ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

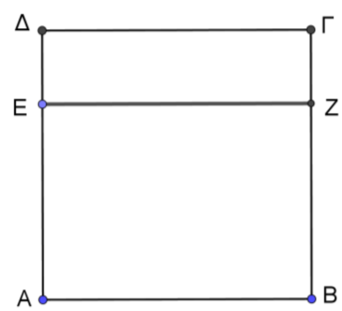
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

42η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Δίνεται ότι οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι και ότι το σύστημα
$$mx + 3y = m,$$
$$2x + ny = n,$$
με αγνώστους $x, y \in \mathbb{R}$ δεν έχει λύσεις. Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (m, n).

Πρόβλημα 2
Το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος υποδιαιρείται με το τμήμα ΕΖ σε δύο ορθογώνια ΑΒΖΕ και ΕΖΓΔ. Δίνεται ότι $\mathrm{AE} > \mathrm{E\Delta}$. Τα μήκη όλων των πλευρών των δύο ορθογωνίων είναι θετικοί ακέραιοι. Αν η διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων είναι 24, να προσδιορίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β που ικανοποιούν την ισότητα $\alpha + \beta = 1$, ισχύει ότι:
$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{5}{4}.$$

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στη διαγώνιο του ΑΓ τέτοιο, ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 90^\circ$.
Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ και Ν είναι το μέσο του τμήματος ΑΕ, να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M} = 90^\circ$.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

42η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1
Δίνεται ότι η εξίσωση

$$x^4+5x^3+mx^2+5nx+4=0, \text{ όπου } m,n \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

έχει δύο απλές πραγματικές λύσεις με άθροισμα -5. Να προσδιορίσετε τις τιμές των m,n και όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Πρόβλημα 2
Έστω ΑΒΓ οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο και έστω Δ ένα σημείο της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ στην ευθεία ΑΔ τέτοια, ώστε ΕΒ ⊥ ΑΒ και ΖΓ ⊥ ΑΓ, και τα σημεία Η και Θ στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΕΗ ∥ ΑΓ και ΖΘ ∥ ΑΒ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΗΕ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ (Μ ≠ Β), και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΘΖ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν (Ν ≠ Γ). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΜΗ, ΝΘ και ΑΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 3
Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x+2y)+f(2x-y)=5f(x)+5f(y),$$

για κάθε $x,y \in \mathbb{Q}$.

Πρόβλημα 4
Να αποδείξετε ότι, για κάθε ακέραιο y, ο αριθμός y^2+108 δεν είναι τέλειος κύβος ακεραίου.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία