ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(Α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ ισχύει:

$$(\kappa+\lambda+\mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa).$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Β) Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha(x+y+z)=\beta(xy+yz+zx)=xyz,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 3\beta^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του ω. Με κέντρο το σημείο Α γράφουμε κύκλο γ που τέμνει το τόξο ΑΒ του κύκλου ω, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Δ και το τόξο ΑΓ, που δεν περιέχει το Β, στο σημείο Ε. Υποθέτουμε ότι το σημείο τομής Κ των ευθειών ΒΕ και ΓΔ ανήκει στον κύκλο γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους δεκαέξι θετικούς διαιρέτες του 2024 στα κελιά του διπλανού πίνακα έτσι ώστε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) τέτοιες ώστε

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=6xyz.$$

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1
Αν οι a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε δύο από αυτούς να έχουν διαφορά μεγαλύτερη του $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός x, ώστε

$$x^2 - 4(a+b+c)x + 12(ab+bc+ca) < 0.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ_1 με κέντρο το σημείο O. Θεωρούμε το κύκλο Γ_2 που έχει κέντρο σημείο D, το οποίο ανήκει στον κύκλο Γ_1, και εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F. Οι κύκλοι Γ_1 και Γ_2 τέμνονται στα σημεία K και G (το σημείο K βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου BFE). Αν η ευθεία KG τέμνει τις ευθείες FE και CD στα σημεία M και N, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο BCNM είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3
Έστω $n \geq 2$ ένας ακέραιος. Θεωρούμε δύο πεπερασμένα υποσύνολα A, B των ακεραίων αριθμών, ώστε το σύνολο A να έχει το πολύ n στοιχεία και έστω Γ ένα υποσύνολο του συνόλου $\{(\alpha, \beta) : a \in A, \beta \in B\}$. Ο Αχιλλέας γράφει σε ένα πίνακα όλες τις δυνατές διαφορές $\alpha - \beta$, με $(a, \beta) \in \Gamma$. Έστω d το πλήθος όλων αυτών των διαφορών. Στη συνέχεια ο Αχιλλέας καταγράφει σε ένα άλλο πίνακα όλες τις τριάδες (κ, λ, μ) με $(\kappa, \lambda) \in \Gamma, (\kappa, \mu) \in \Gamma$. Έστω p το πλήθος όλων αυτών των τριάδων. Να αποδείξετε ότι: $n \cdot p \geq d^2$.

Πρόβλημα 4
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$, τέτοιος ώστε το πλήθος όλων των ζευγών (a, b) θετικών ακέραιων αριθμών με

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$

να είναι μεγαλύτερο του 2024.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία