσης. Προφανώς, δεν θα τους άφηνε με την παρεξήγηση αυτή παγιωμένη. Θα τους έθετε τα πράγματα στη σωστή τους διάσταση, αλλά –και εδώ είναι το κρίσιμο– μετά τη μαθηματική αναζήτηση στην οποία οι ίδιοι ενεπλάκησαν και η οποία είχε πολύ ενδιαφέρουσες μαθηματικές πτυχές, διαφορετικές από το προκείμενο θέμα. Η εμπλοκή με τη μαθηματική δραστηριότητα, η 'πώρωση' για την εύρεση του ζητούμενου, η νοηματοδότηση και η επιμονή και επινοητικότητα των μαθητών να βρουν τη λύση ήταν η προτεραιότητα. Η λύση στην αρχική άσκηση θα δίνονταν μετά (Kynigos & Diamantidis, 2021).

Ποια ήταν η παρεξήγηση των μαθητών; Ότι ένα παραλληλόγραμμο δεν πρέπει να είναι τετράγωνο. Γιατί το παρεξήγησαν; Γιατί στο βιβλίο και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα υπάρχει ξεχωριστή ενότητα για το καθένα από τις δύο αυτές κλάσεις αντικειμένων και η κάθε κλάση εμφανίζεται περισσότερο ως 'γεωμετρικό σχήμα', όπου προτάσσεται η εξεικόνισή του παρά ο προσδιορισμός μιας κλάσης μέσα από τις ιδιότητές της. Άρα, για τους μαθητές η άσκηση «φτιάξτε ένα μοντέλο ενός γενικευμένου παραλληλογράμμου» σήμαινε «ενός παραλληλογράμμου και όχι ενός τετραγώνου»!

Έθεσαν λοιπόν εαυτούς προ της πρόκλησης: «πώς φτιάχνουμε ένα γενικευμένο παραλληλόγραμμο που δεν μπορεί να γίνει τετράγωνο»; Και μάλιστα ήταν τόσο ενθουσιασμένοι με το πρόβλημα που το 'σφύριξαν' σε συμμαθητές τους που κι εκείνοι το βρήκαν ενδιαφέρον. Αποτέλεσμα; Μαθηματικές διερευνήσεις με εναλλακτικές εξελίξεις, όλες με μαθηματικό ενδιαφέρον διαφορετικό στην κάθε περίπτωση. Στον Πίνακα 4 φαίνονται οι 'λύσεις'–κατασκευές διαφορετικών ομάδων. Στη διαδικασία 'παροχιτετα' οι μαθητές επινόησαν την προσθήκη μιας εξάρτησης-γραμμικής συνάρτησης μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμικών μεταβολών του παραλληλογράμμου προσθέτοντας 20 στη μεταβλητή που προσδιορίζει την πρώτη πλευρά. Εξήγησαν ότι η διαδικασία αυτή ποτέ δεν θα φτιάξει τετράγωνο, διότι δεν μπορεί να ισχύσει η ιδιότητά του ότι όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Η σημασία της εξήγησης αυτής δεν είναι τόσο ότι είναι μαθηματικά τεκμηριωμένη, αλλά περισσότερο το ότι αυτή η διατύπωση έγινε από τους μαθητές πηγαία και αυθόρμητα, δηλαδή εδώ έχουμε την περίπτωση της μαθηματικοποίησης. Η δεύτερη λύση, 'παροχιτετβ' εφαρμόζει την ίδια λογική, προσθέτει μία εξάρτηση σε διαδοχικές πλευρές αυτή τη φορά πολλαπλασιαστική. Η περίπτωση της διαδικασίας 'παροχιτετγ' υποδηλώνει διαφορετική σκέψη: οι μαθητές σκέφτηκαν ότι αρκεί να μην ισχύσει η ιδιότητα των γωνιακών στοιχείων του τετραγώνου, στροφή 90 μοιρών. Συζήτησαν πώς μπορούν να το εκφράσουν αυτό και επινόησαν μια αλγεβρική παράσταση ως είσοδο στην εντολή στροφής, ιδιότητα που εξασφαλίζει ότι η τιμή θα είναι μονός αριθμός. Έτσι δεν μπορεί ποτέ να είναι τετράγωνο! Θυμίζω: η μαθηματικοποίηση είναι που μετράει από πλευράς ΔτΜ και όχι τόσο το αν είναι σωστή και πλήρης η απάντηση (προφανώς η διαδικασία δεν φτιάχνει όλα τα μη τετράγωνα παραλληλόγραμμα, ενώ τα πράγματα αλλάζουν όταν η τιμή της ‘γ’ δεν είναι ακέραιος!). Τέλος, άλλη ομάδα χρησιμοποίησε έννοιες της άλγεβρας Boole –από τον προγραμματισμό. Όρισε να επιτρέπεται η κατασκευή του σχήματος, εφόσον δεν ικανοποιείται η συνθήκη η τιμή της στροφής να είναι ίση με 90 μοίρες.

για παραλληλόγραμμο :α :β :γ επανάλαβε 2 [μ :α δ :γ μ :β δ 180-:γ] τέλος	για παροχιτετγ :α :β :γ επανάλαβε 2[μ :α δ (2*:γ)+1 μ :β δ 180-((2*:γ)+1)] τέλος
για παροχιτετα :α :γ επανάλαβε 2 [μ :α δ :γ μ :α + 20 δ 180-:γ] τέλος	για παροχιτετδ :α :β :γ αν :γ =90 [σταμάτησε] επανάλαβε 2 [μ :α δ:γ μ :β δ 180-:γ] τέλος
για παροχιτετβ :α :γ επανάλαβε 2 [μ :α δ:γ μ 2*:α δ 180-:γ] τέλος	

Πίνακας 4. Παραλληλόγραμμο που δεν μπορεί να γίνει τετράγωνο

ΤΕΤΑΡΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: Ο ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΩΣ ΣΧΕΔΙΑΣΤΗΣ

Σε αυτή την ενότητα συζητάμε την περίπτωση του εκπαιδευτικού. Στη Διδακτική των Μαθηματικών η σύγχρονη προσέγγιση που έχει ως αντικείμενο τον εκπαιδευόμενο ή τον εν ενεργεία εκπαιδευτικό μελετά και αναλύει τις επιμέρους πτυχές του επαγγέλματος του εκπαιδευτικού. Η ατζέντα εδώ είναι να αναδείξει τις πτυχές αυτές, να τις περιγράψει με σαφήνεια και στη συνέχεια να αναπτύξει τρόπους και μεθόδους ενδυνάμωσης του εκπαιδευτικού στην καθεμιά και στον συνδυασμό τους. Οι πτυχές: κοινωνική διαχείριση τάξης μαθητών, αναστοχαζόμενη πρακτική διδακτικής δράσης, ανάπτυξης προσωπικής παιδαγωγικής, έρευνα και κατανόηση της σκέψης των μαθητών, διαχείριση επικοινωνίας με τον σχολικό οργανισμό και τους γονείς, συμμετοχή σε κοινότητες πρακτικής εκπαιδευτικών ειδικότητας, συνδυασμένη γνώση αντικειμένου, διδακτικής του και αξιοποίησης ψηφιακών τεχνολογιών, σχεδιασμός δραστηριοτήτων και πόρων για το μάθημα. Εδώ εστιάζουμε στην τελευταία, δηλαδή στον εκπαιδευτικό ως σχεδιαστή (Laurillard, 2012).

Χαρακτηριστικό των ψηφιακών εκφραστικών εργαλείων, όπως εν προκειμένω η Χελωνόσφαιρα, είναι το ‘χαμηλό πάτωμα-υψηλό ταβάνι’, δηλαδή οι λειτουργικότητες που επιτρέπουν το μαθηματικό μαστόρεμα σε οποιονδήποτε και οποιοδήποτε επίπεδο (Healy & Kynigos, 2010). Έτσι, ο καθηγητής μπορεί να μαστορεύει ο ίδιος για δική του μαθηματική ενασχόληση και επίσης να δημιουργεί ψηφιακά αντικείμενα προκειμένου να τα δώσει στους μαθητές. Αυτό γίνεται προκειμένου να σχεδιάσει μια δραστηριότητα με αυτά, να επικεντρωθεί σε κάποιες έννοιες ή σε ένα είδος δραστηριότητας που επιθυμεί. Εδώ υπεισέρχεται και η έννοια της διαψευσιμότητας (Davis & Hersch, 1980· Kynigos, 2015· Lakatos, 1976), δηλαδή της εμπλοκής του μαθητή με τη μαθηματική δραστηριότητα της δημοσιοποίησης μιας έννοιας ή σκέψης, της αμφισβήτησης και αντίκρουσής της και της αξιοποίησης του σκεπτικού αυτής της διαδικασίας για βαθύτερη κατανόηση της εν λόγω έννοιας. Μιλάμε επομένως για την ενασχόληση του εκπαιδευτικού με τη διδακτική μηχανική, δηλαδή με την επινόηση ατελών ή ενσφάλματων αντικειμένων προκειμένου οι μαθητές να εμπλακούν σε αυτήν ακριβώς τη μαθηματική δραστηριότητα, την αμφισβήτηση, ανάλυση, επαναδόμηση, αξιοποίηση. Τα αντικείμενα αυτά εδώ και χρόνια τα αποκαλούμε «μισοψημένα» (Kynigos, 2007a) και την ενδυνάμωση του εκπαιδευτικού στην τεχνική παραγωγής αντικειμένων για μαθηματική διαψευσιμότητα την αποκαλούμε «μισοψήσιμο» ή αλλιώς ενσφαλμάτωση (Kynigos, 2007b).

Σε αυτήν την τεχνική επιμόρφωσης έχουμε δώσει έμφαση σε προπτυχιακά και μεταπτυχιακά προγράμματα σπουδών εδώ και σχεδόν τριάντα χρόνια. Έχουμε παράλληλα προχωρήσει εδώ και 15 περίπου χρόνια στην εφαρμογή της σε ευρεία κλίμακα, δηλαδή στην Επιμόρφωση Β΄ Επιπέδου του ΥΠαιΘΑ μέσω του Διόφαντου και του ΙΕΠ, καθώς και στην υποδομή που ονομάστηκε *Ψηφιακό Σχολείο*. 35 εξαιρετικοί εκπαιδευτικοί σχεδίασαν και ανέπτυξαν τα 1200 περίπου πρωτότυπα δομήματα στην πλειονότητα των οποίων υπάρχει στοιχείο μισοψησίματος ή ενσφαλμάτωσης, τα 200 περίπου από αυτά χρησιμοποιώντας τη Χελωνόσφαιρα. Αυτή η υποδομή έχει τύχει ευρείας αποδοχής από το εκπαιδευτικό και μαθητικό κοινό και από την Πολιτεία. Τα δομήματα αυτά τα έχουμε αποκαλέσει «μικροπειράματα» (Kynigos, 2020).

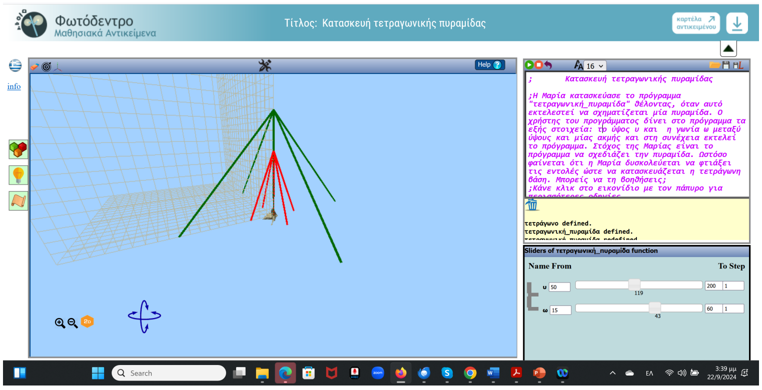
Ακολουθεί ένα παράδειγμα με σκοπό την ανάδειξη της επινοητικότητας των εκπαιδευτικών αλλά και του σκεπτικού ότι είναι εφικτό να ενσωματωθούν στοιχεία μετασχηματισμού του εκπαιδευτικού μοντέλου των μαθηματικών στην εκπαίδευση του σήμερα. Η δραστηριότητα αφορά την πρόκληση σε μαθητές Γυμνασίου (από 1η έως 3η τάξη) να διορθώσουν μια ελλιπή κατασκευή μιας πυραμίδας με εντολές που συμπεριλαμβάνουν περιστροφή του κολιμπρίου στα δύο κάθετα ορθοκανονικά επίπεδα σε αυτό της οθόνης (βλ. Εντολή ‘πδ’ δηλαδή ‘περιστροφή δεξιά’). Η σύνθεση της ομάδας των καθηγητών εδώ, όπως και σε όλες τις περιπτώσεις για το κάθε μικροπείραμα, συμπεριλάμβανε συναδέλφους με εστίαση εμπειρίας στα μαθηματικά, τη ΔτΜ και την πληροφορική-ανάπτυξη. Η διατύπωση του μικροπειράματος από τους καθηγητές εδώ είχε ως εξής: (Φακούδης, Διαμαντίδης, Λάτση, Γριζιώτη, https://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/11070?locale=el).

<u>Κατασκευή τετραγωνικής πυραμίδας</u>

> «Η Μαρία κατασκεύασε το πρόγραμμα "τετραγωνική_πυραμίδα" θέλοντας, όταν αυτό εκτελεστεί, να σχηματίζεται μία πυραμίδα. Ο χρήστης του προγράμματος δίνει στο πρόγραμμα τα εξής στοιχεία: το ύψος υ και η γωνία ω μεταξύ ύψους και μίας ακμής και στη συνέχεια εκτελεί το πρόγραμμα. Στόχος της Μαρίας είναι το πρόγραμμα να σχεδιάζει την πυραμίδα. Ωστόσο φαίνεται ότι η Μαρία δυσκολεύεται να φτιάξει τις εντολές ώστε να κατασκευάζεται η τετράγωνη βάση. Μπορείς να την βοηθήσεις;»

για τετράγωνο :χ επανάλαβε 4 [μπροστά :χ δεξιά 90] τέλος	για τετραγωνική_πυραμίδα :υ :ω μ :υ επανάλαβε 2 [δ 180-:ω μ :υ/(συνημ(:ω)) π :υ/(συνημ(:ω)) δ 2*:ω μ :υ/(συνημ(:ω)) π :υ/(συνημ(:ω)) α :ω δ 180 πδ 90] π :υ τέλος

Πίνακας 5. Κατασκευή της βάσης τετραγωνικής πυραμίδας



Εικόνα 1. Ο ‘μισοψημμένος’ κώδικας για την τετραγωνική πυραμίδα

Στον σχεδιασμό της πυραμίδας φαίνεται και η ενσυναίσθηση και η προσεκτική ενσωμάτωση των εννοιών από την πλευρά των σχεδιαστών. Οι ακμές της ‘πυραμίδας’ κατασκευάζονται από δύο ισοσκελή τρίγωνα με αρχή την κορυφή της. Το καθένα από τα τρίγωνα βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο διά περιστροφής με το άλλο, έτσι ώστε ναι μεν να έχουμε τετραγωνική πυραμίδα, οι έννοιες δε για την κατασκευή της να ενέχουν μόνο μία τέτοια περιστροφή, ενώ όλες οι άλλες εντολές να προκαλούν αλλαγές της κατάστασης του κολιμπριού στο εκάστοτε επίπεδο. Εισάγονται δηλαδή βαθμηδόν, με τον απλούστερο δυνατό τρόπο, έννοιες μηχανικής μαθηματικών στον χώρο. Το κολίμπρι καταλήγει στο κέντρο του μη κατασκευασμένου ακόμα τετραγώνου της βάσης. Στόχος για τους μαθητές είναι η διάκριση των μαθηματικών εννοιών και ιδιοτήτων για τη μέχρι τούδε κατασκευή, έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουν τα αντίστοιχα γραμμικά, γωνιακά και τον συνδυασμό μεταξύ τους στοιχεία για την κατασκευή των πλευρών της τετραγωνικής βάσης, όπως π.χ. η διαγώνιος ενός τετραγώνου. Βλέπουμε εδώ επομένως μια δραστηριότητα ενός εκπαιδευτικού-σχεδιαστή από συναδέλφους εκπαιδευμένους σε αυτό.

Παράλληλα, το Ψηφιακό Σχολείο αποτελεί για τα μαθηματικά στο σύνολό τους μια βάση και υποδομή για οποιονδήποτε καθηγητή ή δάσκαλο μαθηματικών θέλει και έχει επιμορφωθεί να εκλάβει το κάθε μικροπείραμα όχι ως ‘οδηγία’ για μάθημα αλλά ως βάση και πρόταση για δικό του διδακτικό μαστόρεμα (Kynigos, 2016), δηλαδή για να επανασχεδιάσει το οποιοδήποτε μικροπείραμα βάζοντας τις δικές του διδακτικές πινελιές. Έχει επομένως το Ψηφιακό Σχολείο την ιδιότητα της πρότασης για από κοινού εξέλιξη και ανάπτυξη όχι μόνο των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών, καθώς μπορεί ο καθένας με αφορμή ένα μικροπείραμα να αναπτύξει δική του ομάδα μικροπειραμάτων για το μάθημα με τη δική του τάξη.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Είδαμε ένα παράδειγμα δραστηριότητας με στοιχεία μαθηματικής ικανότητας χρησιμοποιώντας ένα εργαλείο έκφρασης και μοντελοποίησης που ενσωματώνει εξαρτημένα τον μαθηματικό φορμαλισμό, τη γραφική παράσταση και τον δυναμικό χειρισμό τιμών μεταβλητής.

Το πρώτο θέμα συζήτησης είναι η σκοπιμότητα και η ανάγκη προβληματισμού Μαθηματικών τε συναδέλφων και Διδακτικών για το τι θέλουμε να δώσουμε στις νέες γενιές ως μαθηματική κουλτούρα που πραγματικά να στοχεύει στην ελευθερία και την ατομική και συλλογική πολιτισμική ενδυνάμωση στην ψηφιακή εποχή. Για να γίνει η συζήτηση αυτή, χρειάζεται επιτέλους να επιτρέψουμε στον εαυτό μας να αμφισβητήσει και να ανεξαρτητοποιηθεί από τα ‘παγιωμένα’ των εκπαιδευτικών συστημάτων της εποχής της βιομηχανικής επανάστασης, δηλαδή της εξετασιοκεντρικής λογικής, της τυποποίησης, της συμμόρφωσης και ‘στοίχισης’, της διαχείρισης, της στρεβλής προσήλωσης στην ακαδημαϊκή αριστεία, της αντίληψης ότι τα μαθηματικά είναι μια αφηρημένη επιστήμη για τους λίγους και με αποκλειστικό στόχο την ταξινόμηση του πληθυσμού κατά τις διαδικασίες παραγωγής. Σήμερα η πληροφορία και η εξήγηση των μαθηματικών και της δομής τους όπως έχουν τυπικά παγιωθεί στο σχολείο είναι προσβάσιμες ανά πάσα στιγμή από τον καθένα. Η επαγγελματική και κοινωνική ζωή είναι ήδη και θα εξακολουθήσει να είναι ευμετάβλητη με πολλούς τρόπους: η ικανότητα ορθολογισμού, μαθηματικής σκέψης και αντίληψης είναι αυτά που θα μετρήσουν πολύ περισσότερο σε έναν πολίτη που θα πρέπει να επανεκπαιδεύεται συνεχώς και να διαχειρίζεται τις μαθηματικές έννοιες σε ένα παγκοσμιοποιημένο κοινωνικό περιβάλλον, με ποικίλα κοινωνικά μέσα, παραπληροφόρηση, κινητικότητα πληθυσμών, κ.ο.κ. (Kynigos, 2024). Με ποια έννοια θέλουμε να ετοιμάσουμε τις νέες γενιές, ώστε η μαθηματική σκέψη να ενδυναμώσει τον πολίτη; Ποιες είναι οι αξίες και οι ηθικές παράμετροι αυτού του προβληματισμού (Skovsmose, 2023); Στο άρθρο αυτό είδαμε διαφορετικές εκφάνσεις και χρήσεις Ευκλείδειων ιδιοτήτων από αυτές που έχουν παγιωθεί στα εκπαιδευτικά συστήματα (π.χ. πού λέει ότι ένα ισοσκελές χρειάζεται μόνο ένα γραμμικό και προσκείμενο γωνιακό στοιχείο για να κατασκευαστεί;). Είδαμε μια μαθηματική κομψότητα να ενισχύεται από τη συγχώνευση μαθηματικών και προγραμματισμού σε πλαίσιο υπολογιστικής σκέψης για την επίλυση ενός μη τετριμμένου προβλήματος για το Λύκειο, πόσο μάλλον για το Γυμνάσιο. Και είδαμε επίσης τη συνέχεια μιας φωτισμένης, κατά τη γνώμη μου, στιγμής όπου καθηγητής μαθηματικών επέλεξε την ώθηση των μαθητών του σε μαθηματική αναζήτηση συγκρατώντας τον εαυτό του από μια ενστικτική ενέργεια ‘διδακτισμού’ που θα έδινε τέλος στην ‘πώρωση’ των μαθητών με τη μαθηματική αναζήτηση. Είδαμε δηλαδή τους μαθητές να θέτουν ένα δικής τους έμπνευσης μαθηματικό πρόβλημα, να επιμένουν στη μαθηματική αναζήτηση λύσης, να επινοεί η κάθε ομάδα διαφορετική λύση χρησιμοποιώντας απρόσμενες και απρόβλεπτες έννοιες, όπως ο ορισμός μονού αριθμού, η εφαρμογή γραμμικής συνάρτησης και μαθηματικής συνθήκης.

Δεύτερο θέμα συζήτησης προκύπτει από την τεράστια ποικιλία λειτουργικοτήτων των ψηφιακών εργαλείων για τη μαθηματική εκπαίδευση. Και τι δεν έχει επινοηθεί: συστήματα διαχείρισης, ασκησιολόγια, βιντεομαθήματα, υποδομές τεχνητής νοημοσύνης για μια καθοδηγούμενη διδακτική που θέτει τον μαθητή σε ρόλο ανταποκρινόμενου σε μια προαποφασισμένη δομή και διαδοχή ασκήσεων. Ό,τι πρέπει για να ενισχυθεί μια πρακτική και αντίληψη διδακτικής που αναδύθηκε λίγο πριν τα μέσα του προηγούμενου αιώνα και από την οποία η Επιστήμη της Εκπαίδευσης και της ΔτΜ προσπαθεί να εξελιχθεί. Άλλη περίπτωση: συστήματα με στόχο να παρακαμφθούν στοιχεία της σκέψης και της έκφρασης που θεωρήθηκαν δύσκολα, όπως ο φορμαλισμός και η παράκαμψή του με τον δυναμικό χειρισμό. Πού είναι το πρόβλημα εδώ; Ότι το δύσκολο θεωρείται στοιχείο προς αποφυγή. Μα η πρόκληση δίνει νόημα και ενέχει πολύ ισχυρά στοιχεία ενδυνάμωσης γνωσιακής, ψυχολογικής και κοινωνικής. Γιατί να μην είναι ο στόχος η χρήση του καλύτερα θεμελιωμένου εκφραστικού μέσου, της μαθηματικής γλώσσας, δηλαδή και του φορμαλισμού που αποτελεί τη γραπτή της έκφραση; Γιατί να μην είναι ο στόχος του επιστήμονα της εκπαίδευσης να επινοήσει καταστάσεις όπου να νοηματοδοτείται η μαθηματική σκέψη με τον φορμαλισμό;

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Στην 30ετή ερευνητική και αναπτυξιακή πορεία έχουν συμβάλει πολλοί και πολλές στο πλαίσιο ανταγωνιστικών έργων με Ευρωπαϊκή και εγχώρια χρηματοδότηση. Για λόγους χώρου και μόνο δεν είναι δυνατό να γίνει λεπτομερής αναφορά εδώ. Τα στοιχεία είναι διαθέσιμα στη σελίδα του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (http://etl.eds.uoa.gr). Ειδική μνεία οφείλω σε δυο μακροχρόνια έργα του ΥπαιΘΑ μέσω του ΕΑΙΤΥ-Διόφαντου.

Το πρώτο έχει αντικείμενο την Ευρεία Επιμόρφωση Β Επιπέδου (από το 2005) εν ενεργεία εκπαιδευτικών, όπου είμαι μέλος του Επιστημονικού Συμβουλίου, υπεύθυνος για τα μαθηματικά Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, https://e-pimorfosi.cti.gr/ και το δεύτερο την ανάπτυξη και διάχυση της ψηφιακής υποδομής με την ονομασία 'Ψηφιακό Σχολείο' (2010-18), όπου είμαι μέλος της επιστημονικής επιτροπής, υπεύθυνος για τα μαθηματικά https://dschool.edu.gr/ .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abelson, H. & diSessa, A. (1981). *Turtle geometry: The computer as a medium for exploring mathematics.* MIT Press.

Armoni, M., Meerbaum-Salant, O., & Ben-Ari, M. (2015). From Scratch to "Real" Programming. *ACM Transactions on Computing Education*, *14*(4), 1–15. https://doi.org/10.1145/2677087

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd edition) (pp. 746–783). Routledge/Taylor & Francis Group.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of process: The case of the dance of agency. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 3–16). CRDG, College of Education, University of Hawai

Boaler, J., & Greeno, J. G. (2000). Identity, Agency, and Knowing in Mathematics World. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 171–186). Ablex Publishing.

Bolin, T. D. (2017). Struggling for democracy: Paulo Freire and transforming society through education. *Policy Futures in Education*, *15*(6), 744–766. https://doi.org/10.1177/1478210317721311

Bray, A., & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research: A systematic review of recent trends. *Computers & Education, 114*, 255–273. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. In S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education,* (pp. 173–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Davis, P.J., & Hersh, R. (1980). *The Mathematics Experience*. Penguin.

Dubinsky, E. (2000). Meaning and Formalism in Mathematics. *International Journal of Computers for Mathmatical Learning, 5*, 211–240. https://doi.org/10.1023/A:1009806206292

Ferrara, F., & Ferrari, G. (2017). Agency and assemblage in pattern generalisation: a materialist approach to learning. *Educational Studies in Mathematics, 94,* 21–36. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9708-5

Geraniou, E., & Jankvist, U. T. (2019). Towards a definition of "mathematical digital competency." *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 29–45. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modelling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolising, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7–24). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_2

Grizioti, M., Kynigos, C., & Nikolaou, M. S. (2024). Enhancing Computational Thinking with 3D printing: Imagining, designing, and printing 3D objects to solve real-world problems. In *Proceedings of the 23rd Annual ACM Interaction Design and Children Conference (IDC '24)* (pp. 133–141). ACM. https://doi.org/10.1145/3628516.3655810

Grover, S., & Pea, R. (2018). Computational Thinking: A Competency Whose Time Has Come. In S. Sentance, E. Barendsen, & C. Schulte (Eds.), *Computer Science Education: Perspectives on Teaching and Learning in School* (pp. 20-38). Bloomsbury Publishing.

Harvey, B. (1997). *Computer Science Logo Style.* MIT Press.

Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: Design and construction in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 42*, 63–76. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0193-5

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?. In A. J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, F.K.S. Leung, (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323–349). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_11

Illich, I. (1971). *Deschooling society*. Marion Boyars.

Karavakou, M., Kynigos, C., & Sinclair, N. (2023) Bridging disciplinary aesthetics: when Mathematics meets Art through Educational Technology. *Frontiers in Education*, *8*, 1−17. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1284718

Κεΐσογλου, Σ., & Κυνηγός, Χ. (2018). Δημιουργικότητα Στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Στο Φ. Καλαβάσης (Επ.), *Σκέψεις για τα Μαθηματικά. 100 Χρόνια από την ίδρυση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας* (σελ. 73–86). ΕΜΕ.

Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Prentice Hall.

Kynigos, C. (2007a). Half-baked Logo microworlds as boundary objects in integrated design, *Informatics in Education*, *6*(*2*), 1–24.

Kynigos, C. (2007b). Half-baked Microworlds in use in Challenging Teacher Educators' Knowing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(2), 87−111.

Kynigos, C. (2015). Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design? In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 417–438). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6

Kynigos, C. (2016). Constructionist mathematics with institutionalized infrastructures: the case of Dimitris and his students. In E. Faggiano, F. Ferrara, A. Montone (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education: Perspectives in the Digital Era* (pp. 197−214). Springer International Publishing.

Kynigos, C. (2020). Half - baked Constructionism: The Challenge of Infusing Constructionism in Education in Greece. In N. Holbert, M. Berland, and Y. Kafai (Eds.), *Designing Constructionist Futures: The Art, Theory, and Practice of Learning Designs* (pp. 61−72), MIT Press.

Kynigos, C. (2024). Embedding Mathematics in Socio-Scientific Games: The Mathematical in Grappling with Wicked Problems, *Education Sciences, 14*, 630. https://doi.org/10.3390/educsci14060630

Kynigos, C., & Diamantidis, D. (2021). Creativity in Engineering Mathematical Models Through Programming. *The International Journal of Mathematics Education ZDM, 54,* 149–162. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01314-6

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. *Informatics in Education, 17*(2), 321–340, Vilnius University,. https://doi.org/10.15388/infedu.2018.17

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 year old's Meanings Around Intrinsic Curves with a Medium for Symbolic Expression and Dynamic Manipulation. In N. Paterman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th PME International Conference* (Vol. 3, pp. 165−172). IGPME

Kynigos, C., Koutlis, M., & Hadzilakos, Th. (1997). Mathematics with Component-Oriented Exploratory Software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*, 229−250.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275−304). Sense Publishers.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge University Press.

Latsi, M., & Kynigos, C. (2021). Mathematical Assemblages Around Dynamic Aspects of Angle in Digital and Physical Space. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10225-7

Laurillard, D. (2012). *Teaching as a design science: Building pedagogical patterns for learning and technology*. Routledge.

Mariotti, M. A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. In C. Hoyles, J-B. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of 17th ICMI Study conference, Technology Revisited*. Hanoi University of Technology.

Morgan, C., & Kynigos, C. (2014). Digital artefacts as representations: forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 357–379.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competences revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102,* 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers.* Kluwer academic Publishers. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics,* *33*(2), 203–233. https://doi.org/10.1023/A:1002943821419

Papert, S. (1972). Teaching Children to be Mathematicians Versus Teaching About Mathematics. *Journal of Mathematics in Science and Technology, 31,* 249–262.

Papert, S. (1975). Teaching Children Thinking. *Journal of Structural Learning, 4*, 219–229.

Papert, S. (1980). *Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas.* Basic Books Inc..

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism. In S. Papert & I. Harel (Eds.), *Constructionism*. Ablex Publishing Corporation.

Papert, S., Watt, D., diSessa, A., & Weir , S. (1979). A.I. Memo No. 545 LOGO Memo No. 53 *Final Report Of The Brookline Logo Project* Part Ii: Project Summary and Des Analysis https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED196423.pdf

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child.* Routledge.

Riling, M. (2020). Recognizing mathematics students as creative: Mathematical creativity as community-based and possibility-expanding, *Journal of Humanistic Mathematics*, *10*(2), 6–39. https://doi.org/10.5642/jhummath.202002.04

Robinson, K. Sir (2016). *Do schools kill creativity?*. Available at: https://www.ted.com/talks/sir_ken_robinson_do_schools_kill_creativity?subtitle=en

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan Library Reference.

Skovsmose, O., (2023). *Critical Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26242-5

Sinclair, K., & Moon, D. (1991). The philosophy of LISP. *Communications of the ACM*, *34*(9), 40–47.

Von Glaserfeld, E. (1989). Constructivism in education. In T. Huseln & T. N. Postlewaite (Eds.), *The international encyclopaedia of education: Research and studies* (Sup. Vol.). Pergamon Press.

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(1), 127–147. https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35.

*Ο **Χρόνης Κυνηγός** είναι Καθηγητής στη Φιλοσοφική Σχολή του ΕΚΠΑ από το 2008, Διευθυντής του νεοσύστατου Ερευνητκού Ινστιτούτου 'Εκπαίδευση στις Θετικές Επιστήμες', Διευθυντής του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας του Παιδαγωγικού Τμήματος Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και μέλος της επιτροπής ψηφιακής διακυβέρνησης του ΕΚΠΑ. Έχει πτυχίο Μαθηματικού από το ΕΚΠΑ, μεταπτυχιακές σπουδές και διδακτορικό στη ΔτΜ με ψηφιακές τεχνολογίες από το University College London. Είναι ο πρώτος Έλληνας ερευνητής, από τους πρώτους στην Ευρώπη και διεθνώς, που μελέτησε την εκπαιδευτική πράξη με εργαλεία ψηφιακής τεχνολογίας. Επί 30 και πλέον χρόνια επινοεί καινοτόμες εκπαιδευτικές μεθόδους και πόρους ερευνώντας τις προοπτικές του εκπαιδευτικού μετασχηματισμού από το σχολείο της ακαδημαϊκής αριστείας στο σχολείο της πολιτειότητας. Είναι υπεύθυνος σχεδιασμού και ανοικτής διάθεσης τριών πρωτότυπων τέτοιων εργαλείων ανοικτού κώδικα και απρόσκοπτης πρόσβασης στο http://etl.eds.uoa.gr. Έχει διατελέσει επισκέπτης καθηγητής στα πανεπιστήμια University of Bergen της Νορβηγίας και Linnaeus University της Σουηδίας. Είναι μέλος του Επιστημονικού Συμβουλίου για την Ευρεία Επιμόρφωση του ΥΠαιΘΑ-Διόφαντου στην παιδαγωγική αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών και της Επιστημονικής Επιτροπής του έργου Υποδομής 'Ψηφιακό Σχολείο'. Υπήρξε Ερευνητικός Υπεύθυνος 16 ανταγωνιστικών έργων έρευνας και καινοτομίας συμπράξεων ακαδημαικών φορέων της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Είναι εθνικός εκπρόσωπος στο International Commission on Mathematical Instruction και προήδρευσε στην οργνάνωση τεσσάρων διεθνών και δύο πανελληνίων συνεδρίων. Με πάνω από 250 δημοσιεύσεις κυρίως σε διεθνή περιοδικά, βιβλία και συνέδρια αλλά και στην Ελλάδα, είναι συγγραφέας του βιβλίου 'Το Μάθημα της Διερεύνησης', ωδή στην επικοδομητική μάθηση με ψηφιακά εργαλεία.*

Computational thinking in the service of cultivating mathematical competence: The case of tinkering with and animating 3D linear models

Chronis Kynigos
Educational Technology Lab, Dept of Educational Studies, School of Philosophy, NKUA
kynigos@eds.uoa.gr

Abstract

The article explores which mathematics are suitable in our digital age, so that many can appreciate the cultural empowerment enhanced by rationality and mathematical thinking. It suggests activities that can inspire new generations to find joy in the intellectual challenge of mathematical thought. It analyses the concept of mathematical competence and computational thinking within the context of a desired educational transformation. It describes four examples of mathematical modelling using a specific digital expressive tool, which constitutes an original evolution from the fundamental Logo of the MIT Media Lab for Mathematics Education.

Keywords: Computational thinking, mathematical meaning-making, mathematical ability, mathematical modeling, programming mathematics, MaLT2

Chronis Kynigos is Prof. at the National and Kapodistrian University of Athens, director of the Educational Technology Lab therein and visiting professor at Linnaeus University in Sweeden. For 30 years he has been engaged in design research on constructionist pedagogy in primary and secondary schools and in informal settings adopting a transformative approach to mathematics education. The interventions he designed and implemented include original constructionist media now used widely in Greece and beyond (http://etl.eds.uoa.gr), pedagogical scenarios and tasks for student individual and discursive constructionist meaning-making and TPD in pre and in-service settings. He is known for the didactical engineering notion of 'half-baked (faulty) artifacts' aiming to infuse a fallible mathematical approach to learning, thinking through and doing mathematics. He has been responsible for mathematics in the Greek Ministry of Education's wide-scale TPD and digital infrastructure initiatives for over 15 years. He is the national representative for ICMI and one of the founders of the Greek Association of Researchers in Mathematics Education (GARME).